# Unidade 3

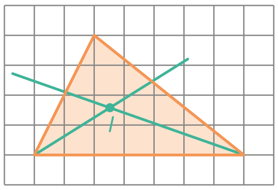
## Página 44

**1.1.** Os ângulos $PAV$ e $VBP$ são ambos retos, pois $A$ e $B$ são os pés das perpendiculares traçadas a partir de $P$ sobre cada um dos lados do ângulo. $A\hat{V}P = P\hat{V}B$, porque $\dot{V}P$ é a bissetriz do ângulo $AVB$. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, concluiu-se que as amplitudes dos ângulos $VPA$ e $BPV$ também são iguais. Como $[VP]$ é um lado comum aos dois triângulos, pelo critério ALA de congruência de triângulos, conclui-se que estes são congruentes.

**1.2.** Como o triângulo $[PAV]$ é retângulo em $A$, então, pelo Teorema de Pitágoras: $\overline{PA}^2 = 10^2 - 6^2 \Leftrightarrow \overline{PA}^2 = 64$

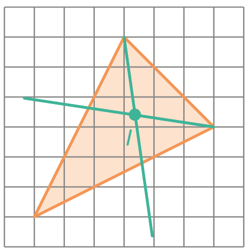
Logo, $\overline{PA} = 8$. Como os triângulos $[PAV]$ e $[PBV]$ são iguais, então: $\overline{PB} = \overline{PA} = 8$

**2.1.**




Para dois ângulos internos do triângulo, traçam-se as respetivas bissetrizes.

**2.2.**




Para dois ângulos internos do triângulo, traçam-se as respetivas bissetrizes.

## Página 45

**3.** Como $[ABC]$ é isósceles: $B\hat{C}A = C\hat{A}B = \dfrac{180° - 135°}{2} = 22{,}5°$

**Triângulo $[ABI]$:** $A\hat{B}I = 135° : 2 = 67{,}5°$ ; $I\hat{A}B = 22{,}5° : 2 = 11{,}25°$ ;

$B\hat{I}A = 180° - 67{,}5° - 11{,}25° = 101{,}25°$

**Triângulo $[BCI]$:** $I\hat{B}C = 135° : 2 = 67{,}5°$ ; $B\hat{C}I = 22{,}5° : 2 = 11{,}25°$ ;

$C\hat{I}B = 180° - 67{,}5° - 11{,}25° = 101{,}25°$

**Triângulo $[AIC]$:** $C\hat{A}I = I\hat{C}A = 11{,}25°$ ; $A\hat{I}C = 180° - 2 \times 11{,}25° = 157{,}5°$

**4.** $\overline{MC}^2 = 15^2 - 12^2 \Leftrightarrow \overline{MC}^2 = 81$, logo $\overline{MC} = 9$.

Seja $r$ o raio da circunferência inscrita.

$A_{[ABC]} = \dfrac{24 \times 9}{2} = 108 \Leftrightarrow \dfrac{\overline{AB} \times r}{2} + \dfrac{\overline{BC} \times r}{2} + \dfrac{\overline{AC} \times r}{2} = 108 \Leftrightarrow \dfrac{24 \times r}{2} + \dfrac{15 \times r}{2} + \dfrac{15 \times r}{2} = 108 \Leftrightarrow r = 4$

$A_{\text{círculo}} = 4^2 \times \pi = 16\pi$, ou seja, $16\pi$ u.a.

**5.** $\overline{BC}^2 = 13^2 - 5^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 144$, pelo que $\overline{BC} = 12$.

$A_{[ABC]} = \dfrac{12 \times 5}{2} = 30$

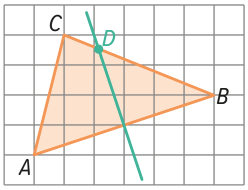
Seja $r$ o raio da circunferência inscrita.

$\dfrac{\overline{BC} \times r}{2} + \dfrac{\overline{AC} \times r}{2} + \dfrac{\overline{AB} \times r}{2} = 30 \Leftrightarrow \dfrac{12 \times r}{2} + \dfrac{13 \times r}{2} + \dfrac{5 \times r}{2} = \dfrac{60}{2} \Leftrightarrow r = 2$

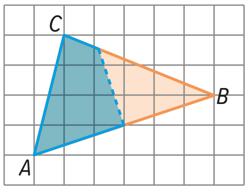
Assim, $\overline{IC}^2 = 2^2 + 10^2$. Logo, $\overline{IC} = \sqrt{104} \approx 10{,}20$, ou seja, $10{,}20$ cm.

## Página 46

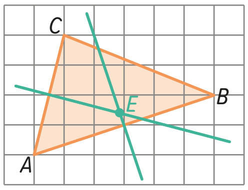
**1.1.**




**1.2.**

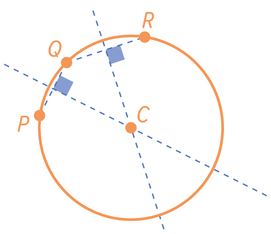



**1.3.**



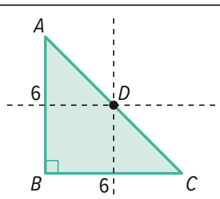

**2.** Basta determinar, por exemplo, as mediatrizes de $[PQ]$ e de $[QR]$. O ponto de interseção das retas obtidas (ponto $C$) é o centro da circunferência pretendida.

Por exemplo:



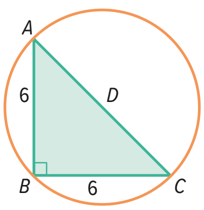

## Página 47

**3.1.**




Verifica-se que o circuncentro coincide com o ponto médio da hipotenusa.

**3.2.**




$\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 \iff \overline{AC}^2 = 72$

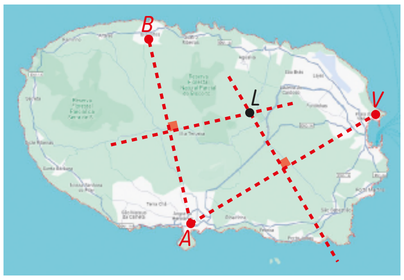
$\overline{AC} = \sqrt{72} \iff \overline{AC} = 6\sqrt{2}$.

$P = 6\sqrt{2}\,\pi$

O comprimento é $6\sqrt{2}\,\pi$ cm .

**4.1.** Traçar os lados do triângulo $[AVB]$ e as mediatrizes de dois dos seus lados.
O ponto de interseção das mediatrizes é o circuncentro do triângulo $[AVB]$ e é equidistante dos pontos $A$, $V$ e $B$.

**4.2.**

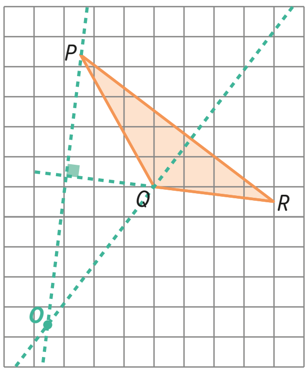



**4.3.** Como o circuncentro fica no interior do triângulo, este é acutângulo.

**Página 48**

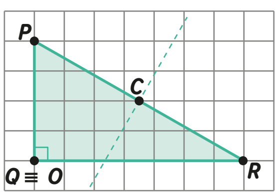
**1.1.** **a)** Afirmação falsa. Como o triângulo $[PQR]$ é obtusângulo, o ortocentro fica no seu exterior.
**b)** Afirmação falsa. O incentro fica sempre no interior do triângulo.
**c)** Afirmação verdadeira
**d)** Afirmação falsa. O circuncentro de um triângulo é equidistante dos vértices do triângulo.

**1.2.**




**Página 49**

**2.** O ortocentro do triângulo retângulo coincide com o vértice do ângulo reto e o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa.




**3.1.** Como o triângulo é retângulo, o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto do triângulo, ou seja, com o vértice $A$ e o circuncentro coincide com o ponto médio da hipotenusa.

**3.2.** $\overline{MR}^2 = 10^2 + 10^2 \Leftrightarrow \overline{MR}^2 = 200$, então: $\overline{MR} = \sqrt{200} \Leftrightarrow \overline{MR} = 10\sqrt{2}$

Logo, $\overline{OC} = 5\sqrt{2}$ e $P = 2 \times 5\sqrt{2} \times \pi = 10\sqrt{2}\pi$.

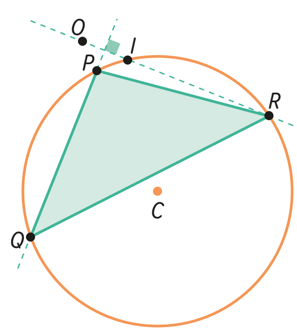
O comprimento da circunferência circunscrita ao triângulo é $10\sqrt{2}\pi$ cm.

**4.1.** Como o ortocentro é exterior à circunferência circunscrita ao triângulo, o triângulo $[PQR]$ é obtusângulo.

**4.2.** Traça-se a reta que contém a altura relativamente ao vértice $R$ e que passa por $O$ e obtém-se o ponto onde esta interseta a circunferência circunscrita, ponto $I$.

Sabe-se que a reta suporte do lado oposto a $R$ é a mediatriz do segmento de reta $[OI]$.

Os pontos de interseção da mediatriz de $[OI]$ com a circunferência circunscrita são os outros vértices do triângulo.



**Página 50**

**1.1.** $\overline{AC}^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 144$ ; então, $\overline{AC} = \sqrt{144} = 12$ .

Como $D$ é o ponto médio de $[AC]$ , $\overline{AD} = \overline{DC} = 12 : 2 = 6$ .

Como $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{AD} = 6$ cm , o triângulo $[ABD]$ é equilátero.

Sendo $\overline{BD} = \overline{DC} = 6$ cm , o triângulo $[BDC]$ é isósceles.

**1.2.** Como o triângulo $[ABD]$ é equilátero, $C\hat{A}B = 60°$ .

Então: $B\hat{C}A = 180° - 90° - 60° = 30°$ ; $C\hat{D}B = 180° - 60° = 120°$ e $D\hat{B}C = 90° - 60° = 30°$

**1.3.** $A_{[ABD]} = A_{[BDC]} = \dfrac{A_{[ABC]}}{2} = \dfrac{\frac{6 \times 6\sqrt{3}}{2}}{2} = 9\sqrt{3}$ , ou seja, $9\sqrt{3}$ cm$^2$

**2.1.** $\overline{DE} = \frac{1}{3} \times \overline{DB} = \frac{1}{3} \times 8 = \frac{8}{3}$ , ou seja, $\frac{8}{3}$ cm

**2.2.** $\overline{BF} = \frac{9}{2} = 4,5$ ; $\overline{EB} = \frac{2}{3} \times \overline{DB} = \frac{16}{3}$ ; $\overline{EF} = \frac{1}{2} \times \overline{AE} = 2,45$ ;

$P_{[BEF]} = 4,5 + \frac{16}{3} + 2,45 \approx 12,3$ , ou seja, 12,3 cm .

**Página 51**

**3.1.** **a)** $A_{[ABL]} = \frac{1}{2} \times A_{[ABC]} = \frac{1}{2} \times 42 = 21$ , ou seja, 21 cm$^2$

**b)** $A_{[LNC]} = \frac{1}{6} \times A_{[ABC]} = \frac{1}{6} \times 42 = 7$ , ou seja, 7 cm$^2$

**c)** $A_{[AMNL]} = 2 \times A_{[LNC]} = 2 \times 7 = 14$ , ou seja, 14 cm$^2$

**3.2.** $\overline{LA} = 6$ ; $A_{[ABL]} = 21 \Leftrightarrow \dfrac{6 \times \overline{LB}}{2} = 21 \Leftrightarrow \overline{LB} = 7$ ; $\overline{NB} = \frac{2}{3} \times \overline{LB} = \frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{3}$ ;

$\overline{AB}^2 = 6^2 + 7^2$ , pelo que $\overline{AB} = \sqrt{85}$ ; $\overline{MB} = \dfrac{\sqrt{85}}{2}$; $\overline{MN} = \frac{1}{3} \times \overline{CM} = \frac{1}{3} \times 9,6 = 3,2$ ;

$P_{[NMB]} = \frac{14}{3} + \dfrac{\sqrt{85}}{2} + 3,2 \approx 12,48$ , ou seja, 12,48 cm

**4.1.** $[PM]$ , $[LR]$ e $[QR]$ são medianas do triângulo e o ponto $B$ é o baricentro do triângulo.

**4.2.** Como o triângulo é retângulo, o ortocentro é o ponto $Q$ e o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa, ou seja, o ponto $N$ .

**4.3.** **a)** $\overline{BM} = \frac{1}{2} \times \overline{PB} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\sqrt{10} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$ , ou seja, $\frac{2}{3}\sqrt{10}$ cm

**b)** $\overline{PM} = \overline{PB} + \overline{BM} = \frac{4}{3}\sqrt{10} + \frac{2}{3}\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$ ; $\overline{PQ}^2 = (2\sqrt{10})^2 - 2^2$ , pelo que $\overline{PQ} = 6$ ;

$A_{[PQM]} = \dfrac{6 \times 2}{2} = 6$ , pelo que $A_{[LQMB]} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ , ou seja, 4 cm$^2$

**c)** $A_{[PQR]} = 2 \times A_{[PQM]} = 2 \times 6 = 12$ , ou seja, 12 cm$^2$

**d)** $\overline{LQ} = 3$ ; $\overline{LR}^2 = 3^2 + 4^2$ , então $\overline{LR} = 5$ ; $\overline{LB} = \frac{1}{3} \times \overline{LR} = \frac{5}{3}$ .

Como $N$ é o circuncentro do triângulo, $\overline{NQ} = \overline{NR}$ . Logo, $\overline{PR}^2 = 6^2 + 4^2$ , ou seja, $\overline{PR} = 2\sqrt{13}$ .

$\overline{NQ} = \dfrac{\overline{PR}}{2} = \sqrt{13}$ , $\overline{BQ} = \frac{2}{3} \times \overline{NQ} = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}$;

$P_{[LQB]} = 3 + \frac{5}{3} + \dfrac{2\sqrt{13}}{3} = \dfrac{14 + 2\sqrt{13}}{3}$ , ou seja, $\dfrac{14 + 2\sqrt{13}}{3}$ cm

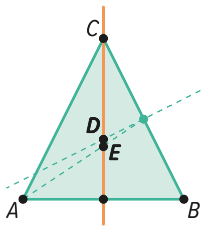
**Página 52**

**1.1.** $P$ : ortocentro; $Q$ : incentro; $R$ : baricentro; $S$ : circuncentro

**1.2.** Maria: triângulo III; João: triângulo I; Miguel: triângulo II

**Página 53**

**2.1.** Por exemplo:




**2.2.** Sendo, por exemplo, $\overline{AC}=\overline{BC}$, a bissetriz do ângulo $ACB$ é perpendicular à reta $AB$. Assim, o incentro também pertence à mediatriz do lado $[AB]$, à mediana que parte de $C$ e à altura relativamente à base $[AB]$.

**2.3.** Sim, num triângulo equilátero, pois os quatro pontos notáveis são coincidentes, não permitindo definir a reta de Euler (indeterminada).

**3.1.** $P$: incentro; $Q$: baricentro; $R$: circuncentro

**3.2.** Não. Como o triângulo é obtusângulo, o ortocentro pertence ao exterior do triângulo.

**3.3.** Como a distância do ortocentro (ponto notável não representado, $S$) ao baricentro $(Q)$ é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro $(R)$, tem-se: $\overline{QS}=2\times\overline{RQ}=2\times 3{,}69=7{,}38$, ou seja, $7{,}38$ cm.

**4.1.** Como $[MR]$ é uma mediana do triângulo: $\overline{BR}=\frac{2}{3}\times\overline{MR} \Leftrightarrow \overline{MR}=\frac{3}{2}\times 2{,}5 \Leftrightarrow \overline{MR}=3{,}75$, ou seja, $\overline{MR}=3{,}75$ cm

**4.2.** Como o triângulo é retângulo, o ortocentro coincide com o vértice $Q$. O raio da circunferência corresponde à distância de $C$ a $Q$, ou seja, à distância do circuncentro ao ortocentro.

Assim, $\overline{CB}=\frac{\overline{BQ}}{2}=\frac{1{,}8}{2}=0{,}9$; $\overline{CQ}=3\times\overline{CB}=3\times 0{,}9=2{,}7$, ou seja, $2{,}7$ cm.

**Página 54**

**1.1.** Pontos médios dos lados do triângulo

**1.2.** Pés das alturas do triângulo

**1.3.** Pontos médios dos segmentos de reta cujos extremos são o ortocentro e cada um dos vértices do triângulo

**2.1.** A circunferência $c_1$ não corresponde à circunferência dos nove pontos, pois não passa no ponto $M$, ponto médio de um dos lados do triângulo.

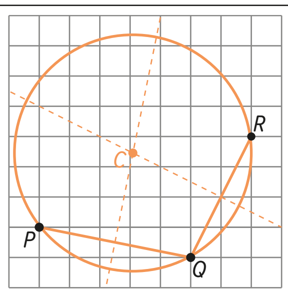
A circunferência $c_2$ não corresponde à circunferência dos nove pontos, pois não contém o ponto $D$, o pé de uma das alturas do triângulo.

$c_3$ é a circunferência dos nove pontos.

**2.2.** Seja $E$ o baricentro do triângulo: $\overline{EO}=\frac{2}{3}\times\overline{FO}=\frac{2}{3}\times 2{,}5\approx 1{,}67$, ou seja, $1{,}67$ cm.

**Página 55**

**3.1.**




**3.2.** **a)** Circunferência circunscrita
**b)** Circunferência dos nove pontos

**4.1.** Circunferência dos nove pontos
Como o triângulo é isósceles, o ortocentro, baricentro e circuncentro pertencem à reta $CE$, mediatriz de $[AB]$.

Pelo Teorema de Pitágoras: $\overline{IB}^2=\overline{IE}^2+\overline{EB}^2$, ou seja, $\overline{IB}^2=0{,}9^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2$, logo, $\overline{IB}=4{,}1$ cm.

Como $H$ é o centro da circunferência dos nove pontos: $\overline{HF}=\frac{1}{2}\times\overline{IB}=\frac{1}{2}\times 4{,}1=2{,}05$ .

Assim: $P=2\times 2{,}05\pi=4{,}1\pi$ , ou seja, $4{,}1\pi$ cm .

**4.2.** O ponto $I$ é o circuncentro, pois é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

$\overline{GI}=2\times\overline{GH}=2\times 1{,}15=2{,}3$ .

Seja $J$ o baricentro: $\overline{JG}=\frac{2}{3}\times\overline{GI}=\frac{2}{3}\times 2{,}3\approx 1{,}5$ .

A distância é $1{,}5$ cm .

**5.** Como o triângulo é retângulo, o ortocentro coincide com $R$ , vértice do ângulo reto, e o circuncentro $C$ é o ponto médio da hipotenusa.

Seja $r$ a medida, em cm , da circunferência dos nove pontos.

$\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{RB}=\frac{1}{2}\times 2{,}4=1{,}2$ , logo $\overline{RC}=3\times 1{,}2=3{,}6$ .

Assim, $r=\frac{1}{2}\overline{RC}=\frac{1}{2}\times 3{,}6=1{,}8$ , ou seja, $1{,}8$ cm .

## Unidade 4

**Página 56**

**1.1.** $g(4)=192$ . Significa que quatro *scones* custam 1,92 € .

**1.2.** $g(6)=288$

**1.3.** O preço a pagar vai aumentando à medida que a quantidade de *scones* a comprar aumenta.

**1.4.** $p=48a$

**2.** Opção **(B)**

**Página 57**

**3.1.** $g(-3)=2\times(-3)+(-2)=-8$ ; $g\left(-\frac{1}{3}\right)=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+(-2)=-\frac{8}{3}$ ;

$g(0)=2\times 0+(-2)=-2$ ; $g\left(\frac{3}{2}\right)=2\times\left(\frac{3}{2}\right)+(-2)=1$

| $x$ | $-3$ | $-\frac{1}{3}$ | $0$ | $\frac{3}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-8$ | $-\frac{8}{3}$ | $-2$ | $1$ |

**3.2.** $g(x)=2x-2$

**4.1.** A correspondência é uma função, porque a cada mês de um ano não bissexto corresponde um e um só número de dias.

**4.2.** $d(2)=28$

Significa que o mês de fevereiro, num ano não bissexto, tem 28 dias.

**4.3.** $x\in\{4\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,\ 11\}$

Significa que os meses abril, junho, setembro e novembro têm 30 dias.

**5.1.** A afirmação é verdadeira. Observando-se o gráfico, verifica-se que $A(4)$ é o máximo da concentração de antibiótico.

**5.2.** A afirmação é falsa. A eliminação do antibiótico começa após quatro horas de ter sido administrado.

**5.3.** A afirmação é falsa. O tempo de crescimento foi de quatro horas e o tempo de diminuição foi superior a seis horas.

**Página 58**

**1.1.** $f$ é uma função porque a cada elemento do conjunto $A$ corresponde um e um só elemento do conjunto $B$ .

**1.2.** $D_f=\left\{-3\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ 5\right\}$; $D'_f=\left\{0\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ 2\ ,\ \sqrt{5}\right\}$

Conjunto de chegada: $B=\left\{0\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ 2\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ 7\right\}$

**1.3.** Os objetos $\frac{1}{2}$ e $0$ têm a mesma imagem: $0$