Propostas de resolução da unidade 1 do manual

Tema 1: Trigonometria

Página 8 – Aplica

1.1. $\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{8}{17}$; $\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{15}{17}$;

$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{15}$

1.2. $\sin\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{15}{17}$; $\cos\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{8}{17}$;

$\tan\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{15}{8}$

2. $\tan\alpha = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{6} = 0{,}5 \Leftrightarrow \overline{AD} = 6\times 0{,}5 \Leftrightarrow \overline{AD} = 3$

$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 3^2 + 6^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 45 \underset{\overline{AC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{45} \Leftrightarrow \overline{AC} = 3\sqrt{5}$

$\sin\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\tan\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{6}{3} = 2$

3.1. $\tan\alpha = 0{,}7 \Leftrightarrow \frac{k}{4} = 0{,}7 \Leftrightarrow k = 4\times 0{,}7 \Leftrightarrow k = 2{,}8$

3.2. $\cos\alpha = 0{,}8 \Leftrightarrow \frac{12}{k} = 0{,}8 \Leftrightarrow k = \frac{12}{0{,}8} \Leftrightarrow k = 15$

Página 9 – Aplica

4.1. $\cos 41^\circ = \frac{5}{\overline{AB}} \Leftrightarrow 0{,}7547 = \frac{5}{\overline{AB}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5}{0{,}7547}$. Então, $\overline{AB} \approx 6{,}6$.

$\tan 41^\circ = \frac{\overline{BC}}{5} \Leftrightarrow 0{,}8693 = \frac{\overline{BC}}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = 0{,}8693\times 5$. Então, $\overline{BC} \approx 4{,}3$.

4.2. $\sin 65^\circ = \frac{\overline{BC}}{7{,}5} \Leftrightarrow 0{,}9063 = \frac{\overline{BC}}{7{,}5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = 0{,}9063\times 7{,}5$. Então, $\overline{BC} \approx 6{,}8$.

$\cos 65^\circ = \frac{\overline{AB}}{7{,}5} \Leftrightarrow 0{,}4226 = \frac{\overline{AB}}{7{,}5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 0{,}4226\times 7{,}5$. Então, $\overline{AB} \approx 3{,}2$.

4.3. $C\hat{B}A = 180^\circ - 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$

$\sin 68^\circ = \frac{8}{\overline{AB}} \Leftrightarrow 0{,}9272 = \frac{8}{\overline{AB}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8}{0{,}9272}$. Então, $\overline{AB} \approx 8{,}6$.

$\tan 68^\circ = \frac{8}{\overline{BC}} \Leftrightarrow 2{,}4751 = \frac{8}{\overline{BC}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{8}{2{,}4751}$. Então, $\overline{BC} \approx 3{,}2$.

5. $\tan 55^\circ = \frac{\overline{AB}}{10} \Leftrightarrow 1{,}4281 = \frac{\overline{AB}}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 1{,}4281\times 10 \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 14{,}28$

$\cos 55^\circ = \frac{10}{\overline{AC}} \Leftrightarrow 0{,}5736 = \frac{10}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{10}{0{,}5736}$

Então, $\overline{AC} \approx 17{,}43$.

Página 10 – Aplica

6.1. $\tan 34^\circ = \frac{\overline{AB}}{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = 5\times\tan 34^\circ$. Então,

$\overline{AB} \approx 3{,}37$ m .

6.2. $\cos 34^\circ = \frac{5}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{5}{\cos 34^\circ}$. Então,

$\overline{AC} \approx 6{,}031$ m .

7. $\sin 62^\circ = \frac{\overline{FG}}{58} \Leftrightarrow \overline{FG} = 58\times\sin 62^\circ$. Então, $\overline{FG} \approx 51$.

$\overline{BC} = \overline{FG}$, logo $\overline{BC} \approx 51$.

$\cos 62^\circ = \frac{\overline{EF}}{58} \Leftrightarrow \overline{EF} = 58\times\cos 62^\circ$. Então,

$\overline{EF} \approx 27{,}229$.

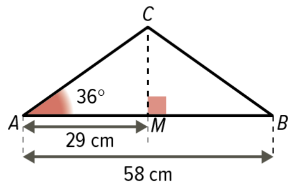
$\overline{AB} = 4\overline{EF} = 4\times 27{,}229 \approx 109$

Conclusão: $\overline{BC} \approx 51$ cm e $\overline{AB} \approx 109$ cm

Página 11 – Aplica

8. Seja M o ponto médio de [AB].

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 58=29$$



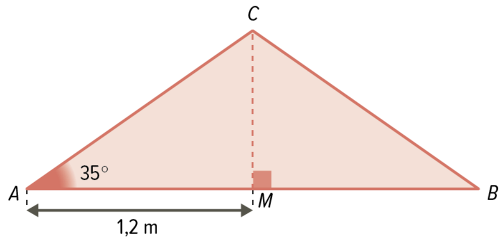
$\cos 36^\circ=\dfrac{29}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC}=\dfrac{29}{\cos 36^\circ}$. Logo, $\overline{AC}\approx 35{,}85$.

Como $\overline{AC}=\overline{BC}$, então:

$$\overline{AC}+\overline{BC}=35{,}85+35{,}85=71{,}70\approx 72$$

$$\overline{AC}+\overline{BC}\approx 72 \text{ cm}$$

9.1. O triângulo [ABC] é isósceles e $\overline{AC}=\overline{BC}$.



Então, a altura do triângulo [ABC] é o segmento de reta [CM], sendo M o ponto médio de [AB].

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 2{,}4=1{,}2$$

$\tan 35^\circ=\dfrac{\overline{CM}}{1{,}2} \Leftrightarrow \overline{CM}=1{,}2\times\tan 35^\circ$. Então,

$\overline{CM}\approx 0{,}84$.

A altura do triângulo [ABC] em relação ao lado [AB] é, aproximadamente, 0,84 m.

9.2. $\cos 35^\circ=\dfrac{1{,}2}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC}=\dfrac{1{,}2}{\cos 35^\circ}$. Então,

$\overline{AC}\approx 1{,}465$ m .

$$P_{[ABC]}=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=2{,}4+1{,}465+1{,}465=$$
$$=5{,}33\approx 5{,}3$$

O perímetro do triângulo [ABC] é, aproximadamente, 5,3 m.

Página 12 – Tarefa inicial

1. **Etapa 1:**

$$\alpha=180^\circ-S\hat{D}E=180^\circ-115^\circ=65^\circ$$

2. **Etapa 2:**

2.1. $\tan 65^\circ=\dfrac{\overline{AS}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \tan 65^\circ=\dfrac{h}{x} \Leftrightarrow x=\dfrac{h}{\tan 65^\circ}$

2.2. $\tan 48^\circ=\dfrac{\overline{AS}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \tan 48^\circ=\dfrac{h}{\overline{DE}+\overline{AD}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \tan 48^\circ=\frac{h}{29+x} \underset{\text{a)}}{\Leftrightarrow} \tan 48^\circ=\frac{h}{29+\dfrac{h}{\tan 65^\circ}}$$

2.3. $\tan 48^\circ=\dfrac{h}{29+\dfrac{h}{\tan 65^\circ}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \tan 48^\circ=\frac{h\tan 65^\circ}{29\tan 65^\circ+h}$$

$$\Leftrightarrow \tan 48^\circ\left(29\tan 65^\circ+h\right)=h\tan 65^\circ\,\overline{AB}\approx 3{,}2$$

$$\Leftrightarrow 29\tan 48^\circ\tan 65^\circ+h\tan 48^\circ=h\tan 65^\circ$$

$$\Leftrightarrow 29\tan 48^\circ\tan 65^\circ=h\tan 65^\circ-h\tan 48^\circ$$

$$\Leftrightarrow 29\tan 48^\circ\tan 65^\circ=h(\tan 65^\circ-\tan 48^\circ)$$

$$\Leftrightarrow h=\frac{29\tan 48^\circ\tan 65^\circ}{\tan 65^\circ-\tan 48^\circ}$$

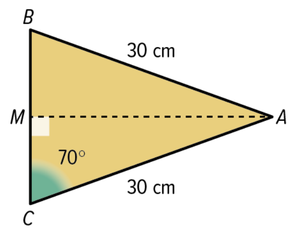
3. **Etapa 3:**

Recorrendo à calculadora, $h\approx 66{,}8$.

“O valor de h , altura do edifício, é 66,8 m.”

Página 13

1. M: ponto médio de [BC]



$\sin 70^\circ=\dfrac{\overline{AM}}{30} \Leftrightarrow \overline{AM}=30\sin 70^\circ$

Logo, $\overline{AM}\approx 28{,}191$.

$\cos 70^\circ=\dfrac{\overline{MC}}{30} \Leftrightarrow \overline{MC}=30\cos 70^\circ$

Logo, $\overline{MC}\approx 10{,}261$.

$$\overline{BC}=2\overline{MC}=2\times 10{,}261=20{,}522$$

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{BC}\times\overline{AM}}{2}=\frac{20{,}522\times 28{,}191}{2}\approx 289{,}3$$

A área da bandeira é, aproximadamente, $289{,}3\text{ cm}^2$.

2. $A\hat{C}B = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$

$\cos 68^\circ = \frac{2300}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2300}{\cos 68^\circ} \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 6140$

O helicóptero encontra-se a, aproximadamente, 6140 m do bote.

Página 14 – Tarefa 1

1.1. $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 2a^2 \underset{\overline{BD}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BD} = \sqrt{2}a$

1.2. **a)** $\tan\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{a}{a} = 1$

b) $\sin\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.3. Como o triângulo $[ABD]$ é retângulo e isósceles, $\alpha = 45^\circ$.

	sin	cos	tan
$\alpha = 45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

2.1. $\overline{MS} = \frac{\overline{RS}}{2} = \frac{a}{2}$

$\overline{ST}^2 = \overline{MT}^2 + \overline{MS}^2 \Leftrightarrow a^2 = \overline{MT}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 = \overline{MT}^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = \overline{MT}^2$

$\Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = \overline{MT}^2 \underset{\overline{MT}>0}{\Leftrightarrow} \overline{MT} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$

$\Leftrightarrow \overline{MT} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\overline{MS} = \frac{a}{2}$ e $\overline{MT} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

2.2. **a)** $\sin\beta = \frac{\overline{MT}}{\overline{ST}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\beta = \frac{\overline{MS}}{\overline{ST}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

c) $\tan\beta = \frac{\overline{MT}}{\overline{MS}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{2a} = \sqrt{3}$

d) $\sin\theta = \frac{\overline{MS}}{\overline{ST}} = \cos\beta = \frac{1}{2}$

e) $\cos\theta = \frac{\overline{MT}}{\overline{ST}} = \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\tan\theta = \frac{\overline{MS}}{\overline{MT}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2a}{2\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2.3. Como o triângulo $[RST]$ é equilátero, $\beta = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ e $\theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

	sin	cos	tan
$\beta = 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\theta = 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

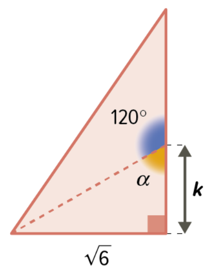
Página 15 – Tarefa 2

1.1. $\sin 45^\circ = \frac{k}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k}{8} \Leftrightarrow k = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow k = 4\sqrt{2}$

1.2. $\cos 60^\circ = \frac{7{,}5}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{7{,}5}{k} \Leftrightarrow k = 15$

1.3. $\tan 30^\circ = \frac{k}{12} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{k}{12} \Leftrightarrow k = 4\sqrt{3}$

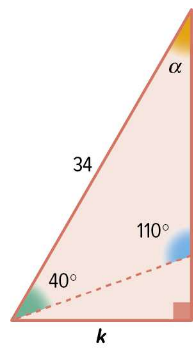
1.4.



$\alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{k} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{k} \Leftrightarrow k = \sqrt{2}$

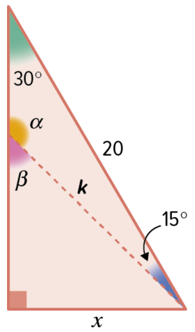
1.5.



$\alpha = 180^\circ - 110^\circ - 40^\circ = 30^\circ$

$\sin 30^\circ = \frac{k}{34} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{k}{34} \Leftrightarrow k = 17$

1.6.



$\sin 30° = \frac{x}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{20} \Leftrightarrow x = 10$

$\alpha = 180° - 30° - 15° = 135°$

$\beta = 180° - 135° = 45°$

$\sin 45° = \frac{10}{k} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{k} \Leftrightarrow k = \frac{20}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow k = 10\sqrt{2}$

2.1. $\tan 45° = \frac{12}{\overline{AB}} \Leftrightarrow 1 = \frac{12}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = 12$

$\tan 30° = \frac{12}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{12}{\overline{BD}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{36}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{36\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{BD} = 12\sqrt{3}$

$A_{\text{Fundo da caixa}} = \overline{AB} \times \overline{BD} = 12 \times 12\sqrt{3} = 144\sqrt{3}$

A área do fundo da caixa é igual a $144\sqrt{3}$ cm^2.

2.2. x : diagonal espacial da caixa

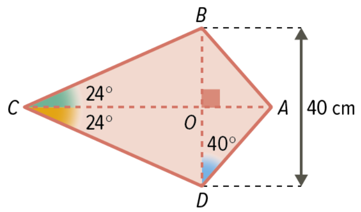
$x^2 = \overline{CD}^2 + 12^2 \Leftrightarrow x^2 = 12^2 + \left(12\sqrt{3}\right)^2 + 12^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 720 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{720}$. Então, $x \approx 26{,}8$.

O lápis cabe na caixa porque $25 < 26{,}8$.

Página 16 – Tarefa 2

3.1. Seja O o ponto de interseção das diagonais do papagaio [*ABCD*].



$\overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2} \times 40 = 20$

$\tan 40° = \frac{\overline{OA}}{20} \Leftrightarrow \overline{OA} = 20 \tan 40°$

Logo, $\overline{OA} \approx 16{,}782$.

$\tan 24° = \frac{20}{\overline{OC}} \Leftrightarrow \overline{OC} = \frac{20}{\tan 24°}$

Logo, $\overline{OC} \approx 44{,}921$.

$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{OC} = 16{,}782 + 44{,}921 = 61{,}703 \approx 61{,}7$

Conclusão: $\overline{AC} \approx 61{,}7$ cm

3.2. $\cos 40° = \frac{20}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{20}{\cos 40°} \Leftrightarrow \overline{AD} \approx 26{,}108$

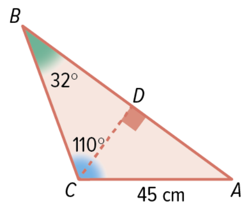
$\sin 24° = \frac{20}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{20}{\sin 24°} \Leftrightarrow \overline{CD} \approx 49{,}172$

$P_{[ABCD]} = 2\overline{AD} + 2\overline{CD} = 2 \times 26{,}108 + 2 \times 49{,}172 =$

$= 150{,}56 \approx 150{,}6$

O perímetro do papagaio [*ABCD*] é, aproximadamente, 150,6 cm.

4. Seja *D* a projeção ortogonal de *C* sobre *AB*.



Os triângulos [*ACD*] e [*BCD*] são retângulos.

$C\hat{A}B = 180° - 110° - 32° = 38°$

$\sin 38° = \frac{\overline{CD}}{45} \Leftrightarrow \overline{CD} = 45 \sin 38°$. Então,

$\overline{CD} \approx 27{,}705$.

$\sin 32° = \frac{27{,}705}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{27{,}705}{\sin 32°}$. Então,

$\overline{BC} \approx 52{,}3$.

Conclusão: $\overline{BC} \approx 52{,}3$ cm

Página 17 – Tarefa 3

1.1. $A\hat{C}B = 4 \times \frac{360°}{12} = 4 \times 30° = 120°$

1.2. $D\hat{C}A = 180° - A\hat{C}B = 180° - 120° = 60°$

1.3. $C\hat{A}D = 180° - 90° - 60° = 30°$

2.1. $\sin 60° = \frac{\overline{AD}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{AD}}{3} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Logo, $\overline{AD} \approx 2{,}598$.

2.2. $\cos 60^\circ = \frac{\overline{CD}}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{CD}}{3} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \overline{CD} = 1{,}5$

3.1. $A_{[CDA]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{CD}}{2} = \frac{2{,}598 \times 1{,}500}{2} \approx 1{,}949$

3.2. $A_{[BDA]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{BD}}{2} = \frac{2{,}598 \times 6{,}500}{2} \approx 8{,}444$

Cálculo auxiliar: $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 5 + 1{,}500 = 6{,}500$

4. $A_{[ABC]} = A_{[BDA]} - A_{[CDA]} = 8{,}444 - 1{,}949 \approx 6{,}5$

A área do triângulo [*ABC*] é, aproximadamente, $6{,}5$.

Página 18 – Pratica

5.1. **a)** $B\hat{A}C = 180^\circ - D\hat{A}B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

b) $C\hat{B}A = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

5.2. **a)** $\tan 60^\circ = \frac{70}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{70}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{70}{\sqrt{3}}$

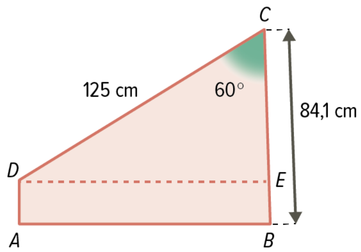
Então, $\overline{AC} \approx 40{,}4$ cm.

b) $\sin 60^\circ = \frac{70}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{70}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{140}{\sqrt{3}}$

Então, $\overline{AB} \approx 80{,}8$ cm.

6.1. $\overline{CD} = 1{,}25 \text{ m} = 125 \text{ cm}$

E: projeção ortogonal de *D* sobre *CB*.



$\sin 60^\circ = \frac{\overline{AB}}{125} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{AB}}{125} \Leftrightarrow \overline{AB} = 125\sqrt{3}$

Então, $\overline{AB} \approx 108$.

A distância entre os pontos *A* e *B* é, aproximadamente, 108 cm.

6.2. $\overline{AD} = ?$

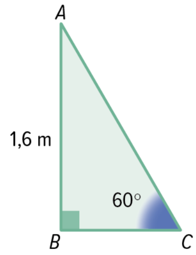
$\cos 60^\circ = \frac{\overline{CE}}{125} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{CE}}{125} \Leftrightarrow \overline{CE} = \frac{125}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{CE} = 62{,}5$

$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CB} - \overline{CE} = 84{,}1 - 62{,}5 = 21{,}6$

A medida do raio da roda traseira é 21,6 cm.

7.



$\sin 60^\circ = \frac{1{,}6}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}6}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{3{,}2}{\sqrt{3}}$

$4\overline{AC} = 4 \times \frac{3{,}2}{\sqrt{3}} = \frac{12{,}8}{\sqrt{3}} \approx 7{,}4$

A quantidade mínima de fio necessária para os quatro estiradores é 7,4 m.

Página 19 – Pratica

8.1. $P(3,0) \rightarrow$ a circunferência tem raio 3.

Assim, $B(0,3)$.

Seja *M* a projeção ortogonal de *A* sobre *OB*.

$A\hat{O}M = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\sin 60^\circ = \frac{\overline{AM}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{AM}}{3} \Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{\overline{OM}}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{OM}}{3} \Leftrightarrow \overline{OM} = \frac{3}{2}$

Assim, $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Como *C* é simétrico de *A* em relação ao eixo *Oy*, então $C\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Conclusão: $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $B(0,3)$ e $C\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

8.2. $A_{[OABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\left(2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \times 3}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

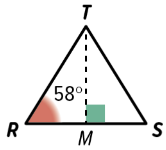
8.3. $P_{[OABC]} = 4\overline{OA} = 4 \times 3 = 12$

Página 20 – Pratica

9. $\overline{RS} = \overline{CD} - \overline{DR} - \overline{SC} = 40 - 12 - 12 = 16$

Seja *M* a projeção ortogonal de *T* sobre *RS*.

$\overline{RM} = \frac{1}{2}\overline{RS} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$



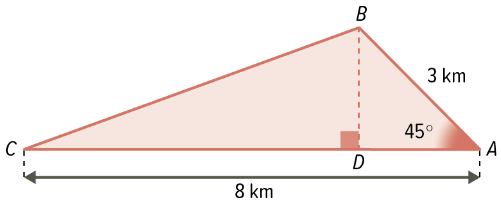
$\cos 58° = \frac{8}{\overline{RT}} \Leftrightarrow \overline{RT} = \frac{8}{\cos 58°}$

Então, $\overline{RT} \approx 15{,}097$.

$\overline{RT} + \overline{TS} \underset{\overline{RT}=\overline{TS}}{\overset{}{=}} 2\overline{RT} = 2 \times 15{,}097 \approx 30{,}2$

O comprimento do fio que suspende a placa é, aproximadamente, $30{,}2$ cm.

10. Seja D a projeção ortogonal de B sobre AC.



O triângulo [ABD] é retângulo e isósceles.

$\sin 45° = \frac{\overline{BD}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{BD}}{3} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\overline{DA} = \overline{BD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\overline{CD} = \overline{AC} - \overline{DA} = 8 - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 16 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Como o triângulo [CDB] é retângulo em D:

$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = \left(\frac{16 - 3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = \frac{256 - 96\sqrt{2} + 18}{4} + \frac{18}{4}$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = \frac{292 - 96\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 73 - 24\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{73 - 24\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \overline{BC} \approx 6{,}2$

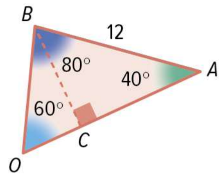
A distância entre as casas da Beatriz e do Carlos é, aproximadamente, 6,2 km.

11.1. a) A rosácea divide a circunferência em seis arcos geometricamente iguais. Logo, $\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$.

b) $\beta = 180° - 40° - 60° = 80°$

11.2. $\overline{AB} = 12$

a)



Seja C a projeção ortogonal de B sobre OC. [BC] é a altura do triângulo [OAB] em relação ao lado [AO].

$\sin 40° = \frac{\overline{BC}}{12} \Leftrightarrow \overline{BC} = 12\sin 40°$

b) raio $= \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA}$

$\tan 60° = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{12\sin 40°}{\overline{OC}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{OC} = \frac{12\sin 40°}{\sqrt{3}}$. Então, $\overline{OC} \approx 4{,}453$.

$\cos 40° = \frac{\overline{AC}}{12} \Leftrightarrow \overline{AC} = 12\cos 40°$. Então,

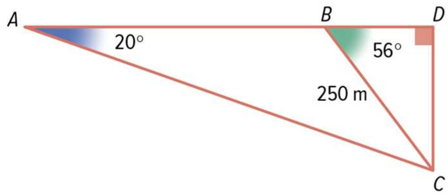
$\overline{AC} \approx 9{,}193$.

$r = 4{,}453 + 9{,}193 = 13{,}646 \approx 13{,}6$

O raio da circunferência é, aproximadamente, 13,6.

Página 21 – Pratica

12. $\overline{AB} = ?$



Seja D a projeção ortogonal de C sobre AB.
Os triângulos [BCD] e [ACD] são retângulos em D.

$\sin 56° = \frac{\overline{CD}}{250} \Leftrightarrow \overline{CD} = 250\sin 56°$

$\tan 20° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \tan 20° = \frac{250\sin 56°}{\overline{AD}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{250\sin 56°}{\tan 20°}$

$\cos 56° = \frac{\overline{BD}}{250} \Leftrightarrow \overline{BD} = 250\cos 56°$

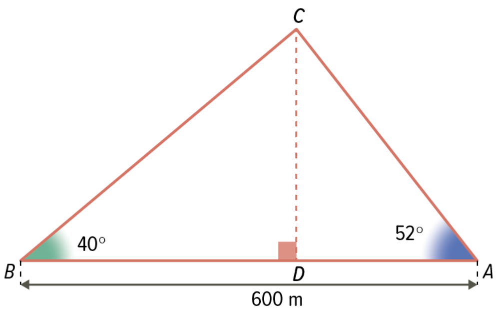
$\overline{AB} = \overline{AD} - \overline{BD} = \frac{250\sin 56°}{\tan 20°} - 250\cos 56°$, ou seja,

$\overline{AB} \approx 430$

A distância percorrida pelo *drone* entre os pontos A e B foi, aproximadamente, igual a 430 m.

13. Seja $\overline{BD} = x$. Então, $\overline{DA} = 600 - x$.

Seja $\overline{CD} = h$ (altura a que voa o falcão).



$\tan 40° = \frac{h}{x} \wedge \tan 52° = \frac{h}{600 - x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = x \tan 40° \wedge h = (600 - x)\tan 52°$

Então:

$x \tan 40° = (600 - x)\tan 52° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \tan 40° = 600 \tan 52° - x \tan 52°$

$\Leftrightarrow x \tan 40° + x \tan 52° = 600 \tan 52°$

$\Leftrightarrow x(\tan 40° + \tan 52°) = 600 \tan 52°$

$\Leftrightarrow x = \frac{600 \tan 52°}{\tan 40° + \tan 52°}$

Então, $x \approx 362{,}4115$.

$h = 362{,}4115 \tan 40° \approx 304{,}1$

O falcão voa a uma altura de, aproximadamente, 304,1 m.

Página 22

14. Como o hexágono [*ABCDEF*] é regular e tem centro em *O*, sabe-se que:

$A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}E = E\hat{O}F = F\hat{O}A = \frac{360°}{6}$

14.1. Lado origem: $\dot{O}B$

Lado extremidade: $\dot{O}F$

$B\hat{O}F = -(2 \times 60°) = -120°$

14.2. Lado origem: $\dot{O}E$

Lado extremidade: $\dot{O}F$

$E\hat{O}F = +60°$

14.3. Lado origem: $\dot{O}F$

Lado extremidade: $\dot{O}D$

$F\hat{O}D = -(2 \times 60°) = -120°$

Página 23

15.1. a) Como o pentágono [*ABCDE*] é regular e está inscrito na circunferência, sabe-se que:

$\overset{\frown}{CD} = \frac{360°}{5} = 72°$

b) Amplitude do arco orientado *CD* que passa por *A*:

$\overset{\frown}{CAD} = -4 \times 72° = -288°$

15.2. a) A extremidade do arco orientado com origem em *B* e amplitude $-72°$ é o ponto *A*.

b) $144° = 2 \times 72°$

A extremidade do arco orientado com origem em *B* e amplitude 144º é o ponto *D*.

c) $-216° = 3 \times (-72°)$

A extremidade do arco orientado com origem em *B* e amplitude –216º é o ponto *D*.

15.3. a) A origem do arco orientado cuja extremidade é o ponto *E* e a amplitude é 72º, é o ponto *D*.

b) A origem do arco orientado cuja extremidade é o ponto *C* e a amplitude é $-144°$ $(-2 \times 72°)$, é *E*.

c) $288° = 4 \times 72°$

A origem do arco orientado cuja extremidade é o ponto *E* e a amplitude é 288º, é o ponto *A*.

15.4. a) $216° = 3 \times 72°$; $R_{(O,\ 216°)}(E) = C$

b) $R_{(O,\ -72°)}(B) = A$

Página 24

16.1. $450° = 90° + 1 \times 360°$. O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{T}R$ e amplitude 450º é $\dot{T}S$.

16.2. $630° = 270° + 1 \times 360°$. O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{T}R$ e amplitude 630º é $\dot{T}Q$.

16.3. $-900° = -180° - 2 \times 360°$. O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{T}R$ e amplitude –900º é $\dot{T}P$.

17.1. $\frac{360°}{12} = 30°$

Decorridos 40 minutos, o ponteiro dos minutos encontra-se no número 8. Então, descreveu um ângulo de amplitude $-(8 \times 30°) = -240°$.

17.2. $-390° = -30° - 360°$

Se o ponteiro dos minutos descreveu um ângulo de amplitude –390º, então deu uma volta completa seguida de um ângulo de amplitude –30º. Assim, o relógio marca 1 hora e 5 minutos.

17.3. A amplitude do ângulo descrito pelo ponteiro dos minutos após terem decorrido 2 horas e 20 minutos é igual a $-4\times 30^\circ - 2\times 360^\circ$, ou seja, -840°.

Página 25 – Tarefa 4

1. Como a escala de temperatura está dividida em 30 partes, então: $\frac{360^\circ}{30} = 12^\circ$

1.1. $60^\circ = 5\times 12^\circ$

Se, a partir da posição *D*, o manípulo rodar 60º, então a temperatura selecionada é $250\,^\circ\mathrm{C}$.

1.2. $-60^\circ = -5\times 12^\circ$

Se, a partir da posição *D*, o manípulo rodar –60º, então a temperatura selecionada é $50\ ^\circ\mathrm{C}$.

1.3. $120^\circ = 10\times 12^\circ$

Se, a partir da posição *D*, o manípulo rodar 120º, então a temperatura selecionada é $200\ ^\circ\mathrm{C}$.

1.4. $-72^\circ = -6\times 12^\circ$

Se, a partir da posição *D*, o manípulo rodar –72º, então a temperatura selecionada é $60\ ^\circ\mathrm{C}$.

1.5. $168^\circ = 14\times 12^\circ$

Se, a partir da posição *D*, o manípulo rodar 168º, então a temperatura selecionada é $160\ ^\circ\mathrm{C}$.

1.6. $-216^\circ = -18\times 12^\circ$

Se, a partir da posição *D*, o manípulo rodar –216º, então a temperatura selecionada é $180\,^\circ\mathrm{C}$.

2.1. A amplitude do ângulo generalizado que corresponde à passagem da posição I para a posição II, no sentido positivo, dando duas voltas completas é:

$25\times 12^\circ + 2\times 360^\circ = 1020^\circ$

2.2. A amplitude do ângulo generalizado que corresponde à passagem da posição I para a posição II, no sentido negativo, dando uma volta completa é: $-5\times 12^\circ - 1\times 360^\circ = -420^\circ$

2.3. A amplitude do ângulo generalizado que corresponde à passagem da posição II para a posição I, no sentido positivo, dando três voltas completas é: $5\times 12^\circ + 3\times 360^\circ = 1140^\circ$

3. A amplitude do ângulo orientado descrito pelo manipulo ao rodar, no sentido positivo, da posição *D* para 200 ºC é $10\times 12^\circ = 120^\circ$.

3.1. $480^\circ - 120^\circ = 360^\circ$

Donde se conclui que $480^\circ = 120^\circ + 1\times 360^\circ$.

3.2. $1200^\circ - 120^\circ = 1080^\circ$ e $\frac{1080^\circ}{360^\circ} = 3$

Donde se conclui que $1200^\circ = 120^\circ + 3\times 360^\circ$.

3.3. $2640^\circ - 120^\circ = 2520^\circ$ e $\frac{2520^\circ}{360^\circ} = 7$

Donde se conclui que $2640^\circ = 120^\circ + 7\times 360^\circ$.

Página 26 – Pratica

18.1. A amplitude do ângulo orientado, que é convexo, com lado origem $\dot{O}C$ e lado extremidade $\dot{O}A$ é -120°.

18.2. A amplitude do ângulo orientado, que é côncavo, com lado origem $\dot{O}A$ e lado extremidade $\dot{O}B$ é -270°.

18.3. A amplitude do ângulo orientado, que é convexo, com lado origem $\dot{O}D$ e lado extremidade $\dot{O}B$ é -60°.

18.4. A amplitude do ângulo orientado, que é côncavo, com lado origem $\dot{O}D$ e lado extremidade $\dot{O}A$ é 210°.

19. O quadrado [*ABCD*] divide a circunferência de raio menor em quatro arcos iguais de amplitude $360^\circ : 4 = 90^\circ$ e o octógono [*EFGHIJKL*] divide a circunferência de raio maior em oito arcos iguais de amplitude $360^\circ : 8 = 45^\circ$.

19.1. a) Como $135^\circ = 3\times 45^\circ$, conclui-se que o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude -135° é $\dot{O}J$.

b) O lado extremidade do ângulo orientado de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude 135° é $\dot{O}H$.

c) $315^\circ = 7\times 45^\circ$. O lado extremidade do ângulo orientado de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude -315° é $\dot{O}F$.

19.2. a) $R_{(O,90^\circ)}(A) = B$

b) $R_{(O,\,135^\circ)}(E)=H$

c) $R_{(O,\,-180^\circ)}(D)=B$

d) $R_{(O,\,-90^\circ)}(H)=F$

e) $R_{(O,\,45^\circ)}(L)=E$

f) $R_{(O,\,-278^\circ)}(L)=F$

Página 27 – Pratica

20.1. $\dfrac{855^\circ}{360^\circ}=2{,}375$

Número de voltas completas: 2

Como $855^\circ-2\times360^\circ=135^\circ$, então

$855^\circ=135^\circ+2\times360^\circ$.

20.2. $\dfrac{1522^\circ}{360^\circ}=4{,}2277...$

Número de voltas completas: 4

$1522^\circ-4\times360^\circ=82^\circ$, logo $1522^\circ=82^\circ+4\times360^\circ$ e

$-1522^\circ=-82^\circ-4\times360^\circ$.

20.3. $\dfrac{1318^\circ}{360^\circ}=3{,}66111...$

Número de voltas completas: 3

Como $1318^\circ-3\times360^\circ=238^\circ$, então

$1318^\circ=238^\circ+3\times360^\circ$.

20.4. $\dfrac{1800^\circ}{360^\circ}=5$

Então, $1800^\circ=0^\circ+5\times360^\circ$.

20.5. $\dfrac{1260^\circ}{360^\circ}=3{,}5$

Número de voltas completas: 3

$1260^\circ-3\times360^\circ=180^\circ$, logo

$1260^\circ=180^\circ+3\times360^\circ$.

$-1260^\circ=-180^\circ-3\times360^\circ$

20.6. $\dfrac{3015^\circ}{360^\circ}=8{,}375$

Número de voltas completas: 8

$3015^\circ-8\times360^\circ=135^\circ$, logo

$3015^\circ=135^\circ+8\times360^\circ$ $-3015^\circ=-135^\circ-8\times360^\circ$.

21.1. $\dfrac{1155^\circ}{360^\circ}=3{,}208\ 33...$

Número de voltas completas: 3

$1155^\circ-3\times360^\circ=75^\circ$,

$1155^\circ=75^\circ+3\times360^\circ$ e $-1155^\circ=-75^\circ-3\times360^\circ$.

Assim, a semirreta que representa o lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{V}A$ e amplitude -1155° é $\dot{V}D$.

A opção correta é a **(D)**.

21.2. **1.º)** $\dfrac{2465^\circ}{360^\circ}=6{,}847\ 22...$

Número de voltas completas: 6

$2465^\circ-6\times360^\circ=305^\circ$, então

$2465^\circ=305^\circ+6\times360^\circ$.

O lado extremidade do ângulo é a semirreta $\dot{V}B$.

2.º) $\dfrac{2880^\circ}{360^\circ}=8$, logo $2880^\circ=0^\circ+8\times360^\circ$

O lado extremidade do ângulo é a semirreta $\dot{V}A$.

3.º) $\dfrac{3345^\circ}{360^\circ}=9{,}29166...$

Número de voltas completas: 9

$3345^\circ-9\times360^\circ=105^\circ$

$3345^\circ=105^\circ+9\times360^\circ$ e $-3345^\circ=-105^\circ-9\times360^\circ$

O lado extremidade do ângulo é a semirreta $\dot{V}C$.

Conclusão:

$2465^\circ\to\dot{V}B$; $2880^\circ\to\dot{V}A$ e $-3345^\circ\to\dot{V}C$

22. Como o hexágono [*ABCDEF*] é regular e está inscrito na circunferência, divide-a em seis arcos iguais de amplitude $\dfrac{360^\circ}{6}=60^\circ$.

22.1. a) $\dfrac{2665^\circ}{360^\circ}=7{,}402\ 77...$

Número de voltas completas: 7

$2665^\circ-7\times360^\circ=145^\circ$

$2665^\circ=145^\circ+7\times360^\circ$ e $-2665^\circ=-145^\circ-7\times360^\circ$

O lado do hexágono que é intersetado pela semirreta $\dot{O}P$ é $[DE]$ pois $-180^\circ<-145^\circ<-120^\circ$.

b) $\dfrac{4270^\circ}{360^\circ}=11{,}8611...$

Número de voltas completas: 11

$4270^\circ-11\times360^\circ=310^\circ$

$4270^\circ=310^\circ+11\times360^\circ$

O lado do hexágono que é intersetado pela semirreta $\dot{O}P$ é $[AF]$ pois $300^\circ<310^\circ<360^\circ$.

22.2. $878^\circ-(-2002^\circ)=2880^\circ=8\times360^\circ$

23.1. Distância percorrida: 3,2 km = 320 000 cm

Raio de cada roda da bicicleta: 35 cm

Perímetro de cada roda: $P = 2\pi \times 35 = 70\pi$ cm

$\frac{320\ 000}{70\pi} \approx 1455{,}13$

Donde se conclui que cada roda da bicicleta deu 1455 voltas completas.

23.2. Casa da Sara à escola → 1000 voltas completas

$1000 \times 70\pi = 70\ 000\pi \approx 219\ 911{,}5$ cm

$219\ 911{,}5 \text{ cm} = 2{,}199\ 115 \text{ km} \approx 2{,}2 \text{ km}$

Estima-se que a escola se encontra a, aproximadamente, 2,2 km da casa da Sara.

Página 28

24.1. Como $180° < 165° < 90°$, o lado extremidade do ângulo cujo lado origem é $\dot{O}P$ e a amplitude é 165º pertence ao 2.º quadrante.

24.2. Como $-180° < -100° < -90°$, o lado extremidade do ângulo cujo lado origem é $\dot{O}P$ e a amplitude é –100º pertence ao 3.º quadrante.

24.3. $862° = 142° + 2 \times 360°$ e $90° < 142° < 180°$

Assim, o lado extremidade do ângulo cujo lado origem é $\dot{O}P$ e a amplitude é 862º pertence ao 2.º quadrante.

24.4. Como $90° < 135° < 180°$, o lado extremidade do ângulo cujo lado origem é $\dot{O}P$ e a amplitude é 135º pertence ao 2.º quadrante.

24.5. $1380° = 300° + 3 \times 360°$ e $270° < 300° < 360°$

Assim, o lado extremidade do ângulo cujo lado origem é $\dot{O}P$ e a amplitude é 1380º pertence ao 4.º quadrante.

24.6. $-710° = -350° - 1 \times 360°$ e $-360° < -350° < -270°$

Assim, o lado extremidade do ângulo cujo lado origem é $\dot{O}P$ e a amplitude é –710º pertence ao 1.º quadrante.

25. $972° = 252° + 2 \times 360°$

$-1500° = -60° - 4 \times 360°$

$855° = 135° + 2 \times 360°$

Assim: $972° \to \dot{O}R$; $-1500° \to \dot{O}S$ e $855° \to \dot{O}T$

Página 29

26.1. A imagem de *A* pela rotação de centro *O* e amplitude –60º é *D*.

Como $510° = 150° + 1 \times 360°$, a imagem de *A* pela rotação de centro *O* e amplitude 510º é *C*.

Como $1125° = 45 + 3 \times 360°$, a imagem de *A* pela rotação de centro *O* e amplitude 1125º é *B*.

Assim: $510° \to C$; $1125° \to B$; $-60° \to D$

26.2. a) Atendendo a que $1125° = 45 + 3 \times 360°$, tem-se:

$B(\cos 45°, \sin 45°)$, ou seja, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Sabe-se que $D(\cos(-60°),\ \sin(-60°))$.

Como *D* é o simétrico de *E* em relação ao eixo Ox e $E(\cos 60°, \sin 60°)$, ou seja, $E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

então $D\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Página 30

27.1. $A(\cos 30°, \sin 30°)$ e $B(\cos 45°, \sin 45°)$, ou seja,

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

27.2. $C\left(x, -\frac{2}{5}\right)$, sendo $x < 0$.

$P\hat{O}C = \alpha$

Como *C* pertence à circunferência trigonométrica, definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$:

$$x^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{25} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{21}{25} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{21}}{5} \vee x = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Como $x_C < 0$, tem-se $C\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

Assim, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ e $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$.

28.1. $\cos\beta = -\frac{1}{3}$ e $\beta \in 3.°\text{Q}$

$\sin\beta = ?$

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1 \Leftrightarrow \sin^2\beta+\left(-\frac{1}{3}\right)^2=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\beta+\frac{1}{9}=1 \Leftrightarrow \sin^2\beta=1-\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow \sin^2\beta=\frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin\beta=\sqrt{\frac{8}{9}} \vee \sin\beta=-\sqrt{\frac{8}{9}}$

Como $\beta\in 3.^{\text{o}}\text{Q}$, $\sin\beta<0$.

Logo, $\sin\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

28.2. $3+4\sin\alpha=0 \wedge \alpha\in 4.^{\text{o}}\text{Q}$

$\cos\alpha=?$

$3+4\sin\alpha=0 \Leftrightarrow \sin\alpha=-\frac{3}{4}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{4}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9}{16}+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{9}{16}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{7}{16} \Leftrightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{7}{16}} \vee \cos\alpha=-\sqrt{\frac{7}{16}}$

Como $\alpha\in 4.^{\text{o}}\text{Q}$, $\cos\alpha>0$. Então, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Página 31 – Tarefa 5

1.1. $\sin b<\sin c$, pois $y_B<y_C$.

1.2. $\cos a>\cos d$, pois $\cos a>0$ e $\cos d<0$.

1.3. $\sin c>\cos e$, pois $\sin c>0$ e $\cos e<0$.

1.4. $\cos b\times\sin a<0$, pois $\cos b>0$ e $\sin a<0$.

1.5. $\sin e\times\cos(1170^\circ)=0$, pois $\sin e<0$ e

$\cos(1170^\circ)=\cos(90^\circ+3\times 360^\circ)=\cos(90^\circ)=0$

1.6. $\cos d\times\sin(-450^\circ)=-\cos d$, pois

$\sin(-450^\circ)=\sin(-90^\circ-1\times 360^\circ)=\sin(-90^\circ)=-1$ e

$\cos d<0$

1.7. $\cos e+\sin a<0$, pois $\cos e>0$ e $\sin a<0$

2.1. $\sin a=-\frac{1}{3}$ e $\alpha\in 4.^{\text{o}}\text{Q}$ (ver figura)

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2 a=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{9}+\cos^2 a=1 \Leftrightarrow \cos^2 a=\frac{8}{9}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos a=\sqrt{\frac{8}{9}} \vee \cos a=-\sqrt{\frac{8}{9}}$

Como $a\in 4.^{\text{o}}\text{Q}$, $\cos a>0$.

Então, $\cos a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2.2. $\sin d=\frac{1}{6}$ e $d\in 2.^{\text{o}}\text{Q}$ (ver figura)

$\sin^2 d+\cos^2 d=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^2+\cos^2 d=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{36}+\cos^2 d=1 \Leftrightarrow \cos^2 d=\frac{35}{36}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos d=\sqrt{\frac{35}{36}} \vee \cos d=-\sqrt{\frac{35}{36}}$

Como $d\in 2.^{\text{o}}\text{Q}$, $\cos d<0$.

Então, $\cos d=-\frac{\sqrt{35}}{6}$.

2.3. $\cos e=-\frac{3}{8}$ e $e\in 3.^{\text{o}}\text{Q}$ (ver figura)

$\sin^2 e+\cos^2 e=1 \Leftrightarrow \sin^2 e+\left(-\frac{3}{8}\right)^2=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 e+\frac{9}{64}=1 \Leftrightarrow \sin^2 e=\frac{55}{64}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin e=\sqrt{\frac{55}{64}} \vee \sin e=-\sqrt{\frac{55}{64}}$

Como $e\in 3.^{\text{o}}\text{Q}$, $\sin e<0$.

Então, $\sin e=-\frac{\sqrt{55}}{8}$.

3. $x_B=\frac{3}{4}$, logo $\cos b=\frac{3}{4}$.

$\sin^2 b+\cos^2 b=1 \Leftrightarrow \sin^2 b+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 b=\frac{7}{16} \Leftrightarrow \sin b=\sqrt{\frac{7}{16}} \vee \sin b=-\sqrt{\frac{7}{16}}$

Como $b\in 1.^{\text{o}}\text{Q}$, $\sin b>0$. Então, $\sin b=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Seja *B'* a projeção ortogonal de *B* sobre o eixo Ox.

O triângulo [*BOB'*] é retângulo em *B'*.

$\tan b=\frac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

Conclusão: $\sin b=\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\cos b=\frac{3}{4}$; $\tan b=\frac{\sqrt{7}}{3}$

4. $640^\circ=280^\circ+1\times 360^\circ \rightarrow 4.^{\text{o}}\text{Q}$

$1455^\circ=15^\circ+4\times 360^\circ \rightarrow 1.^{\text{o}}\text{Q}$

$950^\circ=230^\circ+2\times 360^\circ \rightarrow 3.^{\text{o}}\text{Q}$

$1200^\circ=120^\circ+3\times 360^\circ \rightarrow 2.^{\text{o}}\text{Q}$

A opção correta é a **(D)**.

Página 32

29.1. A tangente é positiva no 1.º e no 3.º quadrante e o cosseno é negativo no 2.º e no 3.º quadrante.

Se $\tan\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, então θ pertence ao 3.º quadrante.

29.2. A tangente é negativa no 2.º e no 4.º quadrante e o seno é negativo no 3.º e no 4.º quadrante.

Se $\tan\theta < 0$ e $\sin\theta < 0$, então θ pertence ao 4.º quadrante.

29.3. A tangente é positiva no 1.º e no 3.º quadrante e o cosseno é positivo no 1.º e no 4.º quadrante.

Se $\tan\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, então θ pertence ao 1.º quadrante.

29.4. A tangente é positiva no 1.º e no 3.º quadrante e o seno é positivo no 1.º e no 2.º quadrante.

Se $\tan\theta > 0$ e $\sin\theta > 0$, então θ pertence ao 1.º quadrante.

29.5. A tangente é negativa no 2.º e no 4.º quadrante e o seno é positivo no 1.º e no 2.º quadrante.

Se $\tan\theta < 0$ e $\sin\theta > 0$, então θ pertence ao 2.º quadrante.

30. $\overline{OA} = \frac{7}{5}$. Seja *B* o ponto de coordenadas $(1, 0)$.

O triângulo [*AOB*] é retângulo em *B*.

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^2 = 1^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{49}{25} = 1 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \frac{24}{25} = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\overline{AB}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AB} = \sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$A\left(1, \frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$, logo $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Página 33

31.1. Como $x_A = -\frac{3}{4}$, sabe-se que $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha + \frac{9}{16} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{7}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{7}{16}} \vee \sin\alpha = -\sqrt{\frac{7}{16}}$$

Como $\alpha \in 2.^{\circ}\text{Q}$, $\sin\alpha > 0$.

Então, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

31.2. Sendo [*AB*] um diâmetro da circunferência trigonométrica, sabe-se que *A* e *B* são simétricos em relação ao ponto *O* (origem do referencial).

Então, $\beta = \alpha + 180^{\circ}$.

$$\tan\beta = \tan(\alpha + 180^{\circ}) = \tan\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Página 34 – Pratica

32.1. a) $\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) $\sin\beta = \frac{1}{4}$

c) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$

32.2. a) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ e $\theta \in 1.^{\circ}\text{Q}$ (ver figura)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\theta + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{4}} \vee \sin\theta = -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Como $\theta \in 1.^{\circ}\text{Q}$, $\sin\theta > 0$.

Logo, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\sin\beta = \frac{1}{4}$ e $\beta \in 2.^{\circ}\text{Q}$

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{15}{16}$$

$$\Leftrightarrow \cos\beta = \sqrt{\frac{15}{16}} \vee \cos\beta = -\sqrt{\frac{15}{16}}$$

Como $\beta \in 2.^{\circ}\text{Q}$, $\cos\beta < 0$.

Logo, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

c) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ e $\alpha \in 4.^{\circ}Q$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha + \frac{9}{16} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{7}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{7}{16}} \vee \sin\alpha = -\sqrt{\frac{7}{16}}$

Como $\alpha \in 4.^{\circ}Q$, $\sin\alpha < 0$. Logo, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

33.1. $r = 3$ e $x_P = -\frac{9}{4}$.

Seja P a projeção ortogonal sobre Ox. Assim, o triângulo $[POQ]$ é retângulo em Q.

Seja $\theta = P\hat{O}Q$. $\cos\theta = \frac{\frac{9}{4}}{3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\cos\alpha = -\cos\theta \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{4}$

33.2. $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ e $\alpha \in 3.^{\circ}Q$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{7}{16} \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{7}{16}} \vee \sin\alpha = -\sqrt{\frac{7}{16}}$

Como $\alpha \in 3.^{\circ}Q$, $\sin\alpha < 0$. Então, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

34.1. $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$ e $\alpha \in 3.^{\circ}Q$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \left(-\frac{3}{7}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{40}{49} \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{40}{49}} \vee \sin\alpha = -\sqrt{\frac{40}{49}}$

Como $\alpha \in 3.^{\circ}Q$, $\sin\alpha < 0$.

Então, $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{10}}{7}}{-\frac{3}{7}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

Conclusão: $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$; $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$;

$\tan\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

34.2. $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ e $\alpha \in 2.^{\circ}Q$ (ver figura)

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{21}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{21}{25}} \vee \cos\alpha = -\sqrt{\frac{21}{25}}$

Como $\alpha \in 2.^{\circ}Q$, $\cos\alpha < 0$. Logo, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{21}} = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$

$\sin\alpha = \frac{2}{5}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$; $\tan\alpha = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$

18.3. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\alpha \in 4.^{\circ}Q$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha + \frac{5}{9} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{4}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{9}} \vee \sin\alpha = -\sqrt{\frac{4}{9}}$

Como $\alpha \in 4.^{\circ}Q$, $\sin\alpha < 0$. Então, $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

Conclusão: $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

$\tan\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

35. Como o hexágono $[ABCDEF]$ é regular, sabe-se que $A\hat{O}B = \frac{360^{\circ}}{6} = 60^{\circ}$.

Então, $B(\cos 60^{\circ}, \sin 60^{\circ})$, ou seja, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

O ponto C é simétrico de B em relação a Oy, logo $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$H(1, \tan 60^{\circ})$, ou seja, $H\left(1, \sqrt{3}\right)$.

O ponto F é simétrico de B em relação a Ox, logo $F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$EF // Ox$, logo: $EF: y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como G é o ponto de interseção da reta EF com a reta t (de equação $x = 1$), então $G\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Assim, $H\left(1, \sqrt{3}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $G\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Página 35 – Pratica

36.1. $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ e $-90° < \alpha < 90°$

Como $-90° < \alpha < 90°$ e $\sin\alpha < 0$, conclui-se que $\alpha \in 4.^\text{o}\text{Q}$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} \vee \cos\alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}}$

Como $\alpha \in 4.^\text{o}\text{Q}$, $\cos\alpha > 0$. Logo, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Conclusão: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\tan\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

36.2. $\cos\beta = -\frac{3}{5}$ e $180° < \beta < 360°$

Como $180° < \beta < 360°$ e $\cos\beta < 0$, conclui-se que $\beta \in 3.^\text{o}\text{Q}$.

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2\beta + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\beta + \frac{9}{25} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\beta = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\beta = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{4}{5} \vee \sin\beta = -\frac{4}{5}$

Como $\beta \in 3.^\text{o}\text{Q}$, $\sin\beta < 0$. Então, $\sin\beta = -\frac{4}{5}$.

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

Conclusão: $\sin\beta = -\frac{4}{5}$ e $\tan\beta = \frac{4}{3}$

37.1.

a) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\theta \in 2.^\text{o}\text{Q}$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\theta + \frac{5}{9} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta = \frac{4}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\theta = \frac{2}{3} \vee \sin\theta = -\frac{2}{3}$

Como $\theta \in 2.^\text{o}\text{Q}$, $\sin\theta > 0$. Logo, $\sin\theta = \frac{2}{3}$.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Conclusão: $\sin\theta = \frac{2}{3}$ e $\tan\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $A(\cos\theta, \sin\theta)$, ou seja, $A\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$C(1, \tan\theta)$ ou seja, $C\left(1, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$D(1, \sin\theta)$, ou seja, $D\left(1, \frac{2}{3}\right)$

$B(\cos\theta, \tan\theta)$, ou seja, $B\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Conclusão:

$A\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $C\left(1, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

e $D\left(1, \frac{2}{3}\right)$

37.2. $A_{[ABCD]} = \overline{AD} \times \overline{CD} = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) =$

$= \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{9} + \frac{10}{15}$

$= \frac{30 + 18\sqrt{5} + 10\sqrt{5} + 30}{45}$

$= \frac{60 + 28\sqrt{5}}{45}$

Página 36 – Pratica

38. $4\tan\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\theta = -\frac{1}{4}$

Como $\tan\theta < 0$ e $-90° < \theta < 90°$, então $\theta \in 4.°\text{Q}$.

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\Leftrightarrow \frac{17}{16} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{16}{17}$

$\cos\theta = \sqrt{\frac{16}{17}} \vee \cos\theta = -\sqrt{\frac{16}{17}}$

Como $\theta \in 4.°\text{Q}$, $\cos\theta > 0$.

Então, $\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$.

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = \frac{\sin\theta}{\frac{4\sqrt{17}}{17}} \Leftrightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin\theta + \cos\theta = -\frac{\sqrt{17}}{17} + \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$

39.1. $\cos\alpha = \frac{\overline{AF}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{AF}}{5} \Leftrightarrow \overline{AF} = 5\cos\alpha$

$\sin\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{AE}}{5} \Leftrightarrow \overline{AE} = 5\sin\alpha$

$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = \overline{AF} + \overline{AE} = 5\cos\alpha + 5\sin\alpha$

$A(\alpha) = (5\cos\alpha + 5\sin\alpha)^2 =$

$= 25\cos^2\alpha + 2 \times 5\cos\alpha \times 5\sin\alpha + 25\sin^2\alpha$

$= 25\cos^2\alpha + 25\sin^2\alpha + 50\cos\alpha\sin\alpha$

$= 25(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 50\cos\alpha\sin\alpha$

$= 25 \times 1 + 50\cos\alpha\sin\alpha$

$= 25 + 50\cos\alpha\sin\alpha$

39.2. $A(0) = 25 + 50\cos 0 \sin 0 = 25 + 50 \times 1 \times 0 = 25$

Geometricamente, significa que, quando $\alpha = 0$, o quadrado $[EFGH]$ coincide com o quadrado $[ABCD]$ e a sua área é igual a 25 cm^2.

39.3. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \vee \cos\alpha = -\frac{4}{5}$

Como α é um ângulo agudo, sabe-se que $\cos\alpha > 0$. Donde se conclui que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{\sin\alpha}{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$

$A_{[ABCD]} = 25 + 50 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = 49$

40.1. a) $P(\cos 30°, \sin 30°)$, ou seja, $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$A_{[OPA]} = \frac{\overline{AD} \times y_P}{2} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

b) Por exemplo, $R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Neste caso, os triângulos têm a mesma base e a mesma altura, logo têm a mesma área.

40.2. $d = \overline{AP}$

a) $P(\cos\theta, \sin\theta)$, sendo $0° < \theta < 180°$

$A(-1, 0)$

$d = \overline{AP} = \sqrt{(-1 - \cos\theta)^2 + (0 - \sin\theta)^2} =$

$= \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}$

$= \sqrt{1 + 2\cos\theta + 1} = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$

Se $d = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$, então $d^2 = 2 + 2\cos\theta$.

b) Se $d = 1{,}2$, então:

$1{,}2^2 = 2 + 2\cos\theta \Leftrightarrow 1{,}44 - 2 = 2\cos\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\theta = -0{,}28 \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{7}{25}$

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\left(-\frac{7}{25}\right)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{625}{49} \Leftrightarrow \tan^2\theta = \frac{576}{49} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\theta = \frac{24}{4} \vee \tan\theta = -\frac{24}{4}$

Como $\cos\theta < 0$ e $0° < \theta < 180°$, conclui-se que $\theta \in 2.° Q$. Logo, $\tan\theta = -\frac{24}{7}$.

Página 37 – Pratica

41.1. $\sin\alpha = \frac{k-1}{2} \wedge \cos\alpha = k+1$

$-1 \le \sin\alpha \le 1 \wedge -1 \le \cos\alpha \le 1 \wedge \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Assim, a condição dada é possível se:

$$-1 \le \frac{k-1}{2} \le 1 \wedge -1 \le k+1 \le 1 \wedge \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 + (k+1)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k-1}{2} \ge -1 \wedge \frac{k-1}{2} \le 1 \wedge k+1 \ge -1 \wedge k+1 \le 1 \wedge$$
$$\wedge \frac{k^2-2k+1}{4} + k^2 + 2k + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow k \ge -1 \wedge k \le 3 \wedge k \ge -2 \wedge k \le 0 \wedge 5k^2 + 6k + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \le k \le 0 \wedge k = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{10}$$

$$\Leftrightarrow -1 \le k \le 0 \wedge \left(k = -\frac{1}{5} \vee k = -1\right)$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{5} \vee k = -1$$

$$k \in \left\{-1, -\frac{1}{5}\right\}$$

41.2. $\sin\beta = 1 - \frac{k}{2} \wedge -45° < \beta \le 180°$

Se $-45° < \beta \le 180°$, então $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\beta \le 1$.

A condição dada é possível se:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 - \frac{k}{2} \le 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{k}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge 1 - \frac{k}{2} \le 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 - k > -\sqrt{2} \wedge 2 - k \le 2$$
$$\Leftrightarrow -k > -\sqrt{2} - 2 \wedge -k \le 0$$
$$\Leftrightarrow k < \sqrt{2} + 2 \wedge k \ge 0$$
$$\Leftrightarrow k \in \left[0, 2+\sqrt{2}\right[$$

41.3. $\cos x = k^2 - 3 \wedge 0° \le x \le 90°$

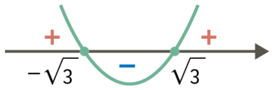
Se $0° \le x \le 90°$, então $0 \le \cos x \le 1$.

Assim, a condição dada é possível se:

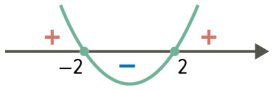
$$0 \le k^2 - 3 \le 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 3 \ge 0 \wedge k^2 - 3 \le 1$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 3 \ge 0 \wedge k^2 - 4 \le 0$$
$$\Leftrightarrow \left(k \le -\sqrt{3} \vee k \ge \sqrt{3}\right) \wedge (-2 \le k \le 2)$$
$$\Leftrightarrow k \in \left[-2, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\right]$$

Cálculos auxiliares:

$k^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow k = \sqrt{3} \vee k = -\sqrt{3}$



$k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 2 \vee k = -2$



41.4. $\tan x = k - 2k^2 \wedge 180° \le x < 270°$

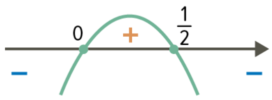
Se $180° \le x < 270°$, então $\tan x \ge 0$

Assim, a condição dada é possível se:

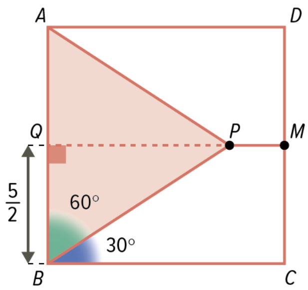
$$k - 2k^2 \ge 0 \Leftrightarrow k \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Cálculo auxiliar:

$$k - 2k^2 = 0 \Leftrightarrow k(1-2k) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{1}{2}$$



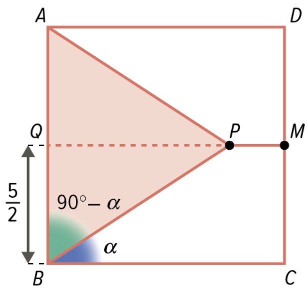
42.1. $P_{[ABCD]} = 20 \Leftrightarrow 4 \times \overline{AB} = 20 \Leftrightarrow \overline{AB} = 5$



$$\tan 60° = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QB}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{PQ}}{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{PM} = \overline{QM} - \overline{QP} = 5 - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{10-5\sqrt{3}}{2}$$

42.2.



$$\tan(90^\circ-\alpha)=\frac{\overline{PQ}}{\overline{QB}} \Leftrightarrow \frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ-\alpha)}=\frac{\overline{PQ}}{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\overline{PQ}}{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \frac{5\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\overline{PQ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\overline{PQ} \Leftrightarrow \frac{5}{2\tan\alpha}=\overline{PQ}$$

Então:

$$\overline{PM}=\overline{QM}-\overline{QP}=5-\frac{5}{2\tan\alpha}$$

Página 38

43.1.

1 rad ____ 4 cm
x ____ 5,6 cm

$$x=\frac{1\times 5{,}6}{4}=1{,}4$$

A amplitude do arco *AB* é 1,4 rad.

43.2.

1 rad ____ 4 cm
2,4 rad ____ x

$$x=\frac{2{,}4\times 4}{1}=9{,}6$$

O comprimento do arco *BC* é 9,6 cm.

44. O ângulo *ACB* está inscrito na circunferência, logo:

$$\overset{\frown}{AB}=2\times A\hat{C}B=2\times 1{,}5=3 \text{ rad}$$

$$\text{raio}=\overline{OB}=6 \text{ cm}$$

1 rad ____ 6 cm
3 rad ____ x

$x=18$ cm

O comprimento do arco *AB* é 18 cm.

A opção correta é a **(B)**.

Página 39 – Tarefa 6

1.1.

1 rad ____ 10 m
1,8 rad ____ x

$x=18$ m

O arco *AB* tem 18 m de comprimento.

1.2.

1 rad ____ 10 m
α rad ____ 21 m

$\alpha=\frac{1\times 21}{10}$, ou seja, $\alpha=2{,}1$ rad

A amplitude do ângulo *BOC* é 2,1 rad.

2.1. $C\hat{O}A=2\pi \text{ rad}-1{,}8 \text{ rad}-2{,}1 \text{ rad}=(2\pi-3{,}9) \text{ rad}$

1 rad ____ 10 m
$(2\pi-3{,}9)$ rad ____ x m

$x=10\times(2\pi-3{,}9)$, ou seja, $x=20\pi-39$

Comprimento, em metros, do arco *CA*: $20\pi-39$

Comprimento, em metros, da fita que é necessário comprar: $20\pi-39+0{,}2$

Custo total da fita:

$(20\pi-39+0{,}2)\times 3{,}75\approx 24{,}0319\times 3{,}75\approx 90{,}12$

O custo da fita é 90,12 €.

2.2. $B\hat{O}C=\alpha$

1 rad ____ 12 m
α rad ____ 21 m

$\alpha=\frac{1\times 21}{12}$, ou seja, $\alpha=1{,}75$ rad

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{CA}=C\hat{O}A&=(2\pi-1{,}8-1{,}75) \text{ rad}\\&=(2\pi-3{,}55) \text{ rad}\end{aligned}$$

1 rad ____ 12 m
$(2\pi-3{,}55)$ rad ____ y m

$y=12(2\pi-3{,}55)=24\pi-42{,}6$

Custo total da fita:

$(24\pi-42{,}6+0{,}2)\times 3{,}75\approx 123{,}74$

O novo orçamento para a fita de iluminação é 123,74 €.

Página 40

45.1.

180 ____ π
60 ____ x

$x=\frac{60\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$, logo $\overset{\frown}{AB}=\frac{\pi}{3}$ rad

45.2. x : comprimento da circunferência, em cm

$\frac{\pi}{3}$ ____ 10
2π ____ x

$$x = \frac{2\pi \times 10}{\frac{\pi}{3}} = \frac{20\pi}{\frac{\pi}{3}} = 60$$

A circunferência tem 60 cm de comprimento.

46. $P\hat{R}Q = 108°$

$180 \_\_\_\_ \pi$
$108 \_\_\_\_ x$

$x = \frac{108\pi}{180} = \frac{3\pi}{5}$, logo $P\hat{R}Q = \frac{3\pi}{5}$ rad.

Como $\overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{RQ}$, sabe-se que:

$R\hat{P}Q = R\hat{Q}P = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$

$180 \_\_\_\_ \pi$
$36 \_\_\_\_ y$

$y = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$ rad

$R\hat{P}Q = R\hat{Q}P = \frac{\pi}{5}$ rad

Conclusão: $P\hat{R}Q = \frac{3\pi}{5}$ rad e $R\hat{P}Q = R\hat{Q}P = \frac{\pi}{5}$ rad

Página 41

47.1. $C\hat{B}A = \pi - B\hat{A}C - A\hat{C}B = \pi - \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

47.2. **Ângulo *BAC***

$180 \_\_\_\_ \pi$
$x \_\_\_\_ \frac{5\pi}{12}$

$x = \frac{180 \times \frac{5\pi}{12}}{\pi} = 75$

Ângulo *ACB*

$180 \_\_\_\_ \pi$
$y \_\_\_\_ \frac{\pi}{3}$

$y = \frac{180 \times \frac{\pi}{3}}{\pi} = 60$

Ângulo *CBA*

$180 \_\_\_\_ \pi$
$z \_\_\_\_ \frac{\pi}{4}$

$z = \frac{180 \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = 45$

$B\hat{A}C = 75°$, $A\hat{C}B = 60°$ e $C\hat{B}A = 45°$

48.1. $E\hat{O}F = \overset{\frown}{EF} = \frac{\pi}{3}$

48.2. $E\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{EAC}}{2} = \frac{4 \times \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$

48.3. $F\hat{E}B = \frac{\overset{\frown}{FB}}{2} = \frac{2 \times \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

Página 42

49. O octógono é regular e está dividido em oito triângulos iguais, cada um dos ângulos ao centro tem amplitude, em radianos, igual a $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

49.1. a) $\frac{\pi}{4} + \underset{\downarrow}{2\pi}$

1 volta completa

O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ **e** amplitude $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ é $\dot{O}B$.

b) $\frac{3\pi}{4} + \underset{\downarrow}{\underset{(3 \times 2\pi)}{6\pi}}$

3 voltas completas

O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ **e** amplitude $\frac{3\pi}{4} + 6\pi$ é $\dot{O}D$.

c) $-\frac{\pi}{2} - 6\pi = 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3 \underset{\downarrow}{\times} 2\pi$

3 voltas completas

O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ **e** amplitude $-\frac{\pi}{2} - 6\pi$ é $\dot{O}G$.

d) $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ **e** amplitude $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ é $\dot{O}F$.

e) $-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude $-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ é $\dot{O}C$.

49.2. a) $\frac{10\pi}{3} = \frac{4\pi + 6\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi$

O lado do octógono que é intersetado pelo lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude $\frac{10\pi}{3}$ é $[FG]$.

b) $-\frac{7\pi}{3} = \frac{-\pi - 6\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - 2\pi$

O lado do octógono que é intersetado pelo lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude $-\frac{7\pi}{3}$ é $[GH]$.

c) $\frac{17\pi}{6}=\frac{5\pi+12\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2\pi$

O lado do octógono que é intersetado pelo lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude $\frac{17\pi}{6}$ é $[DE]$.

d) $\frac{49\pi}{6}=\frac{\pi+48\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+8\pi$

O lado do octógono que é intersetado pelo lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude $\frac{49\pi}{6}$ é $[AB]$.

Página 43 – Tarefa 7

1. Como a circunferência está dividida em 12 arcos iguais, a amplitude, em graus, de cada um desses arcos é $\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$ e em radianos é $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$.

1.1. $150^\circ : 30^\circ = 5$

Então, se a cabina P descrever um arco de amplitude 150º, a posição da paragem é P_6.

1.2. $-\pi$ rad → meia-volta no sentido negativo.

Se a cabina P descrever um arco de amplitude $-\pi$ rad, a posição da paragem é P_7.

1.3. $\frac{4\pi}{3}$ rad; $\frac{4\pi}{3}:\frac{\pi}{6}=8$

Se a cabina P descrever um arco de amplitude $\frac{4\pi}{3}$ rad, a posição da paragem é P_9.

1.4. -270° ; $270^\circ : 30^\circ = 9$

Se a cabine P descrever um arco de amplitude -270°, a posição da paragem é P_4.

1.5. -210°; $210^\circ : 30^\circ = 7$

Se a cabine P descrever um arco de amplitude -210°, a posição da paragem é P_6.

1.6. $\frac{11\pi}{6}$ rad ; $\frac{11\pi}{6}:\frac{\pi}{6}=11$

Se a cabine P descrever um arco de amplitude $\frac{11\pi}{6}$ rad, a posição da paragem é P_{12}.

2.1. $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{\pi}{6}+1\times 2\pi$

Se a posição de partida é P_7 e a amplitude do arco descrito é $\frac{\pi}{6}+2\pi$, então a posição de paragem é P_8.

2.2. $\frac{\pi}{3}+4\pi=\frac{2\pi}{6}+2\times 2\pi=2\times\frac{\pi}{6}+2\times 2\pi$

Se a posição de partida é P_7 e a amplitude do arco descrito é $\frac{\pi}{3}+4\pi$, então a posição de paragem é P_9.

2.3. $\frac{5\pi}{6}+8\pi=5\times\frac{\pi}{6}+4\times 2\pi$

Se a posição de partida é P_7 e a amplitude do arco descrito é $\frac{5\pi}{6}+8\pi$, então a posição de paragem é P_{12}.

2.4. $-\frac{\pi}{3}-6\pi=-\frac{2\pi}{6}-3\times 2\pi=-2\times\frac{\pi}{6}-3\times 2\pi$

Se a posição de partida é P_7 e a amplitude do arco descrito é $-\frac{\pi}{3}-6\pi$, a posição de paragem é P_5.

2.5. $\frac{\pi}{2}+10\pi=\frac{3\pi}{6}+5\times 2\pi=3\times\frac{\pi}{6}+5\times 2\pi$

Se a posição de partida é P_7 e a amplitude do arco descrito é $\frac{\pi}{2}+10\pi$, a posição de paragem é P_{10}.

2.6. $-\frac{4\pi}{3}-6\pi=-\frac{8\pi}{6}-3\times 2\pi=-8\times\frac{\pi}{6}-3\times 2\pi$

Se a posição de partida é P_7 e a amplitude do arco descrito é $-\frac{4\pi}{3}-6\pi$, a posição de paragem é P_{11}.

3.1. $7\times\frac{\pi}{6}+8\times 2\pi$, ou seja, $\frac{7\pi}{6}+16\pi$

3.2. $-3\times\frac{\pi}{6}-5\times 2\pi$, ou seja, $-\frac{\pi}{2}-10\pi$

Página 44 – Pratica

50.1. $P_{\text{pista}}=2\pi\times 78=156\pi$ m

$$f(a)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin(2a)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin(2a)=-\frac{1}{3}$$

$$x=\frac{2\pi\times 200}{156\pi}=\frac{100}{39}$$

A amplitude do arco descrito pela Joana é $\frac{100}{39}$ rad.

50.2.

2π ______ 156π

$4{,}2$ ______ y

$$y=\frac{4{,}2\times 156\pi}{2\pi}=327{,}6$$

O Vasco percorreu $327{,}6$ metros.

51.1. r : raio da circunferência

1 rad ____ r

2 rad ____ 9

$$r=\frac{9}{2}=4{,}5\text{ cm};\ P_{\odot}=2\pi\times 4{,}5=9\pi\text{ cm}$$

O comprimento da circunferência é 9π cm.

51.2. a)

2π ____ 9π cm

x ______ $6{,}3$ cm

$$x=\frac{2\pi\times 6{,}3}{9\pi}=1{,}4$$

$\overset{\frown}{BC}=1{,}4$ rad

b)

360° ____ 9π cm

y _____ $6{,}3$ cm

$$y=\frac{360^{\circ}\times 6{,}3}{9\pi}\approx 80{,}2^{\circ}$$

$\overset{\frown}{BC}=80{,}2^{\circ}$

52.1. $A\hat{C}B=50^{\circ}$

π rad ______ 180°

x ______ 50°

$$x=\frac{50\pi}{180}=\frac{5\pi}{18}$$

A opção correta é a **(D)**.

52.2. Como $\overline{AC}=\overline{BC}$, então $A\hat{B}C=B\hat{A}C$.

Atendendo a que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a π rad, conclui-se que:

$$A\hat{B}C=B\hat{A}C=\frac{\pi-\frac{5\pi}{18}}{2}=\frac{13\pi}{36}\text{ rad}$$

53. Seja α a amplitude do setor circular.

Sabe-se que $\frac{\pi}{2}\text{ rad}<\alpha<\pi\text{ rad}$.

Então, das amplitudes indicadas, a que pode corresponder à amplitude do setor circular é 2 rad.

A opção correta é a **(B)**.

54. Sabe-se que P se desloca sobre uma circunferência de raio r e descreve um arco de comprimento $3r$.

Então, o ponto P descreve um arco de amplitude 3 radianos.

π rad _____ 180°

3 rad _____ x

$$x=\frac{3\times 180^{\circ}}{\pi}\approx 172^{\circ}$$

A opção correta é a **(A)**.

Página 45 – Pratica

55.1. Se o triângulo [*ABC*] é equilátero e está inscrito na circunferência, então divide-a em três arcos de igual amplitude. A amplitude, em radianos, do arco *BC* é $\frac{2\pi}{3}$.

Então, $B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$ rad.

55.2. Como [*BD*] é um dos lados de um quadrado inscrito na circunferência, então a amplitude, em radianos, do arco *BD* é $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

$$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{BD}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$D\hat{B}C=\frac{\overset{\frown}{DC}}{2}=\frac{\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\pi}{12}\text{ rad}$$

56.1. a) $A\hat{O}B=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$

b) $G\hat{O}I=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

c) $A\hat{O}F=5\times\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

d) $C\hat{O}F=3\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

e) $A\hat{O}E=4\times\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$

f) $O\hat{K}L=\frac{\pi-\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\frac{5\pi}{6}}{2}=\frac{5\pi}{12}$

56.2. Amplitude, em radianos, do arco maior *AH*: $\frac{7\pi}{6}$

Raio da circunferência: 3

1 rad ____ 3

$\frac{7\pi}{6}$ rad ____ x

$x = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2} \approx 11{,}0$

56.3. a) $\frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi + 18\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 6\pi = \frac{4\pi}{6} + 3 \times 2\pi$

O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude $\frac{20\pi}{3}$ rad é $\dot{O}E$.

b) $\frac{31\pi}{6} = \frac{7\pi + 24\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 4\pi = \frac{7\pi}{6} + 2 \times 2\pi$

O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude $\frac{31\pi}{6}$ rad é $\dot{O}H$.

c) $-\frac{37\pi}{6} = \frac{-\pi - 36\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 6\pi = -\frac{\pi}{6} - 3 \times 2\pi$

O lado extremidade do ângulo de lado origem $\dot{O}A$ e amplitude $-\frac{37\pi}{6}$ rad é $\dot{O}L$.

57.1. a)

1 ____ 4

α ____ 8

$\alpha = 2$ rad

b)

360 ____ $2\pi \times 4$

α ____ 8

$\alpha = \frac{8 \times 360^\circ}{8\pi} \approx 114{,}6^\circ$

57.2. Seja θ a amplitude do arco descrito por P.

360 ____ $2\pi \times 4$

θ ____ 15

$\theta = \frac{360^\circ \times 15}{8\pi} \approx 215^\circ$

O arco tem, aproximadamente, 215º de amplitude.

Página 46 – Tarefa 8

1. $\sin\alpha = b$, $\cos\alpha = a$ e $\tan\alpha = c$

2.1. a) O lado extremidade do ângulo de amplitude $\pi - \alpha$ é $\dot{O}B$.

b) O lado extremidade do ângulo de amplitude $\pi + \alpha$ é $\dot{O}C$.

c) O lado extremidade do ângulo de amplitude $-\alpha$ é $\dot{O}D$.

2.2. Como B é simétrico de A em relação ao eixo Oy, C é simétrico de A em relação à origem do referencial e D é simétrico de A em relação ao eixo Ox, pelo que $B(-a, b)$, $C(-a, -b)$ e $D(a, -b)$.

2.3. a) $\sin(\pi - \alpha) = b$

b) $\cos(\pi - \alpha) = -a$

c) $\tan(\pi - \alpha) = -c$

d) $\sin(\pi + \alpha) = -b$

e) $\cos(\pi + \alpha) = -a$

f) $\tan(\pi + \alpha) = c$

g) $\sin(-\alpha) = -b$

h) $\cos(-\alpha) = a$

i) $\tan(-\alpha) = -c$

Página 47

58.1. $\cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{3}{8}$

58.2. $\sin\beta = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{55}{64} \underset{\alpha \text{ é agudo}}{\Leftrightarrow} \sin\alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$

59.1. $\sin(\pi - \alpha) + \cos(4\pi - \alpha) =$

$= \sin\alpha + \cos(-\alpha)$

$= \sin\alpha + \cos\alpha$

59.2. $\cos(\pi + \alpha) \times \tan(\pi - \alpha) =$

$= -\cos\alpha \times (-\tan\alpha)$

$= \cos\alpha \times \tan\alpha$

$= \cos\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sin\alpha$

59.3. $\tan(7\pi + \alpha) - \cos(9\pi - \alpha) =$

$= \tan\alpha - \cos(\pi - \alpha)$

$= \tan\alpha - (-\cos(\alpha)) = \tan\alpha + \cos\alpha$

60.1. $\sin(135^\circ)+\cos(210^\circ)$

$=\sin(180^\circ-45^\circ)+\cos(180^\circ+30^\circ)$

$=\sin 45^\circ-\cos 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$

60.2. $\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)-\cos(3\pi)=$

$=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(2\pi+\pi)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos(\pi)\ =1-(-1)=2$

60.3. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

60.4. $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Página 48 – Tarefa 9

1.1. a) Se $A\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, então $A'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3}\right)$.

b) Se $A\left(\frac{\sqrt{21}}{5},\frac{2}{5}\right)$, então $A'\left(\frac{2}{5},\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$.

c) Se $A\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, então $A'\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

d) Se $A(a,b)$, então $A'(b,a)$.

1.2. a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

2.1. a) Se $A\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, então $A''\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3}\right)$.

b) Se $A\left(\frac{\sqrt{21}}{5},\frac{2}{5}\right)$, então $A''\left(-\frac{2}{5},\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$.

c) Se $A\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, então $A''\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

d) Se $A(a,b)$, então $A''(-b,a)$.

2.2. a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

Página 49

61.1. $\alpha+\beta=90^\circ \Leftrightarrow \beta=90^\circ-\alpha$

$\sin\beta=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha=\frac{3}{4}$

61.2. $\theta+\beta=180^\circ \Leftrightarrow \theta=180^\circ-\beta$

$\cos\theta=\cos(180^\circ-\beta)=$

$=-\cos\beta=-\cos(90^\circ-\alpha)$

$=-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

Cálculo auxiliar:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{7}{16} \underset{\alpha \text{ é agudo}}{\Leftrightarrow} \sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos\beta=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$

62.1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$

$=\cos\alpha-2(-\sin\alpha)=$

$=\cos\alpha+2\sin\alpha$

62.2. $\sin(\pi-\alpha)-2\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$

$=\sin\alpha-2\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$

$=\sin\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$=\sin\alpha-2\sin\alpha$

$=-\sin\alpha$

62.3. $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\tan(-\alpha)=$

$=\cos\left(2\pi-\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\tan\alpha$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\tan\alpha$

$=\sin\alpha-\tan\alpha$

63.1. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$

63.2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha$

63.3. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(7\pi+\alpha)=$

$=\cos\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)+\sin(6\pi+\pi+\alpha)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi+\alpha)$

$=\sin(\alpha)-\sin(\alpha)=0$

63.4. $\sin\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(3\pi+\alpha)=$

$=\sin\left(2\pi+\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)-\cos(2\pi+\pi+\alpha)$

$=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)$

$=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)-(-\cos(\alpha))$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\alpha)$

$=-\cos(\alpha)+\cos(\alpha)=0$

Página 50 – Pratica

64.1. Os ângulos α e β são suplementares, porque são ângulos consecutivos de um paralelogramo.

Então: $\alpha+\beta=\pi \Leftrightarrow \alpha=\pi-\beta$

64.2. a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\sin(\pi-\beta)=$

$=-\sin\beta=-\frac{\sqrt{13}}{7}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\left(-\frac{6}{7}\right)^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{13}{49} \Leftrightarrow \sin\beta=\sqrt{\frac{13}{49}} \vee \sin\beta=-\sqrt{\frac{13}{49}}$

Como $0<\beta<\pi$, então $\sin\beta>0$.

Logo, $\sin\beta=\frac{\sqrt{13}}{7}$.

b) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{13}}{7}$

c) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin(\pi-\beta)}{\cos(\pi-\beta)}=\frac{\sin\beta}{-\cos\beta}=$

$=\frac{\frac{\sqrt{13}}{7}}{-\left(-\frac{6}{7}\right)}=\frac{\sqrt{13}}{6}$

65. $\cos(\pi-\alpha)=-\frac{1}{4}\wedge\alpha\in[-\pi, 2\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos(\alpha)=-\frac{1}{4}\wedge\alpha\in[-\pi, 2\pi]$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha)=\frac{1}{4}\wedge\alpha\in[-\pi, 2\pi]$

Como $\cos\alpha>0\wedge\alpha\in[\pi, 2\pi]$, conclui-se que

$\alpha\in\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

65.1. $\sin(9\pi+\alpha)=\sin(8\pi+\pi+\alpha)=\sin(\pi+\alpha)=$

$=-\sin\alpha=-\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}$

Cálculo auxiliar:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\left(\frac{1}{4}\right)^2=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{15}{16}$

Como $\alpha\in\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, então $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}$.

65.2. $\sin(12\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha=-\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}$

65.3. $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}}=-\sqrt{15}$

65.4. $\cos(10\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$

66. $\sin(\alpha+\pi)=-\dfrac{5}{6}\wedge\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\sin\alpha=-\dfrac{5}{6}\wedge\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{5}{6}\wedge\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$

Como $\sin\alpha>0\wedge\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$, $\alpha\in 2.^{\text{o}}\text{Q}$.

66.1. $\cos(\alpha+\pi)-\sin(4\pi-\alpha)=-\cos\alpha-\sin(-\alpha)=$

$=-\cos\alpha-(-\sin\alpha)=-\cos\alpha+\sin\alpha$

$=-\left(-\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)+\dfrac{5}{6}=\dfrac{5+\sqrt{11}}{6}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\left(\dfrac{5}{6}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{11}{36}\Leftrightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{11}}{6}\vee\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

Como $\alpha\in 2.^{\text{o}}\text{Q}$, $\cos<0$. Logo, $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{11}}{6}$.

66.2. $\tan(10\pi-\alpha)+\cos(8\pi-\alpha)=\tan(-\alpha)+\cos(-\alpha)=$

$=-\tan\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha$

$=-\dfrac{\frac{5}{6}}{-\frac{\sqrt{11}}{6}}+\left(-\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)=\dfrac{5\sqrt{11}}{11}-\dfrac{\sqrt{11}}{6}=\dfrac{19\sqrt{11}}{66}$

67.1. $\sin(3\pi-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)-\tan(4\pi-\alpha)=$

$=\sin(2\pi+\pi-\alpha)-(-\cos\alpha)-\tan(-\alpha)$

$=\sin(\pi-\alpha)+\cos(\alpha)-(-\tan(\alpha))$

$=\sin(\alpha)+\cos(\alpha)+\tan(\alpha)$

$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow1+6^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow37=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{1}{37}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{37}}\vee\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{37}}$

Como $\alpha\in\left]\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$, $\cos\alpha<0$.

Então, $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{37}}{37}$.

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Leftrightarrow6=\dfrac{\sin\alpha}{-\frac{\sqrt{37}}{37}}\Leftrightarrow\sin\alpha=-\dfrac{6\sqrt{37}}{37}$

$\sin(3\pi-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)-\tan(4\pi-\alpha)=$

$=\sin(\alpha)+\cos(\alpha)+\tan(\alpha)$

$=-\dfrac{6\sqrt{37}}{37}+\left(-\dfrac{\sqrt{37}}{37}\right)+6=-\dfrac{7\sqrt{37}}{37}+6$

67.2. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=$

$=\cos\left(\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)+\sin\left(-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$

$=-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$=-\sin\alpha-\cos\alpha$

$=-\left(-\dfrac{6\sqrt{37}}{37}\right)-\left(-\dfrac{\sqrt{37}}{37}\right)=\dfrac{7\sqrt{37}}{37}$

Página 51 – Pratica

68. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\dfrac{5}{8}\wedge\alpha\in[0,\pi]$

$\cos\beta=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow\cos\alpha=-\dfrac{5}{8}\wedge\alpha\in[0,\pi]$

Como $\cos\alpha=-\dfrac{5}{8}\wedge\alpha\in[0,\pi]$, conclui-se que

$\alpha\in2.^{\text{o}}\text{Q}$

68.1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=$

$=-\sin\alpha-\sin\left(-\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=$

$=-\sin\alpha-\left(-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$

$=-\sin\alpha+\cos\alpha$

$=-\dfrac{\sqrt{39}}{8}+\left(-\dfrac{5}{8}\right)$

$=\dfrac{-\sqrt{39}-5}{8}$

Cálculo auxiliar:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\left(-\frac{5}{8}\right)^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha=1-\frac{25}{64} \Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{39}{64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{39}}{8} \vee \sin\alpha=-\frac{\sqrt{39}}{8}$$

Como $\alpha\in 2.^\text{o}\text{Q}$, $\sin\alpha>0$. Logo, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{39}}{8}$.

68.2. $\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)+\tan(-\alpha)=$

$$=\cos\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+(-\tan\alpha)$$

$$=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\tan\alpha$$

$$=\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)-\tan\alpha$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\tan\alpha$$

$$=\sin\alpha-\tan\alpha$$

$$=-\frac{\sqrt{39}}{8}-\left(-\frac{\sqrt{39}}{5}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{39}}{8}+\frac{\sqrt{39}}{5}=\frac{3\sqrt{39}}{40}$$

Cálculo auxiliar:

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{39}}{8}}{-\frac{5}{8}}=-\frac{\sqrt{39}}{5}$$

69.1. $\theta=90^\text{o}+\alpha$

$$\sin\theta=\sin(90^\text{o}+\alpha)=\cos\alpha$$

69.2. $\sin\beta=\frac{3}{5}$ e β é agudo

$$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\beta+=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos^2\beta=\frac{16}{25}\Leftrightarrow\cos\beta=\frac{4}{5}\vee\cos\beta=-\frac{4}{5}$$

Como β é agudo, $\cos\beta>0$.

$$\sin\theta=\cos\alpha=\cos(90^\text{o}-\beta)=\sin\beta=\frac{3}{5}$$

$$\cos\theta=\cos(180^\text{o}-\beta)=-\cos\beta=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$$

Conclusão:

$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ e $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

70.1. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(5\pi+\alpha)=$

$$=\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)+\sin(4\pi+\pi+\alpha)$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi+\alpha)$$

$$=-(-\sin\alpha)+(-\sin\alpha)$$

$$=\sin\alpha-\sin\alpha=0$$

70.2. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(5\pi+\alpha)=$

$$=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)-\cos(4\pi+\pi+\alpha)$$

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)$$

$$=-\cos\alpha-(-\cos\alpha)$$

$$=-\cos\alpha+\cos\alpha$$

$$=0$$

71. Sendo $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, tem-se:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{1}{\tan\alpha}$$

72. $\sin\alpha=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\frac{\overline{AB}}{10}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\overline{AB}=\frac{10\times 3}{5}\Leftrightarrow\overline{AB}=6$

Como o triângulo [*ABC*] é retângulo em *B*:

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\Leftrightarrow 10^2=6^2+\overline{BC}^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{BC}^2=64\underset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow}\overline{BC}=8\text{ cm}$$

$\alpha+90^\text{o}+\beta=180^\text{o}\Leftrightarrow\alpha+\beta=90^\text{o}\to\alpha$ e β são complementares

$$\sin\beta=\sin(90^\text{o}-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos\beta=\cos(90^\text{o}-\alpha)=\sin\alpha$$

$\sin\beta = \frac{\overline{DE}}{4,5} \Leftrightarrow \frac{8}{10} = \frac{\overline{DE}}{4,5} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{4,5\times 8}{10} \Leftrightarrow \overline{DE} = 3,6$

$\overline{DE} = 3,6$ cm

$\cos\beta = \frac{\overline{CD}}{4,5} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{\overline{CD}}{4,5} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{3\times 4,5}{5} \Leftrightarrow \overline{CD} = 2,7$

$\overline{CD} = 2,7$ cm

Assim:

$A_{[ABDE]} = \frac{\overline{AB}+\overline{DE}}{2}\times\overline{BD} = \frac{6+3,6}{2}\times(8+2,7) = 51,36$

$A = 51,36$ cm^2

73. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0,4 \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(x) = \frac{2}{5} \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Como $\sin(x) = \frac{2}{5} \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que

$x \in 1.^\text{o}\,\text{Q}$.

$\tan(41\pi - x) - \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) =$

$= \tan(-x) - \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

$= -\tan(x) - \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

$= -\tan x + \cos x$

$= -\frac{2\sqrt{21}}{21} + \frac{\sqrt{21}}{5}$

$= -\frac{10\sqrt{21}}{105} + \frac{21\sqrt{21}}{105} = \frac{11\sqrt{21}}{105}$

Cálculo auxiliar:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{21}}{5} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

Como $x \in 1.^\text{o}\,\text{Q}$, $\cos x > 0$

Logo, $\cos x = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

74.1. $A_{[OBC]} = \frac{\overline{OC}\times\overline{AB}}{2} = \frac{1\times\tan\alpha}{2} = \frac{\tan\alpha}{2}$

$A(\alpha) = \frac{\tan\alpha}{2}$

74.2. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\frac{2}{3}$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow -\sin(\alpha) = -\frac{2}{3}$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{2}{3}$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Cálculo auxiliar:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \vee \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

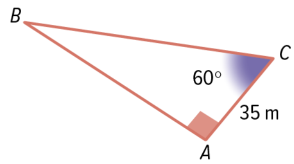
Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\alpha > 0$.

Logo, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Assim, $A(\alpha) = \frac{\tan\alpha}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Página 52 – Consolida

1. $\overline{AB} = ?$

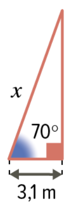


$\tan 60^\circ = \frac{\overline{AB}}{35} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{AB}}{35} \Leftrightarrow \overline{AB} = 35\sqrt{3}$

Então, $\overline{AB} \approx 60,6$ m.

A largura do rio é, aproximadamente, 60,6 m.

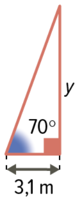
2.1. x : comprimento do cabo de aço



$\cos 70^\circ = \frac{3,1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3,1}{\cos 70^\circ}$. Logo, $x \approx 9,1$.

O comprimento de cada cabo de aço é, aproximadamente, igual a 9,1 m.

2.2. y : altura do solo a que os cabos estão fixados à antena.

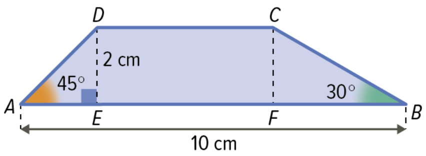


$\tan 70° = \dfrac{y}{3{,}1} \Leftrightarrow y = 3{,}1\tan 70°$. Logo, $y \approx 8{,}5$.

Os cabos estão fixados à antena a, aproximadamente, 8,5 m do solo.

3. Como o triângulo $[ADE]$ é isósceles, então:

$\overline{AE} = \overline{DE} = 2$ cm .



Seja F a projeção ortogonal de C sobre AB.

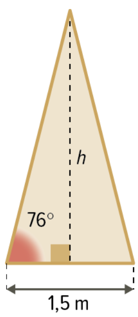
$\tan 30° = \dfrac{2}{\overline{FB}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\overline{FB}} \Leftrightarrow \overline{FB} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{FB} = 2\sqrt{3}$

$\overline{DC} = \overline{AB} - \overline{AE} - \overline{FB} = 10 - 2 - 2\sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{3}$

$A_{[ABCD]} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times \overline{DE} = \dfrac{10 + 8 - 2\sqrt{3}}{2} \times 2 = 18 - 2\sqrt{3}$

A área do trapézio $[ABCD]$ é $\left(18 - 2\sqrt{3}\right)$ cm^2.

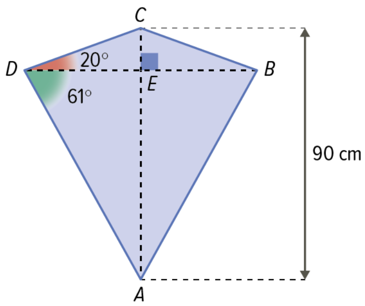
4. Seja h a altura máxima atingida pelo escadote.



$\tan 76° = \dfrac{h}{0{,}75} \Leftrightarrow h = 0{,}75\tan 76°$. Então, $h \approx 3$.

A altura máxima atingida pelo escadote é, aproximadamente, 3 m.

5. $A_{[ABCD]} = 2 \times A_{[ACD]} = 2 \times \dfrac{\overline{AC} \times \overline{DE}}{2} = \overline{AC} \times \overline{DE}$



Seja E o ponto de interseção das diagonais do papagaio.

$\tan 20° = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \tan 20° \times \overline{DE} = \overline{CE}$

$\tan 61° = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \tan 61° \times \overline{DE} = \overline{AE}$

$\overline{CA} = 90 \Leftrightarrow \overline{CE} + \overline{AE} = 90$

$\tan 20° \times \overline{DE} + \tan 61° \times \overline{DE} = 90 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\tan 20° + \tan 61°\right) \times \overline{DE} = 90$

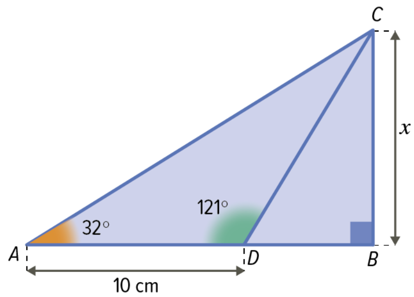
$\Leftrightarrow \overline{DE} = \dfrac{90}{\tan 20° + \tan 61°}$. Então, $\overline{DE} \approx 41{,}513$.

$A_{[ABCD]} = 90 \times 41{,}513 = 3736{,}17 \approx 3736$

A área do papagaio é, aproximadamente, 3736 cm^2.

6. $B\hat{D}C = 180° - 121° = 59°$

Seja $\overline{BD} = y$.



$\tan 59° = \dfrac{x}{y} \wedge \tan 32° = \dfrac{x}{10 + y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = y\tan 59° \wedge (10 + y)\tan 32° = x$

$y\tan 59° = \left(10 + y\right)\tan 32° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y\tan 59° = 10\tan 32° + y\tan 32°$

$\Leftrightarrow y\tan 59° - y\tan 32° = 10\tan 32°$

$\Leftrightarrow y(\tan 59° - \tan 32°) = 10\tan 32°$

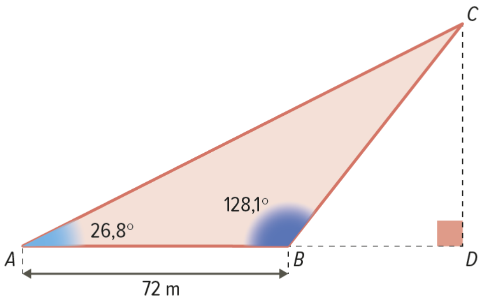
$\Leftrightarrow y = \dfrac{10\tan 32°}{\tan 59° - \tan 32°}$. Então, $y \approx 6{,}012$.

Logo, $x = 6{,}012 \times \tan 59° \approx 10{,}0$.

Conclusão: O valor de x é, aproximadamente, igual a 10,0 cm.

Página 53 – Consolida

7. Seja D a projeção ortogonal de C sobre AB.



$C\hat{B}D = 180° - 128,1° = 51,9°$

$\tan 51,9° = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \wedge \tan 26,8° = \dfrac{\overline{CD}}{72 + \overline{BD}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{CD} = \tan 51,9° \times \overline{BD} \wedge \overline{CD} = \tan 26,8° (72 + \overline{BD})$

$\tan 51,9° \times \overline{BD} = \tan 26,8° \left(72 + \overline{BD}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan 51,9° \times \overline{BD} = 72 \tan 26,8° + \overline{BD} \tan 26,8°$

$\Leftrightarrow \tan 51,9° \times \overline{BD} - \overline{BD} \tan 26,8° = 72 \tan 26,8°$

$\Leftrightarrow \overline{BD}\left(\tan 51,9° - \tan 26,8°\right) = 72 \tan 26,8°$

$\Leftrightarrow \overline{BD} = \dfrac{72 \tan 26,8°}{\tan 51,9° - \tan 26,8°}$

Então, $\overline{BD} \approx 47,2206$.

$\overline{CD} = \tan 51,9° \times 47,2206 \approx 60,2227$

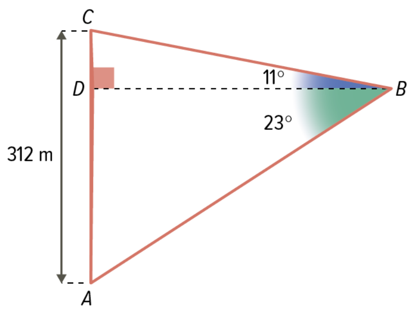
Como o triângulo [*BDC*] é retângulo em *D*, tem-se:

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \underset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BC} = \sqrt{47,2206^2 + 60,2227^2}$

Logo, $\overline{BC} \approx 76,5$.

Conclusão: $\overline{BC} \approx 76,5$ m

8. Pretende-se determinar a distância, na horizontal, entre o miradouro e a Torre Eiffel, ou seja, $\overline{BD}$.



Seja $\overline{BD} = x$ e $\overline{CD} = y$, então $\overline{DA} = 312 - y$.

$\begin{cases} \tan 11° = \dfrac{y}{x} \\ \tan 23° = \dfrac{312 - y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 11° \times x = y \\ \tan 23° \times x = 312 - y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \tan 23° \times x = 312 - \tan 11° \times x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \tan 23° \times x + \tan 11° \times x = 312 \end{cases}$

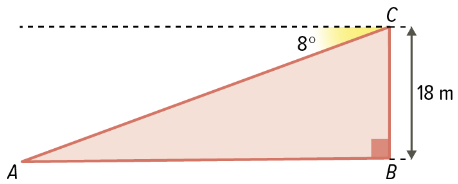
$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \left(\tan 23° + \tan 11°\right) \times x = 312 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ x = \dfrac{312}{\tan 23° + \tan 11°} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ x \approx 504 \end{cases}$

A distância, na horizontal, entre o miradouro e a Torre Eiffel é, aproximadamente, igual a 504 m.

9. $\overline{AB} = ?$



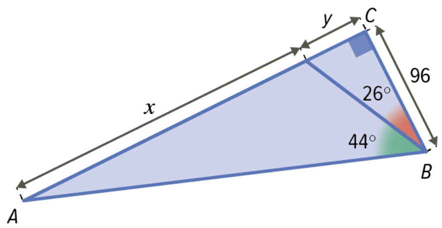
$A\hat{C}B = 90° - 8° = 82°$

$\tan 82° = \dfrac{\overline{AB}}{18} \Leftrightarrow \overline{AB} = 18 \tan 82°$

Então, $\overline{AB} \approx 128$.

A base da torre de vigia encontra-se a, aproximadamente, 128 m do foco de incêndio.

10. $x = ?$



$\tan 26° = \dfrac{y}{96} \Leftrightarrow y = 96 \tan 26°$

Então, $y \approx 46,822$.

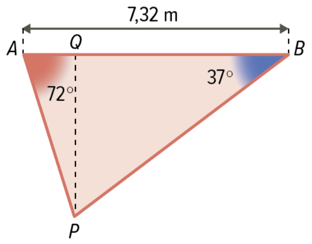
$A\hat{B}C = 44° + 26° = 70°$

$\tan 70° = \dfrac{x + 46,822}{96} \Leftrightarrow 96 \tan 70° = x + 46,822 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 96 \tan 70° - 46,822 = x$

Então, $x \approx 217$.

11. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre AB.



Consideremos que $\overline{PQ} = x$ e $\overline{AQ} = y$, então

$\overline{BQ} = 7{,}32 - y$.

$$\begin{cases} \tan 72^\circ = \dfrac{x}{y} \\ \tan 37^\circ = \dfrac{x}{7{,}32 - y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \tan 72^\circ \\ x = (7{,}32 - y)\tan 37^\circ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ y(\tan 72^\circ + \tan 37^\circ) = 7{,}32 \tan 37^\circ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \tan 72^\circ \\ y = \dfrac{7{,}32 \tan 37^\circ}{\tan 72^\circ + \tan 37^\circ} \end{cases}$$

Então, $y \approx 1{,}440$; $x \approx 1{,}440 \tan 72^\circ \approx 4{,}4$

A distância do Pedro à linha de baliza é, aproximadamente, igual a 4,4 m.

Página 54 – Consolida

12.1. $\dfrac{1425^\circ}{360^\circ} = 3{,}9583...$

N.º de voltas completas: 3

Como $1425^\circ - 3 \times 360^\circ = 345^\circ$, então:

$1425^\circ = 345^\circ + 3 \times 360^\circ$

12.2. $\dfrac{800^\circ}{360^\circ} = 2{,}(2)$

N.º de voltas completas: 2

Como $800^\circ - 2 \times 360^\circ = 80^\circ$, então

$800^\circ = 80^\circ + 2 \times 360^\circ$ e $-800^\circ = -80^\circ - 2 \times 360^\circ$

12.3. $\dfrac{1125^\circ}{360^\circ} = 3{,}125$

N.º de voltas completas: 3

Como $1125^\circ - 3 \times 360^\circ = 45^\circ$, então

$1125^\circ = 45^\circ + 3 \times 360^\circ$ e $-1125^\circ = -45^\circ - 3 \times 360^\circ$

12.4. $\dfrac{2250^\circ}{360^\circ} = 6{,}25$

N.º de voltas completas: 6

Como $2250^\circ - 6 \times 360^\circ = 90^\circ$, então

$2250^\circ = 90^\circ + 6 \times 360^\circ$

13. Como o octógono [*ABCDEFGH*] é regular e está inscrito na circunferência, sabe-se que divide a circunferência em oito arcos iguais de amplitude $\dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

13.1. a) $810^\circ = 90^\circ + \underbrace{2 \times 360^\circ}_{\text{2 voltas completas}}$ e $\dfrac{90^\circ}{45^\circ} = 2$

A imagem de A pela rotação de centro O e amplitude 810º é o ponto C.

b) $-1485^\circ = -45^\circ - \underbrace{4 \times 360^\circ}_{\text{4 voltas completas}}$

A imagem de A pela rotação de centro O e amplitude –1485º é o ponto H.

c) $1215^\circ = 135^\circ + \underbrace{3 \times 360^\circ}_{\text{3 voltas completas}}$ e $\dfrac{135^\circ}{45^\circ} = 3$

A imagem de A pela rotação de centro O e amplitude 1215º é o ponto D.

d) $-945^\circ = -225^\circ - \underbrace{2 \times 360^\circ}_{\text{2 voltas completas}}$ e $\dfrac{225^\circ}{45^\circ} = 5$

A imagem de A pela rotação de centro O e amplitude –945º é o ponto D.

13.2. a) $1035^\circ = 315^\circ + 2 \times 360^\circ$ e $\dfrac{315^\circ}{45^\circ} = 7$

$R_{(O,\,1035^\circ)}(D) = R_{(O,\,315^\circ)}(D) = C$

$-1125^\circ = -45^\circ - 3 \times 360^\circ$

$R_{(O,\,-1125^\circ)}(D) = R_{(O,\,-45^\circ)}(D) = C$

Então, $R_{(O,1035^\circ)}(D) = R_{(O,-1125^\circ)}(D)$.

b) $3735^\circ = 135^\circ + 10 \times 360^\circ$ e $\dfrac{135^\circ}{45^\circ} = 3$

$R_{(O,3735^\circ)}(D) = R_{(O,135^\circ)}(D) = G$

$-2385^\circ = -225^\circ - 6 \times 360^\circ$ e $\dfrac{225^\circ}{45^\circ} = 5$

$R_{(O,-2385^\circ)}(D) = R_{(O,-225^\circ)}(D) = G$

Então, $R_{(O,3735^\circ)}(D) = R_{(O,-2385^\circ)}(D)$.

13.3. a) $1928^\circ = 128^\circ + 5 \times 360^\circ$, logo

$R_{(O,1928^\circ)}(P) = R_{(O,128^\circ)}(P)$

$-3112^\circ = -232^\circ - 8 \times 360^\circ$, logo

$R_{(O,-3112^\circ)}(P) = R_{(O,-232^\circ)}(P)$

Como $128^\circ+|-232^\circ|=360^\circ$, então as imagens de P obtidas pelas rotações de centro O e amplitudes 1928º e –3112º são coincidentes.

b) $5610^\circ=210^\circ+15\times360^\circ$, logo

$R_{(O,5610^\circ)}(P)=R_{(O,210^\circ)}(P)$

$-7350^\circ=-150^\circ-20\times360^\circ$, pelo que

$R_{(O,-7350^\circ)}(P)=R_{(O,-150^\circ)}(P)$

Como, $210^\circ+|-150^\circ|=360^\circ$, então as imagens de P obtidas pelas rotações de centro O e amplitudes 5610º e –7350º são coincidentes.

14.1. $\frac{1950^\circ}{360^\circ}=5{,}416...$

N.º de voltas completas: 5

Como $1950^\circ-5\times360^\circ=150^\circ$, então:

$1950^\circ=150^\circ+5\times360^\circ$ e $-1950^\circ=-150^\circ-5\times360^\circ$

$\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$ e $\frac{150^\circ}{30^\circ}=5$

Depois do ponteiro dos minutos ter descrito um ângulo de amplitude –1950º, decorreram 5 horas e 25 minutos. Assim, serão 19 horas e 25 minutos.

14.2. $21\text{h }45\text{ min}-14\text{h}=7\text{h }45\text{min}$

$45=9\times5$ (em cada 5 minutos, o ponteiro percorre 30º no sentido negativo)

$7\times360^\circ+9\times30^\circ=2790^\circ$

O ponteiro dos minutos descreve um ângulo de –2790º.

15. $\alpha=55^\circ$, $\beta=-220^\circ$, $\delta=250^\circ$, $\theta=-40^\circ$, $\gamma=160^\circ$ e $\sigma=-320^\circ$

15.1. Como $0^\circ<\alpha<90^\circ$, o lado extremidade do ângulo α pertence ao 1.º quadrante.

Como $-270^\circ<\beta<-180^\circ$, o lado extremidade do ângulo β pertence ao 2.º quadrante.

Como $180^\circ<\delta<270^\circ$, o lado extremidade do ângulo δ pertence ao 3.º quadrante.

Como $-90^\circ<\theta<0^\circ$, o lado extremidade do ângulo θ pertence ao 4.º quadrante.

Como $90^\circ<\gamma<180^\circ$, o lado extremidade do ângulo γ pertence ao 2.º quadrante.

Como $-360^\circ<\sigma<-270^\circ$, o lado extremidade do ângulo σ pertence ao 1.º quadrante.

15.2. $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$ e $\tan\alpha>0$

$\sin\beta>0$, $\cos\beta<0$ e $\tan\beta<0$

$\sin\delta<0$, $\cos\delta<0$ e $\tan\delta>0$

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$ e $\tan\theta<0$

$\sin\gamma>0$, $\cos\gamma<0$ e $\tan\gamma<0$

$\sin\sigma>0$, $\cos\sigma>0$ e $\tan\sigma>0$

16. Se $\sin\alpha\times\cos\alpha<0$, então $(\sin\alpha>0\wedge\cos\alpha<0)$ ou $(\sin\alpha<0\wedge\cos\alpha>0)$. O lado extremidade desse ângulo pertence ao 2.º quadrante ou ao 4.º quadrante.

17.1 $\sin1110^\circ-\cos1500^\circ=$

$=\sin(30^\circ+3\times360^\circ)-\cos(60^\circ+4\times360^\circ)$

$=\sin30^\circ-\cos60^\circ=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

17.2. $\cos(-390^\circ)+\tan(1860^\circ)$

$=\cos(-30^\circ-1\times360^\circ)+\tan(60^\circ+5\times360^\circ)$

$=\cos(-30^\circ)+\tan(60^\circ)=\cos(30^\circ)+\tan(60^\circ)=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

17.3. $\sin450^\circ-[\cos1125^\circ-\sin(-405^\circ)]$

$=\sin450^\circ-\cos1125^\circ+\sin(-405^\circ)$

$=\sin(90^\circ+1\times360^\circ)-\cos(45^\circ+3\times360^\circ)+\sin(-45^\circ-1\times360^\circ)$

$=\sin(90^\circ)-\cos(45^\circ)+\sin(-45^\circ)$

$=1-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

17.4. $\cos(540^\circ)+\tan(-765^\circ)-\cos(420^\circ)$

$=\cos(180^\circ+1\times360^\circ)+\tan(-45^\circ-2\times360^\circ)-\cos(60^\circ+360^\circ)$

$=\cos(180^\circ)+\tan(-45^\circ)-\cos(60^\circ)$

$=-1-\tan45^\circ-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

Página 55 – Consolida

18. $A(\cos(-150^\circ),\ \sin(-150^\circ))$

$\cos(-150^\circ)=\cos(150^\circ)=\cos(180^\circ-30^\circ)=$

$=-\cos30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(-150°) = -\sin(150°) = -\sin(180° - 30°) =$

$= -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

Então, $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Como B é o simétrico de A em relação à origem do referencial, então $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$C(1,\ \tan(-150°))$

$\tan(-150°) = -\tan(150°) = -\tan(180° - 30°) =$

$= -(-\tan 30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Então, $C\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Conclusão: $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $C\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

19.1. Como $x_A = \frac{8}{17}$, sabe-se que $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ $(\alpha \in 1.° Q)$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{64}{289} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{225}{289} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{15}{17} \vee \sin\alpha = -\frac{15}{17}$

Como $\alpha \in 1.°$Q, $\sin\alpha > 0$. Então, $\sin\alpha = \frac{15}{17}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$$

$\sin\alpha = \frac{15}{17}$ e $\tan\alpha = \frac{15}{8}$

$A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, ou seja, $A\left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

$C(1,\ \tan\alpha)$, ou seja, $C\left(1, \frac{15}{8}\right)$

19.2. Como $x_B = \frac{8}{17}$, sabe-se que $\cos\beta = \frac{8}{17}$ $(\beta \in 4.° Q)$

Então, atendendo aos cálculos efetuados em 19.1., conclui-se que $\sin\beta = -\frac{15}{17}$.

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = -\frac{15}{8}$$

$\sin\beta = -\frac{15}{17}$ e $\tan\beta = -\frac{15}{8}$

$B(\cos\beta,\ \sin\beta)$, ou seja, $B\left(\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}\right)$

$D(1,\ \tan\beta)$, ou seja, $D\left(1, -\frac{15}{8}\right)$

20. $\alpha \in 2.°$Q e $\sin\alpha = 0{,}6$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow (0{,}6)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 0{,}64 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0{,}8 \vee \cos\alpha = -0{,}8$

Como $\alpha \in 2.°$Q, $\cos\alpha < 0$.

Logo, $\cos\alpha = -0{,}8$.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -0{,}75$

$2\cos\alpha - \tan\alpha = 2(-0{,}8) - (-0{,}75) = -0{,}85$

21.1. A afirmação é falsa, pois se $\sin\alpha < 0$, então $\alpha \in 3.°$Q ou $\alpha \in 4.°$Q.

21.2. A afirmação é verdadeira.

21.3. A afirmação é falsa, pois, se $\beta \in 2.°$Q, então $\tan\beta < 0$.

21.4. A afirmação é verdadeira.

Se $\sin\beta \times \cos\beta < 0$ então $\sin\beta$ e $\cos\beta$ têm sinais contrários. Como $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, conclui-se que $\tan\beta < 0$.

21.5. A afirmação é verdadeira, pois o seno é decrescente no 2.º quadrante.

21.6. A afirmação é verdadeira, pois o cosseno é crescente no 3.º quadrante.

21.7. Se $\cos\alpha < 0$ e $\tan\alpha < 0$, então α pertence ao 2.º quadrante. Então, a afirmação é falsa.

22. $A\hat{B}C = 1{,}5$ rad

Como o ângulo ABC está inscrito na circunferência, então:

$\overset{\frown}{AC} = 2 \times A\hat{B}C = 2 \times 1{,}5 = 3$ rad

1 rad ______ r
3 rad ______ 18

$r = \frac{18}{3} = 6$ cm

A opção correta é a **(C)**.

Página 56 – Consolida

23.1.

180 ____ π
40 ____ x

$x=\frac{40\pi}{180}=\frac{2}{9}\pi$; $\frac{2}{9}\pi$ rad

23.2.

180 ____ π
120 ____ x

$x=\frac{120\pi}{180}=\frac{2}{3}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$ rad

23.3.

180 ____ π
–240 ____ x

$x=\frac{-240\pi}{180}=-\frac{4}{3}\pi$; $-\frac{4}{3}\pi$ rad

23.4.

180 ____ π
–20 ____ x

$x=\frac{-20\pi}{180}=-\frac{\pi}{9}$; $-\frac{\pi}{9}$ rad

24.

(A) $\frac{25\pi}{6}=\frac{\pi+24\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+4\pi=\frac{\pi}{6}+2\times 2\pi$

Os lados extremidade dos ângulos de amplitudes $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{25\pi}{6}$ são coincidentes.

(B) $\frac{8\pi}{3}=\frac{2\pi+6\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{2\pi}{3}+1\times 2\pi$

$\frac{11\pi}{3}=\frac{5\pi+6\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}+1\times 2\pi$

Os lados extremidade dos ângulos de amplitudes $\frac{8\pi}{3}$ e $\frac{11\pi}{3}$ não são coincidentes.

(C) $-\frac{17\pi}{6}=\frac{-5\pi-12\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{5\pi}{6}-1\times 2\pi$

$\frac{31\pi}{6}=\frac{7\pi+24\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+4\pi=\frac{7\pi}{6}+2\times 2\pi$

$\left|-\frac{5\pi}{6}\right|+\frac{7\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}=\frac{12\pi}{6}=2\pi$

Então, os lados extremidade dos ângulos de amplitudes $-\frac{17\pi}{6}$ e $\frac{31\pi}{6}$ são coincidentes.

(D) $-\frac{13\pi}{4}=\frac{-5\pi-8\pi}{4}=-\frac{5\pi}{4}-2\pi=-\frac{5\pi}{4}-1\times 2\pi$

$\frac{17\pi}{4}=\frac{\pi+16\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+4\pi=\frac{\pi}{4}+2\times 2\pi$

$\left|-\frac{5\pi}{4}\right|+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}\neq 2\pi$

Então, os lados extremidade dos ângulos de amplitudes $-\frac{9\pi}{2}$ e $\frac{17\pi}{4}$ não são coincidentes.

(E) $-\frac{9\pi}{2}=\frac{-\pi-8\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}-4\pi=-\frac{\pi}{2}-2\times 2\pi$

$\frac{7\pi}{2}=\frac{3\pi+4\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}+2\pi=\frac{3\pi}{2}+1\times 2\pi$

$\left|-\frac{\pi}{2}\right|+\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=\frac{4\pi}{2}=2\pi$

Então, os lados extremidade dos ângulos de amplitudes $-\frac{13\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{2}$ não são coincidentes.

Assim, conclui-se que os pares de ângulos cujos lados extremidades são coincidentes são os que estão representados em **(A)**, **(C)** e **(E)**.

25.1. $\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)=$

$=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sqrt{3}-\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\sqrt{3}$

25.2. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\tan\left(\frac{17\pi}{4}\right)-2\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=$

$=-1+\tan\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$=-1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-1+1-2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=-2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$

25.3. $2\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)+\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos(5\pi)=$

$=2\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos(\pi+4\pi)$

$=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos(\pi)$

$=2\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)-\left(-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)+(-1)$

$=-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=-1$

26.1. $\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

Logo, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)>\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

26.2. $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

26.3. $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$

$=-\left(-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Então, $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

26.4. $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Então, $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)<\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

27. $\alpha\in[-\pi,\ 2\pi[$

$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

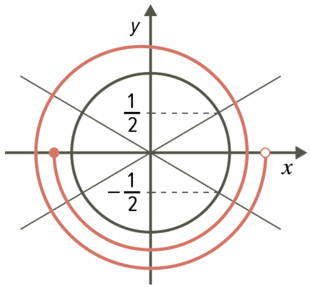
$|\sin\alpha|=\frac{1}{2}\ \wedge\ \alpha\in[-\pi,\ 2\pi[\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\sin\alpha=\frac{1}{2}\vee\sin\alpha=-\frac{1}{2}\right)\ \wedge\ \alpha\in[-\pi,\ 2\pi[\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\alpha=-\frac{5\pi}{6}\vee\alpha=-\frac{\pi}{6}\vee\alpha=\frac{\pi}{6}\vee\alpha=\frac{5\pi}{6}\vee$

$\vee\alpha=\frac{7\pi}{6}\vee\alpha=\frac{11\pi}{6}$

$\alpha\in\left\{-\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\right\}$



28.1. $2\cos(\pi-\alpha)+\sin(6\pi-\alpha)+\cos(-\alpha)=$

$=2(-\cos(\alpha))+\sin(-\alpha)+\cos(\alpha)$

$=-2\cos\alpha+(-\sin\alpha)+\cos\alpha\ =-\cos\alpha-\sin\alpha$

28.2. $\tan(\pi+\alpha)+\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=$

$=\tan(\alpha)+\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}\ =\tan\alpha+\tan\alpha=2\tan\alpha$

28.3. $\sin(7\pi+\alpha)-\tan(5\pi-\alpha)-\sin(-\alpha)=$

$=\sin(6\pi+\pi+\alpha)-\tan(-\alpha)-(-\sin\alpha)$

$=\sin(\pi+\alpha)-(-\tan\alpha)+\sin\alpha$

$=-\sin\alpha+\tan\alpha+\sin\alpha\ =\tan\alpha$

28.4. $\sin^2(\pi-\alpha)+\cos^2(-\alpha)-\sin(5\pi+\alpha)=$

$=[\sin(\pi-\alpha)]^2+[\cos(-\alpha)]^2-\sin(4\pi+\pi+\alpha)=$

$=(-\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2-\sin(\pi+\alpha)$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-(-\sin\alpha)\ =1+\sin\alpha$

29. $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ e $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Como $\sin\alpha<0$ e $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\alpha\in 4.^{\text{o}}\text{Q}$.

$-2\tan(-\alpha)\times\sin(\alpha-\pi)=$

$=-2(-\tan\alpha)\times\sin(-(\pi-\alpha))$

$=2\tan\alpha\times\sin(-\alpha)\ =-2\tan\alpha\sin\alpha$

$=-2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha\ =-2\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

$=-2\times\frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}{\frac{4}{5}}=-2\times\frac{\frac{9}{25}}{\frac{4}{5}}=-2\times\frac{9}{20}\ =-\frac{9}{10}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}\ \Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{4}{5}\vee\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

Como $\alpha\in 4.^{\text{o}}\text{Q}$, $\cos\alpha>0$. Logo, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

30.1. $\sin(\pi-\beta)\times\sin(-\alpha)<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\sin\beta\times(-\sin\alpha)<0\ \Leftrightarrow\sin\beta\times\sin\alpha<0$

Como α e β pertencem ao 1.º Q, $\sin\alpha>0$ e $\sin\beta>0$. Logo, $\sin\beta\times\sin\alpha>0$.

A afirmação é falsa.

30.2. $\tan(\pi-\alpha)\times\tan(-\beta)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\tan\alpha\times(-\tan\beta)>0$

$\Leftrightarrow \tan\alpha\times\tan\beta>0$

Como α e β pertencem ao 1.º Q, $\tan\alpha>0$ e $\tan\beta>0$.

Logo, $\tan\alpha\times\tan\beta>0$

A afirmação é verdadeira.

30.3. $\cos(\alpha-\pi)\times\sin((\pi+\beta)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(-(\pi-\alpha))\times(-\sin\beta)>0$

$\Leftrightarrow \cos(\pi-\alpha)\times(-\sin\beta)>0$

$\Leftrightarrow -\cos\alpha\times(-\sin\beta)>0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha\times\sin\beta>0$

Como α e β pertencem ao 1.º Q, $\cos\alpha>0$ e $\sin\beta>0$. Logo, $\cos\alpha\times\sin\beta>0$.

A afirmação é verdadeira.

30.4. $\cos(\pi-\alpha)+\cos(-\beta)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos\alpha+\cos\beta>0$

$\Leftrightarrow \cos\beta>\cos\alpha$

Como α e β pertencem ao 1.º Q e $\beta>\alpha$, então $\cos\beta<\cos\alpha$.

A afirmação é falsa.

30.5. $\tan(\pi+\alpha)-\tan(2\pi+\beta)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\alpha-\tan\beta<0$

$\Leftrightarrow \tan\alpha<\tan\beta$

Como α e β pertencem ao 1.º Q e $\beta>\alpha$, então $\tan\beta>\tan\alpha$. A afirmação é verdadeira.

31.1. $\cos(5\pi+\alpha)<0 \ \wedge\ \sin(-\alpha)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(4\pi+\pi+\alpha)<0 \ \wedge\ -\sin\alpha>0$

$\Leftrightarrow \cos(\pi+\alpha)<0 \ \wedge\ \sin\alpha<0$

$\Leftrightarrow -\cos\alpha<0 \ \wedge\ \sin\alpha<0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha>0 \ \wedge\ \sin\alpha<0$

Conclui-se que o ângulo de amplitude α pertence ao 4.º quadrante, porque é nesse quadrante que o cosseno é positivo e o seno é negativo.

31.2. $\cos(-\alpha)<0 \ \wedge\ \tan(\pi+\alpha)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha<0 \ \wedge\ \tan\alpha>0$

Conclui-se que o ângulo de amplitude α pertence ao 3.º quadrante porque é nesse quadrante que o cosseno é negativo e a tangente é positiva.

Página 57 – Consolida

32. $P(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ \alpha\in 1.º\text{Q}$

Como $y_P=\frac{\sqrt{7}}{4}$, então $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$3\cos(\pi-\alpha)-\tan(-\alpha)=3(-\cos\alpha)-(-\tan\alpha)=$

$=-3\cos\alpha+\tan\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{9}{16} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{3}{4} \vee \cos\alpha=-\frac{3}{4}$

Como $\alpha\in 1.º\text{Q}$, $\cos\alpha>0$.

Logo, $\cos\alpha=\frac{3}{4}$.

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$3\cos(\pi-\alpha)-\tan(-\alpha)=-3\cos\alpha+\tan\alpha=$

$=-3\times\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{3}=-\frac{9}{4}+\frac{\sqrt{7}}{3}$

33.1. $\alpha\in\left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$

$A(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $B(1,\tan\alpha)$, $C(0,\tan\alpha)$ e $D(0,\sin\alpha)$

$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}\times\overline{CD}$

$\overline{BC}=1$, $\overline{AD}=\cos\alpha$ e $\overline{CD}=\tan\alpha-\sin\alpha$

$A_{[ABCD]}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\times(\tan\alpha-\sin\alpha)=$

$=\frac{(1+\cos\alpha)\times(\tan\alpha-\sin\alpha)}{2}=$

$=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha+\cos\alpha\tan\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}{2}=$

$=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha+\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\cos\alpha\sin\alpha}{2}=$

$=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}=$

$=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}$

33.2. Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$, então:

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

34.1. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ rad $\rightarrow B\left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ e } C\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

34.2. $B(\cos\alpha, \sin\alpha)$; $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\rightarrow C(\cos\alpha, 0)$

Como $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então:

$\cos\alpha \leq 0$ e $\sin\alpha > 0$.

$\overline{BC} = \sin\alpha$

$$\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = 1 + |\cos\alpha| \underset{\cos\alpha \leq 0}{\underset{\downarrow}{=}} 1 - \cos\alpha$$

$$A = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{(1 - \cos\alpha)\sin\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha(1 - \cos\alpha)$$

34.3. $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ e $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \vee \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Como $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\cos\alpha \leq 0$.

Logo, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

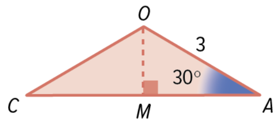
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3}\right) = \frac{3 + \sqrt{5}}{9}$$

Página 58 – Avalia 1 – Parte 1

1.1. O triângulo $[AOC]$ é isósceles.

M: ponto médio de $[AC]$.



$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AM}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{AM}}{3} \Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lado: $\overline{AC} = 2\overline{AM} = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

A opção correta é a **(B)**.

1.2. O triângulo $[ABC]$ é equilátero e está inscrito na circunferência, logo divide-a em três arcos iguais de amplitude $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

$$\frac{1920^\circ}{360^\circ} = 5,(3)$$

N.º de voltas completas: 5

Como $1920^\circ - 5 \times 360^\circ = 120^\circ$, então

$1920^\circ = 120^\circ + 5 \times 360^\circ$

$-1920^\circ = -120^\circ - 5 \times 360^\circ$

A imagem do ponto A pela rotação de centro O e amplitude -1920° é o ponto C.

A opção correta é a **(D)**.

2. $\alpha \in \left]0, \pi\right[$ e $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{4}{5} \vee \sin\alpha = -\frac{4}{5}$$

Como $\alpha \in \left]0, \pi\right[$, $\sin\alpha > 0$.

Então, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

A opção correta é a **(B)**.

3. $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=-\frac{1}{3}$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha=\frac{1}{3}$

$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha=-\frac{1}{3}$

A opção correta é a **(B)**.

4. $\cos\frac{13\pi}{6}-3\tan\frac{5\pi}{6}=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)-3\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-3\left(-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{3}=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

A opção correta é a **(C)**.

5. **I:** $-\frac{41\pi}{5}=\frac{-\pi-40\pi}{5}=-\frac{\pi}{5}-8\pi=-\frac{\pi}{5}-4\times2\pi$

$-\frac{\pi}{5}\in 4.^\text{o}\text{Q}$, logo a afirmação é falsa.

II: $\alpha,\beta\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$

No 3.º Q, o seno é decrescente, isto é, se $\alpha<\beta$, então $\sin\alpha>\sin\beta$.

Logo, a afirmação é verdadeira.

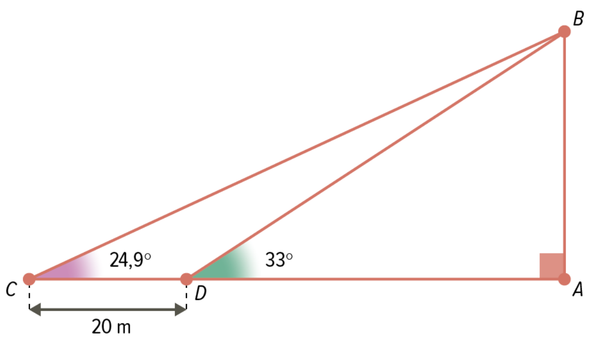
III: Se $\cos\alpha\times\tan\alpha>0$, então $\cos\alpha>0$ e $\tan\alpha>0$ ou $\cos\alpha<0$ e $\tan\alpha<0$, isto é, α pertence ao 1.º Q ou ao 2.º Q.

Logo, a afirmação é falsa.

A opção correta é a **(B)**.

Página 59 – Avalia 1 – Parte 2

1. $\overline{AB}=?$



Seja $\overline{AB}=x$ e $\overline{DA}=y$

$\tan 33^\circ=\frac{x}{y}\ \wedge\ \tan 24{,}9^\circ=\frac{x}{20+y}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y\tan 33^\circ=x\ \wedge\ (20+y)\tan 24{,}9^\circ=x$

$y\tan 33^\circ=(20+y)\tan 24{,}9^\circ\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y\tan 33^\circ=20\tan 24{,}9^\circ+y\tan 24{,}9^\circ$

$\Leftrightarrow y\tan 33^\circ-y\tan 24{,}9^\circ=20\tan 24{,}9^\circ$

$\Leftrightarrow y(\tan 33^\circ-\tan 24{,}9^\circ)=20\tan 24{,}9^\circ$

$\Leftrightarrow y=\frac{20\tan 24{,}9^\circ}{\tan 33^\circ-\tan 24{,}9^\circ}$

Então, $y\approx 50{,}1217$.

Donde se conclui que:

$x=50{,}1217\tan 33^\circ\approx 32{,}5$

A altura do Farilhão é, aproximadamente, 32,5 m.

2. $\cos(\pi+\alpha)=0{,}4\ \wedge\ \alpha\in]\pi,2\pi[\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos(\alpha)=\frac{4}{10}\ \wedge\ \alpha\in]\pi,2\pi[$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha)=-\frac{2}{5}\ \wedge\ \alpha\in]\pi,2\pi[$

Como $\cos\alpha<0\ \wedge\ \alpha\in]\pi,2\pi[$, então $\alpha\in 3.^\text{o}\text{Q}$.

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+\tan^2\alpha=\frac{25}{4}\Leftrightarrow\tan^2\alpha=\frac{21}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{21}}{2}\ \vee\ \tan\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{2}$

Como $\alpha\in 3.^\text{o}\text{Q}$, $\tan\alpha>0$.

Logo, $\tan\alpha=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Assim, $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{2}$.

3. $\cos 25^\circ=x$

$\cos(2365^\circ)=?$

$\frac{2365^\circ}{360^\circ}=6{,}569(4)$

N.º de voltas completas: 6

Como $2365^\circ - 6 \times 360^\circ = 205^\circ$, então:

$2365^\circ = 205^\circ + 6 \times 360^\circ$

$\cos 2365^\circ = \cos\left(205^\circ + 6 \times 360^\circ\right) =$

$= \cos 205^\circ = \cos\left(180^\circ + 25^\circ\right)$

$= -\cos 25^\circ$

$= -x$

4.1. Sendo $C\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$, então $B\left(1, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

$P_{[OABC]} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{OC}$

$= 1 + \frac{\sqrt{7}}{4} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 1$

$= 2 + \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{9 + \sqrt{7}}{4}$

4.2. $C\left(\cos\alpha, \sin\alpha\right)$

$\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \cos\alpha > 0$ e $\sin\alpha > 0$.

$B\left(1,\ \sin\alpha\right)$

$A\left(1, 0\right)$

$P_{[OABC]} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{OC}$

$P\left(\alpha\right) = 1 + \sin\alpha + \left(1 - \cos\alpha\right) + 1 =$

$= 3 + \sin\alpha - \cos\alpha$

Tema 2: Funções trigonométricas

Página 60 – Tarefa inicial

1. A pressão arterial do paciente em observação varia entre 80 mmHg e 120 mmHg.

2.1. Por observação do gráfico, sabe-se que a duração de um batimento cardíaco do paciente é de 0,75 s (intervalo de tempo entre dois máximos ou entre dois mínimos).

2.2. 1 minuto = 60 segundos

$60 : 0{,}75 = 80$

A frequência cardíaca do paciente é 80 bpm.

Página 62

75.1. $f(x) = \sin x,\ x \in [0, 2\pi]$

O máximo de *f* é 1, quando $x = \frac{\pi}{2}$. Logo, $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

O mínimo de *f* é –1, quando $x = \frac{3\pi}{2}$. Logo,

$C\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

75.2. Zeros da função *f*: 0, π e 2π

Como as abcissas dos pontos *B* e *D* são positivas, conclui-se que $B(\pi, 0)$ e $D(2\pi, 0)$.

76.1. $f(x) = \sin x,\ x \in [0, 2\pi]$

$A\left(a, \frac{7}{10}\right)$ e $a \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, logo $\sin a = \frac{7}{10}$.

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{51}{100} \Leftrightarrow \cos a = \frac{\sqrt{51}}{10} \vee \cos a = -\frac{\sqrt{51}}{10}$$

Como $a \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\cos a < 0$.

Então, $\cos a = -\frac{\sqrt{51}}{10}$.

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{7}{10}}{-\frac{\sqrt{51}}{10}} = -\frac{7}{\sqrt{51}} = -\frac{7\sqrt{51}}{51}$$

Conclusão: $\cos a = -\frac{\sqrt{51}}{10}$ e $\tan a = -\frac{7\sqrt{51}}{51}$

76.2. $B\left(b, -\frac{7}{10}\right)$ e $b \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, logo $\sin b = -\frac{7}{10}$.

$$\sin^2 b + \cos^2 b = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{7}{10}\right)^2 + \cos^2 b = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 b = \frac{51}{100} \Leftrightarrow \cos b = \frac{\sqrt{51}}{10} \vee \cos b = -\frac{\sqrt{51}}{10}$$

Como $b \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos b < 0$.

Então, $\cos b = -\frac{\sqrt{51}}{10}$.

$$\tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{-\frac{7}{10}}{-\frac{\sqrt{51}}{10}} = \frac{7}{\sqrt{51}} = \frac{7\sqrt{51}}{51}$$

Conclusão: $\cos b = -\frac{\sqrt{51}}{10}$ e $\tan b = \frac{7\sqrt{51}}{51}$

Página 63

77. $g(x) = \sin x$ e $D_g = \mathbb{R}$

77.1. $g\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 1, k \in \mathbb{Z}$

Nos pontos de abcissa $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, a função *g* assume um extremo, ou seja, o valor 1 ou o valor -1. Assim, a afirmação é falsa.

77.2. Os zeros da função seno ocorrem nos pontos de abcissa $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, logo a afirmação $g(\pi + k\pi) = 0, k \in \mathbb{Z}$ é verdadeira.

77.3. $4k\pi = 2 \times 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $2k\pi$ é período da função seno, então $4k\pi$ também é. Assim, a afirmação

$g\left(\frac{\pi}{5} + 4k\pi\right) = g\left(\frac{\pi}{5}\right), k \in \mathbb{Z}$ é verdadeira.

77.4. $g\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) =$

$= \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), k \in \mathbb{Z}$

A afirmação é verdadeira.

77.5. Sabe-se que $\forall x \in]\pi, 2\pi[,\ \sin x < 0$.

Como 2π é o período positivo mínimo da função seno, então $\forall x \in \left]\pi + 2\pi, 2\pi + 2\pi\right[$, $\sin x < 0$, ou seja, $\forall x \in \left]3\pi, 4\pi\right[$, $g(x) < 0$.

A afirmação é verdadeira.

77.6. $\forall x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x < 0$

Logo, a afirmação $\exists x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[: g(x) > 0$ é falsa.

77.7. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como $\sin(-\pi) = 0$, a afirmação

$\exists x \in \left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[: g(x) = 0$ é verdadeira.

78.1. $A(a, -1)$, $a \in \left]5\pi, \frac{13\pi}{2}\right[$ pertence ao gráfico de *f*, logo:

$\sin a = -1 \wedge a \in \left]5\pi, \frac{13\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow a = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge a \in \left]5\pi, \frac{13\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow a = \frac{11\pi}{2}$

$B(b, 0)$, $b \in \left]5\pi, \frac{13\pi}{2}\right[$ pertence ao gráfico de f, logo:

$\sin b = 0 \wedge b \in \left]5\pi, \frac{13\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge b \in \left]5\pi, \frac{13\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow b = 6\pi$

Conclusão: $A\left(\frac{11\pi}{2}, -1\right)$ e $B(6\pi, 0)$

78.2. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $f\left(\frac{17\pi}{4}\right) - f\left(\frac{19\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) - f\left(\frac{\pi}{3} + 6\pi\right)$

$= f\left(\frac{\pi}{4} + 2 \times 2\pi\right) - f\left(\frac{\pi}{3} + 3 \times 2\pi\right)$

$= f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, porque 2π é o período positivo mínimo da função *f*.

$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

b) $f\left(\frac{23\pi}{6}\right) - f\left(\frac{31\pi}{6}\right) = f\left(-\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) - f\left(\frac{7\pi}{6} + 4\pi\right)$

$= f\left(-\frac{\pi}{6} + 2 \times 2\pi\right) - f\left(\frac{7\pi}{6} + 2 \times 2\pi\right)$, porque 2π é o período positivo mínimo da função f.

$= f\left(-\frac{\pi}{6}\right) - f\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

$= \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Página 64 – Pratica

79.1. $\forall x \in \left]\frac{7\pi}{3}, 4\pi\right[$, $f(x) \neq 0 \rightarrow$ A afirmação é falsa, pois

$f(3\pi) = \sin(3\pi) = 0$ e $3\pi \in \left]\frac{7\pi}{3}, 4\pi\right[$.

79.2. A afirmação $\exists x \in \left]-\pi, \pi\right[: f(x) = 1$ é verdadeira, porque $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\frac{\pi}{2} \in \left]-\pi, \pi\right[$.

79.3. A afirmação $\forall x \in \left]-\pi, \pi\right[: f(x) \neq 1$ é falsa, pois $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ e $-\frac{\pi}{2} \in \left]-\pi, \pi\right[$.

79.4. A afirmação $\exists x \in \left]-\pi, \pi\right[: f(x) = 0$ é verdadeira, pois $f(0) = \sin 0 = 0$ e $0 \in \left]-\pi, \pi\right[$.

80. $B(b,0)$ e $D(d,0)$; $b < 0$ e $d > 0$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$k = -1 \rightarrow x = -\pi$

$k = 0 \rightarrow x = 0$

$k = 1 \rightarrow x = \pi$

$k = 2 \rightarrow x = 2\pi$

$k = 3 \rightarrow x = 3\pi$

Atendendo à representação gráfica, conclui-se que $B(-\pi, 0)$ e $D(3\pi, 0)$.

$A(a, 1)$, $a < 0$ e $C(c, 1)$, $c > 0$

$g(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$k = -1 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$

$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{2}$

Atendendo à representação gráfica, $A\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$ e $C\left(\frac{5\pi}{2}, 1\right)$.

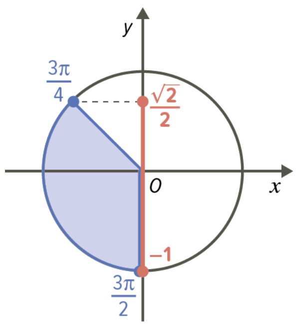
Assim: $A\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$, $B(-\pi, 0)$, $C\left(\frac{5\pi}{2}, 1\right)$ e $D(3\pi, 0)$.

Conclusão: $a = -\frac{3\pi}{2}$, $b = -\pi$, $c = \frac{5\pi}{2}$ e $d = 3\pi$

Página 65 – Pratica

81.1. $f(x) = \sin x$ e $D_f = \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$-1 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



Cálculos auxiliares:

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$D_f' = \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

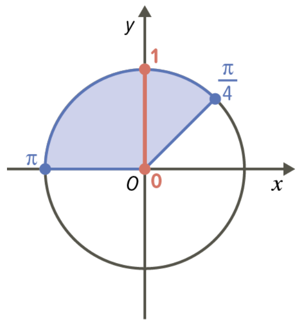
Mínimo de f : -1

Máximo de f : $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Zero de f : π

81.2. $f(x) = \sin x$ e $D_f = \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

$0 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$



$D_f' = [0, 1]$

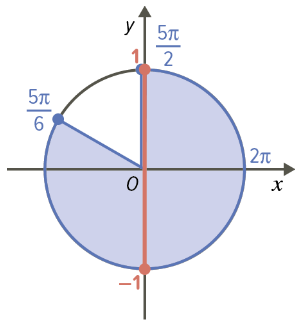
Mínimo de f : 0

Máximo de f : 1

Zero de f : π

81.3. $f(x) = \sin x$ e $D_f = \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\right]$

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$



$D_f' = [-1, 1]$

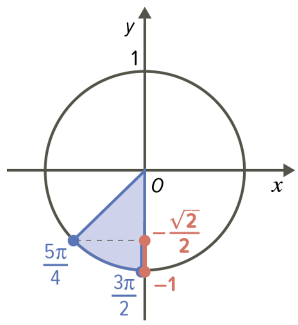
Mínimo de f : -1

Máximo de f : 1

Zero de f : π e 2π

81.4. $f(x) = \sin x$ e $D_f = \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$-1 \leq \sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Cálculos auxiliares:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D'_f=\left[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

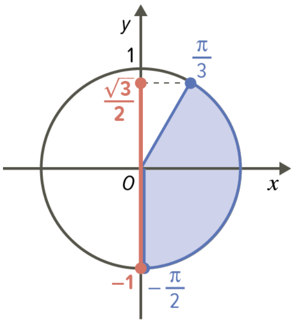
Mínimo de f: -1

Máximo de f: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f não tem zeros.

81.5. $f(x)=\sin x$ e $D_f=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}\right]$

$$-1\le \sin x\le \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -1\le f(x)\le \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$D'_f=\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

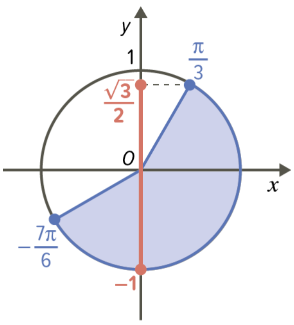
Mínimo de f: -1

Máximo de f: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Zero de f: 0

81.6. $f(x)=\sin x$ e $D_f=\left[-\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$

$$-1\le \sin x\le \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -1\le f(x)\le \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$D'_f=\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Mínimo de f: -1

Máximo de f: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Zero de f: $-\pi$ e 0

82. $f(x)=4+\sin x$ e $D_f=\mathbb{R}$

82.1. Como $D_f=\mathbb{R}$, tem-se:

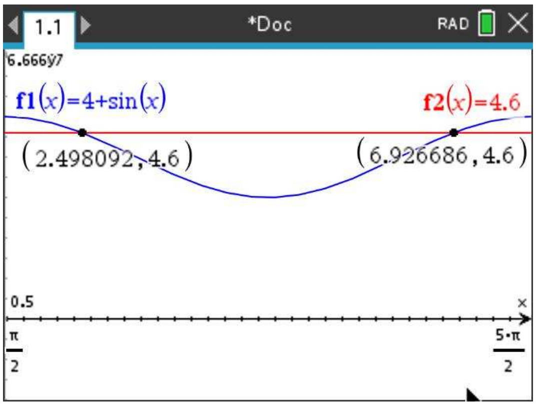
$$-1\le \sin x\le 1 \Leftrightarrow 4-1\le 4+\sin x\le 4+1$$

$$\Leftrightarrow 3\le f(x)\le 5$$

$$D'_f=[3,5]$$

82.2. $f(x)=4{,}6 \wedge x\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4+\sin x=4{,}6 \wedge x\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right[$$



Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, conclui-se que $x_C\approx 2{,}498$ e $x_B\approx 6{,}927$.

$$\overline{BC}=6{,}927-2{,}498=4{,}429\approx 4{,}43$$

Seja *h* a altura do triângulo em relação à base [*BC*]:

$$h=4{,}6-3=1{,}6$$

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{BC}\times h}{2}=\frac{4{,}43\times 1{,}6}{2}=3{,}544\approx 3{,}5$$

A medida da área do triângulo [*ABC*] é, aproximadamente, igual a 3,5 u.a.

83. $A(0,3)$; $f(x)=\sin x$ e $D_f=[-\pi,\pi]$

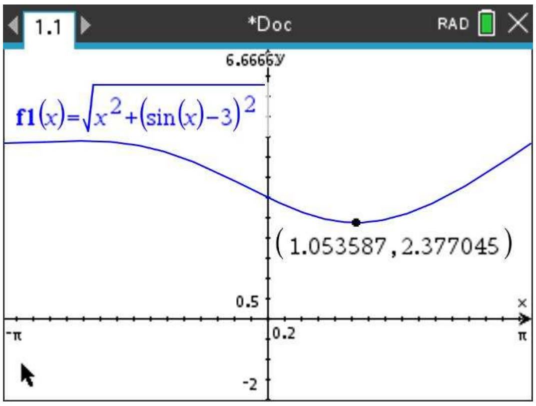
P é um ponto móvel que se desloca sobre o gráfico de *f*.

$$P(x,f(x)),\ x\in[-\pi,\pi]$$

$$\overline{PA}=\sqrt{(x-0)^2+(f(x)-3)^2}=\sqrt{x^2+(\sin x-3)^2}$$

$$\begin{aligned} g:[-\pi,\pi]&\to\mathbb{R}\\ x&\to\sqrt{x^2+(\sin x-3)^2}\end{aligned}$$

Recorrendo à calculadora gráfica, sabe-se que o gráfico de g é o seguinte:



Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que o mínimo da função g é, aproximadamente, 2,38.

Página 66 – Tarefa 10

1.1. $f(x) = 2{,}5\sin x$ e $D_f = \mathbb{R}$

$-1 \le \sin x \le 1$

$2{,}5 \times (-1) \le \sin x \le 2{,}5 \times 1$

$-2{,}5 \le f(x) \le 2{,}5$

$D'_f = [-2{,}5;\, 2{,}5]$

1.2. a) A função f tem três zeros pertencentes ao intervalo $\left[\frac{5\pi}{3}, \frac{9\pi}{2}\right]$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2{,}5\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 1 \to x = \pi \notin \left[\frac{5\pi}{3}, \frac{9\pi}{2}\right]$

$k = 2 \to x = 2\pi \in \left[\frac{5\pi}{3}, \frac{9\pi}{2}\right]$

$k = 3 \to x = 3\pi \in \left[\frac{5\pi}{3}, \frac{9\pi}{2}\right]$

$k = 4 \to x = 4\pi \in \left[\frac{5\pi}{3}, \frac{9\pi}{2}\right]$

$k = 5 \to x = 5\pi \notin \left[\frac{5\pi}{3}, \frac{9\pi}{2}\right]$

Os três zeros são: 2π, 3π e 4π.

b) Como o ponto A tem abcissa $\frac{5\pi}{3}$ e pertence ao gráfico de f, então a sua ordenada é dada por $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2{,}5\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2{,}5\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$

$= 2{,}5\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2{,}5\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2{,}5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{4}$

c) Como o máximo da função f é 2,5 pretende-se mostrar que a ordenada do ponto B é 2,5.

$y_B = f\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 2{,}5\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) =$

$= 2{,}5\sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) =$

$= 2{,}5\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$= 2{,}5 \times 1 = 2{,}5$

2.1. $A\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, logo raio $= \overline{OA} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

$V(3{,}5\cos x;\, 3{,}5\sin x)$

Seja V' a projeção ortogonal de V sobre a reta r, de equação $y = -5$. Então, $V'(3{,}5\cos x;\, -5)$.

$d(V, r) = \overline{VV'} = 3{,}5\sin x - (-5) = 3{,}5\sin x + 5$

$f(x) = 3{,}5\sin x + 5 = 5 + 3{,}5\sin x$

2.2. A função f não tem zeros porque a distância do ponto V à reta r nunca é nula já que o ponto V nunca pertence à reta r.

2.3. $-1 \le \sin x \le 1$

$-3{,}5 \le 3{,}5\sin x \le 3{,}5$

$5 - 3{,}5 \le 5 + 3{,}5\sin x \le 5 + 3{,}5$

$1{,}5 \le f(x) \le 8{,}5$

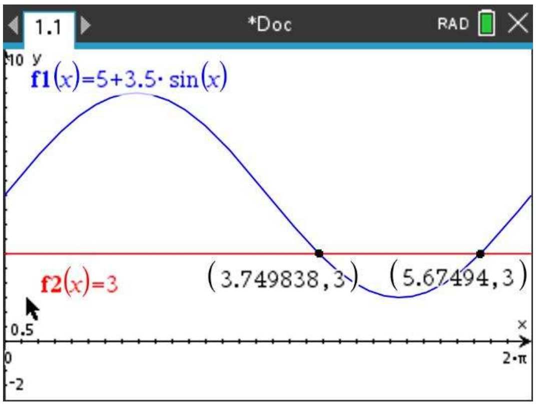
$D'_f = [1{,}5;\, 8{,}5]$

Máximo de f: 8,5

Mínimo de f: 1,5

Significados: As distâncias máxima e mínima do ponto V à reta r são, respetivamente, 8,5 e 1,5.

2.4. $f(x)=3 \wedge x\in[0, 2\pi[$



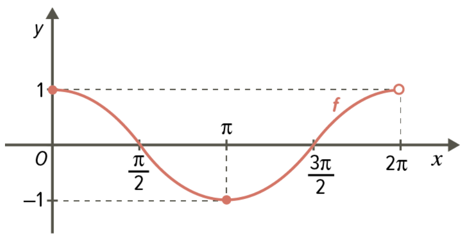
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que

$x\approx 3{,}75$ rad ou $x\approx 5{,}67$ rad

Página 67

84. $f(x)=\cos x$ e $D_f=[0, 2\pi[$

Por exemplo:



84.1. f é negativa e crescente em $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

84.2. f é positiva e decrescente em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

84.3. f é negativa e decrescente em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

84.4. f é positiva e crescente em $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

85. $f(x)=\cos x,\ x\in[0, 2\pi[$

$A\left(a, -\frac{3}{4}\right)$, $a\in]\pi, 2\pi[$, pertence ao gráfico de f,

logo: $\cos a=-\frac{3}{4} \wedge a\in]\pi, 2\pi[$

$\sin^2 a+\cos^2 a=1 \Leftrightarrow \sin^2 a+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 a=\frac{7}{16} \Leftrightarrow \sin a=\frac{\sqrt{7}}{4} \vee \sin a=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

Como $a\in]\pi, 2\pi[$, $\sin a<0$.

Logo, $\sin a=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\tan a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Conclusão: $\sin a=-\frac{\sqrt{7}}{4}$ e $\tan a=\frac{\sqrt{7}}{3}$

86. $f(x)=\cos x$ e $D_f=[0, 2\pi[$

86.1. $a\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $f(a)=0{,}8$

$f(a)=0{,}8 \Leftrightarrow \cos a=0{,}8$

$f(\pi-a)=0{,}8 \Leftrightarrow \cos(\pi-a)=-\cos a=-0{,}8$

86.2. $f\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a$

$\sin^2 a+\cos^2 a=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 a+(-0{,}8)^2=1$

$\Leftrightarrow \sin^2 a=0{,}36$

$\Leftrightarrow \sin a=0{,}6 \vee \sin a=-0{,}6$

Como $a\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin a\geq 0$.

Logo, $\sin a=0{,}6$.

Assim, $f\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a=0{,}6$.

Página 68

87.1. $f(x)=\cos x$ e $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=0 \wedge x\in[-\pi, 3\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x=0 \wedge x\in[-\pi, 3\pi]$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\ \ x\in[-\pi, 3\pi]$

$k=0 \to x=\frac{\pi}{2}\in[-\pi, 3\pi]$

$k=1 \to x=\frac{3\pi}{2}\in[-\pi, 3\pi]$

$k=2 \to x=\frac{5\pi}{2}\in[-\pi, 3\pi]$

$k=3 \to x=\frac{7\pi}{2}\notin[-\pi, 3\pi]$

$k=-1 \rightarrow x=-\frac{\pi}{2} \in [-\pi, 3\pi]$

$k=-2 \rightarrow x=-\frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, 3\pi]$

Então, $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right\}$.

87.2. a) Máximo da função *f*: 1

$f(x)=1 \wedge x \in \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 1 \wedge \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right]$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \;\; x \in \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right]$

$k=2 \rightarrow x = 4\pi \notin \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right]$

$k=3 \rightarrow x = 6\pi \in \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right]$

$k=4 \rightarrow x = 8\pi \in \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right]$

Assim, $x \in \{6\pi, 8\pi\}$.

b) Mínimo da função *f*: -1

$f(x)=-1 \wedge x \in \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = -1 \wedge \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right]$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \;\; x \in \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right]$

$k=2 \rightarrow x = 5\pi \notin \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right]$

$k=3 \rightarrow x = 7\pi \in \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right]$

$k=4 \rightarrow x = 9\pi \notin \left]\frac{11\pi}{2}, 8\pi\right]$

Então, $x \in \{7\pi\}$.

88. $g(x) = 1+\cos x$ e $x \in \mathbb{R}$

88.1. $-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow$

$1-1 \le 1+\cos x \le 1+1$

$0 \le g(x) \le 2$

$D_g' = [0, 2]$

88.2. 2π é período da função *g* se para todo o $x \in \mathbb{R}$ se verifica a condição $g(x+2\pi) = g(x)$.

$g(x+2\pi) = 1+\cos(x+2\pi) = 1+\cos x = g(x)$

Logo, 2π é período da função *g*.

88.3. a) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$

A afirmação é falsa pois $D'_g = [0, 2]$.

b) $\exists x \in]-\pi, 0[: g(x) = 0$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 1+\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$k=-1 \rightarrow x = -\pi \notin]-\pi, 0[$

$k=0 \rightarrow x = \pi \notin]-\pi, 0[$

A função *g* não tem zeros no intervalo $]-\pi, 0[$.

Então, a afirmação é falsa.

89. $h(x) = -3\cos x$ e $D_h = \mathbb{R}$

89.1. $-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \le 3\cos x \le 3$

$\Leftrightarrow 3 \ge -3\cos x \ge -3$

$\Leftrightarrow -3 \le h(x) \le 3$

$D'_h = [-3, 3]$

Máximo de h: 3

Mínimo de h: -3

89.2. $h(x) = 0 \Leftrightarrow -3\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Zeros de *h* em $[0, 2\pi]$: $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$

- Se $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, então $\cos x > 0$. Logo,

$-3\cos x < 0$, ou seja, $h(x) < 0$.

- Se $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, então $\cos x < 0$. Logo,

$-3\cos x > 0$, ou seja, $h(x) > 0$.

- Se $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então $\cos x > 0$. Logo,

$-3\cos x < 0$, ou seja, $h(x) < 0$.

Cálculos auxiliares:

$h(0) = -3\cos(0) = -3\times 1 = -3$

$h(2\pi) = -3\cos(2\pi) = -3 \times 1 = -3$

Quadro de sinais da função *h* no intervalo $[0, 2\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$h(x)$	-3	$-$	0	+	0	$-$	-3

Página 69 – Tarefa 11

1. $\overline{AP} = 25\,\text{m}$ e $\overline{OA} = 80\,\text{m}$

$O\hat{A}P = x\,\text{rad}$

1.1. *f* é a função que, a cada valor de x, faz corresponder a distância do ponto P ao solo, em metros.

Como, em metros, $\overline{OA} = 80$ e $\overline{AP} = 25$ (raio da circunferência), então conclui-se que:

Máximo de *f*: $80 + 25 = 105$

Mínimo de *f*: $80 - 25 = 55$

1.2. $f(a)$ é máximo em $[0, 2\pi]$ quando $O\hat{A}P = \pi\,\text{rad}$.

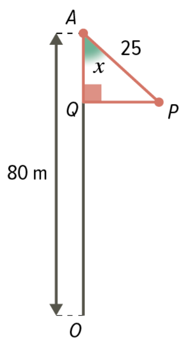
Então, $a = \pi$.

1.3. $f(b)$ é mínimo quando $O\hat{A}P = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$b = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \wedge\ b \in \left[\frac{7\pi}{2}, 5\pi\right]$, logo $b = 4\pi$.

2. Seja *Q* a projeção ortogonal de *P* sobre Ox.

1.º Caso:



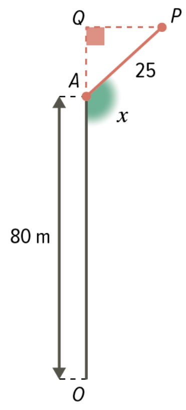
Se $x \in \left]2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}_0^+$ ou

$x \in \left]\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}_0^+$

$\cos x = \frac{\overline{AQ}}{25} \Leftrightarrow \overline{AQ} = 25\cos x$

Então, $f(x) = 80 - 25\cos x$.

2.º Caso:



Se $x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}_0^+$ ou

$x \in \left]\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}_0^+$

$P\hat{A}Q = \pi - x$

$\cos(\pi - x) = \frac{\overline{AQ}}{25} \Leftrightarrow -\cos x = \frac{\overline{AQ}}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AQ} = -25\cos x$

Então, $f(x) = 80 + (-25\cos x) = 80 - 25\cos x$.

3.º Caso: $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}_0^+$

$\overline{PO} = 80 - 25 = 80 - 25\cos(2k\pi)$

Então, $f(x) = 80 - 25\cos x$.

4.º Caso: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}_0^+$

A distância do ponto *P* ao solo é 80.

$80 - 25\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 80 - 25 \times 0 = 80$

$\overline{PO} = 80 - 25 = 80 - 25\cos(2k\pi)$

Então, $f(x) = 80 - 25\cos x$.

5.º Caso: $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}_0^+$

$\overline{PO} = 80 + 25 = 80 - 25\cos(\pi + 2k\pi)$

Então, $f(x) = 80 - 25\cos x$.

Conclusão: $f(x) = 80 - 25\cos x$

3.1. $f(x) = 80 - 25\cos x$

$f(x + 4\pi) = 80 - 25\cos(x + 4\pi) =$

$= 80 - 25\cos x = f(x)$

Como $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 4\pi) = f(x)$, então 4π é período da função *f*.

$f(x+\pi) = 80 - 25\cos(x+\pi) = 80 - 25(-\cos x) =$

$= 80 + 25\cos x \neq f(x)$

Então, π não é período da função *f*.

3.2. **a)** $f(35\pi) = 80 - 25\cos(35\pi)$

$= 80 - 25\cos(\pi + 34\pi)$

$= 80 - 25\cos(\pi + 17\times 2\pi)$

$= 80 - 25\cos\pi$

$= 80 - 25\times(-1) = 105$

b) $f(48\pi) = 80 - 25\cos(48\pi)$

$= 80 - 25\cos(0 + 48\pi)$

$= 80 - 25\cos(0 + 12\times 2\pi)$

$= 80 - 25\cos 0$

$= 80 - 25\times 1 = 55$

c) $f\left(\frac{21\pi}{4}\right) = 80 - 25\cos\left(\frac{21\pi}{4}\right)$

$= 80 - 25\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 4\pi\right)$

$= 80 - 25\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$= 80 - 25\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= 80 - 25\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 80 - 25\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 80 + \frac{25\sqrt{2}}{2}$

d) $f\left(\frac{19\pi}{3}\right) = 80 - 25\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

$= 80 - 25\cos\left(\frac{\pi}{3} + 6\pi\right)$

$= 80 - 25\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

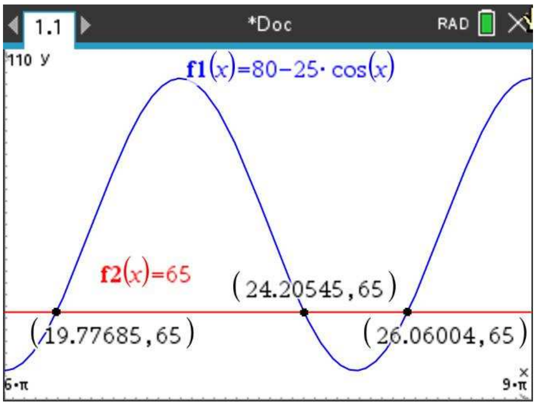
$= 80 - 25\times\frac{1}{2}$

$= 80 - \frac{25}{2} = \frac{135}{2}$

3.3. $x \in [6\pi, 9\pi]$ e a distância de *P* ao solo é 65 m.

$f(x) = 65 \ \wedge \ x \in [6\pi, 9\pi]$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que:



$x \approx 19{,}78 \vee x \approx 24{,}21 \vee x \approx 26{,}06$

Página 70 – Tarefa 12

1.

Funções do tipo $y = \sin(cx)$ com $c \neq 0$		
Valor de *c*	**Função**	**Período positivo mínimo**
1	$y = \sin(x)$	2π
2	$y = \sin(2x)$	π
$\frac{1}{2}$	$y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	4π
-1	$y = \sin(-x)$	2π
5	$y = \sin(5x)$	$\frac{2\pi}{5}$
$-\frac{2}{3}$	$y = \sin\left(-\frac{2}{3}x\right)$	3π
…	…	…

2. O período positivo mínimo da função $y = \sin x$, com $c \neq 0$, é $\frac{2\pi}{|c|}$.

3. $y = \sin x$, com $c \neq 0$

3.1. Período positivo mínimo: $\frac{\pi}{5}$

$\frac{2\pi}{|c|} = \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow |c| = 10 \Leftrightarrow c = 10 \vee c = -10$

Por exemplo: $y = \sin(10x)$

3.2. Período positivo mínimo: 3π

$$\frac{2\pi}{|c|}=3\pi \Leftrightarrow |c|=\frac{2}{3} \Leftrightarrow c=\frac{2}{3} \vee c=-\frac{2}{3}$$

Por exemplo, $y=\sin\left(-\frac{2}{3}x\right)$.

3.3. Período positivo mínimo: $0{,}4\pi$

$$\frac{2\pi}{|c|}=0{,}4\pi \Leftrightarrow |c|=5 \Leftrightarrow c=5 \vee c=-5$$

Por exemplo, $y=\sin(5x)$.

3.4. Período positivo mínimo: $\frac{4\pi}{3}$

$$\frac{2\pi}{|c|}=\frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow |c|=\frac{6}{4} \Leftrightarrow |c|=\frac{3}{2} \Leftrightarrow c=\frac{3}{2} \vee c=-\frac{3}{2}$$

Por exemplo $y=\sin\left(-\frac{3}{2}x\right)$.

4.

Funções do tipo $y=\cos(cx)$ com $c\neq 0$		
Valor de *c*	**Função**	**Período positivo mínimo**
1	$y=\cos(x)$	2π
2	$y=\cos(2x)$	π
$\frac{1}{2}$	$y=\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$	4π
-1	$y=\cos(-x)$	2π
3	$y=\cos(3x)$	$\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{5}{2}$	$y=\sin\left(-\frac{5}{2}x\right)$	$\frac{4\pi}{5}$
…	…	…

A partir da exploração feita na tarefa, conclui-se que:

Funções do tipo $y=\sin(cx)$ e $y=\cos(cx)$, com $c\neq 0$, são periódicas e o período positivo mínimo é igual a $\frac{2\pi}{\lvert c\rvert}$.

Página 71 – Tarefa 13

1. $y=b\sin(cx)$, com $b\neq 0$ e $c\neq 0$

1.1. $b=1 \rightarrow y=\sin(cx)$, com $c\neq 0$

Exploração da aplicação em GeoGebra – ao cuidado do aluno.

1.2. Relativamente à família de funções do tipo $y=b\sin(cx)$, com $b\neq 0$ e $c\neq 0$ observa-se que:

Zeros: $\frac{k\pi}{c},\ k\in\mathbb{Z}$

Contradomínio: $[-1,1]$

Período positivo mínimo: $\frac{2\pi}{|c|}$

1.3. $c=1 \rightarrow y=b\sin(x)$, com $b\neq 0$

Exploração da aplicação em GeoGebra – ao cuidado do aluno.

1.4. Relativamente à família de funções do tipo $y=b\sin(x)$, com $b\neq 0$ observa-se que:

Zeros: $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Contradomínio: $[-|b|,|b|]$

Período positivo mínimo: 2π

1.5. $f(x)=b\sin(cx)$, com $b\neq 0$ e $c\neq 0$

- Período positivo mínimo: $\frac{\pi}{8}$

Então, $\frac{2\pi}{|c|}=\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow |c|=16 \Leftrightarrow c=16 \vee c=-16$

- Contradomínio: $[-3,3]$

$|b|=3 \Leftrightarrow b=3 \vee b=-3$

Assim sendo, uma função *f* da família que satisfaça as condições do enunciado é, por exemplo, $f(x)=3\sin(16x)$.

2. $y=b\sin(c(x-d))$, com $b\neq 0$ e $c\neq 0$

2.1. Se $b=1$ e $c=1$, então $y=\sin(x-d)$

Exploração da aplicação em GeoGebra – ao cuidado do aluno.

2.2. Relativamente à família de funções do tipo $y=\sin(x-d)$, observa-se que os zeros se alteram $(d\neq 0)$, mas o contradomínio e o período positivo mínimo não se alteram.

Zeros: $d+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Contradomínio: $[-1,1]$

Período positivo mínimo: 2π

2.3. $g(x)=b\sin(c(x-d))$, com $b\neq 0$ e $c\neq 0$

$D_g'=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Assim, $|b|=\frac{1}{2}$, ou seja, $b=\frac{1}{2}\vee b=-\frac{1}{2}$

Zero: $\frac{\pi}{3}$

Considerando $b=\frac{1}{2}$ e $c=1$, tem-se

$g(x)=\frac{1}{2}\sin(x-d)$

Se $\frac{\pi}{3}$ é zero de *g*, então $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-d\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{3}-d\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}-d=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow d=\frac{\pi}{3}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Sendo $k=0$, então $d=\frac{\pi}{3}$.

Assim, uma função *g* da família que satisfaça as condições do enunciado é, por exemplo:

$g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

3. $y=a+b\sin(c(x-d))$, com $b\neq 0$ e $c\neq 0$

3.1. Fixar, por exemplo, $b=1$, $c=1$ e $d=0$ e fazer variar o valor de *a*.
Exploração da aplicação em GeoGebra – ao cuidado do aluno.

3.2. Relativamente à família de funções do tipo $y=a+\sin x$, observa-se que, sendo $a\neq 0$, os zeros alteram-se (podendo a função ter ou não ter zeros), o contradomínio também se altera, mas o período positivo mínimo mantém-se.
Zeros: dependendo do valor de *a* (pode ou não ter zeros)

Contradomínio: $[a-|b|,\ a+|b|]$

Período positivo mínimo: mantém-se

3.3. Exemplo de uma função da família que não tenha zeros: $h(x)=3+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Página 72 – Pratica

90.1. $f(x)=2\cos x$ e $D_f=\mathbb{R}$

$-1\leq\cos x\leq 1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2\leq 2\cos x\leq 2$
$\Leftrightarrow -2\leq f(x)\leq 2$

$D_f'=[-2,2]$

90.2. $f(x)=-\frac{1}{2}\cos x$ e $D_f=\mathbb{R}$

$-1\leq\cos x\leq 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}\cos x\leq\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\geq-\frac{1}{2}\cos x\geq-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq f(x)\leq\frac{1}{2}$

$D_f'=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

90.3. $f(x)=3-\cos x$ e $D_f=\mathbb{R}$

$-1\leq\cos x\leq 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\geq-\cos x\geq-1$

$\Leftrightarrow 4\geq 3-\cos x\geq 2$

$\Leftrightarrow 2\leq f(x)\leq 4$

$D_f'=[2,4]$

90.4. $f(x)=2{,}5+0{,}25\cos x$ e $D_f=\mathbb{R}$

$-1\leq\cos x\leq 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0{,}25\leq 0{,}25\cos x\leq 0{,}25$

$\Leftrightarrow 2{,}25\leq 2{,}5+0{,}25\cos x\leq 2{,}75$

$\Leftrightarrow 2{,}25\leq f(x)\leq 2{,}75$

$D_f'=[2{,}25;\ 2{,}75]$

91.1. $f(x)=2\cos(4x)$ e $D_f=\mathbb{R}$

$\frac{\pi}{2}$ é período da função *f* se $\forall x\in\mathbb{R},\ f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$

$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\cos(4x+2\pi)=$

$=2\cos(4x)=f(x)$

Então, $\frac{\pi}{2}$ é período da função *f*.

91.2. $f(x) = -3\cos(-4x)$ e $D_f = \mathbb{R}$

$\frac{\pi}{2}$ é período da função *f* se $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = f(x)$

$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -3\cos\left(-4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = -3\cos(-4x-2\pi) =$

$= -3\cos(-4x) = f(x)$

Então, $\frac{\pi}{2}$ é período da função *f*.

91.3. $f(x) = -1+\frac{1}{2}\cos(4x)$ e $D_f = \mathbb{R}$

$\frac{\pi}{2}$ é período da função *f* se $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = f(x)$

$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -1+\frac{1}{2}\cos\left(4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = -1+\frac{1}{2}\cos(4x+2\pi)$

$= -1+\frac{1}{2}\cos(4x) = f(x)$

Então, $\frac{\pi}{2}$ é período da função *f*.

92.1. $y = b\cos(cx)$, sendo $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

$D' = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \vee b = -\frac{1}{2}$

Período positivo mínimo:

$4\pi \rightarrow \frac{2\pi}{|c|} = 4\pi \Leftrightarrow |c| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \vee c = -\frac{1}{2}$

Por exemplo: $y = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

92.2. $y = b\cos(cx)$ sendo $b \neq 0$ e $c \neq 0$

$D' = [-3, 3] \rightarrow |b| = 3 \Leftrightarrow b = 3 \vee b = -3$

Período positivo mínimo:

$\frac{\pi}{8} \rightarrow \frac{2\pi}{|c|} = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow |c| = 16 \Leftrightarrow c = 16 \vee c = -16$

Por exemplo: $y = 3\cos(16x)$

Página 73 – Pratica

93. $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; $D_f = D_g = \mathbb{R}$

93.1. As coordenadas do vetor de menor norma, com sentido igual ao do eixo Ox, associado a uma translação que aplica o gráfico de *f* no gráfico de *g* são $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

54.2. **Função *f* :**

$f(x) = 0 \wedge x \in [-\pi, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge x \in [-\pi, 2\pi]$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$

Zeros de f em $[-\pi, 2\pi]$: $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$

Função *g*:

Como o gráfico de *g* é a imagem do gráfico de *f* pela translação de vetor $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, então os zeros de *g* no intervalo $[-\pi, 2\pi]$ são $-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, ou $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

Zeros de g em $[-\pi, 2\pi]$: $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

94. $f(x) = \cos x$ e $g(x) = 1{,}5\cos(2x)$; $D_f = D_g = \mathbb{R}$

94.1. **Função *f*:**

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-1 \leq f(x) \leq 1$

$D_f' = [-1, 1]$

Função *g*:

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-1 \leq \cos(2x) \leq 1$

$-1{,}5 \leq 1{,}5\cos(2x) \leq 1{,}5$

$-1 \leq f(x) \leq 1$

$D_g' = [-1{,}5;\ 1{,}5]$

Conclusão: $D_f' = [-1, 1]$ e $D_g' = [-1{,}5;\ 1{,}5]$

94.2. $f(x) = 0 \wedge x \in [-\pi, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge x \in [-\pi, 2\pi]$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$

Zeros de f em $[-\pi, 2\pi]$: $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$

$g(x)=0 \wedge x\in[-\pi, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1{,}5\cos(2x)=0 \wedge x\in[-\pi,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow \cos(2x)=0 \wedge x\in[-\pi,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[-\pi,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[-\pi,\ 2\pi]$

$k=0 \to x=\frac{\pi}{4}\in[-\pi,\ 2\pi]$

$k=1 \to x=\frac{3\pi}{4}\in[-\pi,\ 2\pi]$

$k=2 \to x=\frac{5\pi}{4}\in[-\pi,\ 2\pi]$

$k=3 \to x=\frac{7\pi}{4}\in[-\pi,\ 2\pi]$

$k=4 \to x=\frac{9\pi}{4}\notin[-\pi,\ 2\pi]$

$k=-1 \to x=-\frac{\pi}{4}\in[-\pi,\ 2\pi]$

$k=-2 \to x=-\frac{3\pi}{4}\in[-\pi,\ 2\pi]$

$k=-3 \to x=-\frac{5\pi}{4}\notin[-\pi,\ 2\pi]$

Zeros de g em $[-\pi,\ 2\pi]$:

$-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

94.3. $h(x)=k+g(x),\ k\in\mathbb{R}$

$-1{,}5\le g(x)\le 1{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k-1{,}5\le k+g(x)\le k+1{,}5$

$\Leftrightarrow k-1{,}5\le h(x)\le k+1{,}5$

$D'_h=[k-1{,}5; k+1{,}5]$

O contradomínio da função h está contido em $\mathbb{R}^-$ se $k+1{,}5$ for negativo.

$k+1{,}5<0 \Leftrightarrow k<-1{,}5 \Leftrightarrow k<-\frac{3}{2}$

$k\in\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[$

A opção correta é a **(B)**.

95. $f(x)=a+b\cos(c(x+d));\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R},\ b\neq 0$ e $c\neq 0$

Período positivo mínimo: $\frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{|c|}=\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow |c|=3 \Leftrightarrow c=3 \vee c=-3$

$D'_f=[0,5]$

$\begin{cases} a+|b|=5 \\ a-|b|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+a=5 \\ |b|=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=5 \\ |b|=a \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ |b|=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ b=\frac{5}{2} \vee b=-\frac{5}{2} \end{cases}$

Considerando $a=\frac{5}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$, $c=3$ e $d=0$:

$f(x)=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\cos(3x)$

Página 74

96. $f(x)=\tan x$ e $D_f=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

96.1. $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)>f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

A afirmação dada é falsa.

96.2. $f\left(-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)=-f\left(\frac{\pi}{5}\right)$

A afirmação dada é verdadeira.

96.3. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)<f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

A afirmação dada é falsa.

96.4. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

A função tangente é crescente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Como $\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{3}$, sabe-se que $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)<\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Se $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) < \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$, então:

$-\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) > -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$-\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) > -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) < -\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$\Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{3}\right) < -f\left(\frac{\pi}{5}\right)$

A afirmação dada é verdadeira.

97. $f(x) = \tan x,\ x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

97.1. $f(x) = 0 \wedge x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan x = 0 \wedge x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$

Zeros de f: 0, π e 2π

97.2. $A\left(x_A, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $B\left(x_B, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ pertencem ao gráfico de f.

$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6} + \pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6}$

Então, $x_A = \frac{\pi}{6}$ e $x_B = \frac{7\pi}{6}$

97.3. $C\left(x_C, -\sqrt{3}\right)$ e $D\left(x_D, -\sqrt{3}\right)$ pertencem ao gráfico de f.

$f(x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \wedge x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$

Então, $x_C = \frac{2\pi}{3}$ e $x_D = \frac{5\pi}{3}$.

Página 75

98. $f(x) = \tan x$

98.1. Sabe-se que a função tangente é negativa em intervalos do tipo $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$ e positiva em intervalos do tipo $\left]k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, o quadro de sinal da função f em $[-2\pi, 0]$ é:

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0
$f(x)$	0	+	n.d.	–	0	+	n.d.	–	0

A função é positiva em $\left]-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right[$ e em $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.

A função é negativa em $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[$ e em $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

98.2. Sabe-se que a função tangente é crescente em intervalos do tipo $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, o quadro de variação da função f em $[\pi, 3\pi]$ é:

x	π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		3π
f	0	↗	n.d.	↗	n.d.	↗	0

A função é crescente em $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, em $\left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$ e em $\left]\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right]$.

99. $g(x) = \tan x$

99.1. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Então, os elementos do intervalo $[5\pi, 7\pi]$ que não fazem parte do domínio de g são $\frac{11\pi}{2}$ e $\frac{13\pi}{2}$.

99.2. $g(x)=0 \wedge x \in \left]\frac{9\pi}{2}, 7\pi\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan x = 0 \wedge x \in \left]\frac{9\pi}{2}, 7\pi\right]$

$\Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge x \in \left]\frac{9\pi}{2}, 7\pi\right]$

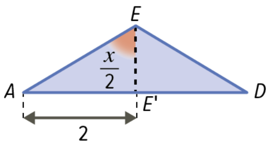
$\Leftrightarrow x = 5\pi \vee x = 6\pi \vee x = 7\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6}$

Os zeros de g pertencentes ao intervalo $\left]\frac{9\pi}{2}, 7\pi\right]$

são 5π, 6π e 7π .

100.1. $A_{[ABCDE]} = A_{[ABCD]} + A_{[ADE]} = \overline{BC}^2 + \frac{\overline{AD} \times \overline{EE'}}{2}$



E' : Projeção ortogonal de E sobre AD.

$$A_{[ABCDE]} = 4^2 + \frac{4 \times \frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}}{2} = 16 + \frac{\frac{8}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}}{2} =$$

$$= 16 + \frac{4}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

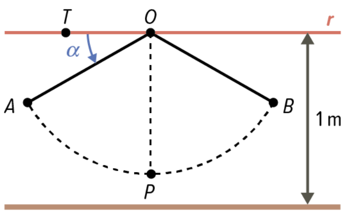
$$f(x) = 16 + \frac{4}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

100.2. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 16 + \frac{4}{\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)} = 16 + \frac{4}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} =$

$= 16 + \frac{4}{1} = 20$

Página 76

101.



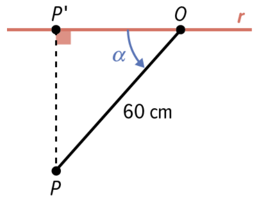
$\overline{OA} = 60$ cm

$T\hat{O}P = \alpha,\ \alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$

$1\text{ m} = 100\text{ cm}$

1.º Caso: $\frac{\pi}{6} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

Seja P' a projeção ortogonal de P sobre a reta r.

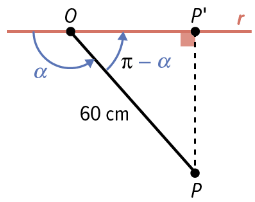


$\sin\alpha = \frac{\overline{PP'}}{60} \Leftrightarrow \overline{PP'} = 60\sin\alpha$

Então, $f(\alpha) = 100 - 60\sin\alpha$.

2.º Caso: $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \frac{5\pi}{6}$

Seja P' a projeção ortogonal de P sobre a reta r.



$P\hat{O}P' = \pi - \alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \frac{\overline{PP'}}{60} \Leftrightarrow \overline{PP'} = 60\sin(\pi - \alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{PP'} = 60\sin\alpha$

Então, $f(\alpha) = 100 - 60\sin\alpha$.

3.º Caso: $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$f(\alpha) = 100 - 60 = 40$

$100 - 60\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 100 - 60 \times 1 = 40$

Então, $f(\alpha) = 100 - 60\sin\alpha$.

Conclusão: $f(\alpha) = 100 - 60\sin\alpha$

Página 77 – Tarefa 14

1.1. $h(0) = 1{,}5$ **1.2.** $h(1) = 0{,}5$

1.3. $h(3) = 0{,}5$ **1.4.** $h(4) = 1{,}5$

1.5. $h(7) = 0{,}5$ **1.6.** $h(24) = 1{,}5$

1.7. $h(42) = 1{,}5$ **1.8.** $h(53) = 0{,}5$

2. O movimento do baloiço é periódico, sendo que se repete de 2 em 2 segundos.
Então, o período positivo mínimo da função h é 2.
A opção correta é a **(A)**.

3. $h(t) = a + b\cos(ct)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$ e $c \neq 0$

3.1. $\frac{2\pi}{|c|} = 2 \Leftrightarrow |c| = \pi \Leftrightarrow c = \pi \vee c = -\pi$

Assim, a opção correta é a **(D)**.

3.2. Se $c = \pi$, então $h(t) = a + b\cos(\pi t)$.

$$\begin{cases} h(0) = 1{,}5 \\ h(1) = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b\cos(0) = 1{,}5 \\ a + b\cos(\pi) = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b \times 1 = 1{,}5 \\ a + b \times (-1) = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1{,}5 \\ a - b = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

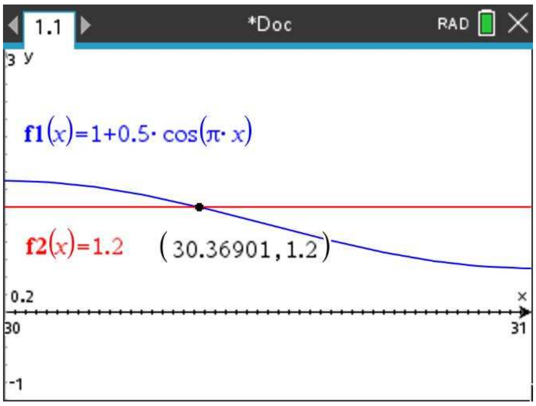
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1{,}5 - b \\ 1{,}5 - b - b = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1{,}5 - b \\ -2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0{,}5 \end{cases}$$

Conclusão: $a = 1$ e $b = 0{,}5$

4. $h(t) = 1{,}2 \wedge t \in [30, 31] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 0{,}5\cos(\pi t) = 1{,}2 \wedge t \in [30, 31]$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que $t \approx 30{,}37$.



Página 78 – Tarefa 15

$$d(t) = 45 + 1{,}5\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

t : tempo, em segundos, após o início da ondulação.
d : distância, em centímetros, da bola ao fundo da piscina.

1. $d(0) = 45 + 1{,}5\sin(0) = 45 + 1{,}5 \times 0 = 45$

Significa que no instante inicial, a bola encontrava-se a 45 cm do fundo da piscina.

2. Período positivo mínimo: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

3. $-1 \leq \sin(t) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1{,}5 \leq 1{,}5\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \leq 1{,}5$

$\Leftrightarrow 43{,}5 \leq 45 + 1{,}5\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \leq 46{,}5$

$\Leftrightarrow 43{,}5 \leq d(t) \leq 46{,}5$

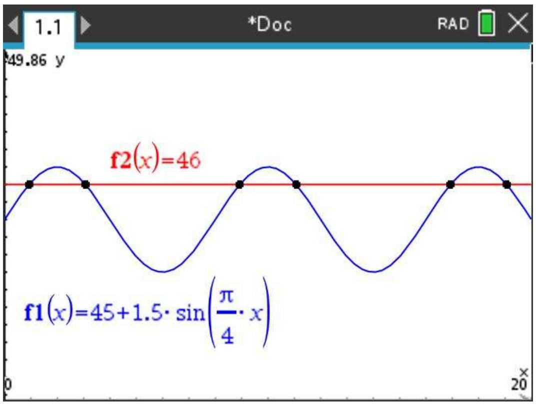
$D_d' = [43{,}5; 46{,}5]$

$y_A = 46{,}5$ (máximo da função *f*)

$y_B = 43{,}5$ (mínimo da função *f*)

4. Pretende-se saber quantas soluções tem a equação $d(t) = 46$, no intervalo $[0, 20]$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora conclui-se que, no intervalo $[0, 20]$, a equação $d(t) = 46$ tem seis soluções.



Donde se conclui que, durante os primeiros 20 segundos, houve seis vezes em que a distância da bola ao fundo da piscina é igual a 46 cm.

Página 79 – Tarefa 16

1. Diâmetro da roda gigante: $30 - 2 = 28$

Raio da roda gigante: $\frac{28}{2} = 14$

No instante inicial, o Pedro encontrava-se a 16 m do chão, ou seja, $f(0)=16$.

Assim, a função indicada na opção (B) não define a função f, pois, nesse caso:

$f(0)=16+14\cos 0=16+14\times 1=30$

Quando o ponto P descrever um arco de amplitude $\frac{\pi}{2}$ rad, ou seja, quando a roda der um quarto de volta, o ponto P fica a 30 m do chão. Nesse caso, tem-se $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=30$.

Assim, a função indicada na opção (D) não define a função f, pois, nesse caso:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=16+\sin\frac{\pi}{2}=16+1=17$

Da mesma forma, a função indicada na opção (A) também não define a função f pois, nesse caso:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=16-14\sin\frac{\pi}{2}=16-14\times 1=2$

Conclusão: A opção que define a função f é a **(C)**.

Motivo da rejeição da opção (B): $f(0)\neq 16$

Motivo da rejeição das opções (A) e (D):

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\neq 30$

2.1. $f\left(\frac{13\pi}{2}\right)=16+14\sin\left(\frac{13\pi}{2}\right)=$

$=16+14\sin\left(\frac{\pi}{2}+6\pi\right)$

$=16+14\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$=16+14\times 1=30$

Depois de descrever um arco de amplitude $\frac{13\pi}{2}$, o Pedro está a 30 m do chão.

2.2. $f\left(\frac{27\pi}{10}\right)=16+14\sin\left(\frac{27\pi}{10}\right)\approx 27{,}33$

Depois de descrever um arco de amplitude $\frac{27\pi}{10}$, o Pedro está a, aproximadamente, 27,33 m do chão.

3. $g(x)=16+14\sin(x-d),\ d\in\mathbb{R}$

Quando $x=0$ a Rita encontra-se a 2 m do chão, ou seja, $d(0)=2$.

$d(0)=2 \Leftrightarrow 16+14\sin(0-d)=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14\sin(-d)=-14 \Leftrightarrow \sin(-d)=-1$

Então, d poderá ser $\frac{\pi}{2}$ pois, nesse caso,

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

A opção correta é a **(A)**.

Página 80 – Tarefa 17

1. $x(t)=4\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right);\ t\in[0,10]$

1.1. $T=6$ é período da função x se

$\forall t\in[0,10],\ x(t+6)=x(t)$

$x(t+6)=4\cos\left(\frac{\pi}{3}(t+6)+\frac{\pi}{6}\right)=$

$=4\cos\left(\frac{\pi}{3}t+2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)=x(t)$

Assim, conclui-se que 6 é período da função x

$\omega=\frac{\pi}{3}$, logo $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$.

Donde se conclui que $\frac{2\pi}{\omega}=T$.

1.2. Sabe-se que $f=\frac{1}{T}$, sendo f a frequência do oscilador harmónico e T o período positivo mínimo.

Assim, $f=\frac{1}{6}$ pois $T=6$.

2. $d(t)=5+2\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right),\ t\in[0,12[$

2.1. $-1\leq\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\leq 1$

$\Leftrightarrow -2\leq 2\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\leq 2$

$\Leftrightarrow 3\leq 5+2\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\leq 7$

$\Leftrightarrow 3\leq d(t)\leq 7$

Distância mínima: 3 dm

Distância máxima: 7 dm

2.2. $d(t) = 5 + 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

Então, $A = 2$, $\omega = \pi$ e $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

A fase do oscilador harmónico é $\frac{\pi}{3}$, sendo a amplitude igual a 2.

Como a frequência é igual ao inverso do período e o período é $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, conclui-se que a frequência é igual a $\frac{1}{2}$.

No caso de se conhecer a pulsação, ω, pode obter-se o período positivo mínimo, *T*, através de $\frac{2\pi}{\omega}$.

Página 81 – Tarefa 18

1. Recorrendo a uma calculadora gráfica, inserem-se os valores da tabela em duas listas e consegue-se encontrar um modelo *f* do tipo

$f(x) = a + b\sin(cx + d)$ sendo, neste caso:

$a \approx 16{,}10$; $b \approx 1{,}30$; $c \approx 0{,}48$ e $d = 0{,}02$

Assim, o modelo encontrado é:

$f(x) = 16{,}10 + 1{,}30\sin(0{,}48x + 0{,}02)$

2. Vamos resolver as questões seguintes considerando o modelo:

$f(x) = 16{,}1 + 1{,}3\sin(0{,}48x - 0{,}02)$

2.1. $f(3) = 16{,}1 + 1{,}3\sin(0{,}48 \times 3 - 0{,}02) \approx 17{,}3852$

$f(3) - 17{,}32 \approx 17{,}3852 - 17{,}32 = 0{,}0652 \approx 0{,}07$

A diferença entre o valor estimado pelo modelo e o valor apresentado na tabela da profundidade do cais é, aproximadamente, 0,07 m.

2.2. a) 7 h do dia 1 de outubro → $x = 7$

$f(7) = 16{,}1 + 1{,}3\sin(0{,}48 \times 7 - 0{,}02) \approx 15{,}84$

Recorrendo ao modelo, conclui-se que a profundidade do cais às 7 h do dia 1 de outubro era, aproximadamente, 15,84 metros.

b) 7 h do dia 2 de outubro → $x = 24 + 7 = 31$

$f(31) = 16{,}1 + 1{,}3\sin(0{,}48 \times 31 - 0{,}02) \approx 17{,}07$

Recorrendo ao modelo, conclui-se que a profundidade do cais às 7 h do dia 2 de outubro era, aproximadamente, 17,07 metros.

2.3. $-1 \le \sin(0{,}48x - 0{,}02) \le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1{,}3 \le 1{,}3\sin(0{,}48x - 0{,}02) \le 1{,}3$

$\Leftrightarrow 14{,}8 \le 16{,}1 + 1{,}3\sin(0{,}48x - 0{,}02) \le 17{,}4$

$\Leftrightarrow 14{,}8 \le f(x) \le 17{,}4$

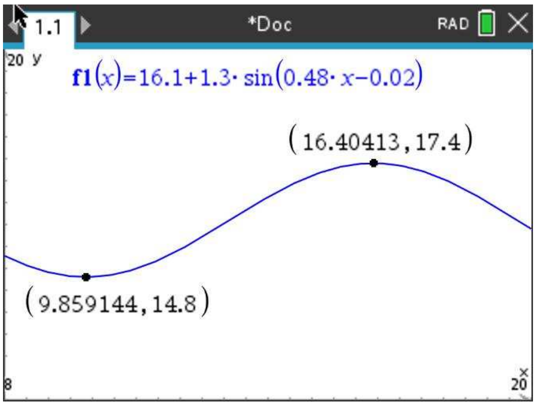
Amplitude da profundidade: $17{,}4 - 14{,}8 = 2{,}6$

A amplitude da profundidade dada pelo modelo é igual 2,6 metros.

2.4. Período: $\frac{2\pi}{0{,}48} \approx 13$

2.5. $x \in [8, 20]$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que a profundidade máxima e mínima no cais, entre as 8 horas e as 20 horas do dia 1 de outubro, foi, respetivamente, 17,4 m e 14,8 m.



Profundidade máxima: 17,4 m

Profundidade mínima: 14,8 m

Página 82 – Pratica

102. Por observação gráfica, sabe-se que o período positivo mínimo da função *f* é 1,25.

Assim, a função *f* pode corresponder à representada na opção (A) ou na opção (B) pois

$$\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{5}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Por observação gráfica também se sabe que $f(0) = 130$.

Na opção (A) tem-se $f(0)=130+76\cos 0=206$ e,

na opção (B), tem-se $f(0)=103+27\cos 0=130$.

Então, a opção correta é a (B).

103.1. $f(x)=5\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ e $D_f=\mathbb{R}$

Seja T o período positivo mínimo, então $f(x+T)=f(x)$.

$f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sin\left(2(x+T)+\frac{\pi}{3}\right)=5\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 5\sin\left(2x+2T+\frac{\pi}{3}\right)=5\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

Daqui resulta que $2T=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, ou seja,

$T=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

O período positivo mínimo ocorre quando $k=1$ e é $T=\pi$.

103.2. $f(x)=3\cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$ e $D_f=\mathbb{R}$

Seja T o período positivo mínimo, então $f(x+T)=f(x)$.

$f(x+T)=f(x)$

$\Leftrightarrow 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}(x+T)\right)=3\cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}x+\frac{3\pi}{4}T\right)=3\cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$

Daqui resulta que $\frac{3\pi}{4}T=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, ou seja,

$T=\frac{8}{3}k,\ k\in\mathbb{Z}$.

O período positivo mínimo ocorre quando $k=1$ e é $T=\frac{8}{3}$.

103.3. $f(x)=2\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$ e $D_f=\mathbb{R}$

Seja T o período positivo mínimo, então $f(x+T)=f(x)$.

$f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{3}{\pi}(x+T)\right)=2\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{3x}{\pi}+\frac{3}{\pi}T\right)=2\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$

Daqui resulta que $\frac{3}{\pi}T=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, ou seja,

$T=\frac{2k\pi^2}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

O período positivo mínimo ocorre quando $k=1$ e é $T=\frac{2\pi^2}{3}$.

103.4. $f(x)=4\sin\left(\frac{2}{\pi}x-\frac{\pi}{6}\right)$ e $D_f=\mathbb{R}$

Seja T o período positivo mínimo, então $f(x+T)=f(x)$.

$f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin\left(\frac{2}{\pi}(x+T)-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\left(\frac{2}{\pi}x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 4\sin\left(\frac{2}{\pi}x+\frac{2}{\pi}T-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\left(\frac{2}{\pi}x-\frac{\pi}{6}\right)$

Daqui resulta que $\frac{2}{\pi}T=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, ou seja,

$T=k\pi^2,\ k\in\mathbb{Z}$.

O período positivo mínimo ocorre quando $k=1$ e é $T=\pi^2$.

Página 83 – Pratica

104. $f(x)=4\cos(660\pi x)$

Função	Período positivo mínimo
$y=2\cos(880\pi x)$	$\frac{2\pi}{880\pi}=\frac{1}{440}$
$y=4\cos(698\pi x)$	$\frac{2\pi}{698\pi}=\frac{1}{349}$
$y=2\cos(524\pi x)$	$\frac{2\pi}{524\pi}=\frac{1}{262}$
$y=2\cos(660\pi x)$	$\frac{2\pi}{660\pi}=\frac{1}{330}$

A função que representa uma onda sonora mais grave do que a modelada por *f*, ou seja, com maior período é a que consta da opção (C).

105. $f(x)=a\cos(bx),\ a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $D_f=\mathbb{R}$

105.1. Por observação gráfica, conclui-se que o período da função é $9-(-3)$, ou seja, 12.

105.2. $f(0)=2\Leftrightarrow a\cos(0)=2\Leftrightarrow a\times 1=2\Leftrightarrow a=2$

Sabe-se que $\frac{2\pi}{|b|}=12 \Leftrightarrow |b|=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow b=\frac{\pi}{6} \vee b=-\frac{\pi}{6}$

$a=2$; $b=\frac{\pi}{6} \vee b=-\frac{\pi}{6}$

105.3. Se $a=2$ e $b=\frac{\pi}{6}$, então $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

Se $a=2$ e $b=-\frac{\pi}{6}$, então $f(x)=2\cos\left(-\frac{\pi}{6}x\right)$.

No entanto, $2\cos\left(-\frac{\pi}{6}x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

Assim, $A\left(5, 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

$$2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}$$

Então, $A\left(5,-\sqrt{3}\right)$.

106. $V(t)=2{,}5-0{,}25\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

106.1. $V(t+4)=2{,}5-0{,}25\cos\left(\frac{\pi(t+4)}{2}\right)$

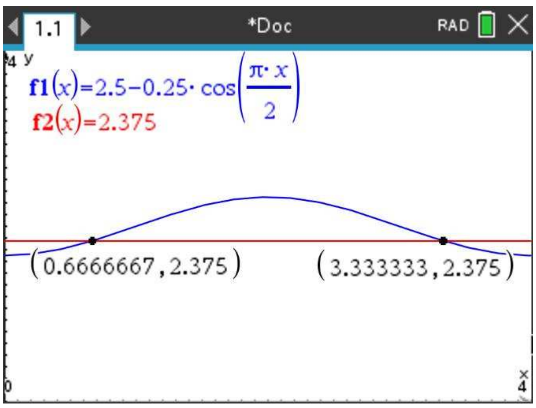
$$=2{,}5-0{,}25\cos\left(\frac{\pi t+4\pi}{2}\right)$$

$$=2{,}5-0{,}25\cos\left(\frac{\pi t}{2}+2\pi\right)$$

$$=2{,}5-0{,}25\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)=V(t)$$

Como $\forall t \in \mathbb{R}_0^+, V(t+4)=V(t)$, conclui-se que 4 é período da função *V*.

106.2. Pretende-se determinar as soluções da equação $V(t)=2{,}375$ que pertencem ao intervalo $[0,4]$.



Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que $t \approx 0{,}67 \vee t \approx 3{,}33$

107. $d(t)=1+A\sin(\omega t+\varphi),\ t \in [0,+\infty[$

A: amplitude; $A>0$

ω: pulsação; $\omega>0$

φ: fase; $\varphi \in [0,2\pi[$

Período da função é 2, logo tem-se:

$$\frac{2\pi}{\varpi}=2 \Leftrightarrow \varpi=\pi$$

Como a fase é $\frac{\pi}{6}$, então $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

Assim, $d(t)=1+A\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

$$-1 \le \sin\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right) \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -A \le A\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right) \le A$$

$$\Leftrightarrow 1-A \le 1+A\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right) \le 1+A$$

$$\Leftrightarrow 1-A \le d(t) \le 1+A$$

$$D'_d=[1-A, 1+A]$$

Como a distância mínima de *P* a *O* é 70 cm:

$$1-A=0{,}7 \Leftrightarrow A=0{,}3$$

Assim, $d(t)=1+0{,}3\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

Distância de *P* a *O* no instante $t=12{,}5$ s:

$$d(12{,}5)=1+0{,}3\sin\left(12{,}5\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=1+0{,}3\sin\left(12\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=1+0{,}3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=1+0{,}3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=1+0{,}3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\frac{3}{10}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=1+\frac{3\sqrt{3}}{20}=\frac{20+3\sqrt{3}}{20}$$

A distância de *P* a *O* no instante $t=12{,}5$ s é $\frac{20+3\sqrt{3}}{20}$ m.

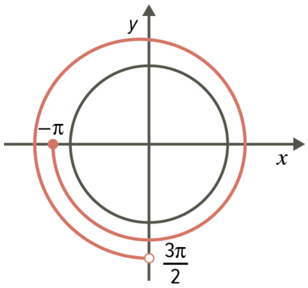
Página 84 – Consolida

1. Como $f(0)=1$, $f(-\pi)=1$ e π é o período positivo mínimo da função *f*, então a opção que pode corresponder à função *f* é a **(B)**.

2. $f(x)=2-3\sin x$ e $D_f=\left[-\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

2.1. A função *f* tem dois zeros pois o seu gráfico interseta o eixo Ox em dois pontos.

2.2. Como $x\in\left[-\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$, sabe-se que $-1\le\sin x\le 1$.



$-1\le\sin x\le 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\le 3\sin x\le 3$

$\Leftrightarrow 3\ge -3\sin x\ge -3$

$\Leftrightarrow 5\ge 2-3\sin x\ge -1$

$\Leftrightarrow -1\le f(x)\le 5$

$D'_f=[-1,5]$

2.3. $A(-\pi, f(-\pi))$ e $B(0, f(0))$

Como $f(-\pi)=2-3\sin(-\pi)=2-3\times 0=2$ e $f(0)=2-3\sin(0)=2-3\times 0=2$, então $A(-\pi,2)$ e $B(0,2)$.

A ordenada de *C* é -1, porque é o mínimo da função e a ordenada de *D* é 5 porque é o máximo da função.

Assim, $C\left(\dfrac{\pi}{2},-1\right)$ e $D\left(\dfrac{3\pi}{2},5\right)$.

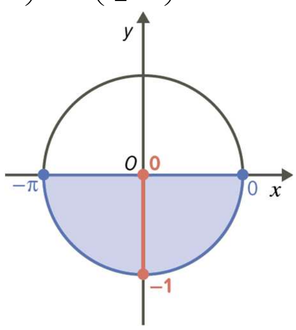
$A(-\pi,2)$, $B(0,2)$, $C\left(\dfrac{\pi}{2},-1\right)$ e $D\left(\dfrac{3\pi}{2},5\right)$

3.1. $f(x)=\sin x$ e $D_f=[-\pi,0]$

$-1\le\sin x\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1\le f(x)\le 0$

$D'_f=[-1,0]$

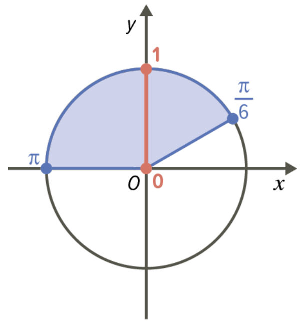


3.2. $f(x)=\sin x$ e $D_f=\left[\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$

$0\le\sin x\le 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\le f(x)\le 1$

$D'_f=[0,1]$

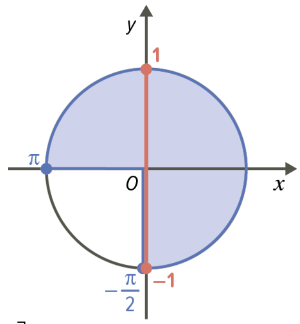


3.3. $f(x)=\sin x$ e $D_f=\left[-\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$

$-1\le\sin x\le 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1\le f(x)\le 1$

$D'_f=[-1,1]$

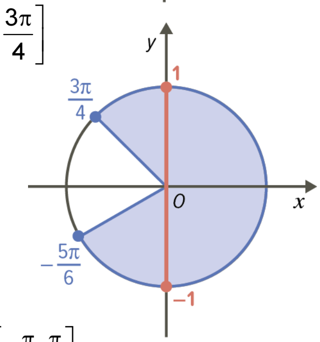


3.4. $f(x)=\sin x$ e $D_f=\left[-\dfrac{5\pi}{5},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

$-1\le\sin x\le 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1\le f(x)\le 1$

$D'_f=[-1,1]$



4. $f(x)=-\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e $D_f=\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$

$x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$, logo $\dfrac{x}{2}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$

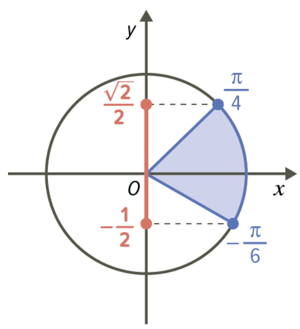
Então:

$-\dfrac{1}{2}\le\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ge-\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\ge-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$

$D'_f=\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right]$



5. $f(x)=0{,}75\sin x$ e $D_f=\mathbb{R}$

5.1. $-1\le\sin x\le 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0{,}75\le 0{,}75\sin x\le 0{,}75$

$\Leftrightarrow -0{,}75\le f(x)\le 0{,}75$

$D'_f=[-0{,}75;\,0{,}75]$

5.2. $f(x)=0 \wedge x \in \left[-3\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow 0{,}75\sin x = 0 \wedge x \in \left[-3\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge x \in \left[-3\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in \left[-3\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow x = -3\pi \vee x = -2\pi \vee x = -\pi$

Zeros de *f* em $\left[-3\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$: -3π, -2π e $-\pi$

5.3. **a)** $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

A área do triângulo [*POQ*] é dada por $\frac{\overline{OQ}\times\overline{PP'}}{2}$, sendo *P'* a projeção ortogonal do ponto *P* sobre o eixo Ox.

$$\frac{\overline{OQ}\times\overline{PP'}}{2} = \frac{\frac{3}{2}\times\sin\alpha}{2} = \frac{3}{4}\sin\alpha = 0{,}75\sin\alpha = f(\alpha)$$

b) $P_{[POQ]} = \overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{OQ} = 1 + \overline{PQ} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} + \overline{PQ}$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então $P(0,1)$ e

$$\overline{PQ} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Logo, $P_{[POQ]} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$.

c) Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$, então a área do triângulo [*POQ*] é dada por $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}75\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}75\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$, a área do triângulo [*POQ*] é $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ u.a.

d) Não existe nenhum valor de α para o qual o triângulo [*POQ*] é equilátero pois $\overline{OP} = 1$ e $\overline{OQ} = \frac{3}{2}$.

Página 85 – Consolida

6. $f(x) = 2{,}5\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $D_f = \mathbb{R}$

6.1. $\frac{2\pi}{3}$ é período da função *f* se:

$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$

$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 2{,}5\sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= 2{,}5\sin\left(3x + 2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$= 2{,}5\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$

Então, $\frac{2\pi}{3}$ é período da função *f*.

6.2. $x \in \mathbb{R}$

$-1 \le \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2{,}5 \le 2{,}5\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \le 2{,}5$

$\Leftrightarrow -2{,}5 \le f(x) \le 2{,}5$

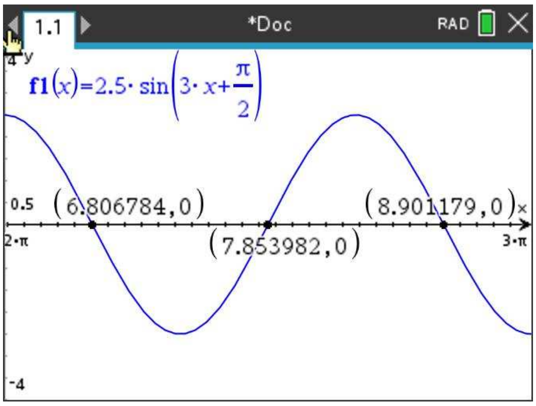
$D'_f = [-2{,}5;\ 2{,}5]$

Máximo: 2,5

Mínimo: $-2{,}5$

6.3. Pretende-se determinar os zeros de *f* pertencentes ao intervalo $[2\pi, 3\pi]$, ou seja, encontrar as soluções da equação $f(x) = 0$ que pertencem ao intervalo $[2\pi, 3\pi]$.

$f(x) = 0 \wedge x \in [2\pi, 3\pi]$



Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, conclui-se que *f* tem três zeros:

$x \approx 6{,}8 \vee x \approx 7{,}9 \vee x \approx 8{,}9$

7. $f(x)=1-\frac{1}{2}\sin(2x)$ e $x \in D_f$

7.1. Seja *T* o período positivo mínimo da função *f*.

$f(x+T)=f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin(2(x+T))=1-\frac{1}{2}\sin(2x)$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin(2x+2T)=1-\frac{1}{2}\sin(2x)$

Daqui resulta que $2T=2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $T=k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

O período positivo mínimo ocorre quando $k=1$ e é $T=\pi$.

7.2. $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=$

$=1-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{4-\sqrt{3}}{4}$

$f\left(\frac{35\pi}{8}\right)=1-\frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{35\pi}{8}\right)=1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{35\pi}{4}\right)=$

$=1-\frac{1}{2}\times\sin\left(\frac{3\pi}{4}+8\pi\right)=1-\frac{1}{2}\times\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=$

$=1-\frac{1}{2}\times\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$

$=1-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=1-\frac{\sqrt{2}}{4}$

$=\frac{4-\sqrt{2}}{4}$

Então, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4-\sqrt{3}}{4}$ e $f\left(\frac{35\pi}{8}\right)=\frac{4-\sqrt{2}}{4}$.

7.3. $f(a)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin(2a)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin(2a)=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(2a)=\frac{2}{3}$

$f\left(a-\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\right)=1-\frac{1}{2}\sin(2a-\pi)=$

$=1-\frac{1}{2}\sin(-(\pi-2a))=1-\left(-\frac{1}{2}\sin(\pi-2a)\right)=$

$=1+\frac{1}{2}\sin(\pi-2a)=1+\frac{1}{2}\sin(2a)=$

$=1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=$

$=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

8. $g(x)=1-2\cos x$ e $D_g=\mathbb{R}$

8.1. $-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \le 2\cos x \le 2$

$\Leftrightarrow 2 \ge -2\cos x \ge -2$

$\Leftrightarrow 3 \ge 1-2\cos x \ge -1$

$\Leftrightarrow -1 \le g(x) \le 3$

Máximo de g : 3

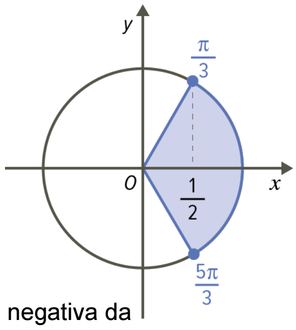
Mínimo de g : -1

8.2. $g(x)=0 \ \wedge\ x \in [0,\ 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-2\cos x=0 \ \wedge\ x \in [0,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \ \wedge\ x \in [0,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3} \vee x=\frac{5\pi}{3}$

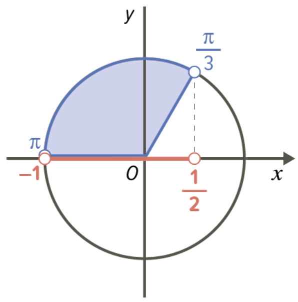


8.3. $C(c,0)$ sendo *c* a maior solução negativa da equação $\cos x=\frac{1}{2}$, ou seja, $c=-\frac{\pi}{3}$.

Então, $C\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$.

8.4. a) $D_g'=[-1,3]$, então não existe nenhum valor real x, tal que $g(x)=-\frac{3}{2}$ $\left(-\frac{3}{2}<-1\right)$. O valor lógico da afirmação $\exists x \in \mathbb{R}: g(x)=-\frac{3}{2}$ é falso.

b) Se $x \in \left]\frac{\pi}{3},\pi\right[$, então $-1<\cos x<\frac{1}{2}$.



$-1<\cos x<\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -2<2\cos x<1$

$\Leftrightarrow 2>-2\cos x>-1$

$\Leftrightarrow 3>1-2\cos x>0$

$\Leftrightarrow 0<g(x)<3$

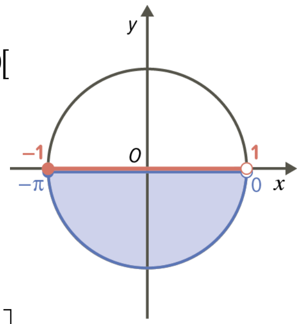
O valor lógico da afirmação $\forall x \in \left]\frac{\pi}{3},\pi\right[,\ g(x)>0$ é verdadeiro.

9.1. $f(x) = \cos x \ \wedge \ x \in [-\pi, 0[$

$-1 \leq \cos x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 \leq f(x) < 1$

$D'_f = [-1, 1[$

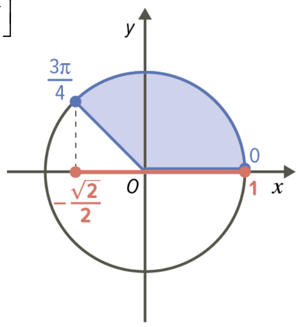


9.2. $f(x) = \cos x \ \wedge \ x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(x) \leq 1$

$D'_f = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

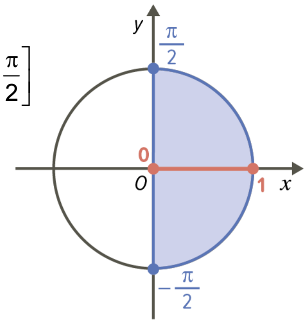


9.3. $f(x) = \cos x \ \wedge \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$0 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$

$D'_f = [0, 1]$

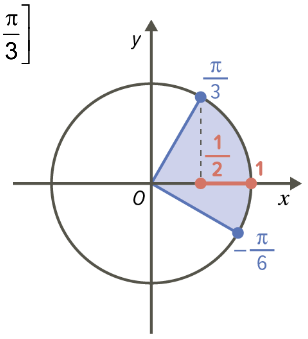


9.4. $f(x) = \cos x \ \wedge \ x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

$D'_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$



10. $P(\cos x, \sin x)$ e $Q(-\cos x, \sin x)$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$A_{[RPOQ]} = A_{[PQR]} - A_{[PQD]} = \frac{\overline{PQ} \times \overline{RM}}{2} - \frac{\overline{PQ} \times \overline{MO}}{2}$,

sendo M o ponto médio de [PQ].

$M(0, \sin x)$

Então, a área do quadrilátero [$RPOQ$] é dada por:

$\frac{2\cos x(1 + \sin x)}{2} - \frac{2\cos x \times \sin x}{2} =$

$= \cos x + \cos x \sin x - \cos x \sin x = \cos x$

$f(x) = \cos x$

10.2. $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{3}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{5}{9}$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3} \ \vee \ \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Como $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\cos x \geq 0$.

Logo, $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Assim, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

11. $f(x) = \frac{1}{2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

11.1. Seja T o período positivo mínimo da função f.

Então, tem-se que $f(x+T) = f(x)$.

$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(x+T)\right) = \frac{1}{2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}T\right) = \frac{1}{2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

Daqui resulta que $\frac{\pi}{4}T = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$T = 8k, \ k \in \mathbb{Z}$

O período positivo mínimo ocorre quando $k = 1$ e é $T = 8$.

11.2. $f(2) = \frac{1}{2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} \times 2\right) = \frac{1}{2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2} - 2 \times 0 = \frac{1}{2}$

$f(12) = \frac{1}{2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} \times 12\right) = \frac{1}{2} - 2\cos(3\pi) =$

$= \frac{1}{2} - 2 \times (-1) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

$f(2) = \frac{1}{2}$ e $f(12) = \frac{5}{2}$

11.3. $f(-a)=\frac{1}{2}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\times(-a)\right)=\frac{1}{2}-2\cos\left(-\frac{\pi}{4}a\right)=$

$=\frac{1}{2}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}a\right)=f(a)=1$

$f(a+16)=\frac{1}{2}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\times(a+16)\right)=$

$=\frac{1}{2}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}a+4\pi\right)=\frac{1}{2}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}a\right)=f(a)=1$

$f(-a)=1$ e $f(a+16)=1$

Página 86 – Consolida

12. $f(x)=2\cos(2x)$ e $D_f=\mathbb{R}$

12.1. $A(0,f(0))$, $B\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ e $C(\pi,f(\pi))$

$f(0)=2\cos(2\times 0)=2\cos 0=2\times 1=2$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\pi=2\times(-1)=-2$

$f(\pi)=2\cos(2\times\pi)=2\cos(2\pi)=2\times 1=2$

$A(0,2)$, $B\left(\frac{\pi}{2},-2\right)$ e $C(\pi,2)$

12.2. $D_f=\mathbb{R}$, logo

$-1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow -2\le 2\cos x\le 2\Leftrightarrow -2\le f(x)\le 2$

$D'_f=[-2,2]$

12.3. O período positivo mínimo da função *f* é $\frac{2\pi}{2}$, ou seja, π.

12.4. Os extremos da função são 2 (máximo) e -2 (mínimo).

$f(x)=2\ \vee\ f(x)=-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos(2x)=2\ \vee\ 2\cos(2x)=-2$

$\Leftrightarrow \cos(2x)=1\ \vee\ \cos(2x)=-1$

$\Leftrightarrow 2x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

No intervalo $\left[5\pi,\frac{13\pi}{2}\right]$ as soluções são

$5\pi,\frac{11}{2}\pi,6\pi$ e $\frac{13\pi}{2}$.

13. $f(x)=4+3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e $D_f=\mathbb{R}$

13.1. Como $x\in\mathbb{R}$, tem-se:

$-1\le\cos\left(\frac{x}{2}\right)\le 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\le 3\cos\left(\frac{x}{2}\right)\le 3$

$\Leftrightarrow 1\le 4+3\cos\left(\frac{x}{2}\right)\le 7$

$\Leftrightarrow 1\le f(x)\le 7$

$D'_f=[1,7]$

13.2. $P(0,f(0))$ e $Q\left(\frac{2\pi}{3},f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$f(0)=4+3\cos(0)=4+3\times 1=7$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=4+3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=4+3\times\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

$P(0,7)$ e $Q\left(\frac{2\pi}{3},\frac{11}{2}\right)$

13.3. $f(x+2\pi)=4+3\cos\left(\frac{x+2\pi}{2}\right)=4+3\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=$

$=4+3\left(-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)=4-3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Como $f(x+2\pi)\neq f(x)$, então 2π não é período da função *f*.

$f(x+4\pi)=4+3\cos\left(\frac{x+4\pi}{2}\right)=4+3\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=$

$=4+3\cos\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$

Como $f(x+4\pi)=f(x)$, então 4π é período da função *f*.

13.4. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=4+3\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4+3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=$

$=4+3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{27\pi}{2}\right)=4+3\cos\left(\frac{27\pi}{4}\right)=4+3\cos\left(\frac{3\pi}{4}+6\pi\right)=$

$=4+3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=4+3\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=4+3\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)=$

$=4+3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$f(34\pi) = 4 + 3\cos(17\pi) = 4 + 3\cos(\pi + 16\pi) =$

$= 4 + 3\cos(\pi) = 4 + 3 \times (-1) = 1$

Então:

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\frac{27\pi}{2}\right) = 4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ e $f(34\pi) = 1$

13.5. Valor mínimo da função *f*: 1

$f(x) = 1 \land x \in [0, 4\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 + 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \land x \in [0, 4\pi]$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -1 \land x \in [0, 4\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \land x \in [0, 4\pi]$

$\Leftrightarrow x = 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \land x \in [0, 4\pi]$

$\Leftrightarrow x = 2\pi$

No intervalo $[0, 4\pi]$ a função *f* atinge o valor mínimo uma vez.

14. $D_g' = [-2, 2]$, então $g(x) = 2\sin x$.

$D_j' \neq [-1, 1]$ e $D_j' \neq [-2, 2]$. Desta forma, conclui-se que $g(x) = \frac{1}{2}\sin x$.

π é o período da função *h*, então $h(x) = \sin(2x)$

$i(\pi) > 0$, logo $i(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Conclusão:

$g(x) = 2\sin x,\ h(x) = \sin(2x),\ i(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ e

$j(x) = \frac{1}{2}\sin x$

15.1. Sendo $\alpha = \frac{\pi}{6}$, então $P\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$, ou seja,

$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$\overline{PR} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ e $\overline{OQ} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$A_{[PORQ]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ u.a.

15.2. $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ e $R(\cos\alpha, -\sin\alpha)$, sendo

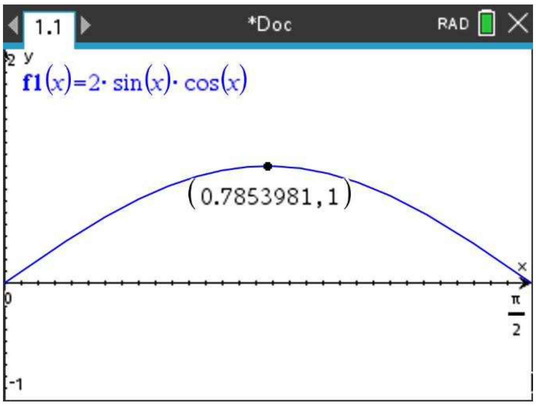
$\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\overline{PQ} = 2\sin\alpha$ e $\overline{OQ} = 2\cos\alpha$, logo:

$f(\alpha) = \frac{2\cos\alpha \times 2\sin\alpha}{2} = \frac{4\cos\alpha\sin\alpha}{2} = 2\sin\alpha\cos\alpha$

15.3. Pretende-se determinar o valor de α, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para o qual a área do losango é máxima.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que a área do losango é máxima quando $\alpha \approx 0{,}79$.



Página 87 – Consolida

16.1. $f(x) = 1 - \cos x$ e $x \in \mathbb{R}$

$a \in [0, \pi]$ e $f(\pi + a) = \frac{1}{3}$

$f(\pi + a) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 - \cos(\pi + a) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos(\pi + a) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos(a) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos(a) = -\frac{2}{3}$

Como $\cos a = -\frac{2}{3}$ e $a \in [0, \pi]$, conclui-se que

$a \in 2.^{\circ}$Q

$\sin a = ?$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \sin a^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 a = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \sin a = \frac{\sqrt{5}}{3} \lor \sin a = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Como $x \in 2.^{\circ}$Q, $\sin a > 0$.

Então, $\sin a = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

16.2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

17. $L(x)=0{,}6\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

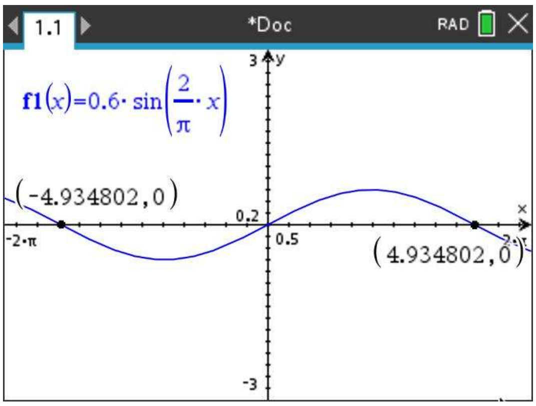
17.1. $-1\le \sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)\le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0{,}6\le 0{,}6\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)\le 0{,}6$

$\Leftrightarrow -0{,}6\le L(x)\le 0{,}6$

$D_L'=[-0{,}6;\ 0{,}6]$

17.2. As abcissas de A e de B são zeros da função L. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que $x_A\approx -4{,}935$ e $x_B\approx 4{,}935$.



Assim, $\overline{AB}=2\times 4{,}935=9{,}87\approx 9{,}9$.

A largura da parede em que é feita a projeção é, aproximadamente, 9,9 metros.

18. $f(x)=a\cos(cx)$

Período positivo mínimo: $\frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{|c|}=\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow |c|=3\Leftrightarrow c=3\vee c=-3$

Considerando $c=3$, então $f(x)=a\cos(3x)$.

$f(\pi)=-1\Leftrightarrow a\cos(3\pi)=-1\Leftrightarrow a\times(-1)=-1\Leftrightarrow a=1$

Neste caso, $f(x)=\cos(3x)$.

$g(x)=a\cos(cx)$

De forma análoga se conclui que $c=3\vee c=-3$.

Se considerarmos $c=3$, então $g(x)=a\cos(3x)$.

$g(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a\cos(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a\times 1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

Neste caso, $g(x)=\frac{1}{2}\cos(3x)$.

$f\left(\frac{11\pi}{3}\right)+g\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\cos\left(3\times\frac{11\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(3\times\frac{11\pi}{6}\right)=$

$=\cos(11\pi)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{11\pi}{2}\right)=\cos(\pi+10\pi)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4\pi\right)$

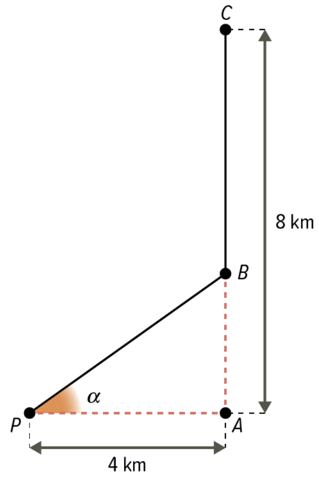
$=\cos(\pi)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1+\frac{1}{2}\times 0=-1$

19. $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

Preço da ligação de P a B: 1,50 €/km

Preço da ligação de B a C: 1,20 €/km

Taxa de saída: 2 €



19.1. $\cos\alpha=\frac{4}{\overline{PB}}\Leftrightarrow \overline{PB}=\frac{4}{\cos\alpha}$

$\tan\alpha=\frac{\overline{AB}}{4}\Leftrightarrow \overline{AB}=4\tan\alpha$

$\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}=8-4\tan\alpha$

O custo, em euros, do serviço efetuado pelo táxi é dado por:

$2+1{,}5\times\overline{PB}+1{,}2\times\overline{BC}$

$f(\alpha)=2+1{,}5\times\frac{4}{\cos\alpha}+1{,}2\times(8-4\tan\alpha)$

$=2+\frac{6}{\cos\alpha}+9{,}6-4{,}8\tan\alpha$

$=11{,}6+\frac{6}{\cos\alpha}-4{,}8\tan\alpha$

19.2. Se $\alpha=\frac{\pi}{5}$, então o custo final é dado por $f\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

$f\left(\frac{\pi}{5}\right)=11{,}6+\frac{6}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}-4{,}8\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\approx 15{,}53$

O custo final se $\alpha=\frac{\pi}{5}$ é, aproximadamente, 15,53 €.

Página 88 – Consolida

20. $f(x)=\tan x$ e $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

20.1. $D_f'=\mathbb{R}$

20.2. $f(x)=1\Leftrightarrow \tan x=1$

$\frac{\pi}{4}$ é solução da equação e, como f é uma função periódica de período positivo mínimo π, também são soluções da equação $\frac{\pi}{4}-\pi$ e $\frac{\pi}{4}+\pi$, ou seja, $-\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$. Assim, $x_D=-\frac{3\pi}{4}$, $x_A=\frac{\pi}{4}$ e $x_C=\frac{5\pi}{4}$.

20.3. $f(x)=-1\Leftrightarrow \tan x=-1$

$-\frac{\pi}{4}$ é solução da equação e, como f é uma função periódica de período positivo mínimo π, também são soluções da equação $-\frac{\pi}{4}+\pi$, ou seja, $\frac{3\pi}{4}$.

Assim, $x_B=-\frac{\pi}{4}$ e $x_E=\frac{3\pi}{4}$.

20.4. $f(x)=0\Leftrightarrow \tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

O menor zero positivo de *f* é π.

20.5. $f(x)=0\Leftrightarrow \tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

O maior zero negativo de *f* é $-\pi$.

20.6. O período positivo mínimo da função *f* é π.

21. A afirmação $\forall\alpha,\beta\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Se $\alpha<\beta$, então $\tan\alpha<\tan\beta$ é falsa. Por exemplo, se $\alpha=0$ e $\beta=\frac{3\pi}{4}$ então: $\tan\alpha=\tan 0=0$

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

Assim, $\tan\alpha>\tan\beta$.

22. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ e $f(x)=\tan(2x)$

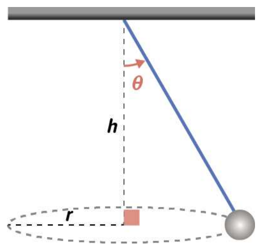
$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\tan(2x+\pi)=\tan(2x)=f(x)$$

Como $\forall x\in D_f, f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$, conclui-se que $\frac{\pi}{2}$ é período da função *f*.

$$f\left(\frac{k\pi}{2}\right)=\tan\left(2\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)=\tan(k\pi)=0,\ k\in\mathbb{Z}$$

Então, os números do tipo $\frac{k\pi}{2}$, com $k\in\mathbb{Z}$ são zeros da função *f*.

23. $h=50$ e $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$



23.1. $\tan\theta=\frac{r}{h}\Leftrightarrow\tan\theta=\frac{r}{50}\Leftrightarrow r=50\tan\theta$

O perímetro do círculo limitado pela trajetória da esfera é dada por $2\pi r$.

Então, $f(\theta)=2\pi\times 50\tan\theta=100\pi\tan\theta$.

23.2. $f(\theta)=500\Leftrightarrow 100\pi\tan\theta=500\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\tan\theta=\frac{500}{100\pi}\Leftrightarrow\tan\theta=\frac{5}{\pi}$$

Como $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$, tem-se:

$$1+\left(\frac{5}{\pi}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow 1+\frac{25}{\pi^2}=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi^2+25}{\pi^2}=\frac{1}{\cos^2\theta}\underset{(1)}{\Leftrightarrow}\cos\theta=\sqrt{\frac{\pi^2}{\pi^2+25}}\Leftrightarrow$$

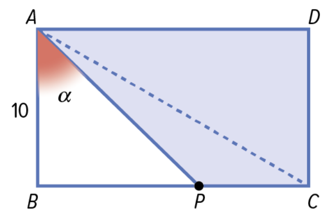
$$\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+25}}$$

(1) Como $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, então $\cos\theta>0$.

A opção correta é a **(B)**.

24. $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$ e $B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}$

24.1. a) O triângulo [*ABC*] é retângulo em *B* e $B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}$.



Então:

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \sqrt{3}=\frac{\overline{BC}}{10} \Leftrightarrow \overline{BC}=10\sqrt{3}$$

b) $A_{[APCD]}=\dfrac{\overline{AD}+\overline{PC}}{2}\times\overline{CD}$

$$\tan\alpha=\frac{\overline{BP}}{10} \Leftrightarrow \overline{BP}=10\tan\alpha$$

$$\overline{PC}=\overline{BC}-\overline{BD}=10\sqrt{3}-10\tan\alpha$$

Assim, a área do trapézio [*APCD*] é dada por:

$$\frac{10\sqrt{3}+10\sqrt{3}-10\tan\alpha}{2}\times 10=$$

$$=\frac{20\sqrt{3}-10\tan\alpha}{2}\times 10$$

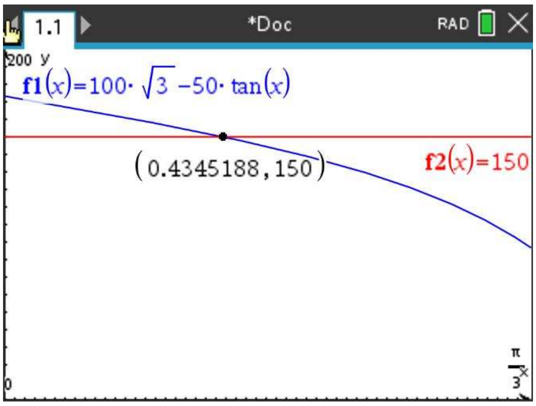
$$=\left(10\sqrt{3}-5\tan\alpha\right)\times 10$$

$$=100\sqrt{3}-50\tan\alpha$$

24.2. Pretende-se determinar $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$ tal que a área do trapézio é igual a 150, ou seja:

$$100\sqrt{3}-50\tan\alpha=150$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que $\alpha\approx 0{,}43$.



Página 89 – Consolida

25. $A\hat{O}P=x$ rad e $x\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

A reta *r* é tangente à circunferência em *A*, logo é definida pela equação $x=1$.

25.1. $A(1,0)$ e $D(0,1)$

Sendo $\alpha=\frac{\pi}{3}$, então $B\left(1,\tan\frac{\pi}{3}\right)$, ou seja, $B\left(1,\sqrt{3}\right)$.

Como [*ABCD*] é um trapézio retângulo, então $C\left(0,\sqrt{3}\right)$.

$$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\times\overline{BC}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{2}\times 1$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$$

Se $\alpha=\frac{\pi}{3}$, a área do trapézio é $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ u.a.

25.2. Sendo $A\hat{O}P=x\,\text{rad}$, então $B(1,\tan x)$ e $C(0,\tan x)$.

$$f(x)=\frac{\tan x+\tan x-1}{2}\times 1$$

$$==\frac{2\tan x-1}{2}$$

$$=\tan x-\frac{1}{2}$$

26. $T(t)=21+4\cos\left(\dfrac{\pi(t+6)}{12}\right),\ t\in[0,24]$

26.1. $-1\le\cos\left(\dfrac{\pi(t+6)}{12}\right)\le 1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -4\le 4\cos\left(\frac{\pi(t+6)}{12}\right)\le 4$$

$$\Leftrightarrow 17\le 21+4\cos\left(\frac{\pi(t+6)}{12}\right)\le 25$$

$$\Leftrightarrow 17\le T(t)\le 25$$

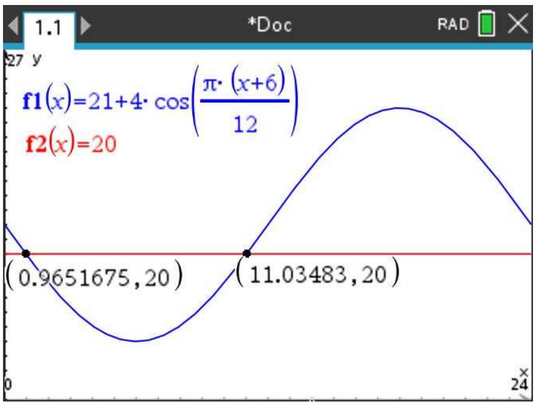
Temperatura máxima nesse dia: 25 ºC

Temperatura mínima nesse dia: 17 ºC

Amplitude térmica nesse dia: $25\,^{\circ}\text{C}-17\,^{\circ}\text{C}=8\,^{\circ}\text{C}$

26.2. Pretende-se determinar durante quanto tempo, nesse dia, a temperatura foi inferior a 20ºC. Temos de resolver graficamente a condição:

$$T(t)<20\wedge t\in[0,24]$$



Coordenadas dos pontos de interseção:

$I_1(0{,}965;20)$ e $I_2(11{,}035;20)$

$T(t) < 20 \wedge t \in [0{,}24] \Leftrightarrow t \in]0{,}965;\ 11{,}035[$

$11{,}035 - 0{,}965 = 10{,}07$

Conclui-se que, nesse dia, a temperatura foi inferior a 20 ºC durante, aproximadamente, dez horas.

27. $f(t) = 0{,}75\cos\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)$

27.1. $f(1) = 0{,}75\cos\left(\frac{2\pi\times 1}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = 0{,}75\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) =$

$= 0{,}75\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) = 0{,}75\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}75 \times 0 = 0$

$f(1) = 0$

1 segundo após o início do movimento, a esfera encontra-se na posição de repouso.

27.2. $f(t+3) = 0{,}75\cos\left(\frac{2\pi(t+3)}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)$

$= 0{,}75\cos\left(\frac{2\pi t + 6\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)$

$= 0{,}75\cos\left(\frac{2\pi t}{3} + 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$

$= 0{,}75\cos\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = f(t)$

Como $t \in D_f$, $f(t+3) = f(t)$, então

3 é período de *f*.

27.3. $f(t) = 0 \ \wedge \ t \in [0,\ 10] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}75\cos\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = 0 \ \wedge \ t \in [0,\ 10]$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = 0 \ \wedge \ t \in [0,\ 10]$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi t}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ t \in [0{,}10]$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi t}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ t \in [0{,}10]$

$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} + \frac{3k}{2},\ k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ t \in [0,\ 10]$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{5}{2} \vee t = 4 \vee t = \frac{11}{2} \vee$

$\vee t = 7 \vee t = \frac{17}{2} \vee t = 10$

No intervalo $[0{,}10]$ a função admite sete zeros.

28. $N(t) = 0{,}4\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right),\ t \in [0,\ 10]$ $\quad t = 0 \rightarrow 12\text{h}$

28.1. a) 12 horas → $t = 0$

$N(0) = 0{,}4\cos(0) = 0{,}4 \times 1 = 0{,}4$

Às 12 horas, o desvio do nível da água em relação ao nível médio era de 0,4 m.

b) 14 horas → $t = 2$

$N(2) = 0{,}4\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 0{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}4 \times 0 = 0$

Às 14 horas, o desvio do nível da água em relação ao nível médio era de 0 m.

c) 15 horas → $t = 3$

$N(3) = 0{,}4\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0{,}4\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= 0{,}4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0{,}4 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -0{,}2\sqrt{2} \approx -0{,}28$

Às 15 horas, o desvio do nível da água em relação ao nível médio era, aproximadamente, –0,28 m.

28.2. Seja *T* o período positivo mínimo da função *N*.

$N(t+T) = N(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}4\cos\left(\frac{\pi(t+T)}{4}\right) = 0{,}4\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 0{,}4\cos\left(\frac{\pi t + \pi T}{4}\right) = 0{,}4\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 0{,}4\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi T}{4}\right) = 0{,}4\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$

Daqui resulta que $\frac{\pi T}{4} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

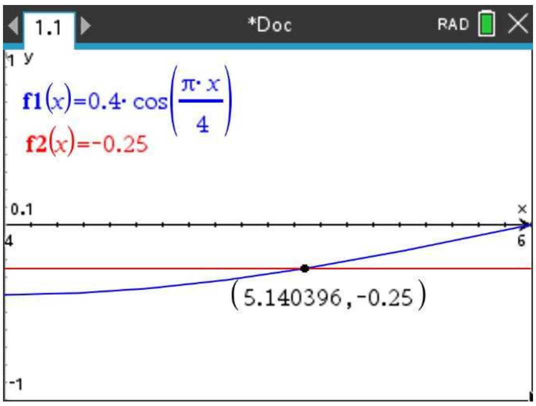
$T = 8k,\ k \in \mathbb{Z}$.

O período positivo mínimo ocorre quando $k = 1$ e é $T = 8$.

28.3. Pretende-se determinar $t \in [4{,}6]$, tal que

$N(t) = -0{,}25$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, conclui-se que $t \approx 5{,}1404$.



$5{,}1404 = 5 + 0{,}1404$

$1\text{ h} = 60 \text{ min}$

$0{,}1404 \times 60 = 8{,}424 \approx 8$

A situação ocorreu passadas 5 horas e 8 minutos após o início da observação, ou seja, às 17:08.

Página 90 – Avalia 2 – Parte 1

1. $f(x) = 1 + \sin x \quad x \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

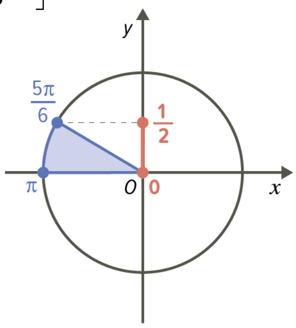
Se $x \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$, então:

$0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \leq 1 + \sin x \leq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$

$D'_f = \left[1, \frac{3}{2}\right]$



A opção correta é a **(B)**.

2. $A\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ e $D\left(\frac{3\pi}{2}, g\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

$g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 - 0 = 2$

Então, $D\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ e $\overline{AD} = 2$.

O mínimo da função *f*, definida por $f(x) = \cos x$, é -1.

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

A abcissa de *B* corresponde à segunda menor solução positiva da equação anterior, ou seja, a 3π. Então, $B(3\pi, -1)$.

Sabe-se que no ponto *C* a função *g* admite um máximo.

Sabe-se que:

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\cos x \geq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \geq 2 - \cos x \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq g(x) \leq 3$

Máximo de *g*: 3

Então, $y_C = 3$ e, como [*ABCD*] é um trapézio, $x_C = 3\pi$.

$C(3\pi, 3)$ e $\overline{BC} = 3 - (-1) = 4$

$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times h =$

$= \frac{4+2}{2} \times \left(3\pi - \frac{3\pi}{2}\right)$

$= \frac{6}{2} \times \frac{3\pi}{2}$

$= \frac{9\pi}{2}$

A opção correta é a **(A)**.

3. Seja ***T*** o período positivo mínimo.

$f(x) = 1 - 2\sin(\pi x) \to T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \to T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

$h(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \to T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

$i(x) = 2 + 2\cos(2x) \to T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

A opção correta é a **(D)**.

4. Das representações gráficas apresentadas, as que são funções periódicas positivas são (A) e (B). No caso da representação gráfica (A), o período positivo mínimo é 4. No caso da representação gráfica (B), o período positivo mínimo é 2.
Assim, a opção correta é a **(A)**.

5. $f(x) = 0 \wedge x \in \left]\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan x = 0 \wedge x \in \left]\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in \left]\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow x = 4\pi \vee x = 5\pi$

A função *f* tem dois zeros que pertencem ao intervalo $\left]\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right[$.

A opção correta é a **(C)**.

Página 91 – Avalia 2 – Parte 2

1. $f(x) = -\cos x$ e $g(x) = \frac{1}{2} + 2\sin x$

$D_f = D_g = [0, \pi]$

Como *C* é o ponto de interseção do gráfico de *g* com o eixo das ordenadas, então $C(0, g(0))$.

$g(0) = \frac{1}{2} + 2\sin 0 = \frac{1}{2} + 2 \times 0 = \frac{1}{2}$. Então, $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

$B(x, 0)$, tal que $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow -\cos x = 0 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Então, $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

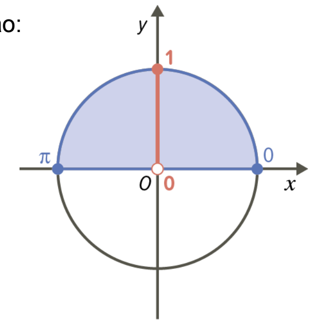
Como $x \in [0, \pi]$, então:

$0 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2\sin x \leq 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + 2\sin x \leq \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{5}{2}$



Máximo de *g*: $\frac{5}{2}$

Então, a ordenada de *A* é $\frac{5}{2}$.

$A\left(x, \frac{5}{2}\right)$, tal que $g(x) = \frac{5}{2}$.

$g(x) = \frac{5}{2} \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 2\sin x = \frac{5}{2} \wedge x \in [0, \pi]$

$\Leftrightarrow \sin x = 1 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$. Então, $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CC'}}{2}$, sendo *C'* a projeção ortogonal de *C* sobre *AB*.

$\overline{AB} = \frac{5}{2}$ e $\overline{CC'} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

$A_{[ABC]} = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\frac{5\pi}{4}}{2} = \frac{5\pi}{8}$

2. $P(\cos x, \sin x)$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

$B(1, \tan x)$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

$A(0, \tan x)$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

$C(0, 1)$

$A_{[APC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{PP'}}{2}$, sendo *P'* a projeção ortogonal de *P* sobre o eixo Oy.

$\overline{AC} = 1 - \tan x$ e $\overline{PP'} = \cos x$

$f(x) = \frac{(1 - \tan x)\cos x}{2} = \frac{\cos x - \tan x \cos x}{2} =$

$= \frac{\cos x - \frac{\sin x}{\cos x}\cos x}{2} = \frac{\cos x - \sin x}{2}$

3. $C(x) = 293{,}85 + 126{,}28\sin(0{,}44x + 1{,}16)$

x: n.º do mês

c: consumo do gás natural (KWh)

3.1. Mês de setembro → $x = 9$

$C(9) = 293{,}85 + 126{,}28\sin(0{,}44 \times 9 + 1{,}16) =$

$= 293{,}85 + 126{,}28\sin(5{,}12) \approx 178$

O consumo de gás natural no mês de setembro foi, aproximadamente, 178 KWh.

3.2. Recorrendo à calculadora gráfica, através da construção de uma tabela de valores, verifica-se que o consumo de gás natural foi mínimo no mês de agosto. O valor correspondente a esse consumo foi, aproximadamente, 168 KWh.

3.3. Preço por KWh: 0,1285 € (sem IVA)

Mês de outubro → $x = 10$

$C(10) \approx 210$ (valor obtido na calculadora)

Valor sem IVA: $210 \times 0{,}1285 = 26{,}99$

Taxa de IVA: 23%

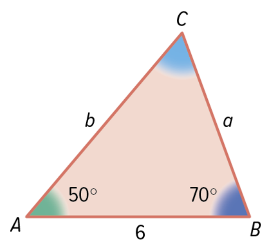
Valor correspondente ao IVA: $26{,}99 \times 0{,}23 \approx 6{,}21$

Valor total a pagar: $26{,}99 + 6{,}21 = 33{,}20$

O custo, em euros, correspondente ao mês de outubro foi 33,20 €.

Página 94 – Para Saber +

1.1. $A\hat{C}B = 180° - B\hat{A}C - A\hat{B}C = 180° - 50° - 70° = 60°$



1.2. Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{\sin 50^\circ}{a}=\frac{\sin 70^\circ}{b}=\frac{\sin 60^\circ}{6}$$

$$\frac{\sin 50^\circ}{a}=\frac{\sin 60^\circ}{6}\wedge\frac{\sin 70^\circ}{b}=\frac{\sin 60^\circ}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{6\sin 50^\circ}{\sin 60^\circ}\wedge b=\frac{6\sin 70^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$\Leftrightarrow a\approx 5{,}3\wedge b\approx 6{,}5$$

Página 95 – Para Saber +

2. $[ABCDEF]$ é um hexágono regular inscrito na circunferência de centro *O*.

$D\hat{B}A=\alpha$ e $F\hat{E}D=\beta$

O ângulo *DBA* está inscrito numa semicircunferência, logo é reto. Então, $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

O hexágono, sendo regular, divide a circunferência em seis arcos iguais, de amplitude $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ cada.

$$\beta=F\hat{E}D=\frac{\overset{\frown}{FAD}}{2}=\frac{4\times\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{2\pi}{3}=1-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=1-\sin\frac{\pi}{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

3. $A\hat{C}B=180^\circ-(110^\circ+40^\circ)=30^\circ$

Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin 30^\circ}{40}=\frac{\sin 40^\circ}{\overline{AC}}\Leftrightarrow\overline{AC}=\frac{40\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ}$$

Então, $\overline{AC}\approx 51{,}4$.

$$\frac{\sin 30^\circ}{40}=\frac{\sin 110^\circ}{\overline{BC}}\Leftrightarrow\overline{BC}=\frac{40\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

Então, $\overline{BC}\approx 75{,}2$.

Assim, $\overline{AC}\approx 51{,}4$ cm e $\overline{BC}\approx 75{,}2$ cm.

Página 97 – Para Saber +

4.1. Pela lei dos cossenos:

$$x^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\hat{B}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=3^2+5^2-2\times 3\times 5\times\cos 70^\circ$$

Como $x>0$, então:

$$x=\sqrt{34-30\cos 70^\circ}\approx 4{,}9$$

4.2. Pela lei dos cossenos:

$$x^2=\overline{DE}^2+\overline{DF}^2-2\times\overline{DE}\times\overline{DF}\times\cos\hat{D}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=4^2+2{,}5^2-2\times 4\times 2{,}5\times\cos 130^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2=22{,}25-20\times\cos 130^\circ$$

Como $x>0$, então $x=\sqrt{22{,}25-20\cos 130^\circ}\approx 5{,}9$.

5. Pela lei dos cossenos aplicada ao triângulo [*ACB*]:

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos\hat{C}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{AB}^2=9+64-48\cos 78^\circ$$

$$\Leftrightarrow\overline{AB}^2=73-48\cos 78^\circ$$

Assim, $\overline{AB}=\sqrt{73-48\cos 78^\circ}\approx 7{,}94$.

Então, $\overline{AB}\approx 7{,}94$ m.

6. Pela lei dos cossenos:

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos B\hat{A}C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^2=4^2+6^2-2\times 4\times 6\times\cos B\hat{A}C$$

$$\Leftrightarrow 48\cos B\hat{A}C=27$$

$$\Leftrightarrow\cos B\hat{A}C=\frac{9}{16}$$

Sabe-se que:

$$\sin^2 B\hat{A}C+\cos^2 B\hat{A}C=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 B\hat{A}C=1-\frac{81}{256}$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 B\hat{A}C=\frac{175}{256}$$

Como $0^\circ<B\hat{A}C<180^\circ$, $\sin B\hat{A}C=\sqrt{\frac{175}{256}}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

$$\tan B\hat{A}C=\frac{\frac{5\sqrt{7}}{16}}{\frac{9}{16}}=\frac{5\sqrt{7}}{9}$$

$\cos B\hat{A}C=\frac{9}{16}$, $\sin B\hat{A}C=\frac{5\sqrt{7}}{16}$ e $\tan B\hat{A}C=\frac{5\sqrt{7}}{9}$

7.1. Pela lei dos cossenos:

$$a^2=3^2+5^2-2\times 3\times 5\times\cos 120^\circ\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2=9+25-30\cos(180^\circ-60^\circ)$$

$$\Leftrightarrow a^2=34+30\cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow a^2=34+30\times\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2=49$$

Como $a > 0$, então $a = 7$, como se pretendia mostrar.

7.2. Pela lei dos senos:

$\frac{\sin\hat{C}}{5} = \frac{\sin 120º}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\hat{C} = \frac{5 \times \sin 60º}{7}$

$\Leftrightarrow \sin\hat{C} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$

$\sin^2\hat{C} + \cos^2\hat{C} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2 + \cos^2\hat{C} = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\hat{C} = \frac{121}{196}$

$\Leftrightarrow \cos\hat{C} = \frac{11}{14}$, pois *ACB* é um ângulo agudo.

$\tan\hat{C} = \frac{\sin\hat{C}}{\cos\hat{C}} \Leftrightarrow \tan\hat{C} = \frac{5\sqrt{13}}{11}$

$\sin\hat{C} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $\cos\hat{C} = \frac{11}{14}$ e $\tan\hat{C} = \frac{5\sqrt{13}}{11}$