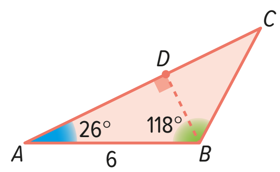
Avalia+

Trigonometria

Autoavaliação 1

Página 2



1. $\sin 26° = \frac{\overline{BD}}{6} \Leftrightarrow \overline{BD} = 6\sin 26°$; $A\hat{C}B = 180° - 26° - 118° = 36°$

$\sin 36° = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{BD}}{\sin 36°} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{6\sin 26°}{\sin 36°}$, ou seja, $\overline{BC} \approx 4{,}5$

2. **(C)** *F*

$1935 : 360 = 5{,}375$; $1935 - 5 \times 360 = 135$, logo $1935° = 5 \times 360° + 135°$.

$360 : 8 = 45$ e $135 : 45 = 3$, ou seja, $1935° = 5 \times 360° + 3 \times 45°$.

3. **(A)** 65

1 rad — r cm

$\frac{5\pi}{4}$ rad — 255 cm . Logo, $r = 255 : \frac{5\pi}{4}$, ou seja, $r \approx 65$ cm .

4. **(D)** $(\cos\alpha \, , \, \sin(-\alpha))$

As coordenadas do ponto B podem ser representadas por $(\cos\alpha \, , \, -\sin\alpha)$ e $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

5. **(B)** 2.º quadrante

Como $k \in]-1, 0[$ e $\cos\beta = k$, então $\beta \in$ 2.º quadrante ou $\beta \in$ 3.º quadrante .

Como $\tan\beta < 0$, então $\beta \in$ 2.º quadrante .

Página 3

6. $A(\cos 210° \, , \, \sin 210°) = A(\cos(180° + 30°) \, , \, \sin(180° + 30°)) = A(-\cos 30° \, , \, -\sin 30°) = A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$B(\cos 30° \, , \, \sin 30°) = B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $C(1 \, , \, \tan 30°) = C\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7. $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha = \frac{3}{5}$. Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ e $\sin\alpha > 0$, então $\alpha \in$ 2.º quadrante .

Pela fórmula fundamental da trigonometria: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \underset{\alpha \in 2.º\text{ Q}}{\Leftrightarrow} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$

Assim, $\tan\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$. Como $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha = \frac{4}{5}$ e $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha = \frac{3}{4}$, então:

$5\cos(\pi + \alpha) - 4\tan(-\alpha) = 5 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{3}{4} = 4 - 3 = 1$

8.1. $A_{[PQRS]} = \overline{PQ} \times \overline{QR}$. A ordenada do ponto P é igual à ordenada do ponto S , pelo que $\overline{PQ} = \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\overline{QR} = \overline{OR} - \overline{OQ} = 1 - \cos\alpha$. Pela fórmula fundamental da trigonometria:

$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{5}{9} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{9} \underset{\alpha \in 1.º\text{ Q}}{\Leftrightarrow} \cos\alpha = \frac{2}{3}$. Então, $\overline{QR} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

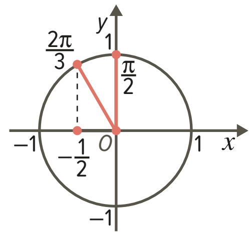
Assim, $A_{[PQRS]} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{5}}{9}$.

8.2. $A_{[PQRS]} = \overline{PQ} \times \overline{QR} = \sin\alpha \times (1 - \cos\alpha) = \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$

Funções trigonométricas

Autoavaliação 2

Página 4



1. **(C)** $\left[0\,,\ \frac{1}{2}\right]$

$D_f = \left[\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{2\pi}{3}\right]$, então $\cos x$ toma valores do intervalo $\left[-\frac{1}{2}\,,\ 0\right]$.

$-\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 0 \iff -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} + \cos x \leqslant 0 + \frac{1}{2} \iff 0 \leqslant \frac{1}{2} + \cos x \leqslant \frac{1}{2}$

Assim, $D'_f = \left[0\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

2. Seja x_C a abcissa do ponto C. Então, $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \left(\frac{5\pi}{6} - x_C\right)}{2}$, sendo $\overline{AB} = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) - g\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2 + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}\right) = 1 + \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1 + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Sabe-se que a função seno atinge o máximo nos pontos de abcissa $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

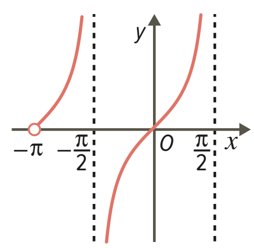
Neste caso, $k = 0$, tendo-se $x_C = \frac{\pi}{2}$ e $A_{[ABC]} = \dfrac{\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \dfrac{2 \times \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

3. **(C)** $f(x) = -2 + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Nas opções **(A)** e **(D)**, π não é zero da função. Estas opções são rejeitadas.

Na opção **(B)**, o contradomínio é $[-2\,,\ 0]$. Esta opção é rejeitada.

Página 5



4. **(D)** f é negativa em $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\ 0\right[$.

Por observação da representação gráfica, f é positiva em $\left]-\pi\,,\ -\frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$

e é negativa em $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\ 0\right[$; a função f tem exatamente um zero e não é crescente nem decrescente.

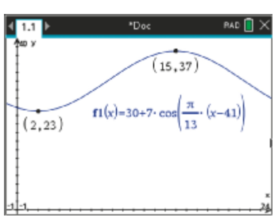
5. $A_{[OAPB]} = \dfrac{\left(\overline{BP} + \overline{OA}\right)}{2} \times \overline{AP}$. Como $P(\cos x\,,\ \sin x)$, então $\overline{BP} = 2\cos x$, $\overline{OA} = \cos x$ e $\overline{AP} = \sin x$.

$A_{[OAPB]} = \dfrac{2\cos x + \cos x}{2} \times \sin x = \dfrac{3\cos x}{2} \times \sin x = \dfrac{3}{2}\sin x \cos x$

6.1. Prevê-se que a temperatura mínima registada para esse dia seja $23\ °C$ e a temperatura máxima seja $37\ °C$.

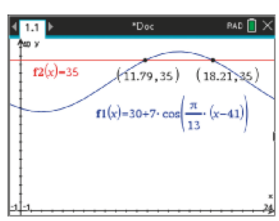
$37 - 23 = 14$

Assim, a previsão para a amplitude térmica é $14\ °C$.



6.2. $T(x) = 35$. Tem-se: $x_1 \approx 11{,}79 \ \vee\ x_2 \approx 18{,}21$

$18{,}21\ \text{h} - 11{,}79\ \text{h} \approx 6\ \text{h}$



Declive e inclinação de uma reta. Produto escalar

Autoavaliação 1

Página 6

1.1. **(B)** $60°$

$S\hat{P}O = 30°$ e $Q\hat{P}S = 90°$

Então, a inclinação da reta PQ é: $180° - 90° - 30° = 60°$

1.2. $PQ \perp QR$, então $m_{QR} = -\frac{1}{m_{PQ}}$. Como a inclinação da reta PQ é $60°$, então: $m_{PQ} = \tan 60° = \sqrt{3}$

Assim, $m_{QR} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. O ponto de coordenadas $(6\,,\ 0)$ pertence a QR, então: $0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 6 + b \Leftrightarrow b = 2\sqrt{3}$

$QR:\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$

2. **(B)** -18

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN}}_{0} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{MA}\right\| \times \cos 180° = 6 \times 3 \times (-1) = -18$

3.1. **(D)** $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$

Opção **(A)**: Como $0° < \left(\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AB}\right) < 90°$, então $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} > 0$.

Opção **(B)**: Como $\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{FE}\right) = 180°$, então $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FE} < 0$.

Opção **(C)**: Como $\left(\overrightarrow{EA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{EF}\right) = 90°$, então $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$.

Página 7

3.2. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em $C(x\,,\ x\,,\ 0)$.

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

$\overrightarrow{CA} = A - C = (5 - x\,,\ 1 - x\,,\ 0)$ e $\overrightarrow{CB} = B - C = (1 - x\,,\ 4 - x\,,\ 0)$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (5 - x)(1 - x) + (1 - x)(4 - x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \times 2 \times 9}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{9}{2}$

Como C tem coordenadas inteiras, $C(1\,,\ 1\,,\ 0)$.

3.3. $E(5\,,\ 1\,,\ 6)$ e $F(1\,,\ 4\,,\ 6)$; $\overrightarrow{AF} = F - A = (-4\,,\ 3\,,\ 6)$ e $\overrightarrow{BE} = E - B = (4\,,\ -3\,,\ 6)$

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = (-4\,,\ 3\,,\ 6) \cdot (4\,,\ -3\,,\ 6) = -16 - 9 + 36 = 11$

$\left\|\overrightarrow{AF}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{61}$ e $\left\|\overrightarrow{BE}\right\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{61}$

$\cos\left(AF\,\hat{,}\,BE\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{AF}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BE}\right)\right| = \frac{|11|}{\sqrt{61} \times \sqrt{61}} \Leftrightarrow \cos\left(AF\,\hat{,}\,BE\right) = \frac{11}{61}$; $\left(AF\,\hat{,}\,BE\right) = \cos^{-1}\left(\frac{11}{61}\right) \approx 80°$

4. **(B)** Apenas a afirmação **III** é verdadeira.

Declive da reta r: $m_r = -\frac{1}{2}$; declive da reta s: $m_s = -2$. Como $m_s \neq m_r$, a afirmação **I** é falsa.

Como $m_r = -\frac{1}{2}$, a inclinação é do 2.º quadrante e tem amplitude $\left[\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] + 180°$. Assim, **II** é falsa.

$m_t = -\frac{1}{m_r} \Leftrightarrow m_t = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow m_t = 2$. Uma equação da reta t é do tipo $y = 2x + b$.

O ponto de coordenadas $(2\,,\ 1)$ pertence à reta t. Então: $1 = 2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -3$

Assim, t: $y = 2x - 3$, sendo a afirmação **III** verdadeira.

5. $\overrightarrow{OP} = P - O = (4\,,\ b\,,\ -2) - (0\,,\ 0\,,\ 0) = (4\,,\ b\,,\ -2)$

$\overrightarrow{OP} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (4\,,\ b\,,\ -2) \cdot (2\,,\ 1\,,\ 3) = 0 \Leftrightarrow 8 + b - 6 = 0 \Leftrightarrow b = -2$

Equações cartesianas de planos no espaço

Autoavaliação 2

Página 8

1.1. **(A)** $(0\ ,\ 1\ ,\ -1)$

$[AF]//[BG]$, logo os vetores $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{BG}$ são colineares, isto é: $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{BG}$

$\overrightarrow{BG} = G - B = (0\ ,\ -2\ ,\ 2)$

$(0\ ,\ 1\ ,\ -1) = k(0\ ,\ -2\ ,\ 2) \Leftrightarrow \underbrace{0=0}_{\text{Verdadeiro}} \wedge 1 = -2k \wedge -1 = 2k \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \wedge k = -\frac{1}{2}$

Então, $(0\ ,\ 1\ ,\ -1) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$.

1.2. $\overrightarrow{BG} \perp EFG$ e $\overrightarrow{BG} = G - B = (0\ ,\ -2\ ,\ 2)$, então o plano EFG é definido pela equação: $-2y + 2z + d = 0$

Como $G(-2\ ,\ 0\ ,\ 5) \in EFG$, então $-2\times 0 + 2\times 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$.

Assim, $EFG: -2y + 2z - 10 = 0$.

2. **(A)** α e β

Sejam $\vec{n}_\alpha$, $\vec{n}_\beta$, $\vec{n}_\theta$ e $\vec{n}_\delta$ vetores normais aos planos α, β, θ e δ, respetivamente.

Os planos são perpendiculares se os seus vetores normais forem perpendiculares.

Como $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = (2\ ,\ -1\ ,\ -2)\cdot(1\ ,\ 0\ ,\ 1) = 2 + 0 - 2 = 0$, então $\alpha \perp \beta$.

3.1. $\vec{n}_\alpha(1\ ,\ 1\ ,\ -2)$ e $\vec{n}_\beta\left(\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 1\right)$. Seja $k \neq 0$.

$(1\ ,\ 1\ ,\ -2) = k\left(\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 1\right) \Leftrightarrow 1 = \frac{k}{2} \wedge 1 = -\frac{k}{2} \wedge -2 = k \Leftrightarrow 2 = k \wedge -2 = k \wedge -2 = k \longrightarrow$ Impossível

Assim, α e β não são paralelos. A afirmação é falsa.

3.2. $\vec{n}_\beta\left(\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 1\right)$; $\vec{r}(-1\ ,\ 3\ ,\ 1)$ é um vetor diretor de r.

$(-1\ ,\ 3\ ,\ 1) = k\left(\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 1\right) \Leftrightarrow -1 = \frac{k}{2} \wedge 3 = -\frac{k}{2} \wedge 1 = k \Leftrightarrow -2 = k \wedge -6 = k \wedge 1 = k \longrightarrow$ Impossível

A reta r não é perpendicular ao plano β. A afirmação é falsa.

3.3. $\vec{n}_\alpha(1\ ,\ 1\ ,\ -2)$ e $\vec{r}(-1\ ,\ 3\ ,\ 1)$; $(-1\ ,\ 3\ ,\ 1)\cdot(1\ ,\ 1\ ,\ -2) = -1 + 3 - 2 = 0$

Assim, $\vec{r}\cdot\vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow \vec{r} // \alpha$, ou seja, a reta r é paralela ao plano α.

$(3\ ,\ -4\ ,\ -2) \in r$ e $3 - 4 - 2\times(-2) = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$. Logo, $(3\ ,\ -4\ ,\ -2) \in \alpha$. Assim, r está contida em α. A afirmação é verdadeira.

Página 9

3.4. $r: (x\ ,\ y\ ,\ z) = (3\ ,\ -4\ ,\ -2) + k(-1\ ,\ 3\ ,\ 1) \Leftrightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (3 - k\ ,\ -4 + 3k\ ,\ -2 + k)$, $k \in \mathbb{R}$

Seja P o ponto de interseção de r com o plano β. Se $P \in r$, as coordenadas são do tipo

$(3 - k\ ,\ -4 + 3k\ ,\ -2 + k)$. O plano β é definido pela equação: $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + z = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z = 0$

Como $P \in \beta$, tem-se: $3 - k + 4 - 3k - 4 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$

Então, as coordenadas do ponto P são: $\left(3 - \frac{3}{2}\ ,\ -4 + 3\times\frac{3}{2}\ ,\ -2 + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$. A afirmação é verdadeira.

4.1. $(x\ ,\ y\ ,\ z) = (5\ ,\ 3\ ,\ 0) + k(-7\ ,\ 5\ ,\ -5)$, $k \in \mathbb{R}$

4.2. $F(0\ ,\ 0\ ,\ z_F)$ e $G(5\ ,\ 3\ ,\ z_G)$. Os pontos F e G pertencem ao plano CFG.

$-7\times 0 + 5\times 0 - 5z_F + 70 = 0 \Leftrightarrow z_F = 14$. Então, $F(0\ ,\ 0\ ,\ 14)$.

$-7\times 5 + 5\times 3 - 5z_G + 70 = 0 \Leftrightarrow z_G = 10$. Então, $G(5\ ,\ 3\ ,\ 10)$.

$\overline{FG} = \sqrt{(5-0)^2 + (3-0)^2 + (10-14)^2} = \sqrt{50} \approx 7{,}1$

4.3. $\alpha: -7x+5y-5z+d=0$. O ponto A tem coordenadas $(5, 3, 0)$.

$-7\times5+5\times3+0+d=0 \Leftrightarrow d=20$. Então, uma equação do plano α é: $-7x+5y-5z+20=0$

5. Seja P um ponto do plano α, tal que $PB \perp \alpha$. Um vetor diretor de PB é $\vec{n}_\alpha(1, 1, 1)$.

Então: $PB: (x, y, z)=(4, 1, 3)+k(1, 1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$, ou seja, $(x, y, z)=(4+k, 1+k, 3+k)$, $k \in \mathbb{R}$

As coordenadas de P são do tipo $(4+k, 1+k, 3+k)$.

Como $P \in \alpha$, então $4+k+1+k+3+k=2 \Leftrightarrow 3k=-6 \Leftrightarrow k=-2$. Logo: $P(4-2, 1-2, 3-2)=P(2, -1, 1)$

A distância de B a α é: $\overline{PB}=\sqrt{(4-2)^2+(1+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{12}$

Contagem

Autoavaliação 1

Página 10

1. **(B)** 2

$A=\{A, I, O\}$ e $B=\{A, I, U\}$. $A\cap B=\{A, I\}$, então $\#(A\cap B)=2$.

2. Do conjunto de 10 algarismos, escolher quatro: ${}^{10}C_4$. Das 26 letras, escolher três: ${}^{26}C_3$.

Os sete elementos podem permutar entre si: $7!$. Ao número de possíveis *passwords* deve ser retirada a atual.

O número de possibilidades de substituição é dado por: ${}^{10}C_4\times{}^{26}C_3\times7!-1$

3. **(C)** 480

Se não houvesse restrições, existiriam seis cadeiras para seis amigos: $6!$

Se a Mariana e a Margarida ficassem juntas: $2!\times5!$

O número de maneiras diferentes para que as gémeas não fiquem juntas é: $6!-2!\times5!=480$

Página 11

4. **(B)** 256

Se o número é ímpar, então o algarismo das unidades é 3. O número tem exatamente dois 3, então o segundo 3 ocupará uma das quatro posições restantes. Existem quatro algarismos possíveis para cada uma das restantes três posições: ${}^{4}A'_3$.

Assim, o número de possibilidades nas condições pedidas é dado por: $1\times4\times{}^{4}A'_3=4\times4^3=256$

5. A pirâmide tem 7 vértices e 12 arestas.

Número de retas que é possível definir por pares de vértices da pirâmide: ${}^{7}C_2$

O número de retas definidas por quaisquer dois vértices da pirâmide e que não contêm arestas é: ${}^{7}C_2-12=9$

6. O número é inferior a 30 mil, logo o algarismo das dezenas de milhar é 1 ou 2.

Se for 1, o algarismo das unidades tem três possibilidades (3 ou 5 ou 7) e, no total, tem-se: ${}^{6}A_3\times3$

Se for 2, o algarismo das unidades tem quatro possibilidades (1 ou 3 ou 5 ou 7) e, no total, tem-se: ${}^{6}A_3\times4$

Assim, o número pedido é dado por: ${}^{6}A_3\times3+{}^{6}A_3\times4=840$

7. Número de maneiras diferentes de fazer a distribuição das garrafas: ${}^{8}C_3\times{}^{5}A_2=1120$

Sucessões. Progressões aritméticas e geométricas

Autoavaliação 1

Página 12

1. **(C)** 13 não é termo da sucessão

Se n é ímpar: $2n+1=13 \Leftrightarrow n=6$, o que é impossível.

Se n é par: $3n=13 \Leftrightarrow n=\frac{13}{3}$, o que é impossível.

Logo, 13 não é termo da sucessão.

2. A sucessão (u_n) é crescente, pois $2n-1>0$, $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. A representação **B** é a única que pode corresponder a uma sucessão crescente. As representações **A** e **C** não correspondem a sucessões crescentes.

3. $u_9 = 2u_8 - 3 \iff 1027 = 2u_8 - 3 \iff u_8 = 515$ e $u_{10} = 2u_9 - 3 \iff u_{10} = 2\times 1027 - 3 \iff u_{10} = 2051$

$u_{10} - u_8 = 2051 - 515 = 1536$

4.1. $u_{12} = u_8 + (12-8)r \iff 89 = 61 + 4r \iff r = 7$

Sabe-se que: $u_{20} = u_{12} + (20-12)r \iff u_{20} = 89 + 8\times 7 \iff u_{20} = 145$

4.2. $u_8 = u_1 + 7r \iff 61 = u_1 + 49 \iff u_1 = 12$

A soma dos 12 primeiros termos é: $S_{12} = \dfrac{u_1 + u_{12}}{2}\times 12 = (12+89)\times 6 = 606$

Página 13

5.1. Depois da primeira, cada fila tem mais dois fósforos do que a fila anterior.

Seja (u_n) a sucessão em que u_n representa o número de fósforos da fila de ordem n , sendo $u_n = 3 + (n-1)2$, ou seja, $u_n = 2n+1$.

$u_{25} = 2\times 25 + 1 = 51$

Para construir a 25.ª fila, são necessários 51 fósforos.

5.2. Número total de fósforos: $6\times 80 = 480$

$S_{21} = \dfrac{u_1 + u_{21}}{2}\times 21 = \dfrac{3 + 2\times 21 + 1}{2}\times 21 = 483$

Não é possível fazer a construção com 21 filas. O número de fósforos necessário para essa construção é superior ao número de fósforos das seis caixas.

6.1. Seja (v_n) a sucessão em que os 24 primeiros termos correspondem aos valores das prestações.

$v_n = 500\times 1{,}04^{n-1}$, logo: $v_{24} = 500\times 1{,}04^{23} = 1232{,}36$, ou seja, 1232,36 € .

6.2. $S_{24} = 500\times \dfrac{1-1{,}04^{24}}{1-1{,}04} = 19541{,}30$, ou seja, 19 541,30 € .

7. Seja (u_n) a progressão geométrica. Sabe-se que $u_1 = 7$ e a razão r é $0{,}1$.

$S_n = 7\times \dfrac{1-0{,}1^n}{1-0{,}1}$

Como $0{,}1^n$ tende para 0 , então: $S = 7\times \dfrac{1-0}{0{,}9} = \dfrac{70}{9}$

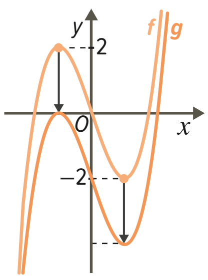
Funções cúbicas e quárticas

Autoavaliação 1

Página 14

1. **(C)** -2

O gráfico de g obtém-se aplicando uma translação de vetor $\vec{u}(0\ ,\ d)$ ao gráfico da função f .



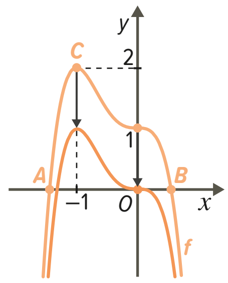
2.1. O ponto de coordenadas $(0\ ,\ 1)$ pertence ao gráfico de f , logo: $a\times 0^4 + b\times 0^3 + e = 1 \iff e = 1$

2.2. Quando $x \longrightarrow -\infty$, $f(x) \longrightarrow -\infty$ e, quando $x \longrightarrow +\infty$, $f(x) \longrightarrow -\infty$, logo $a<0$.

Considerando a função do tipo $y = ax^4 + bx^3$, tem-se que os zeros são dados por:

$ax^4 + bx^3 = 0 \iff x^3(ax+b) = 0 \iff x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$

Por observação da representação gráfica ao lado, a função tem dois zeros, um igual a zero e outro com sinal negativo. Sendo $a<0$, tem-se: $-\frac{b}{a} < 0 \wedge a < 0$. Logo, $b<0$.



3. **(C)** $-4x+2$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 0x + 2 & x^2 - 2x \\ \cline{2-2} -x^3 + 2x^2 & x - 2 \\ \cline{1-1} -2x^2 + 0x + 2 & \\ 2x^2 - 4x & \\ \cline{1-1} -4x + 2 & \end{array}$$

4. $P(x) = a(x+1)(x-3)^2$

$P(2) = 6 \iff a(2+1)(2-3)^2 = 6 \iff 3a = 6 \iff a = 2$.

Assim, $P(0) = 2(0+1)(0-3)^2 = 2 \times 1 \times 9 = 18$.

Página 15

5. $A(x) = 0 \iff -x^2 + x + 2 = 0 \iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)} \iff x = -1 \vee x = 2$

$B(x) = 0 \iff x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \iff (x-2)(x^2 - 2x + 1) = 0 \iff$

$\iff x = 2 \vee x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x = 2 \vee (x-1)^2 = 0 \iff x = 2 \vee x = 1$

$B(x) \geqslant 0 \iff x \in \{1\} \cup [2, +\infty[$

	1	−4	5	−2
2		2	−4	2
	1	−2	1	0

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$x-2$	−	−	−	0	+
$x^2 - 2x + 1$	+	0	+	+	+
$B(x)$	−	0	−	0	+

6.1. $f(x) = a(x-0)(x-4)$

Como B pertence ao gráfico de f, então: $f(1) = 3 \iff a(1-0)(1-4) = 3 \iff -3a = 3 \iff a = -1$

Assim, $f(x) = -(x-0)(x-4) = -x(x-4) = -x^2 + 4x$.

6.2. A função f admite um máximo no vértice, V, da parábola.

$f(2) = -2^2 + 4 \times 2 = 4$, então $P \equiv V$, sendo V o ponto de coordenadas $(2, 4)$.

O ponto S tem a mesma abcissa de P e pertence ao gráfico de g, então: $g(2) = -2 + 4 = 2$

$S(2, 2)$; $A_{[PQRS]} = \overline{RS} \times \overline{SP} = 2 \times (4-2) = 2 \times 2 = 4$

6.3. **a)** $P(x, -x^2 + 4x)$ e $S(x, -x+4)$

$A_{[PQRS]} = \overline{RS} \times \overline{SP} = x \times [-x^2 + 4x - (-x+4)] = x(-x^2 + 4x + x - 4) = -x^3 + 5x^2 - 4x$

b) $x \approx 2{,}9$

Operações com funções

Autoavaliação 2

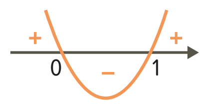
Página 16

1. **(C)** $]1\,,\,+\infty[$

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}^+=\mathbb{R}^+$ e $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-2x+2+2x^2-2=2x^2-2x$

$(f+g)(x)=0 \iff 2x^2-2x=0\wedge x>0 \iff 2x(x-1)=0 \wedge x>0 \iff (x=0 \vee x=1)\wedge x>0$

$(f+g)(x)>0 \iff x\in]1\,,\,+\infty[$



2. Representação gráfica **III**

$f-g$ tem apenas dois zeros: -2 e 2, logo exclui-se a representação gráfica **I**.

$f-g$ é positiva em $]-2\,,\,2[$, logo exclui-se a representação gráfica **II**.

3. **(B)** $\{-2\,,\,0\,,\,2\}$

$g(x)=0 \iff f(x)\times(2x-4)=0 \iff f(x)=0 \vee 2x-4=0 \iff f(x)=0 \vee x=2$

Por observação da representação gráfica de f, um dos zeros é negativo e o outro é zero. A função g tem três zeros.

Página 17

4.1. Afirmação verdadeira

$D_{\frac{f}{g}}=(D_f\cap D_g)\backslash\{x\in\mathbb{R}:\ g(x)=0\}=(\mathbb{R}\cap\mathbb{R})\backslash\{a\}=\mathbb{R}\backslash\{a\}$

4.2. Afirmação falsa

$(g-f)(x)=0 \iff g(x)-f(x)=0 \iff g(x)=f(x) \iff x=a \vee x=0 \vee x=d$

Assim, $g-f$ tem três zeros: a, 0 e d

4.3. Afirmação falsa

$D_{g\times f}=D_g\cap D_f=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
$g(x)$	–	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$(g\times f)(x)$	+	0	+	0	–	0	+

$g\times f$ é negativa em $]b\,,\,c[$.

4.4. Afirmação verdadeira

$D_{\frac{g}{f}}=(D_g\cap D_f)\backslash\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)=0\}=(\mathbb{R}\cap\mathbb{R})\backslash\{a\,,\,b\,,\,c\}=\mathbb{R}\backslash\{a\,,\,b\,,\,c\}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=0 \iff g(x)=0 \wedge x\in D_{\frac{g}{f}} \iff x=a\wedge x\in D_{\frac{g}{f}}$. Logo, $\frac{g}{f}$ não tem zeros.

5.1. **(C)** $(g-f)(-3)=(f-g)(-3)$

Como $g(-3)=f(-3)$, então $g(-3)-f(-3)=f(-3)-g(-3)$, ou seja, $(g-f)(-3)=(f-g)(-3)$.

5.2. $f(0)=-4 \iff a(0+2)^3(0-1)=-4 \iff -8a=-4 \iff a=\frac{1}{2}$

5.3. $f(-3)=\frac{1}{2}(-3+2)^3(-3-1)=-\frac{1}{2}\times(-4)=2$

$f(-3)=g(-3)=2$ e $f(1)=g(1)=0$. A função g é do tipo $g(x)=mx+b$ e $m=\frac{2-0}{-3-1}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$.

$g(1)=-\frac{1}{2}\times1+b \iff 0=-\frac{1}{2}+b \iff b=\frac{1}{2}$. Logo, $g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

5.4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{2}(x+2)^3(x-1)}{-\frac{1}{2}(x-1)}=-(x+2)^3$ e $D_{\frac{f}{g}}=(D_f\cap D_g)\backslash\{x\in\mathbb{R}:\ g(x)=0\}=(\mathbb{R}\cap\mathbb{R})\backslash\{1\}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

5.5. $D_{f\times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	–	0	+
$g(x)$	+	+	+	0	–
$(f\times g)(x)$	+	0	–	0	–

A função $f\times g$ é negativa em $]-2\,,\,1[\cup]1\,,\,+\infty[$ e positiva em $]-\infty\,,\,-2[$.

Funções racionais

Autoavaliação 3

Página 18

1. **(C)** $a>0$, $b>0$ e $c<0$

As assíntotas ao gráfico de f são definidas pelas equações $x=c$ e $y=a$, então, por observação da representação gráfica de f, conclui-se que $a>0$ e $c<0$. A função f é decrescente em $]-\infty\,,\,c[$ e em $]c\,,\,+\infty[$, então $b>0$.

2.1. Quando x tende para 3^-, $f(x)$ tende para $\boxed{+\infty}$.

2.2. Quando x tende para $\boxed{-\infty}$, $f(x)$ tende para -1^+.

2.3. Quando x tende para $\boxed{+\infty}$, $f(x)$ tende para -1^-.

2.4. Quando x tende para 3^+, $f(x)$ tende para $\boxed{-\infty}$.

3. **(B)** $(-2\,,\,2)$

As assíntotas ao gráfico de f são definidas pelas equações $x=-2$ (assíntota vertical) e $y=2$ (assíntota horizontal).

4. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-k}$, com $k\in\mathbb{R}$

Se o gráfico de f interseta o eixo Ox em, exatamente, dois pontos, então tem dois zeros.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-16}{x-k}=0 \Leftrightarrow x^2-16=0 \,\wedge\, x-k\neq 0 \Leftrightarrow (x=-4 \,\vee\, x=4)\wedge x\neq k$

Assim, $k\in\mathbb{R}\backslash\{-4\,,\,4\}$.

5. $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x-3}=2+\dfrac{5}{2x-3}=2+\dfrac{5}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=2+\dfrac{\frac{5}{2}}{x-\frac{3}{2}}$

$$\begin{array}{r|l} 4x-1 & 2x-3 \\ \cline{2-2} -4x+6 & 2 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Página 19

6.1. $f(x)=3 \Leftrightarrow 3-\dfrac{4}{x-2}=3 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x-2}=0$, que é impossível. Então, $3\notin D'_f$.

6.2. $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-10}{x-2}=0 \Leftrightarrow 3x-10=0 \,\wedge\, x-2\neq 0 \Leftrightarrow x=\dfrac{10}{3} \,\wedge\, x\neq 2$; $f(0)=\dfrac{3\times 0-10}{0-2}=\dfrac{-10}{-2}=5$

Então, o gráfico de f interseta o eixo Ox no ponto de coordenadas $\left(\dfrac{10}{3}\,,\,0\right)$ e o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0\,,\,5)$.

6.3. $D_f=\mathbb{R}\backslash\{2\}$; $f(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-10}{x-2}\leqslant 0$

$3x-10=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{10}{3}$; $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$f(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in\left]2\,,\,\dfrac{10}{3}\right]$

x	$-\infty$	2		$\frac{10}{3}$	$+\infty$
$3x-10$	–	–	–	0	+
$x-2$	–	0	+	+	+
$f(x)$	+	n.d.	–	0	+

7.1. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-3}=2+\dfrac{9}{x-3}$. A assíntota vertical ao gráfico de f é definida pela equação $x=3$.

A reta AB é definida pela equação $x=3$.

$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x+6 & 2 \\ \hline 9 & \end{array}$$

7.2. **a)** $A_{[OABC]}=\overline{OA}\times\overline{AB}=3\times\dfrac{2x+3}{x-3}=\dfrac{6x+9}{x-3}$

Assim, $g(x)=\dfrac{6x+9}{x-3}=6+\dfrac{27}{x-3}$. $D_g=]3\,,\,+\infty[$

$$\begin{array}{r|l} 6x+9 & x-3 \\ \cline{2-2} -6x+18 & 6 \\ \hline 27 & \end{array}$$

b) A assíntota horizontal ao gráfico de g é definida pela equação $y=6$.

Significa que, quando a abcissa do ponto P tende para $+\infty$ $(x\longrightarrow+\infty)$, a medida da área do retângulo $[OABC]$ tende para 6.

Taxa de variação. Derivada

Autoavaliação 1

Página 20

1. **(D)** 18

t.m.v.$_{[1,\ 4]} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = 6 \Leftrightarrow f(4)-f(1) = 6\times 3 \Leftrightarrow f(4)-f(1)=18$

2. A reta t é definida pela equação $y = 3x + b$. Como $A(1,\ 2)\in t$, então: $2 = 3\times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$

Assim, a reta t é definida pela equação $y = 3x - 1$.

3. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

O declive de r é $f'(1) = 8$. A reta r é definida por $y = 8x + b$.

Como r interseta o eixo Oy no ponto de ordenada -5, então r é definida pela equação $y = 8x - 5$.

O ponto de tangência pertence ao gráfico de f e à reta tangente. Então, $f(1) = 8\times 1 - 5 = 3$.

4.1. Seja x_0 um elemento qualquer de $D_f = \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{0{,}8x^2 - 0{,}8x_0^2}{x-x_0} = \frac{0{,}8\,(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} \underset{x\neq x_0}{=} 0{,}8\,(x+x_0)$$

Quando $x \longrightarrow x_0$, os valores da expressão $0{,}8\,(x+x_0)$ tendem para $0{,}8\times 2x_0$, ou seja, $1{,}6x_0$.

Daqui resulta que $f'(x) = 1{,}6x$, sendo $D_{f'} = \mathbb{R}$.

4.2. O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 é $f'(2) = 1{,}6\times 2 = 3{,}2$.

4.3. $B(-1{,}5\ ;\ 0)$ e $C(0\ ;\ -7{,}2)$ pertencem a t, logo o seu declive é $m = \dfrac{-7{,}2-0}{0-(-1{,}5)} = -4{,}8$.

Assim, $t: y = -4{,}8x - 7{,}2$.

Seja x_T a abcissa do ponto T. Sabe-se que o declive de t é igual a $f'(x_T) = 1{,}6x_T$, ou seja: $1{,}6x_T = -4{,}8 \Leftrightarrow x_T = -3$

T pertence ao gráfico de f, logo $f(-3) = 0{,}8\times(-3)^2 = 7{,}2$.

As coordenadas do ponto T são $(-3\ ;\ 7{,}2)$.

Página 21

5. **(B)** -3

$g'(x) = f'(x)\times(2x-1) + f(x)\times(2x-1)' = f'(x)\times(2x-1) + 2f(x)$

$g'(0) = f'(0)\times(2\times 0 - 1) + 2f(0) = -1\times(-1) + 2\times(-2) = 1 - 4 = -3$

6. $f'(x) = 3x^2 + 6x$. O declive da reta r é: $f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3$

Seja s uma reta perpendicular a r, então $m_s = -\dfrac{1}{m_r} = \dfrac{1}{3}$.

Seja x_T a abcissa do ponto T. Sabe-se que o declive de s é $f'(x_T) = 3x_T^2 + 6x_T$, ou seja:

$$f'(x_T) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x_T^2 + 6x_T = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 9x_T^2 + 18x_T - 1 = 0 \Leftrightarrow x_T = \frac{-18\pm\sqrt{18^2 - 4\times 9\times(-1)}}{2\times 9} \Leftrightarrow x_T = \frac{-3+\sqrt{10}}{3} \vee x_T = \frac{-3-\sqrt{10}}{3}$$

A abcissa de T é negativa, então $x_T \approx -2$.

7.1. $f'(x) = -\dfrac{2}{4}x - \left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{-x^3+8}{2x^2}$, sendo $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

7.2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^3+8}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 8 = 0 \wedge x\in D_{f'} \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$

$P(2\ ,\ 0)$

Otimização

Autoavaliação 2

Página 22

1. **(B)** $f(-1) < f(-0)$

x	$-\infty$	-5		-2		-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↗	$f(-5)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(1)$	↘

2. **(A)** A função f admite um extremo no ponto de abcissa -1.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ e $f'(x) = 2ax + b$. Sabe-se que $f'(-2) = -2$ e $f'(-1) = 0$. Então, tem-se:

$\begin{cases} -4a + b = -2 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$. Daqui resulta que $f'(x) = 2x + 2$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f(-1)$ é mínimo absoluto da função.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	↘	$f(-1)$	↗

3.1. $f'(x) = 4(3-x)^3(3-x)' = 4(3-x)^3(-1) = -4(3-x)^3$. Então, $f'(2) = -4(3-2)^3 = -4$

3.2. $g(x) = f'(x) = -4(3-x)^3$

$g'(x) = -4 \times 3(3-x)^2 \times (3-x)' = -12(3-x)^2(-1) = 12(3-x)^2$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12(3-x)^2 = 0 \Leftrightarrow (3-x)^2 = 0 \Leftrightarrow 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

A função g é crescente no seu domínio e não tem extremos.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
g	↗	$g(3)$	↗

Página 23

4. $f'(x) = \dfrac{2x(2+x) - x^2}{(2+x)^2} = \dfrac{4x + 2x^2 - x^2}{(2+x)^2} = \dfrac{x^2 + 4x}{(2+x)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 4x}{(2+x)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+4) = 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$

f admite um máximo relativo no ponto de abcissa -4.

Então, $f(-4) = \dfrac{(-4)^2}{2 + (-4)} = \dfrac{16}{-2} = -8$ é máximo relativo de f.

x	$-\infty$	-4		-2		0	$+\infty$
$x^2 + 4x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(2+x)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
f	↗	$f(-4)$	↘	n.d.	↘	$f(0)$	↗

5.1. O gráfico da função g interseta o eixo Oy no ponto M, logo $M(0\,,\ 1)$.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{2} + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$

Logo, $N(6\,,\ g(6)) = (6\,,\ 7)$.

5.2. **a)** Seja x a abcissa do ponto P.

$$A(x) = \frac{\overline{PQ} \times x}{2} = \frac{\left((x+1) - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1\right)\right)x}{2} = \frac{\left(\frac{4x - x^2 + 2x}{4}\right)x}{2} = \frac{\frac{-x^3 + 6x^2}{4}}{2} = -\frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{4}$$

b) $A'(x) = -\dfrac{3x^2}{8} + \dfrac{6x}{4} = -\dfrac{3x^2}{8} + \dfrac{3x}{2}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3x^2}{8} + \dfrac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Assim, a área do triângulo $[MPQ]$ é máxima para $x = 4$.

x	0		4		6
$A'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
A	n.d.	↗	$A(4)$	↘	n.d.