

Propostas de resolução

Prática+

1. TRIGONOMETRIA. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ficha 1

1.1. Resolução de problemas envolvendo triângulos

Página 4

1. $\cos 45^\circ = \frac{\overline{BC}}{500} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times 500 = \overline{BC}$, ou seja, $\overline{BC} \approx 353,55$

A distância do barco ao cais de partida é, aproximadamente, 353,55 metros.

2. Relativamente ao nível dos olhos do observador, sejam h_A e h_B as medidas das alturas dos edifícios A e B, respetivamente.

$$\tan 68^\circ = \frac{h_A}{11} \Leftrightarrow 11 \times \tan 68^\circ = h_A$$

$$\tan 57^\circ = \frac{h_B}{11} \Leftrightarrow 11 \times \tan 57^\circ = h_B$$

$$h_A - h_B = 11 \times \tan 68^\circ - 11 \times \tan 57^\circ, \text{ ou seja, } h_A - h_B \approx 10$$

A diferença de alturas dos dois edifícios é, aproximadamente, 10 metros.

Página 5

3. Sejam x e y as distâncias do ponto A e do ponto B ao edifício, respetivamente.

$$\tan 20^\circ = \frac{45}{x} \Leftrightarrow x = \frac{45}{\tan 20^\circ}; \quad \tan 70^\circ = \frac{45}{y} \Leftrightarrow y = \frac{45}{\tan 70^\circ}$$

$$\overline{AB} = x - y = \frac{45}{\tan 20^\circ} - \frac{45}{\tan 70^\circ}, \text{ ou seja, } \overline{AB} \approx 107$$

A distância entre A e B é, aproximadamente, 107 metros.

4.1. $\widehat{DBA} = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$$\widehat{CBA} = 40^\circ + 10^\circ = 50^\circ$$

$$\tan 40^\circ = \frac{\overline{AD}}{6} \Leftrightarrow \overline{AD} = 6 \times \tan 40^\circ$$

$$\tan 50^\circ = \frac{\overline{AC}}{6} \Leftrightarrow \overline{AC} = 6 \times \tan 50^\circ$$

$$\overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD} = 6 \times \tan 50^\circ - 6 \times \tan 40^\circ, \text{ ou seja,}$$

$$\overline{CD} \approx 2$$

Assim, $\overline{CD} \approx 2$ cm.

4.2. $\widehat{CDA} = 180^\circ - 25^\circ - 30^\circ = 125^\circ$

$$\widehat{ADB} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$$

$$\widehat{BAC} = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4 \times \tan 60^\circ$$

$$\tan 35^\circ = \frac{\overline{BD}}{4} \Leftrightarrow \overline{BD} = 4 \times \tan 35^\circ$$

$$\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 4 \times \tan 60^\circ - 4 \times \tan 35^\circ, \text{ ou seja,}$$

$$\overline{CD} \approx 4$$

Assim, $\overline{CD} \approx 4$ cm.



Página 6

5. $\widehat{ACB} = 180^\circ - 150^\circ - 20^\circ = 10^\circ$

$$\sin 20^\circ = \frac{\overline{BD}}{60} \Leftrightarrow \overline{BD} = 60 \times \sin 20^\circ$$

$$\sin 10^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{BD}}{\sin 10^\circ} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{60 \times \sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}, \text{ ou seja, } \overline{BC} \approx 118$$

Assim, $\overline{BC} \approx 118$ m.

6.1. Seja x a altura pretendida: $\tan 41^\circ = \frac{x}{30} \Leftrightarrow x = 30 \times \tan 41^\circ$, ou seja, $x \approx 26$

O Ricardo fez a sua observação a, aproximadamente, 26 metros.

6.2. Seja y a diferença entre a altura do edifício em frente ao Ricardo e a altura a que ele se encontra a observar.

$$\tan 30^\circ = \frac{y}{30} \Leftrightarrow y = 30 \times \tan 30^\circ$$

$$30 \times \tan 30^\circ + 30 \times \tan 41^\circ \approx 43$$

A altura do edifício que o Ricardo está a observar é, aproximadamente, 43 metros.



ESPMAT11CAD © Porto Editora

Página 7

7. Sejam $h = \overline{CD}$ (a altura do rochedo) e $x = \overline{BD}$.

$$\tan 26^\circ = \frac{h}{x+180} \wedge \tan 34^\circ = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = (x+180) \tan 26^\circ \wedge h = x \tan 34^\circ$$

$$x \tan 34^\circ = (x+180) \tan 26^\circ \Leftrightarrow x \tan 34^\circ = x \tan 26^\circ + 180 \tan 26^\circ \Leftrightarrow x \tan 34^\circ - x \tan 26^\circ = 180 \tan 26^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{180 \tan 26^\circ}{\tan 34^\circ - \tan 26^\circ}, \text{ ou seja, } x \approx 470,0384$$

$$h \approx 470,0384 \times \tan 34^\circ \approx 317$$

A altura do rochedo é, aproximadamente, 317 metros.

8. Seja $h = \overline{PR}$ (a altura pedida) e $x = \overline{MR}$. Então, $\overline{NR} = 36 - x$.

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x} \wedge \tan 30^\circ = \frac{h}{36-x} \Leftrightarrow h = x \tan 60^\circ \wedge h = (36-x) \tan 30^\circ$$

$$x \tan 60^\circ = (36-x) \tan 30^\circ \Leftrightarrow \sqrt{3}x = \frac{36\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}x \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x + \sqrt{3}x = 36\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{36\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 9$$

$$h = 9 \times \tan 60^\circ = 9\sqrt{3}$$

O participante ficou a $9\sqrt{3}$ metros de altura.

Ficha 2

1.2. Ângulo e arco generalizados

Página 8

1.1. a) $360 : 9 = 40$

Repara que $40 \times 3 = 120$. Logo, $\hat{O}G$.

c) Repara que $40 \times 7 = 280$. Logo, $\hat{O}H$.

1.2. a) D

b) B

c) C

d) I

e) E

f) A

1.3. $\bullet 5 < \frac{1840}{360} < 6$. Como $1840 - 5 \times 360 = 40$, tem-se $1840^\circ = 40^\circ + 5 \times 360^\circ$.

$$\text{Assim, } R_{(O, 1840^\circ)}(G) = R_{(O, 40^\circ)}(G) = H.$$

$\bullet 6 < \frac{2480}{360} < 7$. Como $2480 - 6 \times 360 = 320$, tem-se $-2480^\circ = -320^\circ - 6 \times 360^\circ$.

$$\text{Assim, } R_{(O, -2480^\circ)}(G) = R_{(O, -320^\circ)}(G) = H.$$



Página 9

$$2.1. 4 < \frac{1510}{360} < 5$$

Como $1510 - 4 \times 360 = 70$, tem-se:

$$1510^\circ = 70^\circ + 4 \times 360^\circ$$

$$2.3. 3 < \frac{1200}{360} < 4$$

Como $1200 - 3 \times 360 = 120$, tem-se:

$$-1200^\circ = -120^\circ - 3 \times 360^\circ$$

$$3.1. 3 < \frac{1230}{360} < 4$$

Como $1230 - 3 \times 360 = 150$, tem-se: $-1230 = -150 - 3 \times 360$

O ponteiro dos minutos dá três voltas completas e mais um ângulo de amplitude 150° (no sentido negativo).

Por cada volta completa, 60 minutos, descreve um ângulo de amplitude -360° .

Por cada minuto descreve um ângulo de amplitude -6° , pois $360 : 60 = 6$.

Como $150 : 6 = 25$, conclui-se que a hora pedida é 10:25.

$$3.2. \text{Número de voltas completas: } 15 - 7 = 8$$

Como $-8 \times 360 + (-6 \times 35) = -3090$, conclui-se que o ponteiro do relógio descreverá um ângulo de amplitude -3090° .

$$4.1. (D) -140^\circ$$

$$\widehat{DA} = \widehat{AB} = \frac{360^\circ - 80^\circ}{2} = \frac{280^\circ}{2} = 140^\circ$$

$$R_{(O, -140^\circ)}(B) = A$$

$$4.2. (B)$$

$$(A) 440^\circ = 80^\circ + 360^\circ$$

$$(C) -1000^\circ = -280^\circ - 2 \times 360^\circ$$

$$2.2. 7 < \frac{2545}{360} < 8$$

Como $2545 - 7 \times 360 = 25$, tem-se:

$$-2545^\circ = -25^\circ - 7 \times 360^\circ$$

$$2.4. 9 < \frac{3250}{360} < 10$$

Como $3250 - 9 \times 360 = 10$, tem-se:

$$3250^\circ = 10^\circ + 9 \times 360^\circ$$

$$(B) -800^\circ = -80^\circ - 2 \times 360^\circ$$

$$R_{(O, -800^\circ)}(D) = B$$

$$(D) 500^\circ = 140^\circ + 360^\circ$$

Ficha 3

1.3. Círculo trigonométrico

Página 10

$$1.1. 360^\circ : 8 = 45^\circ, \text{ sendo } \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \tan 45^\circ = 1.$$

$$\text{Então, } P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), Q\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } T(1, -1).$$

$$1.2. R(\cos \alpha, \sin \alpha), \text{ logo } \sin \alpha = -\frac{1}{4}. \text{ Então: } \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4} \vee \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Como } \alpha \in 3.^\circ \text{ Q, então } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}. \text{ Assim: } \tan \alpha = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Página 11

$$2.1. \sin \alpha > 0 \wedge -90^\circ < \alpha < 90^\circ, \text{ logo } \alpha \in 1.^\circ \text{ Q.}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{81} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{65}}{9} \vee \cos \alpha = \frac{\sqrt{65}}{9}. \text{ Como } \alpha \in 1.^\circ \text{ Q, então } \cos \alpha = \frac{\sqrt{65}}{9}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{\sqrt{65}}{9}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{4}{\sqrt{65}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{4\sqrt{65}}{65}. \text{ Logo, } \sin \alpha = \frac{4}{9}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{65}}{9} \text{ e } \tan \alpha = \frac{4\sqrt{65}}{65}.$$

$$2.2. \cos \alpha < 0 \wedge 180^\circ < \alpha < 360^\circ, \text{ logo } \alpha \in 3.^\circ \text{ Q.}$$



$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{24}}{5} \vee \sin \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}. \text{ Como } \alpha \in 3.^\circ \text{Q, então } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{24}}{5}.$$

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{24}}{5}}{-\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \sqrt{24}. \text{ Logo, } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{24}}{5}, \cos \alpha = -\frac{1}{5} \text{ e } \tan \alpha = \sqrt{24}.$$

2.3. $\tan \alpha > 0 \wedge 90^\circ < \alpha < 270^\circ$, logo $\alpha \in 3.^\circ \text{Q}$.

$$1 + 3^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} \vee \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10} \vee \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Como $\alpha \in 3.^\circ \text{Q}$, então $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$\frac{\sin \alpha}{-\frac{\sqrt{10}}{10}} = 3 \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}. \text{ Logo, } \sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10} \text{ e } \tan \alpha = 3.$$

3.1. Sejam D e d , respetivamente, as medidas da maior e menor diagonal do losango.

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{D}{5} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{D}{10} \Leftrightarrow D = 10 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d}{5} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d}{10} \Leftrightarrow d = 10 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Como a área do losango é dada por $A = \frac{D \times d}{2}$, então: $A(\alpha) = \frac{10 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times 10 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} \Leftrightarrow A(\alpha) = 50 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

3.2. $A(90^\circ) = 50 \sin 45^\circ \cos 45^\circ \Leftrightarrow A(90^\circ) = 50 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{100}{4} = 25$

$A(90^\circ)$ representa a medida da área de um quadrado, cujo lado mede 5 unidades de comprimento.

3.3. $\tan \alpha = \sqrt{3}$, então $\alpha = 60^\circ$. $A(60^\circ) = 50 \sin 30^\circ \cos 30^\circ \Leftrightarrow A(60^\circ) = 50 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$

Página 12

4.1. 1 rad – 6 cm

x rad – 7,5 cm

$x = \frac{7,5}{6} = 1,25$. Logo, a amplitude do arco AB é 1,25 radianos.

4.2. 1 rad – 6 cm

2,8 rad – x cm

$x = 2,8 \times 6 = 16,8$. O comprimento do arco BC é 16,8 cm.

5. Afirmações verdadeiras: II e III

6. Se $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, então $-1 \leq \cos x \leq 0$. Assim, a condição é possível se:

$$-1 \leq k^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow k^2 - 1 \geq -1 \wedge k^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow k^2 \geq 0 \wedge k^2 \leq 1 \Leftrightarrow k \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq k \leq 1. \text{ Logo, } k \in [-1, 1].$$

7.1. a) $2\pi : 12 = \frac{\pi}{6}$

Lado extremidade: $\hat{O}F$

b) $\frac{\pi}{6} \times 2 = \frac{\pi}{3}$

Lado extremidade: $\hat{O}C$

c) $-\left(\frac{\pi}{6} \times 3\right) = -\frac{\pi}{2}$

Lado extremidade: $\hat{O}J$

7.2. a) $\frac{17\pi}{4} = \frac{16\pi + \pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}$

Lado do dodecágono: $[BC]$

Lado do dodecágono: $[HI]$

b) $-\frac{35\pi}{4} = \frac{-32\pi - 3\pi}{4} = -8\pi - \frac{3\pi}{4}$

Página 13

8.1. $\sin \frac{19\pi}{6} - \cos \frac{11\pi}{3} + \tan \frac{21\pi}{4} = \sin\left(\frac{18\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{12\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{20\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$
 $= -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$

8.2. $\tan \frac{11\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{2} + \cos \frac{29\pi}{4} = \tan\left(\frac{12\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{14\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{28\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(7\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$
 $= -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



- 9.1. $\sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \tan(-\alpha) = -\sin \alpha + \sin \alpha + \tan \alpha = \tan \alpha$
- 9.2. $\sin(8\pi - \alpha) - \cos(5\pi + \alpha) = \sin(-\alpha) + \cos \alpha = -\sin \alpha + \cos \alpha$
- 9.3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(-\alpha) - \tan(\pi - \alpha) = -\sin \alpha + \sin \alpha + \tan \alpha = \tan \alpha$
- 9.4. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(5\pi + \alpha) = -\sin \alpha + \sin \alpha = 0$
10. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$, então $-\cos \alpha = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$. Logo, $\alpha \in 1.^\circ \text{Q}$.
 $\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) - \tan(-\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \tan \alpha = -\sin \alpha + \tan \alpha$
 $\sin^2 \alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5} \vee \sin \alpha = \frac{3}{5}$. Como $\alpha \in 1.^\circ \text{Q}$, então $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.
 $\tan \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$. Assim: $-\sin \alpha + \tan \alpha = -\frac{3}{5} + \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$

11.1. $\overline{AO} = 1$; $\overline{BC} = 1 - \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$; $\overline{AC} = -\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Assim: $A_{[AOBC]} = \frac{1 + \frac{2 - \sqrt{3}}{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{4 - \sqrt{3}}{8}$

11.2. $\overline{AO} = 1$; $\overline{BC} = 1 - \cos \alpha$; $\overline{AC} = -\sin \alpha$

$A_{[AOBC]}(\alpha) = \frac{1 + (1 - \cos \alpha)}{2} \times (-\sin \alpha) = \frac{2 - \cos \alpha}{2} \times (-\sin \alpha) = \frac{\sin \alpha (\cos \alpha - 2)}{2}$

Ficha 4

2.1. Funções: seno, cosseno e tangente

Página 14

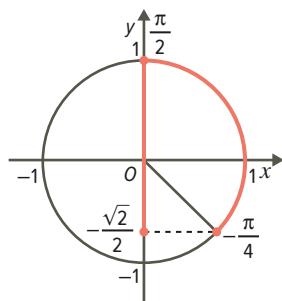
1. Sabe-se que a função seno atinge o máximo nos pontos de abcissa $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Seja $A(a, 1)$, então $a = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$, logo $A\left(\frac{9\pi}{2}, 1\right)$. Sabe-se que os zeros da função seno são dados por $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $B(5\pi, 0)$.
2. $g(a) = \cos a \Leftrightarrow \cos a = \frac{2}{5}$, sendo $a \in]\pi, 2\pi[$. Então, $a \in 4.^\circ \text{Q}$.
 $\sin^2 a + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 a = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow \sin a = -\frac{\sqrt{21}}{5} \vee \sin a = \frac{\sqrt{21}}{5}$
 Como $a \in 4.^\circ \text{Q}$, então $\sin a = -\frac{\sqrt{21}}{5}$. Assim: $\tan a = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow \tan a = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

Página 15

3.1. $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 + \sin x \leq 2$

$D'_f = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$

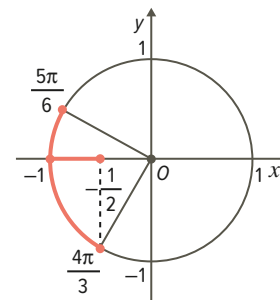
O mínimo de f é $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
 e o máximo de f é 2 .



3.2. $-1 \leq \cos x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2 \leq -1 + \cos x \leq -\frac{3}{2}$

$D'_g = \left[-2, -\frac{3}{2}\right]$

O mínimo de g é -2
 e o máximo de g é $-\frac{3}{2}$.





4.1. $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

4.2. $f(2) = \frac{1}{2} - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 2\right) = \frac{1}{2} - 2 \times \cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$

$f(12) = \frac{1}{2} - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 12\right) = \frac{1}{2} - 2 \times \cos(3\pi) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

4.3. $f(-a) = \frac{1}{2} - 2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}a\right) = \frac{1}{2} - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}a\right) = f(a)$. Assim, $f(-a) = 1$.

$f(a+16) = \frac{1}{2} - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}(a+16)\right) = \frac{1}{2} - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}a + 4\pi\right) = \frac{1}{2} - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}a\right) = f(a)$. Assim, $f(a+16) = 1$.

5. (C) $1 + \cos(2x)$

Sabe-se que $f(0) = 2$ e que $f(2\pi) = 2$.

Nas opções (A) e (B), obter-se-ia $f(0) = 3 \neq 2$.

Na opção (D), obter-se-ia $f(2\pi) = 0 \neq 2$.

Na opção (C), $f(0) = 2 \wedge f(2\pi) = 2$. Logo, a opção é a (C).

Página 16

6.1. $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq 1 + 3 \sin x \leq 4$

Logo, $D_f = [-2, 4]$.

6.2. $\overline{QR} = 8,440 - 7,268 \approx 1,172 \approx 1,17$

O mínimo da função é -2 , logo a altura do triângulo $[PQR]$ é: $|-2| + 3,5 = 5,5$

Assim, $A_{[POR]} = \frac{1,17 \times 5,5}{2}$, ou seja, $A_{[POR]} \approx 3,2$.

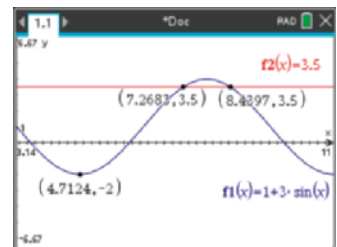
7. Como o período positivo mínimo é igual a $\frac{\pi}{4}$, tem-se $\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{c}$, pelo que: $c = 8$

Seja $f(x) = a + b \cos(8(x-d))$. Considerando $b > 0$:

$-1 \leq \cos(8(x-d)) \leq 1 \Leftrightarrow -b \leq b \cos(8(x-d)) \leq b \Leftrightarrow a-b \leq a+b \cos(8(x-d)) \leq a+b$

Para o contradomínio ser $[-4, 0]$, tem-se: $\begin{cases} a-b = -4 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$

Por exemplo, considerando $d = 0$, $f(x) = -2 + 2 \cos(8x)$.



Página 17

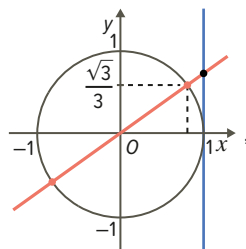
8.1. Zeros: $-\pi, 0$ e π

8.2. Sendo $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então

$\tan\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

A abscissa do ponto A é $\frac{\pi}{6} - \pi$,

ou seja, $-\frac{5\pi}{6}$ e a abscissa do ponto B é $\frac{\pi}{6}$.

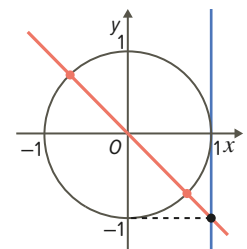


8.3. Sabe-se que $\tan\frac{\pi}{4} = 1$. Então,

a abscissa do ponto C é $-\frac{\pi}{4}$ e a

abscissa do ponto D é $-\frac{\pi}{4} + \pi$,

ou seja, $\frac{3\pi}{4}$.



9.1. Seja M o ponto médio de $[OQ]$. Então, $\overline{OQ} = 2 \times \overline{OM}$.

$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, logo $M(\cos \alpha, 0)$ e $Q(2 \cos \alpha, 0)$.

9.2. Se o triângulo é equilátero, então $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$ e $\overline{MP} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo M o ponto médio de $[OQ]$. $A_{[OPQ]} = \left(1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

9.3. Seja M o ponto médio de $[OQ]$, então: $A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{MP}}{2} = \frac{2 \cos \alpha \times \sin \alpha}{2} = \sin \alpha \times \cos \alpha$



Ficha 5

2.2. Fenómenos periódicos

Página 18

1.1. 15 min correspondem a 0,25 h .

$$h(14,25) = 2 + 1,2 \sin(0,5 \times 14,25 - 0,8), \text{ ou seja,}$$

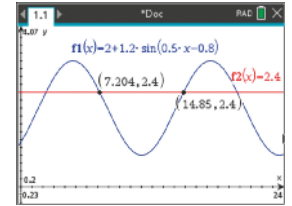
$$h(14,25) \approx 2,05$$

A altura às 14:15 é 2,05 metros.

1.2. $t \approx 7,204$. Assim, 7 h + 0,204 h . Como

$0,204 \times 60 \approx 12$ min , conclui-se que decorreram 7 h e 12 min .

A última vez, antes do meio-dia, o nível da água foi 2,4 metros, aproximadamente, às 07:12 .



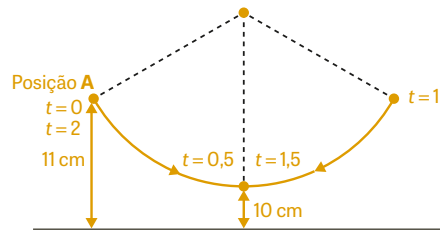
Página 19

2.1. $-1 \leq \cos(2\pi t) \leq 1 \Leftrightarrow -0,5 \leq 0,5 \cos(2\pi t) \leq 0,5 \Leftrightarrow 10,5 - 0,5 \leq 10,5 + 0,5 \cos(2\pi t) \leq 10,5 + 0,5 \Leftrightarrow 10 \leq 10,5 + 0,5 \cos(2\pi t) \leq 11$

A altura máxima do pêndulo à base do relógio é 11 cm e a mínima é 10 cm .

2.2. $p = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. O período mínimo da função é 1 .

2.3. Decorrerão dois segundos até que o pêndulo volte à posição A.



A figura não está à escala.

3.1. 66 batimentos — 60 segundos

1 batimento — x segundos

$$x = \frac{60}{66} = \frac{10}{11}, \text{ logo 1 batimento dura } \frac{10}{11} \text{ s, pelo que o período de } f \text{ é } p = \frac{10}{11}.$$

$$\frac{10}{11} = \frac{2\pi}{c} \Leftrightarrow c = \frac{22\pi}{10} \Leftrightarrow c = \frac{11\pi}{5}$$

3.2. $-1 \leq \cos(ct) \leq 1 \Leftrightarrow -22,5 \leq 22,5 \cos(ct) \leq 22,5 \Leftrightarrow 98,5 - 22,5 \leq 9,8 + 22,5 \cos(ct) \leq 98,5 + 22,5 \Leftrightarrow 76 \leq 9,8 + 22,5 \cos(ct) \leq 121$

O valor máximo da tensão foi igual a 121 mmHg e o valor mínimo da tensão foi igual a 76 mmHg .

2. PRODUTO ESCALAR

Ficha 1

1.1. Inclinação de uma reta

1.2. Relação entre a inclinação e o declive de uma reta

Página 20

1.1. a) A reta DC é paralela à reta AB , logo a inclinação de DC é 30° .

b) A reta BC é paralela à reta AD , logo a inclinação de AD é $30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$.

A inclinação de BC é 120° .

1.2. A reta AD é definida por uma equação do tipo $y = mx + b$.

A inclinação da reta AD é 120° , logo o seu declive é: $m = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

Como A pertence à reta AD , então $-\sqrt{3} \times 3 + b = 0 \Leftrightarrow b = 3\sqrt{3}$

A equação reduzida da reta AD é $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$.



2.1. $\tan \alpha$ é igual ao declive da reta r , pelo que $m = \frac{0 - (-2)}{\frac{8}{3} - 0} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Logo, $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

2.2. O declive da reta s é: $\tan 150^\circ = \tan (180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. $\tan \alpha = -\frac{1}{4}$; $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{17}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{17} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}} \vee \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Como o declive é negativo, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Então, $\cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Página 21

4.1. A reta ED é paralela à reta FC .

Como o hexágono é regular, o triângulo $[BOC]$ é equilátero, sendo $\widehat{BOC} = 60^\circ$. Logo, a inclinação da reta FC é $60^\circ : 2 = 30^\circ$.

Assim, o declive da reta ED é: $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Como $D(0, 2)$ pertence a ED , tem-se: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$

4.2. A reta AF é paralela à reta BE .

Como o hexágono é regular, o triângulo $[DOE]$ é equilátero, sendo $\widehat{DOE} = 60^\circ$. Logo, a inclinação da reta BE é $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Assim, o declive da reta AF é: $\tan 150^\circ = \tan (180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Sendo $A(0, -2)$, tem-se: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$

5.1. O declive da reta r é $m = -\frac{1}{2}$. Seja α a inclinação da reta r , então $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$.

Como o declive é negativo, $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 180^\circ$, ou seja, $\alpha \approx 153,43^\circ$.

5.2. a) $m = \frac{-3 - 3}{4 - 1} = -\frac{6}{3} = -2$

b) Seja α a inclinação da reta AB , então $\tan \alpha = -2$. Como o declive é negativo, $\alpha = \tan^{-1}(-2) + 180^\circ$, ou seja, $\alpha \approx 116,6^\circ$.

5.3. A reta r tem equação $y = -\frac{1}{2}x + b$. Como o ponto de coordenadas $(2, 1)$ pertence a r , então:

$$1 = -\frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 2, \text{ pelo que } y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

A reta AB tem equação $y = -2x + b$. Como o ponto $A(1, 3)$ pertence a AB , então: $3 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 5$, pelo que $y = -2x + 5$.

$$-\frac{1}{2}x + 2 = -2x + 5 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \text{ e } y = -2 \times 2 + 5 \Leftrightarrow y = 1. \text{ Assim, } C(2, 1).$$

6. $[ABCD]$ é um paralelogramo, logo $\widehat{BAD} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$. Assim, a inclinação da reta AB é $180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$.

A reta CD é paralela à reta AB , logo a sua inclinação é 60° , sendo $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

A equação reduzida de CD é $y = \sqrt{3}x + b$. O ponto D pertence ao eixo Oy e a sua ordenada é igual à abcissa de A , dado que $[ADO]$ é um triângulo retângulo isósceles. A reta CD é definida pela equação $y = \sqrt{3}x + 2$.

Ficha 2

2.1. Produto escalar de dois vetores

Página 22

1.1. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{PR}^2 = 9^2 + (3\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \overline{PR}^2 = \sqrt{81 + 27} \Leftrightarrow \overline{PR} = \sqrt{108} \Leftrightarrow \overline{PR} = 6\sqrt{3}$$



1.2. a) $\alpha = 30^\circ$

$$\cos \alpha = \frac{PQ}{PR} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{9}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, então $\alpha = 30^\circ$.

b) $\beta = 60^\circ$

$$\begin{aligned} \beta &= 90^\circ - \alpha \\ \beta &= 90^\circ - 30^\circ \\ \beta &= 60^\circ \end{aligned}$$

c) $\theta = 120^\circ$

As diagonais do retângulo são iguais e bissetam-se, logo $\overline{OP} = \overline{OQ}$. O triângulo $[OPQ]$ é isósceles, pelo que:

$\hat{POQ} = 180^\circ - 2 \times 30^\circ = 120^\circ$. Assim, $\theta = 120^\circ$, já que é verticalmente oposto ao ângulo POQ .

1.3. a) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \|\overrightarrow{PQ}\| \times \|\overrightarrow{PR}\| \times \cos \alpha$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 9 \times 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 81$$

c) $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OR} = \|\overrightarrow{PO}\| \times \|\overrightarrow{OR}\| \times \cos 0^\circ$

$$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OR} = \frac{6\sqrt{3}}{2} \times \frac{6\sqrt{3}}{2} \times 1 = 27$$

e) $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OR} = \|\overrightarrow{OS}\| \times \|\overrightarrow{OR}\| \times \cos \theta$

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OR} = \|\overrightarrow{OS}\| \times \|\overrightarrow{OR}\| \times \cos \theta$$

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OR} = \frac{6\sqrt{3}}{2} \times \frac{6\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -13,5$$

b) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = \|\overrightarrow{PQ}\| \times \|\overrightarrow{RS}\| \times \cos 180^\circ$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = 9 \times 9 \times (-1) = -81$$

d) $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QS} = \|\overrightarrow{PR}\| \times \|\overrightarrow{QS}\| \times \cos \theta$

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QS} = 6\sqrt{3} \times 6\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -54$$

f) $(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SO}$

$$\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SO} = \|\overrightarrow{SP}\| \times \|\overrightarrow{SO}\| \times \cos \beta$$

$$\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SO} = 3\sqrt{3} \times \frac{6\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right) = 13,5$$

Página 23

2.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = \|\overrightarrow{DC}\| \times \|\overrightarrow{DB}\| \times \cos(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB})$

Pelo Teorema de Pitágoras: $\overline{DB}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{DB} = \sqrt{8}$

$[DB]$ é uma diagonal facial, logo $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) = 45^\circ$.

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = 2 \times \sqrt{8} \times \cos(45^\circ) = 2\sqrt{8} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$$

2.2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos 45^\circ = 2 \times \sqrt{8} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$

Repara que $[AC]$ é uma diagonal facial, pelo que $\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ e $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 45^\circ$

2.3. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CG} = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = (\sqrt{8})^2 = 8$

3.1. $\overline{BP} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times 4 = 3$. Pelo Teorema de Pitágoras: $\overline{AP}^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AP} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{AP} = 5$

Assim, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos \beta = \frac{3}{5}$.

3.2. a) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overline{AP} \cdot \overline{AB} = -(\overline{AP} \cdot \overline{AB}) = -(\|\overrightarrow{AP}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos \alpha) = -(5 \times 4 \times \frac{4}{5}) = -16$

b) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AP}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \cos(\hat{PAD})$. Repara que $\hat{PAD} = \beta$. Assim: $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \times 4 \times \frac{3}{5} = 12$

4. $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BN}) = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PB} + \underbrace{\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{BN}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{PB}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}}_0 = \|\overrightarrow{PB}\|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$

5. $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \underbrace{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PB}}_0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$

Seja $\overline{AP} = x$, então $\overline{AD} = x$ e $\overline{PB} = 3x$.

$$\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{PA}\| \times \|\overrightarrow{PB}\| \times \cos 180^\circ + \|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos 0^\circ = x \times 3x \times (-1) + x \times x \times 1 = -2x^2$$

$$\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PC} = -2 \Leftrightarrow -2x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 1, \text{ ou seja, } x = 1.$$

$$\overline{AB} = 4\overline{AP} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4 \times 1 \Leftrightarrow \overline{AB} = 4$$



Ficha 3

2.2. Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores

Página 24

$$1.1. \text{ a) } \vec{AC} = C - A = (0, 2) - (2, 3) = (-2, -1) \qquad \text{b) } \vec{BD} = D - B = (-2, -2) - (-3, 1) = (1, -3)$$

$$\vec{CE} = E - C = (3, -2) - (0, 2) = (3, -4) \qquad \vec{CD} = D - C = (-2, -2) - (0, 2) = (-2, -4)$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{CE} = (-2, -1) \cdot (3, -4) = -6 + 4 = -2 \qquad \vec{BD} \cdot \vec{CD} = (1, -3) \cdot (-2, -4) = -2 + 12 = 10$$

$$1.2. \vec{CE}(3, -4). \text{ Seja } P(x, 0), \text{ então: } \vec{DP} = P - D = (x, 0) - (-2, -2) = (x+2, 2)$$

$$\vec{CE} \perp \vec{DP} \Leftrightarrow \vec{CE} \cdot \vec{DP} = 0 \Leftrightarrow (3, -4) \cdot (x+2, 2) = 0 \Leftrightarrow 3x+6-8=0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}. \text{ Assim, } P\left(\frac{2}{3}, 0\right).$$

$$1.3. Q(0, y), \text{ logo } \vec{QE} = E - Q = (3, -2) - (0, y) = (3, -2-y) \text{ e } \vec{AB} = B - A = (-3, 1) - (2, 3) = (-5, -2).$$

$$\vec{QE} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{QE} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (3, -2-y) \cdot (-5, -2) = 0 \Leftrightarrow -15+4+2y=0 \Leftrightarrow y = \frac{11}{2}. \text{ Assim, } Q\left(0, \frac{11}{2}\right).$$

$$2.1. O(0, 0, 0); A(0, 6, 0); B(-6, 6, 0); C(-6, 0, 0); D(0, 0, 6); E(0, 6, 6); F(-6, 6, 6) \text{ e } G(-6, 0, 6)$$

$$2.2. \text{ a) } \vec{AF} = F - A = (-6, 6, 6) - (0, 6, 0) = (-6, 0, 6)$$

$$\vec{AG} = G - A = (-6, 0, 6) - (0, 6, 0) = (-6, -6, 6)$$

$$\vec{AF} \cdot \vec{AG} = (-6, 0, 6) \cdot (-6, -6, 6) = 36 + 36 = 72$$

$$\text{ b) } \vec{BD} = D - B = (0, 0, 6) - (-6, 6, 0) = (6, -6, 6); \vec{AG} = (-6, -6, 6)$$

$$\vec{BD} \cdot \vec{AG} = (6, -6, 6) \cdot (-6, -6, 6) = -36 + 36 + 36 = 36$$

$$2.3. \text{ Seja } P(x, 6, 6), \text{ sabe-se que } -6 \leq x \leq 0.$$

$$\vec{BP} = P - B = (x, 6, 6) - (-6, 6, 0) = (x+6, 0, 6) \text{ e } \vec{DF} = F - D = (-6, 6, 6) - (0, 0, 6) = (-6, 6, 0)$$

$$\vec{BP} \cdot \vec{DF} = -24 \Leftrightarrow (x+6, 0, 6) \cdot (-6, 6, 0) = -24 \Leftrightarrow -6x-36=-24 \Leftrightarrow x = \frac{12}{-6} \Leftrightarrow x = -2. \text{ Assim, } P(-2, 6, 6).$$

Página 25

$$3. \text{ Seja } P(x, -x). \text{ O triângulo } [ABP] \text{ é retângulo em } B, \text{ pelo que: } \vec{BA} \perp \vec{BP} \Leftrightarrow \vec{BA} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\vec{BA} = A - B = (2, -1) - (0, 3) = (2, -4); \vec{BP} = P - B = (x, -x) - (0, 3) = (x, -x-3)$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BP} = 0 \Leftrightarrow (2, -4) \cdot (x, -x-3) = 0 \Leftrightarrow 2x+4x+12=0 \Leftrightarrow 6x=-12 \Leftrightarrow x = -2. \text{ Assim, } P(-2, 2).$$

$$4.1. A(4, 4, 6); B(0, 4, 6); C(0, 0, 6); D(4, 0, 6)$$

$$M\left(\frac{x_D+x_V}{2}, \frac{y_D+y_V}{2}, \frac{z_D+z_V}{2}\right) = M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = M(3, 1, 3)$$

$$4.2. \text{ Seja } P(0, y, 6). \text{ Se o ângulo formado pelos vetores } \vec{MV} \text{ e } \vec{AP} \text{ é obtuso, então } \vec{MV} \cdot \vec{AP} < 0.$$

$$\vec{MV} = V - M = (2, 2, 0) - (3, 1, 3) = (-1, 1, -3); \vec{AP} = P - A = (0, y, 6) - (4, 4, 6) = (-4, y-4, 0)$$

$$\vec{MV} \cdot \vec{AP} < 0 \Leftrightarrow (-1, 1, -3) \cdot (-4, y-4, 0) < 0 \Leftrightarrow 4+y-4 < 0 \Leftrightarrow y < 0$$

O ponto P pertenceria à aresta $[BC]$ se $0 \leq y \leq 4$, o que não acontece nas condições apresentadas.

$$5. \text{ Seja } B(x, x, 0). \text{ O triângulo } [OAB] \text{ é retângulo em } A, \text{ pelo que: } \vec{AO} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AO} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\vec{AO} = O - A = (0, 0, 0) - (2, 2, 2) = (-2, -2, -2); \vec{AB} = B - A = (x, x, 0) - (2, 2, 2) = (x-2, x-2, -2)$$

$$\vec{AO} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (-2, -2, -2) \cdot (x-2, x-2, -2) = 0 \Leftrightarrow -2x+4-2x+4+4=0 \Leftrightarrow -4x=-12 \Leftrightarrow x=3. \text{ Assim, } B(3, 3, 0).$$

$$6. \text{ O ponto } I \text{ pertence a } r, \text{ logo } I(x, -x+4). \text{ Se o ângulo } SRI \text{ é reto: } \vec{RI} \perp \vec{RS} \Leftrightarrow \vec{RI} \cdot \vec{RS} = 0$$

$$\vec{RI} = I - R = (x, -x+4) - (3, -3) = (x-3, -x+7); \vec{RS} = S - R = (6, -2) - (3, -3) = (3, 1)$$

$$\vec{RI} \cdot \vec{RS} = 0 \Leftrightarrow (x-3, -x+7) \cdot (3, 1) = 0 \Leftrightarrow 3x-9-x+7=0 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1, \text{ ou seja, } I(1, 3)$$

Os pontos $I(1, 3)$ e $R(3, -3)$ pertencem à reta s , logo o seu declive é: $m = \frac{3-(-3)}{1-3} = \frac{6}{-2} = -3$. A reta r é definida pela equação $y = -3x + b$. Como $R \in r$, tem-se que $-3 = -3 \times 3 + b \Leftrightarrow -3 + 9 = b \Leftrightarrow b = 6$, ou seja, $y = -3x + 6$.



Ficha 4

2.3. Ângulo formado por dois vetores

2.4. Ângulo formado por duas retas

Página 26

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 3) \cdot (-2, 4) = -2 + 12 = 10; \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}; \|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{Assim, } \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{10}{\sqrt{10} \times \sqrt{20}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Daqui resulta que } \alpha = 45^\circ.$$

$$2.1. B(2, 2, 0); C(-2, 2, 0); D(-2, -2, 0); E(-2, -2, 3); F(2, -2, 3); H(-2, 2, 3)$$

$$2.2. \vec{FD} = D - F = (-2, -2, 0) - (2, -2, 3) = (-4, 0, -3)$$

$$\vec{AG} = G - A = (2, 2, 3) - (2, -2, 0) = (0, 4, 3)$$

$$\vec{FD} \cdot \vec{AG} = (-4, 0, -3) \cdot (0, 4, 3) = -9; \|\vec{FD}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5; \|\vec{AG}\| = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos(\vec{FD}, \vec{AG}) = -\frac{9}{25}. \text{ Então, } (\vec{FD}, \vec{AG}) = \cos^{-1}\left(-\frac{9}{25}\right), \text{ ou seja, } (\vec{FD}, \vec{AG}) \approx 111^\circ.$$

$$3.1. \text{ O declive da reta } r \text{ é } 2. \text{ Um vetor diretor de } r \text{ pode ser } \vec{r}(1, 2). \text{ O declive da reta } s \text{ é } m = \frac{-1-4}{2-1} = \frac{-5}{1}.$$

Um vetor diretor de s pode ser $\vec{s}(-1, 5)$.

$$3.2. \vec{r} \cdot \vec{s} = (1, 2) \cdot (-1, 5) = -1 + 10 = 9; \|\vec{r}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}; \|\vec{s}\| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$\cos(r, s) = |\cos(\vec{r}, \vec{s})| = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|9|}{\sqrt{5} \times \sqrt{26}} = \frac{9}{\sqrt{130}}. \text{ Então, } (r, s) = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{130}}\right), \text{ ou seja, } (r, s) \approx 38^\circ.$$

Página 27

$$4.1. R = Q + \vec{QR} = (2, -1) + (2, 3) = (4, 2). \text{ Como } [PQRS] \text{ é um paralelogramo, então } [PS] \parallel [QR], \text{ pelo que: } S = P + \vec{QR} = (-1, 3) + (2, 3) = (1, 6)$$

$$4.2. \text{ a) } \vec{QP} = P - Q = (-1, 3) - (2, -1) = (-3, 4); \vec{QR} = (2, 3)$$

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = (-3, 4) \cdot (2, 3) = -6 + 12 = 6$$

$$\|\vec{QP}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ e } \|\vec{QR}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos(\vec{QP}, \vec{QR}) = \frac{6}{5\sqrt{13}} \text{ e } (\vec{QP}, \vec{QR}) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{5\sqrt{13}}\right) \approx 70,6^\circ$$

$$\text{b) } \vec{PQ} = (3, -4) \text{ e } \vec{PS} = (2, 3), \text{ logo } \vec{PQ} \cdot \vec{PS} = -6. \|\vec{PQ}\| = 5 \text{ e } \|\vec{PS}\| = \sqrt{13}$$

$$\cos(\vec{PQ}, \vec{PS}) = |\cos(\vec{PQ}, \vec{PS})| = \frac{|-6|}{5\sqrt{13}} = \frac{6}{5\sqrt{13}}, \text{ então } (PQ, PS) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{5\sqrt{13}}\right), \text{ ou seja, } (PQ, PS) \approx 70,6^\circ.$$

$$5.1. (\mathbf{B}) \vec{CA} \cdot \vec{AD} = 0. \text{ Como o prisma é reto, as retas que contêm as arestas laterais são perpendiculares às das bases.}$$

$$5.2. B(2, 2, 0) \text{ e } A(2, 0, 0), \text{ logo } \overline{AB} = 2. \text{ Como a medida da área da base é } 2, \text{ então a altura, } h, \text{ do triângulo } [ABC], \text{ em relação à base } [AB], \text{ é tal que: } \frac{2 \times h}{2} = 2 \Leftrightarrow h = 2$$

$$\text{Como } \overline{AC} = \overline{BC}, \text{ então } C(2, 1, 2), \text{ pelo que } \vec{AC} = C - A = (2, 1, 2) - (2, 0, 0) = (0, 1, 2) \text{ e } \vec{BC} = C - B = (2, 1, 2) - (2, 2, 0) = (0, -1, 2).$$

$$\text{Assim, } \vec{AC} \cdot \vec{BC} = (0, 1, 2) \cdot (0, -1, 2) = -1 + 4 = 3.$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ e } \|\vec{BC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \text{ logo: } \cos(\vec{AC}, \vec{BC}) = |\cos(\vec{AC}, \vec{BC})| = \frac{3}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3}{5}$$

$$(\vec{AC}, \vec{BC}) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right), \text{ ou seja, } (\vec{AC}, \vec{BC}) \approx 53^\circ$$

$$6. A(a, 0, 0); B(0, a, 0); C(0, 0, a); M\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right); N\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right)$$

$$\vec{BN} = N - B = \left(\frac{a}{2}, -a, \frac{a}{2}\right); \vec{CM} = M - C = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -a\right); \|\vec{BN}\| = \|\vec{CM}\| = \sqrt{\frac{3a^2}{2}}; \vec{BN} \cdot \vec{CM} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = -\frac{3a^2}{4}$$

$$\cos(\vec{BN}, \vec{CM}) = |\cos(\vec{BN}, \vec{CM})| = \frac{\frac{3a^2}{4}}{\left(\sqrt{\frac{3a^2}{2}}\right)^2} = \frac{3a^2}{4} \times \frac{2}{3a^2} = \frac{1}{2}. \text{ Então, } (\vec{BN}, \vec{CM}) = 60^\circ.$$



Ficha 5

2.5. Relação entre os declives de retas perpendiculares no plano

Página 28

1.1. $m_r = -5$ e $r \perp s$. Então, $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5}$. A reta s é definida pela equação $y = \frac{1}{5}x + b$.

$(5, -2) \in s$, logo $-2 = \frac{1}{5} \times 5 + b \Leftrightarrow -2 - 1 = b \Leftrightarrow b = -3$. Assim, a reta s é definida pela equação $y = \frac{1}{5}x - 3$.

1.2. $m_r = -5$ e $r \parallel t$. Então $m_t = m_r = -5$. A reta t é definida pela equação $y = -5x + b$.

$(-2, 1) \in s$, logo $1 = -5 \times (-2) + b \Leftrightarrow 1 - 10 = b \Leftrightarrow b = -9$. Assim, a reta t é definida pela equação $y = -5x - 9$.

2.1. $\vec{r}(1, -2)$ é um vetor diretor da reta r , então $m_r = \frac{-2}{1} = -2$.

$$r \perp t \Leftrightarrow m_t = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

2.2. $m_t = \frac{1}{2}$, então um vetor diretor de t é $\vec{t}(2, 1)$.

$(2, -3) \in t$, logo t é definida pela equação vetorial $(x, y) = (2, -3) + k(2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

2.3. a) $m_s = \frac{0-4}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2$, pelo que as retas r e s são paralelas, já que $m_s = m_r$.

b) A reta s é definida pela equação $y = -2x + b$.

$B(3, 0) \in s$, então $0 = -2 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 6$. A reta s é definida pela equação $y = -2x + 6$.

c) $m_s = -2$ e $m_t = \frac{1}{2}$, logo as retas s e t são perpendiculares. Sendo P o ponto de interseção das retas s e t , o triângulo $[CPD]$ é retângulo em P .

Página 29

3. A inclinação de AB é 120° , pelo que: $m_{AB} = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B , logo: $AB \perp BC \Leftrightarrow m_{BC} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A reta BC é definida pela equação $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ e, como $B(0, 5) \in BC$, então $b = 5$. A reta BC é definida por $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$.

4.1. Seja $B(0, y)$, com $y < 0$. Como B pertence à circunferência: $(0+4)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow y = -3 \vee y = 3$
Então, $B(0, -3)$.

4.2. O triângulo $[ABC]$ é inscrito numa semicircunferência, já que $[AB]$ é um diâmetro, pelo que o triângulo é retângulo em C . Assim, as retas BC e AC são perpendiculares, logo $m_{AC} = -\frac{1}{m_{BC}}$. O declive de BC é $m_{BC} = \frac{-3-4}{0+1} = -7$, ou seja, $m_{AC} = \frac{1}{7}$. A reta AC é definida pela equação

$y = \frac{1}{7}x + b$. Como $C(-1, 4) \in AC$, então: $4 = \frac{1}{7} \times (-1) + b \Leftrightarrow 4 + \frac{1}{7} = b \Leftrightarrow b = \frac{29}{7}$. A reta AC é definida por $y = \frac{1}{7}x + \frac{29}{7}$.

4.3. a) $D(-4, 0)$ e $\vec{BD} = D - B = (-4, 0) - (0, -3) = (-4, 3)$

$D + \vec{BD} = (-4, 0) + (-4, 3) = (-8, 3)$ e representa as coordenadas do ponto A .

b) $\vec{AB} = B - A = (0, -3) - (-8, 3) = (8, -6)$; $\vec{AC} = C - A = (-1, 4) - (-8, 3) = (7, 1)$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (8, -6) \cdot (7, 1) = 56 - 6 = 50$; $\|\vec{AB}\| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$; $\|\vec{AC}\| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$

$\cos(\widehat{AB, AC}) = \left| \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) \right| = \frac{50}{10\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}}$. Daqui resulta que $(\widehat{AB, AC}) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right) = 45^\circ$.

5. As coordenadas dos pontos B , C , N e M são $B(a, a)$, $C(0, a)$, $M\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ e $N\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

O declive da reta CM é $m_{CM} = \frac{a-0}{0-\frac{a}{2}} = \frac{a}{-\frac{a}{2}} = -2$ e o declive da reta BN é $m_{BN} = \frac{a-\frac{a}{2}}{a-0} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$.

$m_{CM} = -\frac{1}{m_{BN}}$, logo as retas CM e BN são perpendiculares. Nota que os valores dos declives de ambas as retas são independentes de a .



Ficha 6

3.1. Equação de um plano definido por um ponto e um vetor normal

Página 30

- 1.1.** $x - 2y + z + d = 0$. Como $A(4, 1, -1)$ pertence ao plano α , então:
 $4 - 2 \times 1 + (-1) + d = 0 \Leftrightarrow 4 - 2 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$
 Uma equação do plano α é $x - 2y + z - 1 = 0$.
- 1.2.** De **1.1.** sabe-se que o plano α é definido por $x - 2y + z - 1 = 0$.
 $2 - 2 \times 2 + 3 - 1 = 0$ é verdadeiro, logo B pertence a α . $2 - 2 \times 0 + 1 - 1 = 0$ é falso, logo C não pertence a α .
 $1 - 2 \times 1 + 2 - 1 = 0$ é verdadeiro, logo D pertence a α . $2 - 2 \times 0 + (-1) - 1 = 0$ é verdadeiro, logo E pertence a α .
- 1.3.** $-3 - 2(3k - 4) + 4k - 1 = 0 \Leftrightarrow -3 - 6k + 8 + 4k - 1 = 0 \Leftrightarrow -2k = -4 \Leftrightarrow k = 2$
- 2.1.** Como $\vec{v}(3, -1, 2)$ é normal ao plano β , então β é definido por uma equação do tipo $3x - y + 2z + d = 0$.
 Como $A(2, 1, -1)$ pertence ao plano β , então $3 \times 2 - 1 + 2 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow 6 - 1 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$.
 Uma equação do plano β é $3x - y + 2z - 3 = 0$.
- 2.2.** Um vetor diretor de r é normal ao plano β . Por exemplo, $\vec{r}(1, -2, -2)$. Então, β pode ser definido por uma equação do tipo $x - 2y - 2z + d = 0$.
 Como $B\left(-1, \frac{1}{2}, -1\right)$ pertence ao plano β , então $-1 - 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow -1 - 1 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$.
 Uma equação do plano β é $x - 2y - 2z = 0$.
- 3.1.** $2x - y + 4z = 3 \Leftrightarrow 2x - y - 3 + 4z = 0 \Leftrightarrow 2(x - 0) - (y + 3) + 4(z - 0) = 0$ $\vec{n}(2, -1, 4)$ e $P(0, -3, 0)$
- 3.2.** $x - y - 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow x - y - 2(z + 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 0) - (y - 0) - 2(z + 2) = 0$ $\vec{n}(1, -1, -2)$ e $P(0, 0, -2)$
- 3.3.** $y + 2z = 6 \Leftrightarrow y - 6 + 2z = 0 \Leftrightarrow (y - 6) + 2(z - 0) = 0$ $\vec{n}(0, 1, 2)$ e $P(0, 6, 0)$

Página 31

- 4.** $\vec{OG} = (3, 3, 3) - (0, 0, 0) = (3, 3, 3)$, logo o plano α é definido por uma equação do tipo $3x + 3y + 3z + d = 0$.
 Como $B(3, 3, 0)$ pertence a α , então: $3 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -18$
 Uma equação do plano α é $3x + 3y + 3z - 18 = 0$.
- 5.1.** $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ e $\vec{AB} = (1, 2, 0) - (0, 0, 2) = (1, 2, -2)$. Então, $BCH: x + 2y - 2z + d = 0$.
 Sendo $B(1, 2, 0)$, tem-se: $1 + 2 \times 2 - 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -5$. Logo, $BCH: x + 2y - 2z - 5 = 0$.
- 5.2. a)** $\vec{AI} \perp \vec{AFG}$ e $\vec{AI} = (-2, 1, 2) - (0, 0, 2) = (-2, 1, 0)$
 Então, $AFG: -2x + y + d = 0$. Como $A(0, 0, 2)$ pertence ao plano AFG , $-2 \times 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$. Logo, $AFG: -2x + y = 0$.
- b)** $[BC] \parallel [AD]$, logo a reta BC tem a direção do vetor $\vec{AI}(-2, 1, 0)$.
 Como passa em $B(1, 2, 0)$, então: $(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(-2, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$
- 6.1.** $\vec{AC} = (7, 1, 1) - (2, 0, 0) = (5, 1, 1)$; $\overline{AC} = \|\vec{AC}\| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{27}$
 $\vec{AB} = (5, 3, 3) - (2, 0, 0) = (3, 3, 3)$; $\overline{AB} = \|\vec{AB}\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27}$
 Como $\overline{AC} = \overline{AB}$, então o triângulo $[ABC]$ é isósceles.
- 6.2.** No triângulo isósceles $[ABC]$, seja M o ponto médio de $[BC]$. Então, $\vec{MA} \perp \vec{CBE}$. $M\left(\frac{5+7}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = M(6, 2, 2)$, pelo que
 $\vec{MA} = (2, 0, 0) - (6, 2, 2) = (-4, -2, -2)$, logo CBE é definido por uma equação do tipo $-4x - 2y - 2z + d = 0$.
 Como $B(5, 3, 3)$ pertence ao plano: $-4 \times 5 - 2 \times 3 - 2 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 32$. Então, $CBE: -2x - y - z = -16$.
- 6.3.** Seja α o plano medidor de $[BC]$ e M o ponto médio de $[BC]$. $M(6, 2, 2)$ pertence a α e $\vec{BC} \perp \alpha$.
 Como $\vec{BC} = C - B = (2, -2, -2)$, então α é definido por uma equação do tipo $2x - 2y - 2z + d = 0$.
 $2 \times 6 - 2 \times 2 - 2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$, logo $\alpha: 2x - 2y - 2z - 4 = 0$.



Ficha 7

3.2. Planos paralelos e planos perpendiculares

Página 32

- 1.1. Sejam $\vec{n}_\alpha(2, -3, 1)$ e $\vec{n}_\beta(1, 2, 4)$ vetores normais aos planos α e β , respetivamente.
 $(2, -3, 1) \cdot (1, 2, 4) = 2 - 6 + 4 = 0$. Como $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$, conclui-se que $\alpha \perp \beta$, ou seja, os planos α e β são perpendiculares.
- 1.2. $P \in r$, logo as coordenadas de P são do tipo: $(x, y, z) = (2 - 4k, -1 + 6k, 5 - 2k)$
 Como $P \in \alpha$, então: $2(2 - 4k) - 3(-1 + 6k) + 5 - 2k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$
 Assim, $P\left(2 - 4 \times \frac{1}{2}, -1 + 6 \times \frac{1}{2}, 5 - 2 \times \frac{1}{2}\right) = P(0, 2, 4)$. Como $\theta \parallel \beta$, o vetor $\vec{n}_\beta(1, 2, 4)$ é normal a θ .
 Uma equação do plano θ é do tipo $x + 2y + 4z + d = 0$.
 Como $P(0, 2, 4) \in \theta$, então $0 + 2 \times 2 + 4 \times 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -20$. Logo, $\theta: x + 2y + 4z - 20 = 0$.
- 2.1. $\vec{EF} \perp ADH$ e $\vec{EF} = F - E = (-2, 2, 1)$, logo ADH pode ser definido por uma equação do tipo $-2x + 2y + z + d = 0$.
 Como $E(3, -1, 4) \in ADH$, então: $-2 \times 3 + 2 \times (-1) + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$. Assim, $-2x + 2y + z + 4 = 0$.
- 2.2. $A(x, 0, 0) \in ADH$, então: $-2x + 2 \times 0 + 0 + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$. Assim, $A(2, 0, 0)$.
- 2.3. $\vec{AE} \perp EFG$ e $\vec{AE} = E - A = (1, -1, 4)$, então EFG pode ser definido por uma equação do tipo $x - y + 4z + d = 0$.
 Como $E(3, -1, 4) \in EFG$, então: $3 - (-1) + 4 \times 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -20$. Assim, $EFG: x - y + 4z - 20 = 0$.
- 2.4. $B = A + \vec{EF} = (2, 0, 0) + (-2, 2, 1) = (0, 2, 1)$, logo, $B(0, 2, 1)$.

Página 33

- 3.1. $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \perp \beta$, sendo $\vec{n}_\alpha(-1, 1, 2)$ um vetor normal ao plano α .
 Então, β pode ser definido por uma equação do tipo $-x + y + 2z + d = 0$.
 Como $C(-1, 1, 3) \in \beta$, então $-(-1) + 1 + 2 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$. Assim, $\beta: -x + y + 2z - 8 = 0$.
- 3.2. $AB \perp \alpha$, logo AB tem a direção de $\vec{n}_\alpha(-1, 1, 2)$. $B(0, 0, z) \in AB$ e $B \in \beta$, então $\beta: 0 + 0 + 2z - 8 = 0 \Leftrightarrow 2z = 8 \Leftrightarrow z = 4$, ou seja, $B(0, 0, 4)$. Assim, $AB: (x, y, z) = (0, 0, 4) + k(-1, 1, 2)$, $k \in \mathbb{R}$
- 3.3. Pretende-se conhecer \overline{AB} , sendo A o ponto de interseção da reta AB com o plano α .
 Como $A(x, y, z) \in AB$, então $(x, y, z) = (0, 0, 4) + k(-1, 1, 2) \Leftrightarrow (x, y, z) = (-k, k, 4 + 2k)$
 $A(-k, k, 4 + 2k) \in \alpha$, logo: $-(-k) + k + 2(4 + 2k) = -4 \Leftrightarrow k + k + 8 + 4k = -4 \Leftrightarrow 6k = -12 \Leftrightarrow k = -2$
 Então, $A(2, -2, 0)$. Daqui resulta que $\overline{AB} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-2 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{24}$.
 A medida da altura do cilindro é $\sqrt{24}$.
- 4.1. $r \perp HIJ$, então r tem a direção de $\vec{n}_{HIJ}(-6, 3, 2)$, vetor normal do plano HIJ . O ponto G tem coordenadas $G(0, 4, 4)$.
 Assim, $r: (x, y, z) = (0, 4, 4) + k(-6, 3, 2)$, $k \in \mathbb{R}$. A face $[ABFE]$ está contida no plano $x = 4$, logo o ponto P de interseção de r com $[ABFE]$ tem coordenadas $P(4, y, z)$. Este ponto pertence a r , pelo que:
- $$(4, y, z) = (-6k, 4 + 3k, 4 + 2k) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -6k \\ y = 4 + 3k \\ z = 4 + 2k \end{cases}$$
- Assim, $k = -\frac{2}{3}$ e $P\left(4, 4 + 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right), 4 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = P\left(4, 2, \frac{8}{3}\right)$.
- 4.2. $H \in [FG]$, logo $H(x, 4, 4)$. $H \in HIJ$, pelo que $-6x + 3 \times 4 + 2 \times 4 = 14 \Leftrightarrow -6x = -6 \Leftrightarrow x = 1$. Assim, $H(1, 4, 4)$.
 $I \in [DG]$, logo $I(0, y, 4)$. $I \in HIJ$, pelo que $-6 \times 0 + 3y + 2 \times 4 = 14 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow y = 2$. Assim, $I(0, 2, 4)$.
 $J \in [CG]$, logo $J(0, 4, z)$. $J \in HIJ$, pelo que $-6 \times 0 + 3 \times 4 + 2z = 14 \Leftrightarrow 2z = 2 \Leftrightarrow z = 1$. Assim, $J(0, 4, 1)$.
- $$V_{[GHIJ]} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{HG} \times \overline{GI}}{2} \times \overline{GJ} = \frac{1}{3} \times \frac{1 \times 2}{2} \times 3 = 1$$



Ficha 8

3.3. Posição relativa de retas e planos. Distância de um ponto a um plano

Página 34

1.1. $(x, y, z) = (-1, -2, 1) + k\left(-1, \frac{1}{2}, -3\right), k \in \mathbb{R}$
 $\vec{r}\left(-1, \frac{1}{2}, -3\right)$ e $\vec{n}_\alpha(2, -1, 6)$
 $\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = \left(-1, \frac{1}{2}, -3\right) \cdot (2, -1, 6) = -2 - \frac{1}{2} - 18 = -\frac{41}{2} \neq 0$
 $\vec{r} = k\vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \left(-1, \frac{1}{2}, -3\right) = k(2, -1, 6) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -1 = 2k \wedge \frac{1}{2} = -k \wedge -3 = 6k \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \wedge k = -\frac{1}{2} \wedge k = -\frac{1}{2}$ (\vec{r} e \vec{n}_α são colineares)

A reta r é perpendicular ao plano α .

1.3. $(x, y, z) = (4, 1, -1) + k(-2, 1, -3), k \in \mathbb{R}$
 $\vec{r}(-2, 1, -3)$ e $\vec{n}_\alpha(2, -1, 6)$
 $\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (-2, 1, -3) \cdot (2, -1, 6) = -4 - 1 - 18 = -23 \neq 0$
 $\vec{r} = k\vec{n}_\alpha \Leftrightarrow (-2, 1, -3) = k(2, -1, 6) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2 = 2k \wedge 1 = -k \wedge -3 = 6k \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k = -1 \wedge k = -1 \wedge k = -\frac{1}{2}$ (impossível)

A reta r é concorrente oblíqua ao plano α .

2.1. a) $\vec{n}(0, 0, 1)$ é um vetor normal ao plano xOy .
 $r \perp xOy$, então $\vec{n}(0, 0, 1)$ tem a direção r .
 Como r passa pelo ponto P , tem-se:
 $(x, y, z) = (-1, 2, -4) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

1.2. $(x, y, z) = (-1, -2, 1) + k(3, 0, -1), k \in \mathbb{R}$
 $\vec{r}(3, 0, -1)$ e $\vec{n}(2, -1, 6)$
 $\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (3, 0, -1) \cdot (2, -1, 6) = 6 + 0 - 6 = 0$
 $\vec{r} \perp \vec{n}_\alpha$, então r é paralela a α .
 $P(-1, -2, 1) \in r$, logo:
 $2 \times (-1) - (-2) + 6 \times 1 = 2$ (falso)
 Então, $P(-1, -2, 1) \notin \alpha$.
 A reta r é estritamente paralela ao plano α .

1.4. $(x, y, z) = (-3, -2, 1) + k(1, 2, 0), k \in \mathbb{R}$
 $\vec{r}(1, 2, 0)$ e $\vec{n}_\alpha(2, -1, 6)$
 $\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (1, 2, 0) \cdot (2, -1, 6) = 2 - 2 + 0 = 0$
 $\vec{r} \perp \vec{n}_\alpha$, então r é paralela a α .
 $P(-3, -2, 1) \in r$, logo:
 $2 \times (-3) - (-2) + 6 \times 1 = 2$ (verdadeiro)
 Então, $P(-3, -2, 1) \in \alpha$.
 A reta r está contida no plano α .

b) $\vec{n}_\beta(0, 1, 0)$ é um vetor normal a β .
 $r \perp \beta$, então $\vec{n}_\beta(0, 1, 0)$ tem a direção de r .
 Como r passa por P , tem-se:
 $(x, y, z) = (-1, 2, -4) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

Página 35

c) $\vec{n}_\theta(1, 0, 0)$ é um vetor normal a θ .
 $\vec{n}_\theta(1, 0, 0)$ tem a direção de r .
 Como r passa por P , tem-se:
 $(x, y, z) = (-1, 2, -4) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$

d) $\vec{n}_\alpha(-1, 2, -1)$ é um vetor normal a α .
 $\vec{n}_\alpha(-1, 2, -1)$ tem a direção de r .
 Como r passa por P , tem-se:
 $(x, y, z) = (-1, 2, -4) + k(-1, 2, -1), k \in \mathbb{R}$

2.2. \vec{PQ} tem a direção da reta PQ e $\vec{n}_\alpha(-1, 2, -1)$ é vetor normal ao plano α .

$$\vec{PQ} = Q - P = (k, k+1, -2k-1) - (-1, 2, -4) = (k+1, k+1-2, -2k-1+4) = (k+1, k-1, -2k+3)$$

$$PQ \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{PQ} \perp \vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow (k+1, k-1, -2k+3) \cdot (-1, 2, -1) = 0 \Leftrightarrow -k-1+2k-2+2k-3=0 \Leftrightarrow k=2$$

$$Q(2, 2+1, -2 \times 2 - 1) = Q(2, 3, -5)$$

3.1. $[ABCD] \parallel [EFGH]$, então $\vec{n}(-4, 0, 3)$ é normal ao plano ADC . Uma equação do plano ADC é do tipo $-4x + 3z + d = 0$.

$$D(6, -1, 5) \in ADC, \text{ então: } -4 \times 6 + 3 \times 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = 9$$

$$ADC: -4x + 3z + 9 = 0$$

3.2. $VJ \perp [EFGH]$.

$$\vec{n}(-4, 0, 3) \perp [EFGH]. \text{ Então, } \vec{n}(-4, 0, 3) \text{ tem a direção de } VJ.$$

$$VJ: (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 6\right) + k(-4, 0, 3), k \in \mathbb{R}$$

3.3. $D(6, -1, 5) \in ED$, então ED pode ser definida por $(x, y, z) = (6, -1, 5) + k(-4, 0, 3), k \in \mathbb{R}$.

$$E \in ED, \text{ pelo que } E(6 - 4k, -1, 5 + 3k).$$

$$E \in [EFGH], \text{ logo } -4(6 - 4k) + 3(5 + 3k) = -34 \Leftrightarrow k = -1. \text{ Assim, } E(10, -1, 2) \text{ e } D(6, -1, 5).$$

$$\overline{ED} = \sqrt{(10 - 6)^2 + (-1 + 1)^2 + (2 - 5)^2} = 5. \text{ A medida da aresta do cubo é } 5.$$



3.4. VJ pode ser definida por: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 6\right) + k(-4, 0, 3)$, $k \in \mathbb{R}$. $J \in VJ$, então $J\left(\frac{1}{2} - 4k, \frac{3}{2}, 6 + 3k\right)$.

$J \in [EFGH]$, então $-4\left(\frac{1}{2} - 4k\right) + 3(6 + 3k) = -34 \Leftrightarrow k = -2$. Assim, $J\left(\frac{17}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$.

$$\overline{VJ} = \sqrt{\left(\frac{17}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$$V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times 5^2 \times (10 - 5) = \frac{125}{3}$$

3. CONTAGEM

Ficha 1

1.1. Princípios gerais de contagem

Página 36

- 1.1. #A 1.2. #E 1.3. #(A ∪ E)
 $A = \{\text{Índia, Japão}\}$ $E = \{\text{Portugal, Espanha, França, Itália, Grécia}\}$ Como $A \cap E = \emptyset$, tem-se:
 #A = 2 #E = 5 #(A ∪ E) = #A + #E = 2 + 5 = 7
2. Seja x o número de balões dourados, então $\frac{3}{4}x$ representa o número de balões pretos.
 Como $\#(P \cup D) = 105$, então: $x + \frac{3}{4}x = 105 \Leftrightarrow 7x = 420 \Leftrightarrow x = 60$
 #D = 60 e #P = $\frac{3}{4} \times 60 = 45$

Página 37

- 3.1. a) #(B ∪ C) b) #(A ∪ C)
 Os conjuntos B e C são disjuntos. Os conjuntos A e C são disjuntos.
 #(B ∪ C) = #B + #C = 32 + 21 = 53 #(A ∪ C) = #A + #C = 63 + 21 = 84
- c) #(A ∪ B ∪ C)
 Os conjuntos A, B e C são disjuntos dois a dois.
 #(A ∪ B ∪ C) = #A + #B + #C = 63 + 32 + 21 = 116

3.2. a)

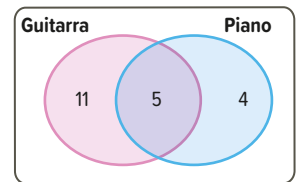
	Abacaxi com lima	Crumble de maçã	Total
Bitoque	8	23	31
Filetes com salada russa	17	15	32
Total	25	38	63

- b)
- I. $\#(B \cap C) = 23$ II. Os conjuntos F e A não são disjuntos. III. $\#(B \setminus A)$ representa o número de clientes que escolheram bitoque, mas não escolheram abacaxi com lima.
 $\#(F \cup A) = \#F + \#A - \#(F \cap A)$ $\#(B \setminus A) = \#B - \#(B \cap A) = 31 - 8 = 23$
 $\#(F \cup A) = 32 + 25 - 17 = 40$
- IV. $\#F + \#C = 32 + 38 = 70$ V. Os conjuntos F e C não são disjuntos, logo: VI. $\#(A \setminus F)$ representa o número de clientes que escolheram abacaxi com lima, mas não escolheram filetes de pescada.
 $\#(F \cup C) = \#F + \#C - \#(F \cap C)$ $\#(A \setminus F) = \#A - \#(A \cap F) = 25 - 17 = 8$
 $\#(F \cup C) = 32 + 38 - 15 = 55$



Página 38

4. • 4 alunos tocam apenas piano.
• 5 alunos tocam guitarra e piano.
• 11 alunos tocam apenas guitarra.
5. $12 \times 4 \times 7 \times 9 = 3024$
A Joana pode formar 3024 conjuntos diferentes.
6. $25 \times 24 \times 23 = 13\,800$
A atribuição de prémios pode ser feita de 13 800 possibilidades diferentes.
- 7.1. O número total de códigos distintos com quatro algarismos é: $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$. Logo, não é possível codificar todas as peças com códigos diferentes.
- 7.2. Número de códigos com seis algarismos é $10^6 = 1\,000\,000$ e com sete algarismos é $10^7 = 10\,000\,000$.
 $10^6 < 2\,500\,000 < 10^7$. O código deve ser formado por sete algarismos.
8. Existem 10 possibilidades para completar o par de algarismos e 26 possibilidades para cada uma das letras do último par de letras, ou seja:
 $10 \times 26 \times 26 = 6760$
O menor número possível de tentativas é 6760.



Página 39

9. Há 10 possibilidades para cada algarismo e 26 possibilidades para cada letra, ou seja, $10^{10} \times 26^8$.
10. $9 \times 8 \times 7 = 504$. Há 504 maneiras diferentes.
- 11.1. O Alexandre tem 3 opções de autocarro e 2 opções de comboio, ou seja, $3 \times 2 = 6$ possibilidades no total.
- 11.2.

	Comboio regional (R)	Comboio intercidades (I)
Linha azul (A)	(A, R)	(A, I)
Linha verde (V)	(V, R)	(V, I)
Linha laranja (L)	(L, R)	(L, I)

12. $0,25 \times 60 = 15$; $0,3 \times 60 = 18$; $60 - (15 + 18) = 27$. Assim, $15 \times 18 \times 27 = 7290$. É possível formar 7290 equipas.
13. $112 : 5 = 22,4$, logo, pelo princípio do pombal, é possível garantir que, pelo menos, 23 pessoas terão dado uma mesma pontuação ao serviço.

Ficha 2

1.2. Arranjos completos, permutações e arranjos simples

Página 40

- 1.1. O número de sequências distintas de três letras que é possível obter é: ${}^{12}A'_3 = 12^3 = 1728$
- 1.2. O número de sequências distintas de cinco letras que é possível obter é: ${}^{12}A'_5 = 12^5 = 248\,832$
- 2.1. a) Número de *passwords* distintas: ${}^7A'_6 = 7^6 = 117\,649$ b) Número de *passwords* distintas: ${}^7A'_{10} = 7^{10} = 282\,475\,249$
- 2.2. Há sete posições para sete letras.
 $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$
É possível formar 5040 *passwords* distintas.

Página 41

3. 12 alunos são distribuídos por 12 posições.
O número total de diferentes ordenações é: $12! = 479\,001\,600$
- 4.1. Como existem cinco fichas para cinco posições, o número de diferentes ordenações é: $5! = 120$



- 4.2.** O número total de diferentes ordenações é: $1 \times 4! = 24$
- 4.3.** O número total de diferentes ordenações é: $1 \times 1 \times 3! = 6$
- 4.4.** Considerando um grupo constituído pelas fichas branca e azul (BA), tem-se esse grupo mais três fichas.
O grupo BA e as três fichas restantes podem permutar entre si (4!).
As fichas BA, continuando juntas, podem permutar entre si (2!).
O número total de diferentes ordenações é: $4! \times 2! = 48$
- 5.1.** Oito amigos para oito lugares, logo o número de diferentes ordenações é: $8! = 40\,320$
- 5.2.** Considerando o grupo constituído pela Rita, pela Ana e pela Luísa (RAL), mais os restantes cinco elementos do grupo de amigos, tem-se que:
- o grupo RAL e os restantes cinco elementos podem permutar entre si (6!);
 - o grupo RAL também pode permutar entre si (3!).
- O número total de ordenações é: $6! \times 3! = 4320$

Página 42

- 5.3.** O Rui e o Tomás podem permutar entre si (2!).
Os restantes seis lugares são para as seis raparigas do grupo, que podem permutar entre si (6!).
O número total de ordenações é: $2! \times 6! = 1440$
- 5.4.** A Mariana e o Rui ocupam dois lugares consecutivos numa das duas extremidades e podem permutar entre si ($2 \times 2!$).
Os restantes seis lugares são ocupados pelos outros seis elementos, que podem permutar entre si (6!).
O número total de ordenações é: $2 \times 2! \times 6! = 2880$
- 5.5.** Considerando dois grupos, o das raparigas e o dos rapazes, tem-se que: os grupos podem permutar entre si (2!), as raparigas podem permutar entre si (6!) e os rapazes podem permutar entre si (2!).
O número total de ordenações é: $2! \times 6! \times 2! = 2880$
- 6.1.** $\frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7$
- 6.2.** $\frac{8! + 6!}{7!} = \frac{8 \times 7 \times 6! + 6!}{7 \times 6!} = \frac{6!(8 \times 7 + 1)}{7 \times 6!} = \frac{57}{7}$
- 6.3.** $\frac{(n+1)! + n!}{4n!} = \frac{(n+1)n! + n!}{4n!} = \frac{n!(n+1+1)}{4n!} = \frac{n+2}{4}$
- 7.1.** $\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = 20 \Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = 20 \Leftrightarrow n+2 = 20 \Leftrightarrow n = 18$
- 7.2.** $\frac{n! + (n+1)n!}{2n!} = 12 \Leftrightarrow \frac{n!(1+n+1)}{2n!} = 12 \Leftrightarrow \frac{n+2}{2} = 12 \Leftrightarrow n = 24 - 2 \Leftrightarrow n = 22$
- 8.1.** Há dez possibilidades para cada algarismo que faz parte do código (de 0 a 9): $10 \times 10 \times 10 = 1000$. O número de códigos diferentes é 1000.
- 8.2.** O número de códigos é $10 \times 9 \times 8 = 720$, ou seja, ${}^{10}A_3 = 720$.
- 8.3.** O número de códigos é $6 \times 5 \times 4 = 120$, ou seja, ${}^6A_3 = 120$.
- 8.4.** Há cinco algarismos ímpares. Então, o número de códigos é ${}^5A_3 = 60$.

Página 43

- 9.1.** Número de sequências diferentes em que não entra a bola vermelha: $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60\,480$, ou seja, ${}^9A_6 = 60\,480$.
- 9.2.** Para a primeira bola há uma possibilidade (bola amarela). Das restantes nove bolas, são retiradas cinco, em que interessa a ordem.
Número total de sequências é: $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\,120$, ou seja, ${}^9A_5 = 15\,120$.
- 9.3.** A primeira posição é ocupada pela bola preta e a última pela bola branca. Para as restantes quatro posições, $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$, ou seja, ${}^8A_4 = 1680$. O número total de sequências é 1680.
- 10.1.** Para que o número seja par, há quatro possibilidades para o algarismo das unidades (2, 4, 6 e 8) e, para os restantes algarismos, o número de possibilidades é 8A_4 .
O número total de números nestas condições é: ${}^8A_4 \times 4 = 1680 \times 4 = 6720$
- 10.2.** Para que o número seja menor do que 30 000, o algarismo das dezenas de milhar só pode ser 1 ou 2.
Para as restantes quatro posições: 8A_4
O número total de números nestas condições é: $2 \times {}^8A_4 = 2 \times 1680 = 3360$



11. Se o código tem pelo menos uma letra, significa que tem, exatamente, uma letra ou, exatamente, duas letras.
 Se tiver uma só letra, terá os algarismos ímpares 1, 3, 5, 7 e 9, mas falta um elemento, que não pode ser par nem repetido. Neste caso, é impossível gerar o código.
 Se tiver, exatamente, duas letras, então tem os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, mas a soma $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ não é par. Neste caso, é impossível de gerar o código.
 Nas condições indicadas não é possível formar um código.

Ficha 3

1.3. Combinações

Página 44

- 1.1. ${}^{30}C_6 = 593\,775$
- 1.2. Dois lugares no grupo já estão preenchidos pelo delegado e pelo subdelegado, pelo que restam 28 alunos para formar um grupo de 4, logo: ${}^{28}C_4 = 20\,475$
- 1.3. Se há 14 alunos indisponíveis, restam 16 alunos para formar um grupo de 6, logo: ${}^{16}C_6 = 8\,008$
- 2.1. ${}^{10}C_3 = 120$ sumos diferentes
- 2.2. Se há duas frutas que não podem fazer parte do sumo, restam oito frutas para selecionar quatro, logo: ${}^8C_4 = 70$
- 2.3. Se uma das frutas está escolhida, o morango, restam nove frutas para selecionar três, logo: ${}^9C_3 = 84$
- 3.1. Há nove bolas no saco, logo o número de diferentes possibilidades de retirar duas bolas, em simultâneo, é: ${}^9C_2 = 36$
- 3.2. Há cinco bolas com número ímpar e quatro bolas com número par, logo o número de diferentes possibilidades é: ${}^5C_2 + {}^4C_2 = 16$

Página 45

- 4.1. Dos 15 cães forma-se um grupo de 6 e, dos 10 gatos, um grupo de 5.
 O número de diferentes conjuntos é: ${}^{15}C_6 \times {}^{10}C_5 = 1\,261\,260$
- 4.2. Se o *Ruca* faz parte do conjunto, então, dos 14 restantes cães, forma-se um grupo de 5 (o n.º de possibilidades é ${}^{14}C_5 = 2002$).
 Se a *Milka* faz parte do conjunto, então, dos 9 restantes gatos, forma-se um grupo de 4 (o n.º de possibilidades é ${}^9C_4 = 126$).
 Nestas condições, o número total de possibilidades é: ${}^{14}C_5 \times {}^9C_4 = 252\,252$
- 4.3. Neste caso, os 6 cães formam um subconjunto de um conjunto de 14 cães e os 5 gatos formam um subconjunto de um conjunto de 9 gatos.
 O número total de possibilidades é: ${}^{14}C_6 \times {}^9C_5 = 378\,378$
- 5.1. Das 16 raparigas, serão selecionadas 2 e, dos 12 rapazes, serão selecionados 3.
 Número total de possibilidades: ${}^{16}C_2 \times {}^{12}C_3 = 26\,400$
- 5.2. Se a comissão tiver só rapazes: ${}^{12}C_5$. Se a comissão tiver só raparigas: ${}^{16}C_5$.
 O número total de possibilidades, nas condições pedidas, é: ${}^{12}C_5 + {}^{16}C_5 = 5160$
- 5.3. Neste caso, considera-se: não há rapazes na comissão, ou há um e um só rapaz, ou há exatamente 2 rapazes.
 Assim, o número total de possibilidades é: ${}^{16}C_5 + {}^{12}C_1 \times {}^{16}C_4 + {}^{12}C_2 \times {}^{16}C_3 = 63\,168$
- 5.4. Neste caso, considera-se: 2 rapazes e 3 raparigas, ou 3 rapazes e 2 raparigas, ou 4 rapazes e uma rapariga.
 Assim, o número total de possibilidades é: ${}^{12}C_2 \times {}^{16}C_3 + {}^{12}C_3 \times {}^{16}C_2 + {}^{12}C_4 \times {}^{16}C_1 = 36\,960 + 26\,400 + 7920 = 71\,280$
- 5.5. Temos as seguintes hipóteses: ou nenhum faz parte da comissão, ou a Maria não faz parte e o Carlos faz, ou a Maria faz parte e o Carlos não faz.
 Assim, o número total de possibilidades é: ${}^{26}C_5 + {}^{26}C_4 + {}^{26}C_4 = 95\,680$

Página 46

6. O algarismo das dezenas de milhar pode ser: 2, 3 ou 4
 Se o algarismo das dezenas de milhar for 2, das restantes quatro posições, escolhem-se duas para serem ocupadas com o algarismo 2 e, para as duas posições restantes, escolhe-se qualquer algarismo diferente de 2 (número de possibilidades: ${}^4C_2 \times 9 \times 9$).
 Se o algarismo das dezenas de milhar for 3 ou 4, das restantes quatro posições, escolhem-se três para serem ocupadas com o algarismo 2 e, para a posição restante, escolhe-se qualquer algarismo diferente de 2 (número de possibilidades: $2 \times {}^4C_3 \times 9$).
 O número de possibilidades, nas condições pedidas, é: ${}^4C_2 \times 9 \times 9 + 2 \times {}^4C_3 \times 9 = 558$



7.1. Como pode haver repetição de letras e de algarismos, o número de códigos distintos que é possível formar nas condições apresentadas é:

$${}^{26}A_3 \times {}^{10}A_4 = 26^3 \times 10^4 = 175\,760\,000$$

7.2. Existem 5 vogais, logo o número de sequências compostas por 3 vogais distintas é: 5A_3

Existem 10 algarismos, logo o número de sequências numéricas de 4 algarismos, sendo, exatamente, dois iguais (e os outros dois diferentes) é: $10 \times {}^4C_2 \times {}^9A_2$

Assim, o número de códigos distintos que é possível formar nas condições apresentadas é: ${}^5A_3 \times 10 \times {}^4C_2 \times {}^9A_2 = 259\,200$

7.3. O número de códigos distintos que é possível formar nas condições apresentadas é: $5 \times {}^3C_2 \times 4 \times {}^5A_4 = 7200$

7.4. A palavra ENIGMA tem 6 letras diferentes, então o número de sequências de 3 letras da palavra ENIGMA distintas que é possível formar é: 6A_3

Todos os algarismos da sequência são pares: 0, 2, 4, 6, 8

O algarismo dos milhares só poderá ser: 6 ou 8 (duas possibilidades)

O número de possibilidades para os restantes três algarismos é: 4A_3

O número de códigos distintos que é possível formar nas condições apresentadas é: ${}^6A_3 \times 2 \times {}^4A_3 = 5760$

Página 47

8.1. Seja n o número de pontos marcados sobre a circunferência. Qualquer par desses pontos define uma reta.

$${}^nC_2 = 190 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 190 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 190 \Leftrightarrow \frac{n^2-n}{2} = 190 \Leftrightarrow n^2 - n - 380 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+1520}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1-39}{2} \vee n = \frac{1+39}{2} \Leftrightarrow n = -19 \vee n = 20$$

Conclui-se que $n = 20$, ou seja, o conjunto é constituído por 20 pontos da circunferência (não colineares).

8.2.

x	f(x)
16	120
17	136
18	153
19	171
20	190
21	210
22	231
23	253

9.1. Para cada posição da sequência, há cinco consoantes possíveis.

O número possível de sequências de letras que é possível formar é: ${}^5A_6 = 5^6 = 15\,625$

9.2. Na sequência, há três “posições” que vão ser ocupados com a letra A. Assim, o número de “posições” para o A é: 6C_3

Para cada uma das restantes três “posições”, existem nove letras possíveis.

Assim, o número total de sequências de letras que é possível formar nas condições pedidas é: ${}^6C_3 \times {}^9A_3 = 20 \times 729 = 14\,580$

9.3. No máximo duas vogais significa que podem ter 0 vogais, ou exatamente 1 vogal, ou exatamente 2 vogais. Assim, o número total de sequências de letras possíveis, nas condições pedidas, é: ${}^5A_6 + 5 \times {}^6C_1 \times {}^5A_5 + {}^5A_2 \times {}^6C_2 \times {}^5A_4 = 343\,750$

10. ${}^3C_2 \times 2! \times 6! \times 5! = 518\,400$. Logo, é possível distribuir os livros de 518 400 maneiras.

4. SUCESSÕES. PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Ficha 1

1.1. Termo geral de sucessões

1.2. Sucessões definidas por recorrência

Página 48

1.1. 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 e 22

1.2. $u_n = 3n - 2$

1.3. $3n - 2 = 151 \Leftrightarrow n = 51$. Então, 151 é o termo de ordem 51.

1.4. $3n - 2 = 330 \Leftrightarrow n = 110,6$. Como $110,6 \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$, conclui-se que 330 não é termo da sucessão.

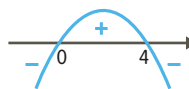
2.1. $u_n = 0 \Leftrightarrow 4n - n^2 = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 4$. Como $n \geq 1$, conclui-se que o termo nulo da sucessão tem ordem 4.



Página 49

2.2. $u_n > 0 \Leftrightarrow 4n - n^2 > 0 \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge 0 < n < 4 \Leftrightarrow n \in \{1, 2, 3\}$

Assim, existem três termos positivos.



2.3. a) Pela alínea 2.2., os termos positivos da sucessão são: $u_1 = 3$; $u_2 = 4$ e $u_3 = 3$, de onde se conclui que 8 não é termo da sucessão.

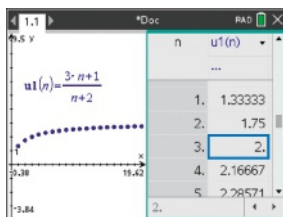
b) $u_n = -117 \Leftrightarrow 4n - n^2 = -117 \Leftrightarrow -n^2 + 4n + 117 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 468}}{-2} \Leftrightarrow n = 13 \vee n = -9 \Leftrightarrow n = 13$
 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Então, -117 é o termo da sucessão de ordem 13.

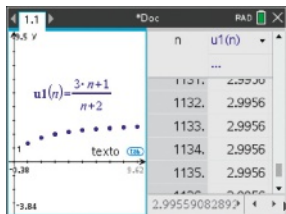
3.1. $u_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$; $u_4 = 4$; $u_5 = 2 \times 5 - 1 = 9$ e $u_6 = 6$

3.2. $u_5 > u_4$ e $u_6 < u_5$. De onde se conclui que a sucessão não é monótona.

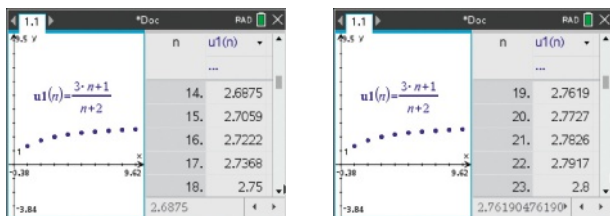
4.1. A ordem do termo igual a 2 é 3.



4.2. a) Verifica-se, de forma intuitiva, que à medida que n toma valores suficientemente grandes, os termos da sucessão aproximam-se de 3.



b)



Há oito termos que satisfazem a condição dada. Esses termos são os que têm ordem maior do que 14 e menor do que 23.

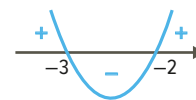
Página 50

5. (C) $u_2 - u_3 = -5$ Se $u_{n+1} - u_n = 5$, então $u_n - u_{n+1} = -5$, logo $u_2 - u_3 = -5$.

6.1. $n^2 + 5n + 6 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow n = -2 \vee n = -3$

$\frac{1}{n^2 + 5n + 6} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Atendendo a que $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, conclui-se que a sucessão é monótona crescente.



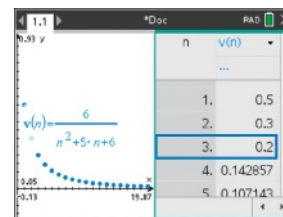
6.2. $v_n = u_{n+1} - u_n$

$v_n = \frac{1}{5} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 0,2 \Leftrightarrow n = 3$

Os termos cuja diferença é $\frac{1}{5}$ são o 4.º e o 3.º, ou seja, $u_4 - u_3 = \frac{1}{5}$.

7. (C) A sucessão (u_n) não é monótona.

$u_1 = -1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = -\frac{1}{3}$, então $u_1 < u_2$ e $u_2 > u_3$, logo a sucessão (u_n) não é monótona.

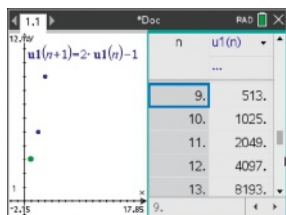


8.1. $u_1 = 3$; $u_2 = 2 \times u_1 - 1 = 5$; $u_3 = 2 \times u_2 - 1 = 9$; $u_4 = 2 \times u_3 - 1 = 17$



8.2. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2 \times u_n - 1, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

8.3. $u_9 = 513$; $u_{10} = 1025$; $u_{11} = 2049$; $u_{12} = 4097$ e $u_{13} = 8193$



Página 51

9.1. $u_1 = 4$; $u_2 = 7$; $u_3 = 10$; $u_4 = 13$; ...; $u_n = 3n + 1$

9.2. $u_n = 45 \Leftrightarrow 3n + 1 = 45 \Leftrightarrow 3n = 44 \Leftrightarrow n = \frac{44}{3} \Leftrightarrow n = 14,6$

$u_{14} = 3 \times 14 + 1 = 43$

Assim, com 45 triângulos é possível construir a figura de ordem 14, sobrando dois triângulos.

9.3. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

10. $v_1 = 5$; $v_2 = v_1 + 3 \times 2 = 11$; $v_3 = v_2 + 3 \times 3 = 20$; $v_4 = v_3 + 3 \times 4 = 32$

$u_n = 32 \Leftrightarrow 5n + 2 = 32 \Leftrightarrow 5n = 30 \Leftrightarrow n = 6$

11.1. $u_1 = 1$; $u_2 = 1 + 2^2 = 5$; $u_3 = 5 + 3^2 = 14$; $u_4 = 14 + 4^2 = 30$; $u_5 = 30 + 5^2 = 55$

11.2. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + n^2, \text{ para } n > 1 \end{cases}$

11.3. $u_{13} = 819$; $u_{14} = u_{13} + 14^2 = 1015$; $u_{15} = u_{14} + 15^2 = 1240$. A figura de ordem 15 tem 1240 pontos.

Ficha 2

2.1. Progressões aritméticas

Página 52

1.1. A diferença entre termos consecutivos é constante. Então, (u_n) é uma progressão aritmética e a razão é 2.

1.2. A diferença entre termos consecutivos não é constante. Então, (u_n) não é uma progressão aritmética.

1.3. A diferença entre termos consecutivos não é constante. Então, (u_n) não é uma progressão aritmética.

2.1. $u_n = -2 + (n - 1) \times 3 = 3n - 5$

2.2. $u_n = 3 + (n - 1) \times (-4) = 7 - 4n$

2.3. $u_2 = u_1 + r \Leftrightarrow 10 = u_1 - 2 \Leftrightarrow u_1 = 12$

$u_n = 12 + (n - 1) \times (-2) = -2n + 14$

Página 53

3.1. $r = 4$, logo:

$54 = 2a + 4 \Leftrightarrow a = 25$ e $b + 1 = 54 + 4 \Leftrightarrow b = 57$

3.2. $r = 5$, logo:

$54 = 2a + 5 \Leftrightarrow a = \frac{49}{2}$ e $b + 1 = 54 + 5 \Leftrightarrow b = 58$

4.1. $\begin{cases} u_5 = 16 \\ u_9 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4r = 16 \\ u_1 + 8r = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 - 4r \\ 16 - 4r + 8r = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 - 4r \\ 4r = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ r = 5 \end{cases}$

$u_n = -4 + (n - 1) \times 5 = 5n - 9$

4.2. $u_{20} = 5 \times 20 - 9 = 91$

5.1. O número de quizzes previsto para cada um dos dias são termos de uma progressão aritmética (u_n) em que $u_1 = 3$ e $r = 2$.

$u_n = 3 + (n - 1) \times 2 = 2n + 1$

Assim, $u_7 = 2 \times 7 + 1 = 15$. O João resolverá 15 quizzes no seu sétimo dia de preparação para o exame de código.

5.2. $u_n = 31 \Leftrightarrow 2n + 1 = 31 \Leftrightarrow n = 15$. O plano de preparação do João durará 15 dias.

Página 54

6. (B) 67

$$u_{15} = u_5 + 10r \Leftrightarrow 102 = 32 + 10r \Leftrightarrow r = 7$$

$$u_{10} = u_{15} - 5r \Leftrightarrow u_{10} = 102 - 5 \times 7 \Leftrightarrow u_{10} = 67$$

$$7. \begin{cases} u_1 + u_5 = 8 \\ u_7 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4r = 8 \\ u_1 + 6r = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(6 - 6r) + 4r = 8 \\ u_1 = 6 - 6r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8r = -4 \\ u_1 = 6 - 6r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ u_1 = 3 \end{cases}$$

$$u_n = 3 + (n - 1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{5}{2}, \text{ então: } u_{25} = \frac{1}{2} \times 25 + \frac{5}{2} = 15$$

$$8. \begin{cases} u_4 = 9u_1 \\ u_9 = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3r = 9u_1 \\ u_1 + 8r = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3r = 8u_1 \\ u_1 = 67 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3r = 8(67 - 8r) \\ u_1 = 67 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 67r = 536 \\ u_1 = 67 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 8 \\ u_1 = 3 \end{cases}$$

$$u_n = 3 + (n - 1) \times 8 = 8n - 5$$

$u_n = 1795 \Leftrightarrow 8n - 5 = 1795 \Leftrightarrow n = 225$. Assim, 1795 é o termo da progressão de ordem 225.

$$9.1. S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = \frac{2 + 59}{2} \times 20 = 610$$

9.2. $u_n < 100 \Leftrightarrow 3n - 1 < 100 \Leftrightarrow n < 33,6$, pelo que existem 33 termos menores do que 100.

$$S_{33} = \frac{u_1 + u_{33}}{2} \times 33 = \frac{2 + 98}{2} \times 33 = 1650$$

$$10.1. u_n = 3 + (n - 1) \times 2 = 2n + 1$$

$$10.2. S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow \frac{3 + 2n + 1}{2} \times n = 48 \Leftrightarrow (n + 2)n = 48 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 48 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2} \Leftrightarrow n = 6 \vee n = -8$$

Como $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, conclui-se que formou seis filas de cartas.

Página 55

$$11. \begin{cases} u_3 = \frac{1}{2}u_7 \\ S_{10} = \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2r = \frac{1}{2}(u_1 + 6r) \\ u_1 + \frac{(u_1 + 9r)}{2} \times 10 = 195 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ r = 3 \end{cases}$$

$u_n = 6 + (n - 1) \times 3 = 3n + 3$ e $u_n = 318 \Leftrightarrow 3n + 3 = 318 \Leftrightarrow n = 105$. Assim, 318 é o termo de ordem 105.

12. $u_{20} + u_{21} + u_{22} = 231 \Leftrightarrow u_2 + 18r + u_2 + 19r + u_2 + 20r = 231$. Como $u_2 = 1$, tem-se:

$$1 + 18r + 1 + 19r + 1 + 20r = 231 \Leftrightarrow r = 4$$

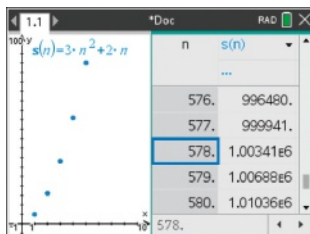
$$u_2 = u_1 + r \Leftrightarrow 1 = u_1 + 4 \Leftrightarrow u_1 = -3$$

O termo geral é $u_n = u_1 + (n - 1)r$, ou seja, $u_n = 4n - 7$.

$$13.1. S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{5 + 6n - 1}{2} \times n = (2 + 3n) \times n = 3n^2 + 2n$$

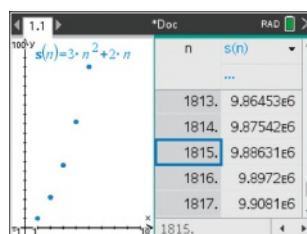
13.2. a) Recorrendo à representação gráfica da sucessão S_n na calculadora, verifica-se que S_n é maior do que 10^6 para $n \geq 578$.

No mínimo, existem 578 termos.



b) Recorrendo à representação gráfica da sucessão S_n na calculadora, verifica-se, de forma intuitiva, que à medida

que $n \rightarrow +\infty$, $S_n \rightarrow +\infty$.



14. As ordens pares dos termos da sucessão são do tipo $2p$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$u_{2p} = 5 \times 2p + 3 = 10p + 3$$

Se $p = 1$, $u_2 = 10 \times 1 + 3 = 13$; se $p = 100$, $u_{200} = 10 \times 100 + 3 = 1003$.

Assim, a soma dos primeiros 100 termos da sucessão (u_{2p}) é: $S_{100} = \frac{13 + 1003}{2} \times 100 = 50\,800$



Ficha 3

2.2. Progressões geométricas

Página 56

- 1.1. O quociente entre termos consecutivos é igual à razão, r . Então, $\frac{u_3}{u_2} = r$, ou seja, $r = \frac{2}{5} = 0,4$.
- 1.2. $u_1 = u_2 : r = 1 : \frac{2}{5} = \frac{5}{2} = 2,5$. Então, $u_n = 2,5 \times 0,4^{n-1}$.

Página 57

$$2.1. \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{6 \times 3^{2-(n+1)}}{6 \times 3^{2-n}} = 3^{2-n-1-2+n} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$ cujo primeiro termo é: $v_1 = 6 \times 3^{2-1} = 18$

$$2.2. \begin{cases} v_1 = 18 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n, n \geq 1 \end{cases}$$

3. Seja r a razão da progressão geométrica.

$$t_7 + t_9 = 800 \Leftrightarrow \frac{320}{r} + 320r = 800 \Leftrightarrow 320r^2 - 800r + 320 = 0 \Leftrightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \vee r = \frac{1}{2}$$

Como (t_n) é crescente, conclui-se que $r = 2$. Sabe-se que $t_8 = t_4 \times r^4$, pelo que $t_4 = \frac{320}{2^4} = 20$.

4. (C) π^2

Se $b = \pi$, então temos: a , π , c . Seja r a razão da progressão geométrica. $a = \frac{\pi}{r}$ e $c = \pi r$, pelo que: $ac = \frac{\pi}{r} \times \pi r = \pi^2$

- 5.1. $w_4 = r^2 \times w_2 \Leftrightarrow 72 = r^2 \times 2 \Leftrightarrow r^2 = 36$. Como (w_n) é não monótona, então $r = -6$.

$$w_1 = \frac{w_2}{r} = -\frac{1}{3}. \text{ Assim, } w_n = -\frac{1}{3} \times (-6)^{n-1} \text{ e } w_{n+1} = -\frac{1}{3} \times (-6)^n.$$

$$w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{3} \times (-6)^n - \left(-\frac{1}{3} \times (-6)^{n-1}\right) = -\frac{7}{18} \times (-6)^n. \text{ Se } n \text{ é par, } (-6)^n > 0 \text{ e } w_{n+1} - w_n < 0.$$

- 5.2. $w_{n+1} - w_n = -\frac{7}{18} \times (-6)^n$. Se n é ímpar, $(-6)^n < 0$ e $w_{n+1} - w_n > 0$.

Página 58

6. (C) $\left(\frac{2}{5}\right)^n$

As opções (A) e (D) são rejeitadas, porque ambas são crescentes e tendem para $+\infty$. A opção (B) é rejeitada porque tem termos negativos.

- 7.1. A sucessão dada é crescente e tende para $+\infty$. Recorrendo, por exemplo, à calculadora gráfica verifica-se que existem 35 termos menores do que 20 000.

- 7.2. $v_n = \left(\frac{5}{4}\right)^{-n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0,8^n$. A sucessão (v_n) é decrescente e tende para 0. Recorrendo, por exemplo, à calculadora gráfica verifica-se que o maior valor de n para o qual $v_n > 10^{-3}$ é $n = 30$. O termo pedido é $v_{30} = 0,8^{30}$.

$$8. S_{10} = 18 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}} = 27 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right) \approx 27$$

9. Razão: $\frac{12}{3} = 4$

O termo geral é: $u_n = 3 \times 4^{n-1}$

$$u_k = 49152 \Leftrightarrow 3 \times 4^{k-1} = 49152$$

Recorrendo à tecnologia, por exemplo, à calculadora gráfica, obtém-se $k = 8$. Assim: $S_8 = 3 \times \frac{1 - 4^8}{1 - 4} = 65535$

10. $S_n = 5 \times \frac{1 - 0,5^n}{1 - 0,5}$. Como $0,5^n$ tende para 0, a soma de todas as parcelas é: $S = 5 \times \frac{1}{1 - 0,5} = 10$



11.1. a) $r_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Recorrendo à tecnologia, verifica-se que $r_n \geq 1$ para valores de n , tais que $n \leq 6$. $S_6 = 32 \times \frac{1 - 0,5^6}{1 - 0,5} = 63$

b) $S = 32 \times \frac{1 - 0}{1 - 0,5} = 64$

11.2. a) $c_n = 64\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b) $S_8 = 64\pi \times \frac{1 - 0,5^8}{1 - 0,5} = 128\pi(1 - 0,5^8) \approx 400,55$

11.3. a) $r_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, pelo que: $a_n = \pi \times \left(32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2 = \pi \times 32^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$

Daqui resulta que: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} : \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Assim, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

b) $S_n = \pi \times 32^2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$. Como $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tende para 0, então: $S = \pi \times 32^2 \times \frac{1 - 0}{1 - \frac{1}{4}} = \pi \times 32^2 \times \frac{4}{3} \approx 4289,32$

5. FUNÇÕES POLINOMIAIS E RACIONAIS

Ficha 1

1.1. Funções cúbicas

1.1. -3 e 0

1.2.

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
f	\searrow	-4	\nearrow	0	\searrow

1.3. (B) $\forall x \in]-\infty, -2[, f(x) \geq -4$

2.1. (D) $f(3) < f(2)$

$f(-3) > 0$ e $f(3) < 0$, logo $f(-3) \neq f(3)$.

f é decrescente, logo $f(-3) > f(-2) > f(-1) > f(2) > f(3)$.

2.2. (C) 0,25

$f(2) = -2 \Leftrightarrow a \times 2^3 = -2 \Leftrightarrow a = \frac{-2}{8} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$

Então, $f(x) = -\frac{1}{4}x^3$. Logo, $f(-1) = -\frac{1}{4} \times (-1)^3 = -\frac{1}{4} \times (-1) = \frac{1}{4} = 0,25$.

3.1. $a < 0$. Por exemplo: $f(x) = -2x^3$

3.2. $a > 0$. Por exemplo: $f(x) = 3x^3$

3.3. $a > 0$. Por exemplo: $f(x) = 2x^3$

4. A representação III.

Não pode ser a I, porque, neste caso, $a < 0$. Não pode ser a II nem a IV, porque, nestes casos, os zeros são diferentes de 0.

5.1. Afirmação verdadeira. Se, quando $x \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow -\infty$, então $a < 0$. Logo, g é decrescente.

5.2. Afirmação falsa. $g(0) = -1 \wedge g(\alpha) = 0$, sendo α o zero da função. Como a função é decrescente, se $\alpha > 0$ então $g(\alpha) < g(0)$, ou seja, $g(\alpha) < -1$, quando se sabe que $g(\alpha) = 0$.

5.3. Afirmação falsa

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

5.4. Afirmação verdadeira

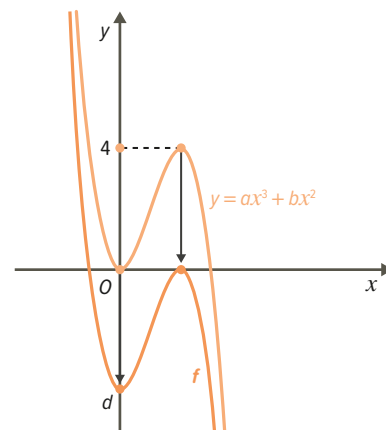


Página 62

6. Na expressão algébrica da função f , $a = \frac{1}{2}$ e $d = -2$, o que significa que f é crescente e passa no ponto de coordenadas $(0, -2)$.
 Não pode representar graficamente f , porque representa uma função decrescente.
 Não pode representar graficamente f , porque o seu ponto de interseção com o eixo Oy tem ordenada positiva.
- 7.1. Se a função é crescente, então $a > 0$. Se o seu zero é 0 , então $d = 0$. Por exemplo, $f(x) = 2x^3$.
- 7.2. Quando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, então $a > 0$.
 Se o seu zero é positivo, então d é negativo. Por exemplo, $f(x) = 2x^3 - 1$.
- 7.3. Se a função é decrescente, então $a < 0$. Se o seu único zero é negativo, então d é negativo. Por exemplo, $f(x) = -2x^3 - 1$.
8. **(B)** $a = 2$, $b = -3$ e $c = -2$
 Quando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$, então $a > 0$.
 Repara que: $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 + bx + c = 0$
 Como f tem três zeros, então $b^2 - 4ac > 0$ e $(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Página 63

9. **(B)**
 $a > 0$, então, quando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$. As opções **(C)** e **(D)** são eliminadas.
 Zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{5}{2}$, logo é eliminada a opção **(A)**.
- 10.1. Quando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, então $a < 0$.
 Zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$
 O zero $-\frac{b}{a}$ é positivo e $a < 0$, então $b > 0$.
 Resposta: $a < 0$ e $b > 0$
- 10.2. **a)** O gráfico de g obtém-se aplicando ao gráfico de f uma translação de vetor $\vec{u}(0, -1)$. A função g tem três zeros.
b) $0 - 1 = -1$ e $8 - 1 = 7$. Logo, -1 é mínimo relativo e 7 é máximo relativo de g .
11. Quando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, então $a < 0$.
 $ax^3 - bx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$
 Como $a < 0 \wedge -\frac{b}{a} > 0$, então $b > 0$.
 O gráfico de f obtém-se aplicando uma translação de vetor $\vec{u}(0, d)$ ao gráfico de uma função definida por expressão do tipo $y = ax^3 + bx^2$ que tem um máximo relativo igual a 4 .
 Nestas condições, tem-se: $d = -4$, $a < 0$ e $b > 0$.



Ficha 2

1.2. Funções quárticas

Página 64

1. **(C)** $a < 0$ e $e > 0$
 Quanto $x \rightarrow -\infty$ ou quando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$, logo $a < 0$.
 O gráfico de f interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, e)$, logo $e > 0$.
2. Gráfico I \leftrightarrow função g ; gráfico II \leftrightarrow função i ; gráfico III \leftrightarrow função f ; gráfico IV \leftrightarrow função h



Página 65

$$3. \quad ax^4 + cx = 0 \Leftrightarrow x(ax^3 + c) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax^3 + c = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{-\frac{c}{a}}$$

$$\text{Função } f: a > 0 \wedge c > 0$$

$$\text{Função } g: a < 0 \wedge c < 0$$

$$\text{Função } h: a > 0 \wedge c < 0$$

$$\text{Função } i: a < 0 \wedge c > 0$$

4.1. A função quártica é a f , pois $f \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$ e quando $x \rightarrow +\infty$. Por outro lado, o número de zeros é não superior a 4.

4.2. O número máximo de zeros de uma função cúbica é três. Como h tem cinco zeros, a afirmação é verdadeira.

5.1. (D) $a > 0$ e $b^2 - 4ac = 0$

Repara que, quando $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, então $a > 0$.

$$y = x^2(ax^2 + bx + c) \text{ e } x^2(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 + bx + c = 0$$

Assim, a função terá exatamente dois zeros se $b^2 - 4ac = 0$.

5.2. Do estudo das funções quadráticas, sabe-se que, por exemplo, uma função g definida por $g(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ tem $a > 0$ e um único zero negativo: $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Então, a expressão pedida pode ser, por exemplo: $f(x) = x^2(x^2 + 2x + 1) = x^4 + 2x^3 + x^2$

Ficha 3

1.3.1. Divisão inteira de polinómios

1.3.2. Teorema do resto

1.3.3. Decomposição de polinómios em fatores

Página 66

1.1. Não, porque o grau de $R(x)$ tem de ser menor do que o grau de $B(x)$.

1.2. $Q(x) = 3x + 4$

$$R(x) = 10x - 1$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \quad \Big| \quad x^2 - 2 \\ \underline{-3x^3 + 6x^2} \quad \Big(3x + 4 \\ 4x^2 + 2x - 1 \\ \underline{-4x^2 + 8x} \\ 10x - 1 \end{array}$$

Página 67

2.1. $P(x) = (x^2 - 3x + 1)(2x - 1) + (x - 2) = (2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x + 2x - 1) + x - 2 = 2x^3 - 7x^2 + 6x - 3$

2.2. $P(x) = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 - x) + (x + 1) = (2x^4 - x^3 - 6x^3 + 3x^2 + 2x^2 - x) + x + 1 = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 1$

3.1. $A(x) = 5 - x^2 + 4x^3$ e $B(x) = x^2 - 2$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - x^2 + 0x + 5 \quad \Big| \quad x^2 - 2 \\ \underline{-4x^3 + 8x} \quad \Big(4x - 1 \\ -x^2 + 8x + 5 \\ \underline{x^2 - 2} \\ 8x + 3 \end{array}$$

$$Q(x) = 4x - 1$$

$$R(x) = 8x + 3$$

3.2. $A(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$ e $B(x) = 4 - x$

$$\begin{array}{r} -2x^3 + 0x^2 + 3x - 1 \quad \Big| \quad -x + 4 \\ \underline{2x^3 - 8x^2} \quad \Big(2x^2 + 8x + 29 \\ -8x^2 + 3x - 1 \\ \underline{8x^2 - 32x} \\ -29x - 1 \\ \underline{29x - 116} \\ -117 \end{array}$$

$$Q(x) = 2x^2 + 8x + 29$$

$$R(x) = -117$$



4. I. $A(x) = 2x^3 + 5x^2 - 12x - 30$ e $B(x) = x^2 - 6$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 5x^2 - 12x - 30 & x^2 - 6 \\ -2x^3 & +12x \\ \hline 5x^2 + 0x - 30 & \\ -5x^2 & +30 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$A(x)$ é divisível por $B(x)$, pois $R(x) = 0$.

III. $A(x) = x^4 - 4x + 3$ e $B(x) = x^2 - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 3 & x^2 - 1 \\ -x^4 & +x^2 \\ \hline -3x^2 & +3 \\ 3x^2 & -3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$A(x)$ é divisível por $B(x)$, pois $R(x) = 0$.

II. $A(x) = 4x^3 - 1$ e $B(x) = 2x + 1$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & 2x + 1 \\ -4x^3 - 2x^2 & \\ \hline -2x^2 + 0x - 1 & \\ 2x^2 + x & \\ \hline x - 1 & \\ -x - \frac{1}{2} & \\ \hline -\frac{3}{2} & R(x) \neq 0 \end{array}$$

IV. $Q(x) = x^2 - x^3 + 4$ e $B(x) = 3 - x$

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + x^2 + 0x + 4 & -x + 3 \\ x^3 - 3x^2 & \\ \hline -2x^2 + 0x + 4 & \\ 2x^2 - 6x & \\ \hline -6x + 4 & \\ 6x - 18 & \\ \hline -14 & R(x) \neq 0 \end{array}$$

Página 68

5. $V_{\text{água}} = (x + 3)^2 \times \overline{AC}$, ou seja:

$$\begin{aligned} x^3 + 7x^2 + 15x + 9 &= (x^2 + 6x + 9) \times \overline{AC} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{AC} &= (x^3 + 7x^2 + 15x + 9) : (x^2 + 6x + 9) \Leftrightarrow \overline{AC} = x + 1 \\ \text{Como } \overline{AC} &= \frac{1}{4} \overline{AD}, \text{ então } \overline{AD} = 4 \times (x + 1) = 4x + 4. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 7x^2 + 15x + 9 & x^2 + 6x + 9 \\ -x^3 - 6x^2 - 9x & \\ \hline x^2 + 6x + 9 & \\ -x^2 - 6x - 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

6.1. $(2x^3 - x^2 + 5x + 3) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|llll} & 2 & -1 & 5 & 3 \\ -2 & & -4 & 10 & -30 \\ \hline & 2 & -5 & 15 & -27 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - 5x + 15$
 $R(x) = -27$

6.2. $(4 - x^3 + 3x^2) : (x - 4)$

$$\begin{array}{r|llll} & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & & -4 & -4 & -16 \\ \hline & -1 & -1 & -4 & -12 \end{array}$$

$Q(x) = -x^2 - x + 4$
 $R(x) = -12$

7.

$$\begin{array}{r|llll} & 2 & -9 & 0 & 27 \\ 3 & & 6 & -9 & -27 \\ \hline & 2 & -3 & -9 & 0 \end{array}$$

O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é 0, logo $A(x)$ é divisível por $B(x)$.

8. Polinómio dividendo: $5x^3 - x^2 - 2x$
Polinómio divisor: $x + 2$
Polinómio quociente: $5x^2 - 11x + 20$
Resto: -40

$$\begin{array}{r|llll} & 5 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & & -10 & 22 & -40 \\ \hline & 5 & -11 & 20 & -40 \end{array}$$

9.1. $A(1) = 1^3 + 4 \times 1 + 5 = 10$

9.2. $A(-1) = (-1)^3 + 4 \times (-1) + 5 = 0$



Página 69

10.1. $C(0) = -1$. Logo, $-2k = -1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

10.2. $D(1) = 0$. Logo, $3 - k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow -k^2 - 2k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \vee k = 1$

11.
$$\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 + 4 - 2m + n = 0 \\ 1 + 1 + m + n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 + 2m \\ m + 4 + 2m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 + 2m \\ 3m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 - \frac{10}{3} \\ m = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Logo, $P(x) = -x^3 + x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$.

12. $P(-1) = \underbrace{(-1)^{2n}}_{2n \text{ é par}} + 2 \times \underbrace{(-1)^n}_{n \text{ é ímpar}} + 1 = 1 + 2 \times (-1) + 1 = 2 - 2 = 0$.

13.1. $P(-2) = 2 \times (-2)^3 - (-2)^2 - 13 \times (-2) - 6 = 2 \times (-8) - 4 + 26 - 6 = -16 - 4 + 26 - 6 = 0$

13.2.

	2	-1	-13	-6
-2		-4	10	6
	2	-5	-3	0

$Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$

13.3. $2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{5-7}{4} \vee x = \frac{5+7}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 3$

Logo, $P(x) = 2(x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$

14.1. $P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

14.2. a) $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

b) $Q(x) = x^2 - 3x + 2$

c) $Q(x) = x - 2$

14.3. $P(x)$ tem as raízes 1 e 2. A raiz 1 tem multiplicidade 3 e a 2 tem multiplicidade 1.

Página 70

15.1.

	2	-17	39	-8	-16
4		8	-36	12	16
	2	-9	3	4	0
4		8	-4	-4	
	2	-1	-1	0	
4		8	28		
	2	7	27		

4 é raiz de multiplicidade 2.

15.2. $A(x) = (x-4)^2(2x^2 - x - 1)$

Cálculo auxiliar: $2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$

Então, $2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)$. Logo, $A(x) = (x-4)^2(2x+1)(x-1) = (x-4)(x-4)(2x+1)(x-1)$.

16. Repara que: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

$P(x) = (x-3)(x+3)(x^2 + 2x - 3)$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$

Então, $P(x) = (x-3)(x+3)(x+3)(x-1)$, ou seja, $P(x) = (x+3)^2(x-3)(x-1)$.

$P(x)$ tem raízes: -3, 1 e 3. A raiz -3 tem multiplicidade 2 e as restantes têm multiplicidade 1.

	1	2	-12	-18	27
3		3	15	9	-27
	1	5	3	-9	0
-3		-3	-6	9	
	1	2	-3	0	



17. $P(x) = a(x+2)^2(x-1)$

Repara que: $P(2) = 32 \Leftrightarrow a(2+2)^2(2-1) = 32 \Leftrightarrow 16a = 32 \Leftrightarrow a = \frac{32}{16} \Leftrightarrow a = 2$

Logo, $P(x) = 2(x+2)^2(x-1) = (2x^2 + 8x + 8)(x-1) = 2x^3 + 6x^2 - 8$.

Página 71

18. $f(x) = a(x+1)^2(x-2)$

$f(0) = -4$, logo: $a(0+1)^2(0-2) = -4 \Leftrightarrow -2a = -4 \Leftrightarrow a = 2$

$f(x) = 2(x+1)^2(x-2) = (2x^2 + 4x + 2)(x-2) = 2x^3 - 6x - 4$

19. $f(x) = ax(x+1)(x-1)^2$

$f(-2) = -18 \Leftrightarrow a(-2)(-2+1)(-2-1)^2 = -18 \Leftrightarrow 18a = -18 \Leftrightarrow a = -1$

Então, $f(x) = -x(x+1)(x-1)^2$.

Assim, $f(2) = -2(2+1)(2-1)^2 = -6$.

20. Sabe-se que -2 é raiz dupla de f .

$f(x) = (x+2)^2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$

Repara que $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Logo, $\overline{AB} = |-2| + 1 = 3$.

$f(0) = (0+2)^2\left(\frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{2}\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$. Logo, $\overline{OC} = |-2| = 2$.

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$.

	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	-2
-2		-1	-1	2
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0
-2		-1	1	
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		0

Ficha 4

1.3.4. Equações e inequações polinomiais de grau superior a 2

Página 72

1. $P(x) = (x+2)(x^2 - 5x + 4)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2=0 \vee x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1 \vee x = 4$

$S = \{-2, 1, 4\}$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \\ -x^3 + 5x^2 - 4x \\ \hline 2x^2 - 10x + 8 \\ -2x^2 + 10x - 8 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 \\ x + 2 \end{array}$$

2. $3^3 - 7 \times 3 = 6 \Leftrightarrow 27 - 21 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6$

$x^3 - 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3=0 \vee x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1 \vee x = -2$

$S = \{-2, -1, 3\}$

	1	0	-7	-6
3		3	9	6
	1	3	2	0

3.1. $x(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 2$

$S = \{-3, 0, 2\}$

3.2. $(x+3)^3 - (x+3)(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)[(x+3)^2 - (x-3)] = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 + 6x + 9 - x + 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+3=0 \vee \underbrace{x^2 + 5x + 12 = 0}_{\text{impossível } (\Delta < 0)} \Leftrightarrow x = -3 \quad S = \{-3\}$

4. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \Leftrightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = -3 \vee x = 3 \quad S = \{-3, -1, 1, 3\}$

5.1. $P(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$

$P(x) = (x^2 - 4x + 4)(x + 1) = (x - 2)^2(x + 1)$

Então, $P(x) = (x - 2)(x - 2)(x + 1)$.

	1	-3	0	4
-1		-1	4	-4
	1	-4	4	0

5.2. a)

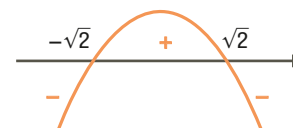
x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$2 - x$	+	+	+	0	-
$(x - 2)^2$	+	+	+	0	+
$x + 1$	-	0	+	+	+
$(2 - x)P(x)$	-	0	+	0	-

$x \in]-1, 2[$

b) $P(x) \geq Q(x) \Leftrightarrow P(x) - Q(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 - (x^3 - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4 \geq 0$

$-2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$



6.1. $f(x) = (x + 2)(-x^2 + 2x - 1) = -(x + 2)(x - 1)^2 = (-x - 2)(x - 1)^2$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$(-x - 2)$	+	0	-	-	-
$(x - 1)^2$	+	+	+	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	-

	-1	0	3	-2
-2		2	-4	2
	-1	2	-1	0

A função f é positiva em $]-\infty, -2[$ e é negativa em $]-2, 1[\cup]1, +\infty[$.

7.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow x(x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

7.2. $A_{[ABC]} = \frac{BC \times AB}{2}$, então: $g(x) = \frac{(3 - x)(x^3 - 6x^2 + 9x)}{2} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}(-x^4 + 9x^3 - 27x^2 + 27x)$

7.3. $x = 0,75$



Ficha 5

2.1. Adição e subtração de funções

2.2. Multiplicação de funções

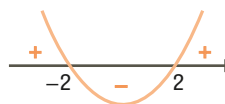
2.3. Divisão de funções

1.1. $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 - 8 + (-x^3 + 4x^2 - 8) = 4x^2 - 16$

$(f + g)(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

$f + g$ é positiva em $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ e é negativa em $]-2, 2[$.



1.2. $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 8 - (-x^3 + 4x^2 - 8) = 2x^3 - 4x^2$

$(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$f - g$ é positiva em $]2, +\infty[$ e é negativa em $]-\infty, 0[\cup]0, 2[$.

x	$-\infty$		0		2	$+\infty$
x^2	+	+	0	+	+	+
$2x - 4$	-	-	-	-	0	+
$(f - g)(x)$	-	-	0	-	0	+



- 2.1. a) $D_{f+g} = D_f \cap D_g =]-1, 4[\cap]-1, +\infty[=]-1, 4[$
 $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 2 + (x^2 - 1) = x^2 + 2x + 1$ $f+g:]-1, 4[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \curvearrowright x^2 + 2x + 1$
- b) $D_{f-g} = D_f \cap D_g =]-1, 4[\cap]-1, +\infty[=]-1, 4[$
 $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 2x + 2 - (x^2 - 1) = -x^2 + 2x + 3$ $f-g:]-1, 4[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \curvearrowright -x^2 + 2x + 3$
- 2.2. a) $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Leftrightarrow x = -1$
 $-1 \notin D_{f+g}$, logo $f+g$ não tem zeros.
- b) $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$
 Apenas $3 \in D_{f-g}$.

Página 75

- 3.1. a) $(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$
 Zeros: $-1, 1$ e 3
- b) $(g-f)(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = f(x) \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$(g-f)(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- 3.2. $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \times 0 + b = 1 \\ m \times 1 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ m = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ m = -1 \end{cases}$ Então, $f(x) = -x + 1$ e $f(-1) = -(-1) + 1 = 2$.
- 3.3. $(g+f)(x) = g(x) + f(x)$. Como g é uma função do 3.º grau e f é uma função do 1.º grau, então $g+f$ é uma função do 3.º grau, cujo termo de grau 3 é igual ao termo de grau 3 de g , sendo o coeficiente igual a a .
 $g(x) = a(x+2)(x-1)(x-4)$ e $g(-1) = f(-1) = 2$. Logo: $a(-1+2)(-1-1)(-1-4) = 2 \Leftrightarrow 10a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$
- 4.1. $(f-g)(t) = 28\,050 \Leftrightarrow 70t - 15t = 28\,050 \Leftrightarrow t = 510$
 O tempo de enchimento da piscina é 510 minutos.
 $\frac{510}{60} = 8,5$, pelo que se conclui que o tempo de enchimento é 8 h 30 min.
- 4.2. Tempo de enchimento: 8,5 horas. Como $21 + 8,5 = 29,5$ e $29,5 = 24 + 5,5$, conclui-se que o enchimento ficou completo às 5:30 do dia 2 de junho.
 Então, entre as 5:30 e as 7:00, decorreram 90 minutos.
 A quantidade de água perdida nesses 90 minutos é $g(90) = 15 \times 90 = 1350$.
 Às 7:00, a quantidade de água, em litros, que havia na piscina é $28\,050 - 1350$, ou seja, 26 700 litros.

Página 76

- 5.1. $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [-2, 6] \cap [-3, 5] = [-2, 5]$
- 5.2. $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \wedge x \in [-2, 5] \Leftrightarrow (-0,5x^2 + 8 = 0 \vee 2x + 2 = 0) \wedge x \in [-2, 5] \Leftrightarrow (x^2 = 16 \vee x = -1) \wedge x \in [-2, 5] \Leftrightarrow (x = -4 \vee x = 4 \vee x = -1) \wedge x \in [-2, 5]$
 Os zeros de $f \times g$ são -1 e 4 .

5.3.

x	-3		-2		-1		4		5		6
$f(x)$			$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$g(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$		
$(f \times g)(x)$			$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$		

- $f \times g$ é negativa em $[-2, -1[\cup]4, 5]$ e é positiva em $] -1, 4[$.
- 6.1. $f(x) = a(x+3)(x-1)^2$ e $f(0) = -3$, logo: $a \times 3 \times (-1)^2 = -3 \Leftrightarrow 3a = -3 \Leftrightarrow a = -1$
 $f(x) = -(x+3)(x^2 - 2x + 1) = -(x^3 - 2x^2 + x + 3x^2 - 6x + 3) = -x^3 - x^2 + 5x - 3$



6.2. $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$

$$(f \times g)(x) = (-x^3 - x^2 + 5x - 3) \times (-x^2 + 4) = x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x^3 - 4x^2 + 20x - 12 = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$$

$f \times g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$$

6.3. a) $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow (f(x) = 0 \vee g(x) = 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-(x+3)(x-1)^2 = 0 \vee -x^2 + 4 = 0) \Leftrightarrow (x+3 = 0 \vee x-1 = 0 \vee x^2 = 4) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 1 \vee x = -2 \vee x = 2) \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$S = \{1, 2\}$$

b) $(f \times g)(x) \geq 0$

x	$-\infty$	-3		-2		0		1		2	$+\infty$
f(x)	+	0	-	-	-	-	-	0	-	-	-
g(x)							+	+	+	0	-
(f × g)(x)							-	0	-	0	+

$$S = [2, +\infty[\cup \{1\}$$

Página 77

7.1. a) $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$

$$D_g^f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, \frac{3}{2} \right\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x+3}{-2x^2+x+3} = \frac{3(x+1)}{-2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{3}{2x-3}$$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$$D_f^g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{-2x^2+x+3}{3x+3} = \frac{-2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{3(x+1)} = -\frac{2x-3}{3}$$

7.2. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge x \in D_g^f \Leftrightarrow 3x+3 = 0 \wedge x \in D_g^f \Leftrightarrow x = -1 \wedge x \in D_g^f$

$-1 \notin D_g^f$, logo $\frac{f}{g}$ não tem zeros.

7.3. $\frac{g}{f}$ é positiva em $]-\infty, \frac{3}{2}[\setminus \{-1\}$ e é negativa em $]\frac{3}{2}, +\infty[$.

x	$-\infty$	-1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
g(x)	-	0	+	0	-
f(x)	-	0	+	+	+
(f/g)(x)	+	n.d.	+	0	-

8.1. II.

$f \times g$ é negativa em $]-\infty, x_1[$ e em $]x_3, +\infty[$ e é positiva em $]x_1, x_2[$ e em $]x_2, x_3[$. Representação II

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3	$+\infty$
f(x)	-	0	+	0	+	+	+
g(x)	+	+	+	+	+	0	-
(f × g)(x)	-	0	+	0	+	0	-



8.2. a) $f(x) = a(x+2)(x-1)^2$ e $f(0) = 1 \Leftrightarrow a \times 2 \times (-1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Logo, $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2$.
 $g(x) = b(x-2)$ e $g(0) = 2 \Leftrightarrow b \times (-2) = 2 \Leftrightarrow -2b = 2 \Leftrightarrow b = -1$. Logo, $g(x) = -(x-2) \Leftrightarrow g(x) = -x+2$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{\frac{1}{2}(-1+2)(-1-1)^2}{-(-1)+2} = \frac{2}{3}$$

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2}{-x+2} = \frac{(x+2)(x-1)^2}{-2x+4}$$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \curvearrowright \frac{(x+2)(x-1)^2}{-2x+4}$$

$\frac{f}{g}$ é negativa em $]-\infty, -2[$ e em $]2, +\infty[$ e é positiva em $]-2, 1[$ e em $]1, 2[$.

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	+	+	+
$g(x)$	+	+	+	+	+	0	-
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	-	0	+	0	+	n.d.	-

Ficha 6

3.1. Funções racionais do tipo: $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com $a, c \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$

Página 78

1.1. $f(x) = \frac{3}{2x-1}$

$$2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

1.2. $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-3x}$

$$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

1.3. $f(x) = \frac{x-1}{x^3-25x}$

$$x^3-25x=0 \Leftrightarrow x(x^2-25)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+5)(x-5)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-5 \vee x=5$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 5\}$$

2.1. $x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x=3 \vee x=-2$. Logo, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x^2-x-6}=0 \Leftrightarrow x-3=0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x=3 \wedge x \in D_f \rightarrow \text{Condição impossível, pois } 3 \notin D_f.$$

2.2. $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-6} = \frac{x-3}{(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$ e $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.

3. $a > 0, b < 0$ e $c < 0$

Página 79

4.1. $\vec{u}(-1, 0)$

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

4.2. $\vec{u}(1, -5)$

$$g(x) = -5 + \frac{1}{x-1}$$

4.3. $\vec{u}(-2, -3)$

$$g(x) = -3 + \frac{1}{x+2}$$

4.4. $\vec{u}(0, 6)$

$$g(x) = 6 + \frac{1}{x}$$

5.1. $f(x) = \frac{3x+2}{x-2}$

$$\frac{3x+2}{x-2} \left| \begin{array}{l} x-2 \\ -3x+6 \\ \hline 8 \end{array} \right. \frac{x-2}{3}$$

$$f(x) = 3 + \frac{8}{x-2}$$

5.2. $f(x) = \frac{-2}{4x+1}$

$$f(x) = \frac{-2}{4\left(x+\frac{1}{4}\right)} = \frac{-\frac{2}{4}}{x+\frac{1}{4}}$$

$$f(x) = -\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{4}}$$

5.3. $f(x) = \frac{9x-4}{3x+1}$

$$\frac{9x-4}{3x+1} \left| \begin{array}{l} 3x+1 \\ -9x-3 \\ \hline -7 \end{array} \right. \frac{3x+1}{3}$$

$$f(x) = 3 - \frac{7}{3x+1} = 3 - \frac{7}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)} =$$

$$= 3 - \frac{\frac{7}{3}}{x+\frac{1}{3}}$$



$$6.1. f(x) = 2 - \frac{2}{x-3} \quad \begin{array}{r} 2x-8 \mid x-3 \\ -2x+6 \\ \hline -2 \end{array}$$

$$6.2. D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ e } \frac{37}{20} \neq 2$$

$$6.3. D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}; 2x-8=0 \Leftrightarrow x=4; x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

x	$-\infty$	3		4	$+\infty$
$2x-8$	-		-	0	+
$x-3$	-		+	+	+
f	+	n.d.	-	0	+

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]3, 4[. S =]3, 4[$$

$$6.4. f(0) = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}, \text{ logo a medida da área do triângulo é dada, em função de } x, \text{ por } A(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} \times x \right).$$

$$\text{Assim: } \frac{8x}{6} = 3,2 \Leftrightarrow x = \frac{19,2}{8} \Leftrightarrow x = 2,4$$

$$7. f(x) = 5 + \frac{b}{x+4}, \text{ logo } d = -5.$$

Ficha 7

3.2. Assíntotas verticais e horizontais

Página 80

$$1.1. x = -1 \text{ e } y = 0$$

$$1.2. x = 2 \text{ e } y = -5$$

$$1.3. x = 0 \text{ e } y = 1$$

$$1.4. f(x) = \frac{3}{2x+1} = \frac{\frac{3}{2}}{x + \frac{1}{2}}; x = -\frac{1}{2} \text{ e } y = 0$$

$$2. f(x) = -1 + \frac{b}{x-1}; f(0) = -3 \Leftrightarrow -1 + \frac{b}{-1} = -3 \Leftrightarrow -b = -2 \Leftrightarrow b = 2. \text{ Então, } f(x) = -1 + \frac{2}{x-1}.$$

$$3.1. x = -2 \text{ e } y = 3$$

$$3.2. D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \text{ e } D'_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$3.3. S =]-2, 0]$$

$$3.4. f(x) = 3 + \frac{b}{x+2} \text{ e } f(0) = 5 \Leftrightarrow 3 + \frac{b}{2} = 5 \Leftrightarrow b = 2 \times 2 \Leftrightarrow b = 4. \text{ Então, } f(x) = 3 + \frac{4}{x+2}.$$

$$3 + \frac{4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3(x+2)+4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow 3x+10=0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = -\frac{10}{3} \wedge x \in D_f$$

$$\text{Como } -\frac{10}{3} \in D_f, \text{ então } -\frac{10}{3} \text{ é o zero de } f.$$

Página 81

4.1. $25x + 20 \times 154$ corresponde à receita obtida com a venda de bilhetes. A expressão $x + 154$ representa o número total de bilhetes vendidos. Então, o preço médio por bilhete vendido é dado por $f(x) = \frac{25x + 3080}{x + 154}$, com $0 \leq x \leq 202$.

4.2. Se não for vendido qualquer bilhete para lugares sentados, o preço médio, por bilhete, é igual ao preço de cada bilhete para lugares em pé, ou seja, 20 €.

$$4.3. f(x) = 22,80 \Leftrightarrow \frac{25x + 3080}{x + 154} = 22,80 \Leftrightarrow \frac{25x + 3080}{x + 154} - 22,80 = 0 \Leftrightarrow \frac{25x + 3080 - 22,80(x + 154)}{x + 154} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2,2x - 431,2}{x + 154} = 0 \Leftrightarrow 2,2x - 431,2 = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = \frac{431,2}{2,2} \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 196$$

Número de bilhetes para lugares sentados não vendidos: $202 - 196 = 6$. Assim, não foram vendidos seis bilhetes para lugares sentados.



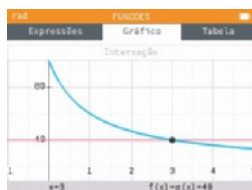
4.4. $f(38,5) = 21$

Para que o preço médio por bilhete vendido não ultrapasse 21 €, deverão ser vendidos, no máximo, 38 bilhetes para lugares sentados.



5.1. $y = 20$. Com o passar do tempo, a temperatura do chá tende a aproximar-se da temperatura ambiente, que será 20 °C.

5.2. Decorrerão três minutos até que se comece a beber o chá.



6. CÁLCULO DIFERENCIAL

Ficha 1

1.1. Taxa de variação

Página 82

1.1. $t.m.v._{[1, 3]} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{5 - 3}{2} = 1$ 1.2. $t.m.v._{[0, 2]} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - 5}{2} = -2$ 1.3. $t.m.v._{[-1, 2]} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1 - 1}{3} = 0$

2.1. a) A equação reduzida da reta r é do tipo $y = mx + b$. Os pontos A e D pertencem a r , pelo que:

$$\begin{cases} 7 = -2m + b \\ 0 = 5m + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 + 2m = b \\ -5m = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 + 2m = -5m \\ -5m = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7m = -7 \\ -5m = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b = 5 \end{cases}$$

A reta r é definida pela equação $y = -x + 5$.

b) O ponto C , de abcissa 3, pertence ao gráfico de f e à reta r .

$$y = -3 + 5 \Leftrightarrow y = 2. \text{ Logo, } f(3) = 2.$$

Página 83

2.2. a) $t.m.v._{[-2, 3]} = -1$ b) $t.m.v._{[b, 3]} = -1$ c) $f'(b) = -1$

3.1. $\frac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)} = \frac{0,5x^2 - 8}{x + 4} = \frac{0,5(x^2 - 16)}{x + 4} = \frac{0,5(x + 4)(x - 4)}{x + 4} \underset{x \neq -4}{=} 0,5(x - 4) = 0,5x - 2$

Se $x \rightarrow -4$, então $0,5x - 2 \rightarrow -4$.

Logo, $f'(-4) = -4$.

3.2. $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{0,5x^2 - 2}{x - 2} = \frac{0,5(x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{0,5(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \underset{x \neq 2}{=} 0,5(x + 2) = 0,5x + 1$

Se $x \rightarrow 2$, então $0,5x + 1 \rightarrow 2$. Logo, $f'(2) = 2$.

4.1. $t.m.v._{[1, 3]} = -1$, logo $PQ : y = -x + b$.

$$2 = -3 + b \Leftrightarrow 5 = b, \text{ logo a equação da reta } PQ \text{ é } y = -x + 5.$$

4.2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ representa $f'(1)$ que é o declive da reta t .

$$t.m.v._{[1, 3]} = -1 \Leftrightarrow \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = -1 \Leftrightarrow \frac{2 - f(1)}{2} = -1 \Leftrightarrow f(1) = 4$$

A equação da reta t é do tipo $y = mx + b$ e os pontos de coordenadas $(1, f(1))$ e $(3, 0)$ pertencem a t , pelo que:

$$m = \frac{0 - 4}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2. \text{ Assim, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -2.$$



5. Coordenadas do ponto de tangência: $(3, f(3))$, ou seja $(3, 3)$.

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{x - 3} \stackrel{x \neq 3}{=} x + 1$$

Se $x \rightarrow 3$, então $x + 1 \rightarrow 4$.

$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 1) = 4$. Logo, a equação da reta tangente é do tipo $y = 4x + b$.

Como o ponto $(3, 3)$ pertence à reta tangente, então: $3 = 4 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -9$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 3)$ é $y = 4x - 9$.

	1	-2	-3
3		3	3
	1	1	0

Ficha 2

1.2. Função derivada

Página 84

1. $f'(-2) = -\frac{3}{4} \times (-2)^2 = -\frac{3}{4} \times 4 = -3$, logo o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto P é -3 .

2. (B)

Na opção (A): $f'(2) = \frac{2^2}{2} = 2 \neq 1$

Na opção (C): $f'(-1) = -\frac{(-1)^2}{2} = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$

Na opção (B): $f'(0,5) = -4 \times (0,5)^2 = -1$

Na opção (D): $f'(0) = -2 \times 0^2 = 0 \neq -2$

- 3.1. Seja x_0 um elemento qualquer de $D_f = \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{x}{2} - \frac{x_0}{2}}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{2}(x - x_0)}{x - x_0} \stackrel{x \neq x_0}{=} \frac{1}{2}$$

Assim: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \curvearrowright \frac{1}{2}$$

- 3.2. Seja x_0 um elemento qualquer de $D_f = \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x^2 - 2x_0^2}{x - x_0} = \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \stackrel{x \neq x_0}{=} 2(x + x_0)$$

Se $x \rightarrow x_0$, então $(2(x + x_0)) \rightarrow 4x_0$.

Assim: $f'(x_0) = 4x_0$

$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \curvearrowright 4x$$

Página 85

- 4.1. Seja x_0 um elemento qualquer de $D_f = \mathbb{R}$. Então: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-5x^2 + 5x_0^2}{x - x_0} = \frac{-5(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \stackrel{x \neq x_0}{=} -5(x + x_0)$

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (-5(x + x_0)) = -10x_0$. Assim: $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \curvearrowright -10x$$

- 4.2. a) Seja P o ponto de tangência. As coordenadas de P são $(-1, f(-1))$, ou seja, $(-1, -5)$.

O declive da reta tangente é $f'(-1) = -10 \times (-1) = 10$, logo a equação da reta é do tipo: $y = 10x + b$.

Como P pertence à reta tangente: $-5 = 10 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 5$. Assim, a reta tangente é definida por $y = 10x + 5$.

- b) Sejam (x_0, y_0) as coordenadas do ponto de tangência. Sabe-se que $f'(x_0) = -2$.

Então, $-10x_0 = -2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{5}$. Ponto de tangência: $(\frac{1}{5}, f(\frac{1}{5}))$, ou seja, $(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$. A equação da reta é do tipo: $y = -2x + b$.

Como $(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$ pertence à reta tangente: $-\frac{1}{5} = -2 \times \frac{1}{5} + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$. Logo, a reta tangente é definida por $y = -2x + \frac{1}{5}$.

5. $f(1) = 2 \times 1^2 = 2$, logo o ponto P tem de coordenadas $(1, 2)$. Seja x_0 um elemento qualquer de $D_f = \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x^2 - 2x_0^2}{x - x_0} = \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \stackrel{x \neq x_0}{=} 2(x + x_0). \text{ Assim, } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (2(x + x_0)) = 4x_0 \text{ e } m_r = f'(1) = 4 \times 1 = 4.$$

Como $(1, 2)$ pertence a r , então $2 = 4 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -2$. Logo, a reta r é definida por $y = 4x - 2$.

A ordenada de A é nula, pelo que $4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$. Assim, o ponto A tem coordenadas $(0,5; 0)$.

Como a abcissa de B é nula, a sua ordenada é -2 .

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow 0,5x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Logo, o ponto Q tem coordenadas $(2, 2)$. Os pontos Q e B pertencem à reta s , pelo que o seu declive é $m_s = \frac{2 - (-2)}{2 - 0} = 2$.

Assim, a reta s é definida por $y = 2x - 2$. A ordenada de C é nula, logo $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ e, assim, o ponto C tem coordenadas $(1, 0)$.

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{OB}}{2} = \frac{(1 - 0,5) \times |-2|}{2} = 0,5$$



Ficha 3

1.3. Regras de derivação

Página 86

$$1.1. f'(x) = \frac{1}{2} \times 4x^3 - 4 \times 2x - 2 = 2x^3 - 8x - 2$$

$$1.2. f'(x) = (-x)' \times (2x - 3) + (-x) \times (2x - 3)' = -1(2x - 3) - 2x = -4x + 3$$

$$1.3. f'(x) = \frac{(2x)'(x-1) - (2x)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$1.4. f'(x) = \frac{(-1)'(x-2) - (-1)(x-2)'}{(x-2)^2} + 2' = \frac{1}{x^2 - 4x + 4} + 0 = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}$$

$$1.5. f'(x) = 3(2x - 1)^2(2x - 1)' = 6(4x^2 - 4x + 1) = 24x^2 - 24x + 6$$

$$1.6. f'(x) = (x-2)'(x^2 - 3x - 1) + (x-2)(x^2 - 3x - 1)' = x^2 - 3x - 1 + (x-2)(2x - 3) = x^2 - 3x - 1 + 2x^2 - 3x - 4x + 6 = 3x^2 - 10x + 5$$

$$2.1. f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2. \text{ Logo, } T(-1, 0).$$

$$f'(x) = -2x + 1 \text{ e } f'(-1) = -2 \times (-1) + 1 = 3$$

Assim, a reta t é definida por uma equação do tipo $y = 3x + b$.

Como $T \in t$, tem-se $0 = 3 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 3$. Então, $y = 3x + 3$.

Página 87

$$2.2. f(3) = -3^2 + 3 + 2 = -4; f'(3) = -2 \times 3 + 1 = -5$$

$$2.3. \text{ a) } g(3) = \frac{2}{3}$$

$$g'(x) = -\frac{2}{x^2}, \text{ logo } g'(3) = -\frac{2}{9}.$$

$$(f \times g)'(3) = -5 \times \frac{2}{3} + (-4) \times \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{22}{9}$$

$$\text{ b) } g(3) = 25$$

$$g'(x) = 2(1 - 2x) \times (-2) = -4 + 8x,$$

$$\text{ logo: } g'(3) = -4 + 8 \times 3 = -4 + 24 = 20$$

$$(f \times g)'(3) = -5 \times 25 + (-4) \times 20 = -205$$

$$\text{ c) } g(3) = \frac{17}{3}$$

$$g'(x) = 2 + \frac{1}{x^2}, \text{ logo } g'(3) = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9}.$$

$$(f \times g)'(3) = -5 \times \frac{17}{3} + (-4) \times \frac{19}{9} = -\frac{331}{9}$$

3. $g'(x) = (x-4)' \times f(x) + (x-4) \times f'(x) = f(x) + (x-4)f'(x)$. O declive da reta tangente ao gráfico de g em $x=2$ é igual a $g'(2) = f(2) + (2-4)f'(2) = f(2) - 2f'(2) = 3 - 8 = -5$, logo a equação da reta é do tipo $y = -5x + b$. As coordenadas do ponto de tangência são $(2, g(2))$ e $g(2) = (2-4)f(2) = -6$. Substituindo na equação da reta tangente: $-6 = -5 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 4$. Assim, a equação reduzida da reta tangente é $y = -5x + 4$.

$$4.1. \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \left(\frac{1}{4-x}\right)' = \frac{1'(4-x) - 1(4-x)'}{(4-x)^2} = \frac{-1 \times (-1)}{(4-x)^2} = \frac{1}{x^2 - 8x + 16}$$

$$4.2. \text{ O ponto de tangência tem coordenadas } \left(5, \left(\frac{1}{f}\right)(5)\right) \text{ em que } \left(\frac{1}{f}\right)(5) = \frac{1}{4-5} = -1.$$

O declive da reta tangente é igual a $\left(\frac{1}{f}\right)'(5) = \frac{1}{5^2 - 8 \times 5 + 16} = 1$, logo a equação da reta tangente é do tipo $y = x + b$.

Como $-1 = 5 + b \Leftrightarrow b = -6$, então $y = x - 6$.

5. A função f é do tipo $f(x) = ax + b$, sendo $f'(x) = a$. Por observação do gráfico, $f'(x) = a > 0$.

$g'(x) = -6x$. Como $h(x) = f(x) + g(x)$, então $h'(x) = f'(x) + g'(x) = a - 6x$, com $a > 0$. Assim, conclui-se que a reta que representa h' graficamente tem declive negativo (-6) e ordenada na origem positiva (a).



Ficha 4

2.1. Sinal da derivada. Variação e extremos

Página 88

1.1. $f'(x) = -3x^2 - 12x - 9$

1.2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$

Monotonia de f : decrescente em $]-\infty, -3]$ e em $[-1, +\infty[$ e crescente em $[-3, -1]$

Extremos relativos de f : mínimo igual a -5 e máximo igual a -1

1.3. $A(-3, -5)$ e $B(-1, -1)$

2. $f'(x) = \frac{(2x-1)'(x+4) - (2x-1)(x+4)'}{(x+4)^2} = \frac{2x+8-2x+1}{(x+4)^2} = \frac{9}{(x+4)^2}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$f'(x)$ não tem zeros, já que $\frac{9}{(x+4)^2} = 0$ é impossível.

Monotonia de f : crescente em $]-\infty, -4[$ e em $]-4, +\infty[$

Extremos de f : não existem

x	$-\infty$	-3		-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	\searrow	-5	\nearrow	-1	\searrow

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	n.d.	$+$
f	\nearrow	n.d.	\nearrow

Página 89

3. (A) $f(1)$ é máximo de f .

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	\nearrow	$f(1)$	\searrow

4. (D)

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	\searrow	$f(a)$	\nearrow	$f(b)$	\searrow	$f(c)$	\nearrow

Extremos de f : $f(a)$ e $f(c)$ são mínimos relativos da função f e $f(b)$ é máximo relativo da função f , sendo $a < 0$ e $0 < b < c$.

Monotonia de f : decrescente em $]-\infty, a]$ e em $[b, c]$ e crescente em $[a, b]$ e em $[c, +\infty[$.

Na opção (A), $f(a)$ é um máximo; na opção (B), a função é decrescente em $]c, +\infty[$ e, na opção (C), $b < 0$.

5. (D) $f'(a) \times f'(5) > 0$

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
f	\nearrow	5	\searrow	3	\nearrow
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Página 90

6.1. $f'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 - \frac{2}{3} \times 3x^2 = x^3 - 2x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

A afirmação é falsa. A função f não admite extremo para $x = 0$.

6.2. No ponto P a função atinge o mínimo. As coordenadas de P são $(2, f(2))$, ou seja, $(2, -\frac{4}{3})$.

6.3. A função f é decrescente em $]-\infty, 2]$ e crescente em $[2, +\infty[$.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	\searrow	0	\searrow	$-\frac{4}{3}$	\nearrow



7.1. $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 4x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x = 0 \vee 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		2	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$2x^2 - 3x - 2$	+	0	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
f	\searrow	$\frac{29}{16}$	\nearrow	2	\searrow	-6	\nearrow

Monotonia de f : decrescente em $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ e em $[0, 2]$ e crescente em $[-\frac{1}{2}, 0]$ e em $[2, +\infty[$.

Extremos de f : mínimos iguais a $\frac{29}{16}$ e -6 ; máximo igual a 2

7.2. $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{4(x^2 + 2) - 2x(4x - 2)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-4x^2 + 4x + 8}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x^2 + 4x + 8}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 4x + 8 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

Monotonia de f : decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[2, +\infty[$ e crescente em $[-1, 2]$.

Extremos de f : mínimo igual a -2 e máximo igual a 1.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f	\searrow	-2	\nearrow	1	\searrow

Página 91

7.3. $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, logo $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

$$f'(x) = \frac{3(2x - 3) - 2(3x + 1)}{(2x - 3)^2} = -\frac{11}{(2x - 3)^2}$$

f' não tem zeros.

Monotonia de f : decrescente em $]-\infty, \frac{3}{2}[$ e em $]\frac{3}{2}, +\infty[$.

Extremos de f : não existem

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	n.d.	-
f	\searrow	n.d.	\searrow

7.4. $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, logo $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{-(x - 2)^2 - 1}{(x - 2)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 5}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x - 5}{(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 5 = 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{-8} \wedge x \neq 2 \rightarrow \text{impossível}$$

Monotonia de f : é decrescente em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$.

Extremos de f : não existem

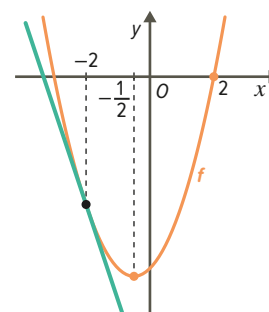
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	n.d.	-
f	\searrow	n.d.	\searrow

8. Se $f(2) = 0$, então 2 é um zero de f . Se $f'(-\frac{1}{2}) = 0$, então, sendo f uma função quadrática,

$f(-\frac{1}{2})$ é o extremo de f sendo $-\frac{1}{2}$ abscissa do vértice de parábola. Se o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -2 é negativo (-3), então f é decrescente em $]-\infty, -\frac{1}{2}[$.

Conclui-se que a concavidade da parábola que representa f é voltada para cima.

Esboço do gráfico de f na figura ao lado:





9. $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1) - 2(x+2)^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 12}{(2x-1)^2}$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2x - 12}{(2x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 12 = 0 \wedge x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{4} \wedge x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$
 Assim, $P(-2, 0)$, $R(3, 5)$ e $Q(0, -4)$.
 $A_{[POR]} = 5 \times 9 - \frac{5 \times 5}{2} - \frac{4 \times 2}{2} - \frac{3 \times 9}{2} = 15$

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$2x^2 - 2x - 12$	+	0	-	-	-	0	+
$(2x-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	n.d.	-	0	+
f	\nearrow	0	\searrow	n.d.	\searrow	5	\nearrow

Ficha 5

2.2. Problemas de otimização

Página 92

1. $A'(t) = -\frac{3}{24}t^2 + 2 = -\frac{1}{8}t^2 + 2$
 $A'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}t^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 16 \Leftrightarrow t = 4 \vee t = -4$
 Como $0 \leq t \leq 6$, tem-se $t = 4$.
 A área contaminada atingiu o valor máximo após quatro dias.

x	0		4		6
$A'(x)$	+	+	0	-	-
A	0	\nearrow	$A(4)$	\searrow	3

2.1. $V = \pi r^2 h \Leftrightarrow 150 = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{150}{\pi r^2}$ e $A_{\text{superfície total}} = 2A_{\text{base}} + A_{\text{superfície lateral}} \Leftrightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{150}{\pi r^2} \Leftrightarrow A(r) = 2\pi r^2 + \frac{300}{r} \Leftrightarrow A(r) = \frac{2\pi r^3 + 300}{r}$

2.2. $A'(r) = \frac{6\pi r^2 \times r - (2\pi r^3 + 300)}{r^2} \Leftrightarrow A'(r) = \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3 - 300}{r^2} \Leftrightarrow A'(r) = \frac{4\pi r^3 - 300}{r^2}$

$A'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi r^3 - 300}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 - 300 = 0 \wedge r > 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$

Então, $r \approx 2,9$.

A área da superfície total é mínima quando o raio é, aproximadamente, 2,9 cm.

2.3. $h = \frac{150}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right)^2} \approx 5,8$. A altura é, aproximadamente, 5,8 cm.

r	0		$\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$	$+\infty$
$A'(r)$		-	0	+
A		\searrow	$A\left(\frac{75}{\pi}\right)$	\nearrow

Página 93

- 3.1. As coordenadas do ponto A são do tipo $(x, 0, 0)$.
 $x + 0 + 0 = 6 \Leftrightarrow x = 6$. Então, $A(6, 0, 0)$.
 As coordenadas do ponto B são do tipo $(0, y, 0)$.
 $0 + y + 0 = 6 \Leftrightarrow y = 6$. Então, $B(0, 6, 0)$.
 As coordenadas do ponto C são do tipo $(0, 0, z)$. Então, $0 + 0 + z = 6 \Leftrightarrow z = 6$, logo $C(0, 0, 6)$.
- 3.2. O vértice E tem coordenadas $(1, 1, 0)$ e o vértice P tem coordenadas $(1, 1, z)$.
 Como o ponto P pertence ao plano α , tem-se $1 + 1 + z = 6$, ou seja, $z = 4$. Então, $P(1, 1, 4)$.
- 3.3. As coordenadas de P são do tipo $(a, a, 6 - 2a)$.

$V(a) = \overline{OD} \times \overline{DE} \times \overline{EP} = a \times a \times (6 - 2a) = -2a^3 + 6a^2$

$V'(a) = (-2a^3 + 6a^2)' = -6a^2 + 12a$

$V'(a) = 0 \Leftrightarrow -6a^2 + 12a = 0 \Leftrightarrow 6a(-a + 2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2$

O volume é máximo quando a abcissa de P é 2. Neste caso, as coordenadas de P são $(2, 2, 2)$ (tem-se um cubo).

a	0		2		3
$V'(a)$		+	0	-	
V		\nearrow	8	\searrow	



4. $A'(t) = -1,2t + 48$ e $A'(t) = 0 \Leftrightarrow -1,2t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-48}{-1,2} \Leftrightarrow t = 40$

$A(40) = -0,6 \times 40^2 + 48 \times 40 = 960$

A área máxima de terreno consumida pelo fogo foi 96 ha, ou seja, 9 600 000 m².

Admitindo que o incêndio evoluiu de forma circular, $\pi r^2 = 9\,600\,000 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{9\,600\,000}{\pi}}$. Então, $r \approx 1748,077$.

O incêndio atingiu uma área circular com raio aproximadamente igual a 1,748 km. O incêndio deflagrou a 3 km da zona residencial.

Como $3 - 1,748 \approx 1,252$, o incêndio foi extinto a aproximadamente 1,252 km da zona residencial. Então, a população não chegou a ser evacuada.

t	0	40	$+\infty$
$A'(t)$	+	0	-
A	↗	$A(40)$	↘