

Propostas de resolução da unidade 2 do manual

Recorda e Aplica

Página 100 – Aplica

1. $r: y = \frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$

$s: (x, y) = \left(0, -\frac{1}{2}\right) + k(2, -3), k \in \mathbb{R}$

1.1. $m_r = \frac{2}{5}$

Um vetor com direção da reta r é, por exemplo, $\vec{u}(5, 2)$.

1.2. Um vetor diretor da reta s é $\vec{v}(2, -3)$.

Então, $m_s = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$.

1.3. $r: y = \frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$

Se $x = 0$, então $y = \frac{16}{5}$.

A reta r passa no ponto de coordenadas $\left(0, \frac{16}{5}\right)$.

Uma equação vetorial da reta r é:

$(x, y) = \left(0, \frac{16}{5}\right) + k(5, 2), k \in \mathbb{R}$

1.4. $m_s = -\frac{3}{2}$, logo uma equação da reta s é do tipo

$y = -\frac{3}{2}x + b$.

Como o ponto de coordenadas $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ pertence

à reta s , sabe-se que $b = -\frac{1}{2}$.

Então, a reta s é definida pela equação $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

2. $t: (x, y) = (4, -4) + k(-2, 1), k \in \mathbb{R}$

A: ponto de interseção da reta t com o eixo Ox

$A(x, 0)$ e $A \in t$, logo tem-se:

$(x, 0) = (4, -4) + k(-2, 1), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2k \\ 0 = -4 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ 4 = k \end{cases} \therefore A(-4, 0)$

B: ponto de interseção da reta t com o eixo Oy

$B(0, y)$ e $B \in t$, logo tem-se:

$(0, y) = (4, -4) + k(-2, 1), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4 - 2k \\ y = -4 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

$B(0, -2)$

$\overline{AB} = B - A = (0, -2) - (-4, 0) = (4, -2)$

Página 101 – Aplica

3. $\vec{u}(-2, 1)$ e $\vec{v}(3, 2)$

3.1. a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

b) $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

c) $\vec{u} + \vec{v} = (-2, 1) + (3, 2) = (1, 3)$

$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

d) $-2\vec{u} = -2(-2, 1) = (4, -2)$

$\|-2\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

3.2. a) $\vec{w} = \frac{1}{2}(\vec{u} - 2\vec{v}) = \frac{1}{2}((-2, 1) - 2(3, 2))$

$= \frac{1}{2}((-2, 1) - (6, 4)) = \frac{1}{2}(-8, -3) = \left(-4, -\frac{3}{2}\right)$

b) $3\vec{u} - \vec{w} = \vec{v} \Leftrightarrow 3(-2, 1) - \vec{w} = (3, 2)$

$\Leftrightarrow (-6, 3) - (3, 2) = \vec{w} \Leftrightarrow (-9, 1) = \vec{w}$

4. $X\left(-\frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow$ ponto médio de $[SU]$

$U(1, 3)$

4.1. $\overline{SU} = 2\overline{XU}$

$\overline{XU} = U - X = (1, 3) - \left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

Então, $\overline{SU} = 2\left(\frac{3}{2}, 2\right) = (3, 4)$

4.2. $\|\overline{XU}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

5. $\vec{r}(-1, 0, 3)$ e $\vec{s}(1, -2, -1)$

5.1. $\vec{t} = -\vec{r} + 2\vec{s} = -(-1, 0, 3) + 2(1, -2, -1) = (1, 0, -3) + (2, -4, -2) = (3, -4, -5)$



$$\begin{aligned}
 5.2. \quad \vec{r} + 2\vec{t} = -\vec{s} &\Leftrightarrow 2\vec{t} = -\vec{s} - \vec{r} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2\vec{t} = -(1, -2, -1) - (-1, 0, 3) \\
 &\Leftrightarrow 2\vec{t} = (-1, 2, 1) - (-1, 0, 3) \\
 &\Leftrightarrow 2\vec{t} = (0, 2, -2) \\
 &\Leftrightarrow \vec{t} = \frac{1}{2}(0, 2, -2) \\
 &\Leftrightarrow \vec{t} = (0, 1, -1)
 \end{aligned}$$

$$6. \quad \vec{u}(5, 0, 0), \vec{v}(0, -2, 0) \text{ e } \vec{w}(0, 0, 7)$$

$$6.1. \quad \vec{u} + \vec{v} = (5, 0, 0) + (0, -2, 0) = (5, -2, 0)$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{29}$$

$$6.2. \quad \vec{AB} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$$= (-5, 0, 0) + (0, -2, 0) + (0, 0, 7)$$

$$= (-5, -2, 7)$$

A opção correta é a (A).

Tema 1: Declive e inclinação de uma reta

Página 102 – Tarefa inicial

$$1.1. \quad OP: y = \frac{3x}{48} \text{ e } x_P = 952$$

$$y_P = \frac{3 \times 952}{48} = 59,5$$

$$P(952; 59,5) \text{ e } A(952, 0)$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{59,5}{952} = 0,0625 = 6,25\%$$

Neste caso, a regra não foi cumprida.

$$1.2. \quad P(875, 54), \text{ logo } A(875, 0)$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{54}{875} \approx 0,0617, \text{ ou seja, } 6,17\%$$

Neste caso, a regra também não foi cumprida.

$$1.3. \quad OP: y = \frac{x}{17} \text{ e } y_P = 52$$

$$52 = \frac{x}{17} \Leftrightarrow x = 52 \times 17 \Leftrightarrow x = 884$$

$$P(884, 52)$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{52}{884} \approx 0,0588, \text{ ou seja, } 5,88\%$$

Neste caso, sim, a regra foi cumprida.

$$2. \quad \theta = A\hat{O}P = 3,2^\circ \text{ e } \overline{OA} = 8 \text{ m}$$

Desnível da rampa: \overline{AP}

$$\tan 3,2^\circ = \frac{\overline{AP}}{8} \Leftrightarrow \overline{AP} = 8 \times \tan 3,2^\circ, \text{ ou seja,}$$

$$\overline{AP} \approx 0,45 \text{ m}$$

Página 103

$$1. \quad \text{Inclinação da reta } r: 0^\circ$$

Inclinação da reta $s: 35^\circ$

2.1. Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero, a amplitude de cada um dos ângulos internos é 60° .

Então, $B\hat{A}C = 60^\circ$

Inclinação da reta $AC: 8^\circ + 60^\circ = 68^\circ$

$$2.2. \quad \text{Inclinação da reta } BC: 68^\circ + 60^\circ = 128^\circ$$

A opção correta é a (A).

Página 104 – Tarefa 1

$$1. \quad r: y = mx + b \text{ e } s: y = mx$$

1.1. Para cada valor de m verifica-se que as inclinações das retas r e s são iguais.

Conjetura: Retas com o mesmo declive têm a mesma inclinação.

1.2. Considerando valores de m positivos, verifica-se que o ângulo associado à inclinação da reta é agudo.

1.3. Considerando valores de m negativos, verifica-se que o ângulo associado à inclinação da reta é obtuso.

1.4. Conjetura: Se o declive da reta for positivo, então o ângulo associado à inclinação é agudo. Se o declive da reta for negativo, então o ângulo associado à inclinação é obtuso.

$$2. \quad r: y = mx + b \text{ e } s: y = mx$$

1.º α : inclinação das retas r e s .

2.º Ao cuidado do aluno.

3.º Comparando o valor de m com o valor de $\tan \alpha$, conclui-se que $m = \tan \alpha$.



4.º Conjetura: A tangente trigonométrica da inclinação de uma reta não vertical é igual ao declive da reta.

Página 105

3.1. a) A reta r passa nos pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 0)$.

Seja θ a inclinação da reta r .

$$\tan \theta = m_r = \frac{0-2}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

b) $s : y = -1,5x - 1$

Seja α a inclinação da reta s .

$$\tan \alpha = m_s = -1,5$$

3.2. $\tan \alpha = -1,5$ e $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$$\alpha = \tan^{-1}(-1,5) + 180^\circ \approx 123,7^\circ$$

4.1. a) Como $\overline{AE} = \overline{BE}$, então: $\widehat{ABE} = \widehat{BAE} = 28^\circ$

Inclinação da reta BE : $180^\circ - 28^\circ = 152^\circ$

b) Inclinação da reta BC : $180^\circ - 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$

4.2. a) As retas ED e BC são paralelas, logo têm o

mesmo declive.

$$m_{ED} = m_{BC} = \tan 62^\circ \approx 1,88$$

b) As retas CD e BE são paralelas, logo têm o mesmo declive.

$$m_{CD} = m_{BE} = \tan 152^\circ \approx -0,53$$

Página 106 – Prática

5.1. A reta que tem menor inclinação é a s .

5.2. A reta que tem maior declive é a r .

5.3. A reta que tem maior inclinação é a r .

5.4. A reta que tem maior declive é a t .

6. $A(-2, 3)$ e $B(3, -1)$

Como θ é a inclinação da reta AB , então:

$$\tan \theta = m_{AB} = \frac{-1-3}{3-(-2)} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

A opção correta é a (D).

Página 107 – Prática

7. $AB: y = \frac{1}{2}x - 2$

Como $A \in Oy$, então $A(0, -2)$.

$B \in Ox$ e $B \in AB$, logo tem-se:

$$0 = \frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow x = 4$$

$B(4, 0)$

Inclinação da reta BC : 135°

Declive da reta BC :

$$m = \tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

A equação reduzida da reta BC é do tipo

$$y = -x + b.$$

Como $B(4, 0)$ pertence à reta BC , então tem-se:

$$0 = -4 + b \Leftrightarrow b = 4$$

$$BC : y = -x + 4$$

Logo, $C(0, 4)$, pois $C \in Oy$ e $C \in BC$.

Conclusão: $A(0, -2)$, $B(4, 0)$ e $C(0, 4)$

8.1. Seja α a inclinação da reta r .

$$m_r = \tan \alpha$$

Sabe-se que $\alpha + \theta = 180^\circ$, ou seja, $\theta = 180^\circ - \alpha$.

$$\tan \theta = \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha = -m_r = -0,4$$

8.2. $\beta = 90^\circ - \alpha$

$$\tan \beta = \tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{0,4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$$

A opção correta é a (B).

9.1. a) Como a reta r é paralela à reta de equação

$$y = -x, \text{ então } m_r = -1.$$

Seja θ a inclinação da reta r .

$$\tan \theta = -1 \wedge 90^\circ < \theta < 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}(-1) + 180^\circ \Leftrightarrow \theta = 135^\circ$$

b) Seja α a inclinação da reta s .

$$\alpha + 80^\circ = 135^\circ \Leftrightarrow \alpha = 55^\circ$$

9.2. $m_s = \tan(55^\circ) \approx 1,4$

A opção correta é a (A).



10.1. $B \in Oy$, logo $B(0, y)$.

Como $B \in AB$, tem-se que $y_B = 6$.

Então, $B(0, 6)$.

Seja M o ponto de interseção das diagonais do losango. $M(0, 3)$

Seja α a inclinação da reta AB .

$$\tan \alpha = m_{AB} = -\frac{3}{2}$$

Como o triângulo $[ABM]$ é retângulo em M :

$$\tan(\widehat{MAB}) = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \tan(180^\circ - \alpha) = \frac{3}{AM} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\tan \alpha = \frac{3}{AM} \Leftrightarrow -\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{AM} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{AM}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM} = 2$$

Então, $A(2, 3)$ e $C(-2, 3)$.

Vértices do losango: $O(0, 0)$, $A(2, 3)$, $B(0, 6)$

e $C(-2, 3)$

10.2. θ : inclinação da reta AO

$$\tan \theta = m_{AO} = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2} \text{ e } 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{4}{13} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}} \vee \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

Como $0^\circ < \theta < 90^\circ$, sabe-se que $\cos \theta > 0$.

$$\text{Então, } \cos \theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Como $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, conclui-se que:

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = \frac{3}{2} \times \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Tema 2: Produto escalar

Página 108 – Tarefa inicial

1. $\vec{F} = \overline{AC} = C - A = (2, 5) - (1, 2) = (1, 3)$

$$\vec{d} = \overline{AD} = D - A = (6, 3) - (1, 2) = (5, 1)$$

2. $\|\vec{F}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$; $\|\vec{d}\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

3.1. $\|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos \theta = \sqrt{10} \times \sqrt{26} \times \cos 60^\circ =$
 $= \sqrt{260} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{65} \times \frac{1}{2} = \sqrt{65}$

3.2. $\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\|\vec{F}\|} \Leftrightarrow \cos(60^\circ) = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Página 109

11.1. $(\overline{CR}, \widehat{CS}) = 130^\circ$

11.2. $(\overline{UT}, \widehat{CS}) = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$

11.3. $(\overline{SR}, \widehat{UT}) = 180^\circ$

11.4. $(\overline{UR}, \widehat{TS}) = 0^\circ$

11.5. $(\overline{ST}, \widehat{RT}) = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$

11.6. $(\overline{RC}, \widehat{TU}) = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$

11.7. $(\overline{RT}, \widehat{US}) = 50^\circ$

12. $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\widehat{BAC} = 110^\circ$

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ$$

12.1. $(\overline{CA}, \widehat{CB}) = 35^\circ$

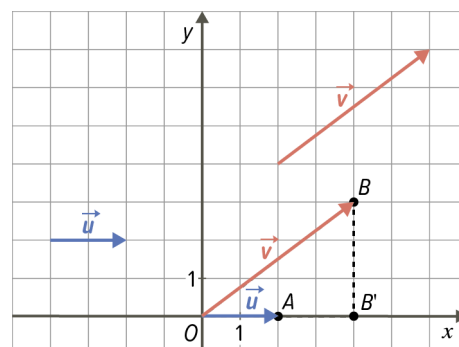
12.2. $(\overline{CA}, \widehat{BA}) = 110^\circ$

12.3. $(\overline{BC}, \widehat{AB}) = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

12.4. $(\overline{AC}, \widehat{BA}) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

Página 110 – Tarefa 2

1.1. a 1.3.





2. $A(2, 0)$, $B(4, 3)$ e $B'(4, 0)$

3.1. $\|\overline{OA}\| = \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

3.2. $\|\overline{OB}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

3.3. $\|\overline{OB'}\| = \|B' - O\| = \|(4, 0) - (0, 0)\| = \|(4, 0)\| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

4.1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OB'} = 2 \times 4 = 8$

4.2. a) Como o triângulo $[OBB']$ é retângulo em B' :

$$\cos(A\hat{O}B) = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \overline{OB} \times \cos(A\hat{O}B)$$

Como $A\hat{O}B = (\vec{u}, \vec{v})$, conclui-se que:

$$\overline{OB'} = \overline{OB} \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

b) $\overline{OA} \times \overline{OB'} = \overline{OA} \times \overline{OB} \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Página 111

13.1. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2,5$ e $(\vec{u}, \vec{v}) = 42^\circ$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times 2,5 \times \cos 42^\circ \approx 5,57$$

13.2. $\|\vec{u}\| = 8$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $(\vec{u}, \vec{v}) = 115^\circ$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 8 \times 4 \times \cos 115^\circ \approx -13,52$$

14. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, então $\cos(\vec{u}, \vec{v}) < 0$.

Como $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$ e $\cos(\vec{u}, \vec{v}) < 0$, então

$$-1 \leq \cos(\vec{u}, \vec{v}) < 0.$$

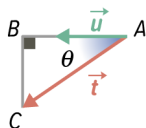
Assim, a opção correta é a (C).

15.1. $\vec{u}(-2, 0)$, $\vec{v}(1, 2)$, $\vec{w}(3, 0)$ e $\vec{t}(-3, -2)$

15.2. a) $\|\vec{t}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

b) $\cos(\vec{u}, \vec{t}) = \cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{t} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{t}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{t}) = 2 \times \sqrt{13} \times \frac{3}{\sqrt{13}} = 6$



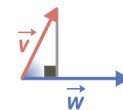
15.3. a) $\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{w}) = 2 \times 3 \times \cos(180^\circ) = 6 \times (-1) = -6$

b) $\vec{w} \cdot \vec{v} = \|\vec{w}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{w}, \vec{v}) = 3 \times \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 3$

Cálculo auxiliar:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos(\vec{w}, \vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



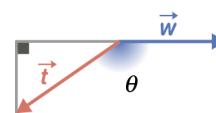
c) $\vec{w} \cdot \vec{t} = \|\vec{w}\| \times \|\vec{t}\| \times \cos(\vec{w}, \vec{t}) = 3 \times \sqrt{13} \times \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = -9$

Cálculo auxiliar:

$$\cos(\vec{w}, \vec{t}) = \cos \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{3}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$



d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times \sqrt{5} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -2$

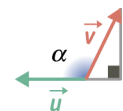
Cálculo auxiliar:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos \alpha$$

Sabe-se que:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$



Página 112

16.1. $\overline{AB} \cdot \overline{AB} = \|\overline{AB}\|^2 = \overline{AB}^2 = 34$

Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 5^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 34$$

16.2. $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0$, porque $\overline{CA} \perp \overline{CB}$.

16.3. $\overline{BC} \cdot \overline{AB} = \overline{BC} \cdot (-\overline{BA}) = -(\overline{BC} \cdot \overline{BA}) = -(\|\overline{BC}\| \times \|\overline{BA}\| \times \cos(\overline{BC}, \overline{BA})) = -(3 \times \sqrt{34} \times \frac{3}{\sqrt{34}}) = -9$



$$17. \quad \|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 5, (\vec{u}, \vec{v}) = \theta \text{ e } \vec{u} \cdot \vec{v} = 9$$

$$17.1. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, v}) \Leftrightarrow 9 = 3 \times 5 \times \cos \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 = 15 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$17.2. \quad (2\vec{u}) \cdot \vec{v} = 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2 \times 9 = 18$$

$$17.3. \quad \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -9$$

$$17.4. \quad (-3\vec{u}) \cdot \vec{v} = -3(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3 \times 9 = -27$$

Página 113 – Tarefa 3

$$1.1. \quad \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} =$$

$$= \|\vec{w}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\widehat{w, u}) + \|\vec{w}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{w, v})$$

$$= 3 \times 4 \times \cos 180^\circ + 3 \times 6 \times \cos 180^\circ$$

$$= 12 \times (-1) + 18 \times (-1) = -12 - 18 = -30$$

$$1.2. \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} =$$

$$= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, v}) + \|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\| \times \cos(\widehat{u, w})$$

$$= 4 \times 6 \times \cos 0^\circ + 4 \times 3 \times \cos 180^\circ$$

$$= 24 \times 1 + 12 \times (-1) = 24 - 12 = 12$$

$$1.3. \quad (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$= \|\vec{w}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{w, v}) - \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, v})$$

$$= 3 \times 6 \times \cos(180^\circ) - 4 \times 6 \times \cos(0^\circ)$$

$$= 18 \times (-1) - 24 \times 1 = -18 - 24 = -42$$

$$1.4. \quad -2\vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (-2\vec{w}) \cdot \vec{u} - (-2\vec{w}) \cdot \vec{v} =$$

$$= -2(\vec{w} \cdot \vec{u}) + 2(\vec{w} \cdot \vec{v})$$

$$= -2(\|\vec{w}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\widehat{w, u})) + 2(\|\vec{w}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{w, v}))$$

$$= -2(3 \times 4 \times \cos(180^\circ)) + 2(3 \times 6 \times \cos(180^\circ))$$

$$= -2(12 \times (-1)) + 2(18 \times (-1)) = 24 - 36 = -12$$

$$2. \quad \vec{AD} \cdot \vec{AC} = \vec{AD} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC}$$

$$\stackrel{AD \perp AB}{=} 0 + \|\vec{AD}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos(\widehat{AD, BC}) = 2 \times 2 \times \cos 0^\circ$$

$$= 4 \times 1 = 4$$

$$3. \quad \vec{AV} \cdot \vec{AC} = \vec{AV} \cdot (2\vec{AO}) = (\vec{AO} + \vec{OV}) \cdot (2\vec{AO}) =$$

$$= 2\|\vec{AO}\|^2 + 0 = 36$$

Cálculo auxiliar:

$$\vec{AO} = O - A = (-3, 3, 0)$$

$$\|\vec{AO}\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 9 + 0} = \sqrt{18}$$

Página 114 – Prática

$$18.1. \quad \|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 4\sqrt{2} \text{ e } \cos(\widehat{u, v}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, v}) = 3 \times 4\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -12$$

$$18.2. \quad \|\vec{u}\| = 5, \|\vec{v}\| = 3 \text{ e } (\widehat{u, v}) = 30^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, v}) = 5 \times 3 \times \cos 30^\circ =$$

$$= 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$$18.3. \quad \|\vec{u}\| = 3 \text{ e } \|\vec{v}\| \cos(\widehat{u, v}) = 8,5$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, v}) = 3 \times 8,5 = 25,5$$

$$18.4. \quad \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = 7 \text{ e } (\widehat{u, v}) = 135^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, v}) = 7 \times \cos(180^\circ - 45^\circ) =$$

$$= 7 \times (-\cos(45^\circ)) = 7 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$18.5. \quad \|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 5 \text{ e } (\widehat{u, v}) = 113^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, v}) = 4 \times 5 \times \cos(113^\circ) \approx -7,81$$

$$19.1. \quad \alpha = 60^\circ; \theta = 120^\circ; \beta = 60^\circ \text{ e } \overline{AB} = 4$$

Justificação: Como o hexágono $[ABCDEF]$ é

regular, sabe-se que os triângulos $[AOB]$,

$[BOC]$, $[DOE]$, $[EOF]$ e $[FOA]$ são

equiláteros. Sabe-se que $\overline{OA} = 4$.

$$19.2. \text{ a) } \vec{AB} \cdot \vec{AO} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AO}\| \times \cos(\widehat{AB, AO}) =$$

$$= 4 \times 4 \times \cos\left(60^\circ\right) = 16 \times \frac{1}{2} = 8$$



$$\begin{aligned}
 \text{b) } \overline{AB} \cdot \overline{DA} &= \|\overline{AB}\| \times \|\overline{DA}\| \times \cos(\widehat{AB, DA}) = \\
 &= 4 \times 8 \times \cos(120^\circ) = 32 \times \cos(180^\circ - 60^\circ) \\
 &= 32 \times (-\cos(60^\circ)) = 32 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -16 \\
 \text{c) } \overline{EF} \cdot \overline{AB} &= \|\overline{EF}\| \times \|\overline{AB}\| \times \cos(\widehat{EF, AB}) = \\
 &= 4 \times 4 \times \cos\left(120^\circ\right) = 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8 \\
 \text{d) } \overline{EF} \cdot \overline{BC} &= \|\overline{EF}\| \times \|\overline{BC}\| \times \cos(\widehat{EF, BC}) = \\
 &= 4 \times 4 \times \cos(180^\circ) = 16 \times (-1) = -16 \\
 \text{e) } \overline{CF} \cdot \overline{DE} &= \|\overline{CF}\| \times \|\overline{DE}\| \times \cos(\widehat{CF, DE}) = \\
 &= 8 \times 4 \times \cos(0^\circ) = 32 \times 1 = 32 \\
 \text{f) } \overline{ED} \cdot \overline{AD} &= \|\overline{ED}\| \times \|\overline{AD}\| \times \cos(\widehat{ED, AD}) = \\
 &= 4 \times 8 \times \cos(60^\circ) = 32 \times \frac{1}{2} = 16
 \end{aligned}$$

20. M : ponto médio de $[BC]$

$C(4, 0)$ e $D(-1, 2)$

$$20.1. \overline{CD} = \sqrt{(4+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$P_{[ABCD]} = 4 \times \overline{CD} = 4\sqrt{29}$$

20.2. O triângulo $[ABM]$ é retângulo em B e

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{29}}{2}, \text{ porque } M \text{ é o ponto médio de } [BC].$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BM}^2 \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = (\sqrt{29})^2 + \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM}^2 = 29 + \frac{29}{4} \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = \frac{145}{4} \xrightarrow{\overline{AM} > 0} \overline{AM} = \frac{\sqrt{145}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\sqrt{29}}{\frac{\sqrt{145}}{2}} = \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{145}} = \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{29 \times 5}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{\sqrt{29}}{2}}{\frac{\sqrt{145}}{2}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{145}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29 \times 5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$20.3. \text{ a) } \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \|\overline{MA}\| \times \|\overline{MB}\| \times \cos(\widehat{MA, MB}) =$$

$$= \frac{\sqrt{145}}{2} \times \frac{\sqrt{29}}{2} \times \cos \theta = \frac{29\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{29}{4}$$

$$\text{ b) } \overline{MA} \cdot \overline{DC} = \|\overline{MA}\| \times \|\overline{DC}\| \times \cos(\widehat{MA, DC}) =$$

$$= \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{29} \times \cos(90^\circ + \theta) = \frac{29\sqrt{5}}{2} \times (-\sin \theta)$$

$$= \frac{29\sqrt{5}}{2} \times (-\cos \alpha) = \frac{29\sqrt{5}}{2} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -29$$

$$\text{ c) } \overline{BC} \cdot \overline{MA} = \|\overline{BC}\| \times \|\overline{MA}\| \times \cos(\widehat{BC, MA}) =$$

$$= \sqrt{29} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \cos(180^\circ - \theta) = \frac{29\sqrt{5}}{2} \times (-\cos \theta)$$

$$= \frac{29\sqrt{5}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{29}{2}$$

$$21. \vec{u} \cdot \vec{v} = -4, \vec{w} = -2\vec{u} \text{ e } \|\vec{u}\| = 3$$

$$21.1. \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (-2\vec{u}) = -2(\vec{v} \cdot \vec{u}) = -2(\vec{u} \cdot \vec{v}) =$$

$$= -2 \times (-4) = 8$$

$$21.2. \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (-2\vec{u}) = -2(\vec{u} \cdot \vec{u}) = -2\|\vec{u}\|^2 =$$

$$= -2 \times 3^2 = -18$$

$$21.3. \vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (-2\vec{u}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (-2\vec{u}) \cdot \vec{u} - (-2\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

$$= -2(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -2\|\vec{u}\|^2 + 2 \times (-4)$$

$$= -2 \times 3^2 - 8 = -26$$

Página 115 – Prática

$$22.1. \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$$

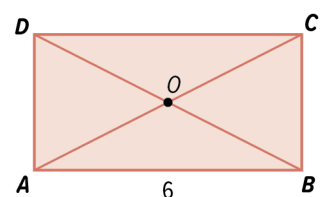
$$22.2. (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

$$23. \overline{OA} \cdot \overline{AB} = \left(\frac{1}{2}\overline{CA}\right) \cdot \overline{AB}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(\overline{CB} + \overline{BA})\right) \cdot \overline{AB}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{BA}\right) \cdot \overline{AB}$$





$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{2}\overline{CB}\right) \cdot \overline{AB} + \left(\frac{1}{2}\overline{BA}\right) \cdot \overline{AB} \\
 &= \frac{1}{2}(\overline{CB} \cdot \overline{AB}) + \frac{1}{2}(\overline{BA} \cdot \overline{AB}) \\
 &\stackrel{CB \perp AB}{=} \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{2}(\overline{AB} \cdot \overline{AB}) \\
 &= 0 - \frac{1}{2}\|\overline{AB}\|^2 = -\frac{1}{2} \times 6^2 = -18
 \end{aligned}$$

24. $\|\vec{F}\| = 40$, $\|\vec{d}\| = 6$ e $w = 160$

$$w = \|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos \theta \Leftrightarrow 160 = 40 \times 6 \times \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow 160 = 240 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{160}{240} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48,19^\circ$$

Página 116

25. $\vec{u}(-3, 2)$, $\vec{v}(2, -1)$ e $\vec{w}(-1, 4)$

25.1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, 2) \cdot (2, -1) = -3 \times 2 + 2 \times (-1) = -6 - 2 = -8$

25.2. $\vec{w} \cdot \vec{v} = (-1, 4) \cdot (2, -1) = -1 \times 2 + 4 \times (-1) = -2 - 4 = -6$

25.3. $2\vec{u} \cdot \vec{w} = (2(-3, 2)) \cdot (-1, 4) = (-6, 4) \cdot (-1, 4) = (-6) \times (-1) + 4 \times 4 = 6 + 16 = 22$

25.4. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = ((-3, 2) + (2, -1)) \cdot (-1, 4) = (-1, 1) \cdot (-1, 4) = (-1) \times (-1) + 1 \times 4 = 1 + 4 = 5$

25.5. $(3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{w}) = (3(2, -1)) \cdot ((-3, 2) - (-1, 4)) = (6, -3) \cdot (-2, -2) = 6 \times (-2) + (-3) \times (-2) = -12 + 6 = -6$

26.1. $\vec{u}(1, 2)$ e $\vec{v}(-2, 3)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2) \cdot (-2, 3) = 1 \times (-2) + 2 \times 3 = -2 + 6 = 4$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ e \vec{u} e \vec{v} não são colineares, então o ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é agudo.

26.2. $\vec{u}(-5, 1)$ e $\vec{v}(2, -3)$

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{v} &= (-5, 1) \cdot (2, -3) = -5 \times 2 + 1 \times (-3) \\
 &= -10 - 3 = -13
 \end{aligned}$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ e \vec{u} e \vec{v} não são colineares, então o ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é obtuso.

26.3. $\vec{u}(-3, 1)$ e $\vec{v}(2, 6)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (2, 6) = -3 \times 2 + 1 \times 6 = -6 + 6 = 0$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então o ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é reto.

26.4. $\vec{u}(4, 1)$ e $\vec{v}(1, -5)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (4, 1) \cdot (1, -5) = 4 \times 1 + 1 \times (-5) = 4 - 5 = -1$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ e \vec{u} e \vec{v} não são colineares, então o ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é obtuso.

27.1. $\vec{u}(-1, 4)$ e $\vec{v}(k+1, -2)$

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-1, 4) \cdot (k+1, -2) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (-1) \times (k+1) + 4 \times (-2) = 0 \Leftrightarrow -k - 1 - 8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow k = -9
 \end{aligned}$$

27.2. $\vec{u}(-1, 4)$ e $\vec{v}(1-k, k)$

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-1, 4) \cdot (1-k, k) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (-1) \times (1-k) + 4 \times k = 0 \Leftrightarrow -1 + k + 4k = 0 \\
 &\Leftrightarrow 5k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

27.3. $\vec{u}(-1, 4)$ e $\vec{v}(2k, k+1)$

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-1, 4) \cdot (2k, k+1) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (-1) \times (2k) + 4 \times (k+1) = 0 \Leftrightarrow -2k + 4k + 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2k = -4 \Leftrightarrow k = -2
 \end{aligned}$$

27.4. $\vec{u}(-1, 4)$ e $\vec{v}(k^2 - 5, 1)$

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-1, 4) \cdot (k^2 - 5, 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (-1) \times (k^2 - 5) + 4 \times 1 = 0 \Leftrightarrow -k^2 + 5 + 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = 3 \vee k = -3
 \end{aligned}$$



Página 117

28. $\vec{u}(0, -1, 2)$, $\vec{v}(1, 2, -1)$ e $\vec{w}(3, -2, 1)$
- 28.1. $\vec{u} \cdot \vec{w} = (0, -1, 2) \cdot (3, -2, 1) =$
 $= 0 \times 3 + (-1) \times (-2) + 2 \times 1 = 0 + 2 + 2 = 4$
- 28.2. $\vec{w} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (1, 2, -1) =$
 $= 3 \times 1 + (-2) \times 2 + 1 \times (-1) = 3 - 4 - 1 = -2$
- 28.3. $\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = (0, -1, 2) \cdot (-1, -2, 1) =$
 $= 0 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 2 \times 1 = 0 + 2 + 2 = 4$
- 28.4. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = ((0, -1, 2) - (1, 2, -1)) \cdot (3, -2, 1) =$
 $= (-1, -3, 3) \cdot (3, -2, 1) = (-1) \times 3 + (-3) \times (-2) + 3 \times 1$
 $= -3 + 6 + 3 = 6$
- 28.5. $(-\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = (-1, -2, 1) \cdot ((0, -1, 2) + (3, -2, 1)) =$
 $= (-1, -2, 1) \cdot (3, -3, 3) = (-1) \times 3 + (-2) \times (-3) + 1 \times 3$
 $= -3 + 6 + 3 = 6$
- 29.1. $\vec{u}(1, 0, 2)$ e $\vec{v}(1, -2, -1)$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 0, 2) \cdot (1, -2, -1) = 1 \times 1 + 0 \times (-2) + 2 \times (-1)$
 $= 1 + 0 - 2 = -1$
 Como $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ e \vec{u} e \vec{v} não são colineares,
 então o ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é obtuso.
- 29.2. $\vec{u}(-5, -2, 1)$ e $\vec{v}(-2, 6, 2)$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-5, -2, 1) \cdot (-2, 6, 2) =$
 $= (-5) \times (-2) + (-2) \times 6 + 1 \times 2 = 10 - 12 + 2 = 0$
 Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então o ângulo formado pelos
 vetores \vec{u} e \vec{v} é reto.
- 29.3. $\vec{u}(-1, 1, 2)$ e $\vec{v}(-2, 0, 6)$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 1, 2) \cdot (-2, 0, 6) = (-1) \times (-2) + 1 \times 0 + 2 \times 6$
 $= 2 + 0 + 12 = 14$
 Como $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ e os vetores \vec{u} e \vec{v} não são
 colineares, então o ângulo formado pelos vetores
 \vec{u} e \vec{v} é agudo.

- 29.4. $\vec{u}(2, 3, -1)$ e $\vec{v}(1, 2, -5)$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3, -1) \cdot (1, 2, -5) = 2 \times 1 + 3 \times 2 + (-1) \times (-5)$
 $= 2 + 6 + 5 = 13$
 Como $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ e os vetores \vec{u} e \vec{v} não são
 colineares, então o ângulo formado pelos vetores
 \vec{u} e \vec{v} é agudo.
- 30.1. $\vec{u}(-1, 1, 3)$ e $\vec{v}(k+1, -2, k)$
 $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-1, 1, 3) \cdot (k+1, -2, k) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (-1) \times (k+1) + 1 \times (-2) + 3 \times k = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -k - 1 - 2 + 3k = 0 \Leftrightarrow 2k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$
- 30.2. $\vec{u}(-1, 1, 3)$ e $\vec{v}(1+2k, k^2, 0)$
 $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-1, 1, 3) \cdot (1+2k, k^2, 0) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (-1) \times (1+2k) + 1 \times k^2 + 3 \times 0 = 0$
 $\Leftrightarrow -1 - 2k + k^2 + 0 = 0$
 $\Leftrightarrow k^2 - 2k - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$
 $\Leftrightarrow k = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
 $\Leftrightarrow k = 1 + \sqrt{2} \vee k = 1 - \sqrt{2}$
- 30.3. $\vec{u}(-1, 1, 3)$ e $\vec{v}(-k, 3+k, 1)$
 $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-1, 1, 3) \cdot (-k, 3+k, 1) = 0$
 $\Leftrightarrow (-1) \times (-k) + 1 \times (3+k) + 3 \times 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k + 3 + k + 3 = 0 \Leftrightarrow 2k = -6 \Leftrightarrow k = -3$
- 30.4. $\vec{u}(-1, 1, 3)$ e $\vec{v}(k, 0, k^2)$
 $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-1, 1, 3) \cdot (k, 0, k^2) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (-1) \times k + 1 \times 0 + 3 \times k^2 = 0 \Leftrightarrow -k + 0 + 3k^2 = 0$
 $\Leftrightarrow 3k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k(3k - 1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee 3k - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{1}{3}$

Página 118 – Prática

- 31.1. $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = (-1, -6) \cdot (-1, -3)$
 $= (-1) \times (-1) + (-6) \times (-3) = 1 + 18 = 19$



$$31.2. \overline{BD} \cdot 2\vec{j} = (6, 4) \cdot (0, 2) = 6 \times 0 + 4 \times 2 = 0 + 8 = 8$$

$$31.3. \overline{BC} \cdot (-\vec{i}) = (5, 1) \cdot (-1, 0) = 5 \times (-1) + 1 \times 0$$

$$= -5 + 0 = -5$$

$$31.4. \overline{AC} \cdot \overline{DA} = (4, -5) \cdot (-5, 2) = 4 \times (-5) + (-5) \times 2$$

$$= -20 - 10 = -30$$

$$32. h = 6$$

$$P_b = 16 \Leftrightarrow 4\overline{AB} = 16 \Leftrightarrow \overline{AB} = 4$$

32.1. Situação I

$$a) A(4, 0, 0), B(4, 4, 0), C(0, 4, 0),$$

$$O(0, 0, 0) \text{ e } V(2, 2, 6)$$

$$b) \overline{OA} = A - O = (4, 0, 0) - (0, 0, 0) = (4, 0, 0)$$

$$\overline{CV} = V - C = (2, 2, 6) - (0, 4, 0) = (2, -2, 6)$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{CV} = (4, 0, 0) \cdot (2, -2, 6) =$$

$$= 4 \times 2 + 0 \times (-2) + 0 \times 6 = 8 + 0 + 0 = 8$$

$$c) R: \text{ponto médio de } [BC]$$

$$R\left(\frac{4+0}{2}, \frac{4+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right), \text{ ou seja, } R(2, 4, 0)$$

$$T: \text{ponto médio de } [BV]$$

$$T\left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{0+6}{2}\right), \text{ ou seja, } T(3, 3, 3)$$

$$\overline{CR} = R - C = (2, 4, 0) - (0, 4, 0)$$

$$\overline{AT} = T - A = (3, 3, 3) - (4, 0, 0)$$

$$\overline{CR} \cdot \overline{AT} = (2, 0, 0) \cdot (-1, 3, 3) =$$

$$= 2 \times (-1) + 0 \times 3 + 0 \times 3 = -2 + 0 + 0 = -2$$

32.2. Situação II

Como o triângulo $[AOB]$ é retângulo em O ,

aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \Leftrightarrow 4^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OA}^2 \Leftrightarrow 16 = 2\overline{OA}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 = \overline{OA}^2 \Leftrightarrow \overline{OA} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \overline{OA} = 2\sqrt{2}$$

$$A(2\sqrt{2}, 0, 0), B(0, 2\sqrt{2}, 0), C(-2\sqrt{2}, 0, 0),$$

$$D(0, -2\sqrt{2}, 0) \text{ e } V(0, 0, 6).$$

$$S: \text{ponto médio de } [AV]$$

$$S\left(\frac{2\sqrt{2}+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right), \text{ ou seja, } S(\sqrt{2}, 0, 3)$$

$$a) \overline{OS} = S - O = (\sqrt{2}, 0, 3) - (0, 0, 0) = (\sqrt{2}, 0, 3)$$

$$\overline{BO} = O - B = (0, 0, 0) - (0, 2\sqrt{2}, 0) =$$

$$= (0, -2\sqrt{2}, 0)$$

$$\overline{OS} \cdot \overline{BO} = (\sqrt{2}, 0, 3) \cdot (0, -2\sqrt{2}, 0) =$$

$$= \sqrt{2} \times 0 + 0 \times (-2\sqrt{2}) + 3 \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$b) \overline{CS} = S - C = (\sqrt{2}, 0, 3) - (-2\sqrt{2}, 0, 0) =$$

$$= (3\sqrt{2}, 0, 3)$$

$$\overline{OV} = V - O = (0, 0, 6) - (0, 0, 0) = (0, 0, 6)$$

$$\overline{CS} \cdot \overline{OV} = (3\sqrt{2}, 0, 3) \cdot (0, 0, 6) =$$

$$= 3\sqrt{2} \times 0 + 0 \times 0 + 3 \times 6 = 0 + 0 + 18 = 18$$

$$33.1. a) P \in O_x, \text{ logo } P(x, 0)$$

$$\overline{CB} = B - C = (0, -2) - (4, -1) = (-4, -1)$$

$$\overline{CP} = P - C = (x, 0) - (4, -1) = (x-4, 1)$$

$$\overline{CB} \cdot \overline{CP} = 0 \Leftrightarrow (-4, -1) \cdot (x-4, 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-4) \times (x-4) + (-1) \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 16 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15}{4}$$

$$P \in O_x \text{ e } \overline{CB} \cdot \overline{CP} = 0, \text{ logo } P\left(\frac{15}{4}, 0\right).$$

$$b) P \in O_y, \text{ logo } P(0, y)$$

$$\overline{AP} = P - A = (0, y) - (-2, 1) = (2, y-1)$$

$$\overline{AD} = D - A = (2, 3) - (-2, 1) = (4, 2)$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{AD} = 0 \Leftrightarrow (2, y-1) \cdot (4, 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 4 + (y-1) \times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -3$$

$$P \in O_y \text{ e } \overline{AP} \cdot \overline{AD} = 0, \text{ logo } P(0, -3).$$

$$c) P \in O_x, \text{ logo } P(x, 0)$$

$$\overline{BA} = A - B = (-2, 1) - (0, -2) = (-2, 3)$$

$$\overline{AP} = P - A = (x, 0) - (-2, 1) = (x+2, -1)$$



$$\overline{BA} \cdot \overline{AP} = 0 \Leftrightarrow (-2, 3) \cdot (x+2, -1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2) \times (x+2) + 3 \times (-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x - 4 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$$

$$P \in O_x \text{ e } \overline{BA} \cdot \overline{AP} = 0, \text{ logo } P\left(-\frac{7}{2}, 0\right).$$

33.2. $\overline{AC} = C - A = (4, -1) - (-2, 1) = (6, -2)$

$$\overline{AT} = T - A = (k^2, 9 - k) - (-2, 1) = (k^2 + 2, 8 - k)$$

Se o ângulo formado pelos vetores \overline{AC} e \overline{AT} é obtuso, então $\overline{AC} \cdot \overline{AT} < 0$.

$$\overline{AC} \cdot \overline{AT} < 0 \Leftrightarrow (6, -2) \cdot (k^2 + 2, 8 - k) < 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \times (k^2 + 2) + (-2) \times (8 - k) < 0$$

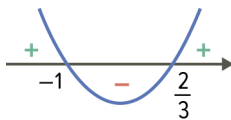
$$\Leftrightarrow 6k^2 + 12 - 16 + 2k < 0 \Leftrightarrow 6k^2 + 2k - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow 3k^2 + k - 2 < 0 \Leftrightarrow k \in \left]-1, \frac{2}{3}\right[$$

Cálculo auxiliar:

$$3k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \vee k = -1$$



Página 119 – Prática

34. Como $C \in O_x$, então $C(x, 0, 0)$.

$$A(-1, 2, 1) \text{ e } B(3, -1, 2)$$

$$\overline{CA} = A - C = (-1, 2, 1) - (x, 0, 0) = (-1 - x, 2, 1)$$

$$\overline{CB} = B - C = (3, -1, 2) - (x, 0, 0) = (3 - x, -1, 2)$$

Se o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C , então:

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow (-1 - x, 2, 1) \cdot (3 - x, -1, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1 - x) \times (3 - x) + 2 \times (-1) + 1 \times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3 + x - 3x + x^2 - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

Então, $C(3, 0, 0)$ ou $C(-1, 0, 0)$.

35. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, $\|\vec{F}_1\| = 5000$, $\|\vec{F}_2\| = 8000$ e

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 50^\circ$$

$$\|\vec{F}\| = ?$$

$$\|\vec{F}\| = \|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|$$

$$\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = \|\vec{F}_1\|^2 + 2(\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2) + \|\vec{F}_2\|^2$$

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = \|\vec{F}_1\| \times \|\vec{F}_2\| \times \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$$

$$= 5000 \times 8000 \times \cos(50^\circ)$$

$$= 40\,000\,000 \cos(50^\circ)$$

Assim, tem-se:

$$\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = 5000^2 + 2(40\,000\,000 \cos(50^\circ)) + 8000^2$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = 89\,000\,000 + 80\,000\,000 \cos(50^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\| = \sqrt{89\,000\,000 + 80\,000\,000 \cos(50^\circ)}$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\| \approx 11850$$

A intensidade da força \vec{F} é, aproximadamente, 11 850 N.

Página 120

36. $\vec{u}(-4, 3)$, $\vec{v}(-2, -2)$ e $\vec{w}(-1, 1)$

36.1. $(\vec{u}, \vec{v}) = ?$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-4, 3) \cdot (-2, -2) = (-4) \times (-2) + 3 \times (-2)$$

$$= 8 - 6 = 2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{2}{5 \times 2\sqrt{2}} = \frac{2}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) \approx 81,9^\circ$$

36.2. $(\vec{v}, \vec{w}) = ?$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-2, -2) \cdot (-1, 1) = (-2) \times (-1) + (-2) \times 1 = 2 - 2 = 0$$

Assim, conclui-se que $(\vec{v}, \vec{w}) = 90^\circ$.



$$36.3. (\vec{u}, \vec{w}) = ?$$

$$(\vec{u}) \cdot \vec{w} = (4, -3) \cdot (-1, 1) = 4 \times (-1) + (-3) \times 1$$

$$= -4 - 3 = -7$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\|} = \frac{-7}{5 \times \sqrt{2}} = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que

$$(\vec{u}, \vec{w}) = \cos^{-1}\left(\frac{-7\sqrt{2}}{10}\right) \approx 171,9^\circ$$

$$37. \vec{u}(0, 1, -2), \vec{v}(2, 2, -1) \text{ e } \vec{w}(-1, 3, 1)$$

$$37.1. (\vec{u}, \vec{v}) = ?$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 1, -2) \cdot (2, 2, -1) = 0 \times 2 + 1 \times 2 + (-2) \times (-1)$$

$$= 0 + 2 + 2 = 4$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{5} \times 3} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{4\sqrt{5}}{15}\right) \approx 53,4^\circ$$

$$37.2. (\vec{v}, \vec{w}) = ?$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (2, 2, -1) \cdot (-1, 3, 1) = 2 \times (-1) + 2 \times 3 + (-1) \times 1$$

$$= -2 + 6 - 1 = 3$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \times \|\vec{w}\|} = \frac{3}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{11}}{11}\right) \approx 72,5^\circ$$

$$37.3. (\vec{u} - \vec{v}, \vec{w}) = ?$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (0, 1, -2) - (2, 2, -1) = (-2, -1, -1)$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = (-2, -1, -1) \cdot (-1, 3, 1)$$

$$= (-2) \times (-1) + (-1) \times 3 + (-1) \times 1 = 2 - 3 - 1 = -2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

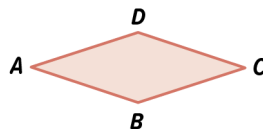
$$\cos(\vec{u} - \vec{v}, \vec{w}) = \frac{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w}}{\|\vec{u} - \vec{v}\| \times \|\vec{w}\|} = \frac{-2}{\sqrt{6} \times \sqrt{11}} = \frac{-2}{\sqrt{66}} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{66}}{66} = -\frac{\sqrt{66}}{33}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que

$$(\vec{u} - \vec{v}, \vec{w}) = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{66}}{33}\right) \approx 104,3^\circ$$

38.



$$\vec{BC}(3, 1)$$

$$B(2, 1)$$

$$D(2, 3)$$

$$(\vec{BC}, \vec{CD}) = ?$$

$$\vec{BC} = C - B \Leftrightarrow C = B + \vec{BC} \Leftrightarrow C = (2, 1) + (3, 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = (5, 2)$$

$$\vec{CD} = D - C = (2, 3) - (5, 2) = (-3, 1)$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{CD} = (3, 1) \cdot (-3, 1) = 3 \times (-3) + 1 \times 1 = -9 + 1 = -8$$

$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\|\vec{CD}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos(\vec{BC}, \vec{CD}) = \frac{\vec{BC} \cdot \vec{CD}}{\|\vec{BC}\| \times \|\vec{CD}\|} = \frac{-8}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que

$$(\vec{BC}, \vec{CD}) = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) \approx 143,13^\circ$$



Página 121

39. Como o pentágono é regular e está inscrito na circunferência, divide-a em cinco arcos iguais de amplitude $\frac{360^\circ}{5}$, ou seja 72° .

$$39.1. (\overline{AB}, \overline{AE}) = 72^\circ$$

$$39.2. (\overline{AD}, \overline{BD}) = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$39.3. (\overline{CD}, \overline{CA}) = 72^\circ$$

40.1. Sendo α o ângulo formado pelo eixo Ox e a reta AB , então $\alpha = 27^\circ$.

40.2. Sendo θ o ângulo formado pelo eixo Oy e a reta CD , então $\theta = 180^\circ - 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$.

Página 122

$$41. r: y = 3x - 1$$

$$s: (x, y) = (2, 0) + k(-1, 2), k \in \mathbb{R}$$

$$41.1. a) m_r = 3$$

Um vetor diretor da reta r é, por exemplo,

$$\vec{r}(1, 3).$$

b) Um vetor diretor da reta s é, por exemplo,

$$\vec{s}(-1, 2).$$

$$41.2. \vec{r} \cdot \vec{s} = (1, 3) \cdot (-1, 2) = 1 \times (-1) + 3 \times 2 = -1 + 6 = 5$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos(\vec{r}, \vec{s}) = \left| \cos(\vec{r}, \vec{s}) \right| = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} =$$

$$= \frac{|5|}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\vec{r}, \vec{s}) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right) = 45^\circ$$

42.1. Um vetor diretor da reta BE :

$$\overline{BE} = E - B = (0, 0, 2) - (2, 2, 0) = (-2, -2, 2)$$

Um vetor diretor da reta BD :

$$\overline{BD} = D - B = (0, 2, 2) - (2, 2, 0) = (-2, 0, 2)$$

$$\overline{BE} \cdot \overline{BD} = (-2, -2, 2) \cdot (-2, 0, 2) = 4 + 0 + 4 = 8$$

$$\|\overline{BE}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\|\overline{BD}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos(\overline{BE}, \overline{BD}) = \left| \cos(\overline{BE}, \overline{BD}) \right| = \frac{|\overline{BE} \cdot \overline{BD}|}{\|\overline{BE}\| \times \|\overline{BD}\|} =$$

$$= \frac{8}{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}} = \frac{8}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\overline{BE}, \overline{BD}) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \approx 35,26^\circ$$

42.2. Um vetor diretor da reta AC :

$$\overline{AC} = C - A = (0, 2, 0) - (2, 0, 0) = (-2, 2, 0)$$

Um vetor diretor da reta DM :

$$\overline{DM} = M - D = (1, 0, 2) - (0, 2, 2) = (1, -2, 0)$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{DM} = (-2, 2, 0) \cdot (1, -2, 0) = -2 - 4 + 0 = -6$$

$$\|\overline{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\|\overline{DM}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos(\overline{AC}, \overline{DM}) = \left| \cos(\overline{AC}, \overline{DM}) \right| = \frac{|\overline{AC} \cdot \overline{DM}|}{\|\overline{AC}\| \times \|\overline{DM}\|} =$$

$$= \frac{|-6|}{2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\overline{AC}, \overline{DM}) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 18,43^\circ$$

Página 123 – Tarefa 4

$$1.1. \overline{SP} = P - S = (-2, 2) - (2, -2) = (-4, 4)$$

$$\overline{RS} = S - R = (2, -2) - (0, -10) = (2, 8)$$

$$1.2. \overline{SP} \cdot \overline{RS} = (-4, 4) \cdot (2, 8) = -8 + 32 = 24$$

$$\|\overline{SP}\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\|\overline{RS}\| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$



$$\cos(\overline{SP}, \overline{RS}) = \frac{\overline{SP} \cdot \overline{RS}}{\|\overline{SP}\| \times \|\overline{RS}\|} = \frac{24}{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{17}} =$$

$$= \frac{24}{8\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\overline{SP}, \overline{RS}) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) \approx 59^\circ$$

1.3. a) $m_{PR} = \frac{-10-2}{0-(-2)} = \frac{-12}{2} = -6$

b) Seja θ a inclinação da reta PR .

$$\tan\theta = -6 \wedge 90^\circ < \theta < 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}(-6) + 180^\circ \Leftrightarrow \theta \approx 99,46^\circ$$

2.1. $B(4, 0, 4)$ e $V(2, 2\sqrt{15}, 2)$

2.2. $\overline{AC} = C - A = (4, 0, 0) - (0, 0, 4) = (4, 0, -4)$

$$\overline{AV} = V - A = (2, 2\sqrt{15}, 2) - (0, 0, 4) = (2, 2\sqrt{15}, -2)$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{AV} = (4, 0, -4) \cdot (2, 2\sqrt{15}, -2) = 8 + 0 + 8 = 16$$

$$\|\overline{AC}\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\|\overline{AV}\| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{15})^2 + (-2)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$\cos(\overline{AC}, \overline{AV}) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AV}}{\|\overline{AC}\| \times \|\overline{AV}\|} = \frac{16}{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{34}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\overline{AC}, \overline{AV}) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{34}}\right) \approx 70^\circ$$

2.3. M : ponto médio de $[CV]$

$C(4, 0, 0)$ e $V(2, 2\sqrt{15}, 2)$, então

$$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{0+2\sqrt{15}}{2}, \frac{0+2}{2}\right), \text{ ou seja,}$$

$$M(3, \sqrt{15}, 1).$$

a) Um vetor diretor da reta AM :

$$\overline{AM} = M - A = (3, \sqrt{15}, 1) - (0, 0, 4)$$

$$= (3, \sqrt{15}, -3)$$

Um vetor diretor da reta CM :

$$\overline{CM} = M - C = (3, \sqrt{15}, 1) - (4, 0, 0) = (-1, \sqrt{15}, 1)$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{CM} = (3, \sqrt{15}, -3) \cdot (-1, \sqrt{15}, 1) = -3 + 15 - 3 = 9$$

$$\|\overline{AM}\| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{15})^2 + (-3)^2} = \sqrt{33}$$

$$\|\overline{CM}\| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{15})^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$\cos(\overline{AM}, \overline{CM}) = \left| \cos(\overline{AM}, \overline{CM}) \right| = \frac{|\overline{AM} \cdot \overline{CM}|}{\|\overline{AM}\| \times \|\overline{CM}\|} =$$

$$= \frac{|9|}{\sqrt{33} \times \sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{561}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\overline{AM}, \overline{CM}) = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{561}}\right) \approx 67,7^\circ$$

b) Um vetor diretor da reta OM :

$$\overline{OM} = M - O = (3, \sqrt{15}, 1) - (0, 0, 0) = (3, \sqrt{15}, 1)$$

Um vetor diretor da reta VA :

$$\overline{VA} = A - V = (0, 0, 4) - (2, 2\sqrt{15}, 2) =$$

$$= (-2, -2\sqrt{15}, 2)$$

$$\overline{OM} \cdot \overline{VA} = (3, \sqrt{15}, 1) \cdot (-2, -2\sqrt{15}, 2) =$$

$$= -6 - 30 + 2 = -34$$

$$\|\overline{OM}\| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{15})^2 + 1^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\|\overline{VA}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{15})^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$\cos(\overline{OM}, \overline{VA}) = \left| \cos(\overline{OM}, \overline{VA}) \right| = \frac{|\overline{OM} \cdot \overline{VA}|}{\|\overline{OM}\| \times \|\overline{VA}\|} =$$

$$= \frac{|-34|}{5 \times 2\sqrt{17}} = \frac{17}{5\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{5}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\overline{OM}, \overline{VA}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{17}}{5}\right) \approx 34,4^\circ$$

Página 124 – Prática

43.1. a) $\overline{OC} = C - O = (2, 1) - (0, 0) = (2, 1)$

$$\|\overline{OC}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{OD} = D - O = (1, 3) - (0, 0) = (1, 3)$$

$$\|\overline{OD}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

b) $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = (2, 1) \cdot (1, 3) = 2 \times 1 + 1 \times 3 = 2 + 3 = 5$



$$\begin{aligned} \text{c) } \cos(\overline{OC}, \overline{OD}) &= \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OD}}{\|\overline{OC}\| \times \|\overline{OD}\|} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \text{Como } \cos(\overline{OC}, \overline{OD}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ então} \\ (\overline{OC}, \overline{OD}) &= 45^\circ. \end{aligned}$$

$$43.2. \text{ a) } \overline{CD} = D - C = (1, 3) - (2, 1) = (-1, 2)$$

$$\overline{AC} = C - A = (2, 1) - (-3, 0) = (5, 1)$$

$$\overline{CD} \cdot \overline{AC} = (-1, 2) \cdot (5, 1) = -5 + 2 = -3$$

$$\|\overline{CD}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\overline{AC}\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$\cos(\overline{CD}, \overline{AC}) = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{CD}\| \times \|\overline{AC}\|} = \frac{-3}{\sqrt{5} \times \sqrt{26}} = \frac{-3}{\sqrt{130}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$\cos(\overline{CD}, \overline{AC}) = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{130}}\right) \approx 105^\circ$$

$$\text{b) } \overline{AC} = (5, 1) \text{ e } \|\overline{AC}\| = \sqrt{26}$$

$$\overline{BD} = D - B = (1, 3) - (-1, -2) = (2, 5)$$

$$\|\overline{BD}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = (5, 1) \cdot (2, 5) = 10 + 5 = 15$$

$$\cos(\overline{AC}, \overline{BD}) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\|\overline{AC}\| \times \|\overline{BD}\|} = \frac{15}{\sqrt{26} \times \sqrt{29}} = \frac{15}{\sqrt{754}}$$

Recorrendo à calculadora conclui-se que:

$$(\overline{AC}, \overline{BD}) = \cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{754}}\right) \approx 57^\circ$$

$$44. \overline{AB} = (5, 1) \text{ e } \overline{BC} = (1, 2)$$

$$B\hat{A}D = (\overline{AB}, \overline{AD})$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = (1, 2)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = (5, 1) \cdot (1, 2) = 5 + 2 = 7$$

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$\|\overline{AD}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AD}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\|\overline{AB}\| \times \|\overline{AD}\|} = \frac{7}{\sqrt{26} \times \sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{130}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$B\hat{A}D = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{130}}\right) \approx 52^\circ$$

Como num paralelogramo os dois ângulos adjacentes ao mesmo lado são suplementares, sabe-se que $A\hat{D}C = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$.

Assim, tem-se que:

A medida da amplitude, em graus, arredondada às unidades, do ângulo externo de vértice A é 52° e a do ângulo interno de vértice D é 128° .

$$45. A(8, 0, 0), C(0, 5, 0) \text{ e } E(0, 0, 2)$$

$$45.1. \text{ a) } \overline{FC} = C - F = (0, 5, 0) - (8, 0, 2) = (-8, 5, -2)$$

$$\overline{OG} = G - O = (8, 5, 2) - (0, 0, 0) = (8, 5, 2)$$

$$\text{b) } \overline{FC} \cdot \overline{OG} = (-8, 5, -2) \cdot (8, 5, 2)$$

$$= -64 + 25 - 4 = -43$$

$$\|\overline{FC}\| = \sqrt{(-8)^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{93}$$

$$\|\overline{OG}\| = \sqrt{8^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{93}$$

$$\cos(\overline{FC}, \overline{OG}) = \frac{\overline{FC} \cdot \overline{OG}}{\|\overline{FC}\| \times \|\overline{OG}\|} = \frac{-43}{\sqrt{93} \times \sqrt{93}} = \frac{-43}{93}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\overline{FC}, \overline{OG}) = \cos^{-1}\left(\frac{-43}{93}\right) \approx 117,5^\circ$$

$$45.2. \text{ Como } P \in [DE], \text{ então } P(0, y, 2), 0 \leq y \leq 5.$$

$$\overline{OB} = B - O = (8, 5, 0) - (0, 0, 0) = (8, 5, 0)$$

$$\overline{OP} = P - O = (0, y, 2) - (0, 0, 0) = (0, y, 2)$$

$$\overline{OB} \cdot \overline{OP} = 15 \Leftrightarrow (8, 5, 0) \cdot (0, y, 2) = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 + 5y + 0 = 15 \Leftrightarrow 5y = 15 \Leftrightarrow y = 3 \therefore P(0, 3, 2)$$

$$\|\overline{OB}\| = \sqrt{8^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{89}$$

$$\|\overline{OP}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos(\overline{OB}, \overline{OP}) = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OP}}{\|\overline{OB}\| \times \|\overline{OP}\|} = \frac{15}{\sqrt{89} \times \sqrt{13}} = \frac{15}{\sqrt{1157}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\overline{OB}, \overline{OP}) = \cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{1157}}\right) \approx 63,83^\circ$$



Página 125 – Prática

46. $r : y = -3x + 2$

A reta s passa pelos pontos $A(-2, 0)$ e $B(1, 3)$.

46.1. $m_r = -3$

\vec{r} : um vetor diretor da reta r

Por exemplo, $\vec{r} = (1, -3)$

\vec{s} : um vetor diretor da reta s

Por exemplo,

$$\vec{s} = \overline{AB} = B - A = (1, 3) - (-2, 0) = (3, 3)$$

46.2. a) $\vec{r} \cdot \vec{s} = (1, -3) \cdot (3, 3) = 3 - 9 = -6$

b) $\|\vec{r}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$ e

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

c) $\left| \cos(\vec{r}, \vec{s}) \right| = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|-6|}{\sqrt{10} \times 3\sqrt{2}} = \frac{6}{3\sqrt{20}} =$

$$= \frac{6}{3 \times 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

d) $(\vec{r}, \vec{s}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \approx 63,4^\circ$

47.1. $r : y = 4x - 1$ e $s : x + y = 3 \Leftrightarrow y = -x + 3$

$$m_r = 4 \text{ e } m_s = -1$$

Um vetor diretor da reta r é, por exemplo, $\vec{r}(1, 4)$.

Um vetor diretor da reta s é, por exemplo, $\vec{s}(1, -1)$.

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (1, 4) \cdot (1, -1) = 1 - 4 = -3$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos(\vec{r}, \vec{s}) = \left| \cos(\vec{r}, \vec{s}) \right| = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|-3|}{\sqrt{17} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\vec{r}, \vec{s}) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) \approx 59,0^\circ$$

47.2. $r : (x, y) = (5, 7) + k(-1, 3), k \in \mathbb{R}$

Um vetor diretor da reta r é, por exemplo,

$$\vec{r}(-1, 3).$$

$$s : y = -0,5x + 3$$

$$m_s = -0,5 = -\frac{1}{2}$$

Um vetor diretor da reta s é, por exemplo,

$$\vec{s}(2, -1).$$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (-1, 3) \cdot (2, -1) = -2 - 3 = -5$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos(\vec{r}, \vec{s}) = \left| \cos(\vec{r}, \vec{s}) \right| = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|-5|}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então, $(\vec{r}, \vec{s}) = 45^\circ$.

48. $\overline{AD} = D - A = (0, a, a) - (a, 0, 0) = (-a, a, a)$

$$\overline{BE} = E - B = (0, 0, a) - (a, a, 0) = (-a, -a, a)$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BE} = (-a, a, a) \cdot (-a, -a, a) = a^2 - a^2 + a^2 = a^2$$

$$\|\overline{AD}\| = \sqrt{(-a)^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2}$$

$$\|\overline{BE}\| = \sqrt{(-a)^2 + (-a)^2 + a^2} = \sqrt{3a^2}$$

$$\cos(\overline{AD}, \overline{BE}) = \left| \cos(\overline{AD}, \overline{BE}) \right| = \frac{|\overline{AD} \cdot \overline{BE}|}{\|\overline{AD}\| \times \|\overline{BE}\|} =$$

$$= \frac{|a^2|}{\sqrt{3a^2} \times \sqrt{3a^2}} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

Como $\cos(\overline{AD}, \overline{BE})$ é constante, conclui-se que

o ângulo formado pelas retas AD e BE não depende do valor de a .

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\overline{AD}, \overline{BE}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,5^\circ$$

Página 126

49. $r : y = -3x + 2$

49.1. $t \perp r$ e a reta t passa em $A(6, -1)$.



a) Como $m_r = -3$ e $t \perp r$, então $m_t = -\frac{1}{m_r} = \frac{1}{3}$.

b) Uma equação da reta t é da forma

$$y = \frac{1}{3}x + b.$$

Como $A(6, -1) \in t$, tem-se:

$$-1 = \frac{1}{3} \times 6 + b \Leftrightarrow -1 = 2 + b \Leftrightarrow b = -3$$

Equação reduzida da reta t : $y = \frac{1}{3}x - 3$

49.2. $s \parallel r$ e r passa em $B(2, -7)$.

a) Como retas paralelas têm o mesmo declive, conclui-se que $m_s = m_r = -3$.

b) Uma equação da reta s é da forma

$$y = -3x + b.$$

Como $B(2, -7) \in s$, tem-se:

$$-7 = -3 \times 2 + b \Leftrightarrow -7 = -6 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Equação reduzida da reta s : $y = -3x - 1$

50. $r: (x, y) = \left(1, -\frac{1}{2}\right) + k(2, 5)$, $k \in \mathbb{R}$

$s \perp r$ e intersecta o eixo Ox no ponto $A(5, 0)$

50.1. a) Um vetor diretor da reta r é: $\vec{r}(2, 5)$

Então, $m_r = \frac{5}{2}$.

b) Como $s \perp r$, então $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{2}{5}$

50.2. a) Uma equação da reta s é da forma

$$y = -\frac{2}{5}x + b.$$

Como $A(5, 0) \in s$, tem-se:

$$0 = -\frac{2}{5} \times 5 + b \Leftrightarrow 0 = -2 + b \Leftrightarrow b = 2$$

Equação reduzida da reta s : $y = -\frac{2}{5}x + 2$

b) $m_s = -\frac{2}{5}$, então um vetor diretor da reta s

é, por exemplo, $\vec{s}(5, -2)$.

Uma equação vetorial da reta s é:

$$(x, y) = (5, 0) + k(5, -2), \quad k \in \mathbb{R}$$

Página 127 – Tarefa 5

$$r: x + 3y - 5 = 0$$

A e B pertencem à reta r e têm abcissa -1 e 2 , respetivamente.

$$D \in Oy; E \in r \text{ e } E \in Ox$$

1. $A(-1, y) \in r$, logo tem-se:

$$-1 + 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow y = 2 \quad \therefore A(-1, 2)$$

$B(2, y) \in r$, logo tem-se:

$$2 + 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow 3y = 3 \Leftrightarrow y = 1 \quad \therefore B(2, 1)$$

2. $x + 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow 3y = -x + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}$

$$m_r = -\frac{1}{3}$$

3. Como $[ABCD]$ é um quadrado, sabe-se que a reta AD é perpendicular à reta AB (reta r).

$$AD \perp r \Leftrightarrow m_{AD} = -\frac{1}{m_r} \Leftrightarrow m_{AD} = 3$$

Uma equação da reta AD é da forma $y = 3x + b$.

Como $A(-1, 2) \in AD$, tem-se:

$$2 = 3 \times (-1) + b \Leftrightarrow 2 = -3 + b \Leftrightarrow b = 5$$

$$AD: y = 3x + 5$$

Como $D \in Oy$, então $D(0, 5)$.

4. $D + \overline{AB} = (0, 5) + (B - A) =$

$$= (0, 5) + ((2, 1) - (-1, 2))$$

$$= (0, 5) + (3, -1) = (3, 4)$$

No contexto apresentado, o resultado obtido representa as coordenadas do ponto C .

5.1. a) $EF \perp r$, logo $m_{EF} = -\frac{1}{m_r} = 3$

Uma equação da reta EF é da forma

$$y = 3x + b.$$

Como E é a interseção da reta r com o eixo Ox , então tem-se: $x + 3 \times 0 - 5 = 0$

$$E(5, 0)$$

$$E \in EF, \text{ logo tem-se: } 0 = 3 \times 5 + b \Leftrightarrow b = -15$$



$$EF: y = 3x - 15$$

$F(x, -6)$ pertence à reta EF , então tem-se:

$$-6 = 3x - 15 \Leftrightarrow 9 = 3x \Leftrightarrow x = 3$$

$$F(3, -6)$$

b) $G = A + \overline{EF}$

$$\overline{EF} = F - E = (3, -6) - (5, 0) = (-2, -6)$$

$$\text{Logo, } G = (-1, 2) + (-2, -6) = (-3, -4).$$

5.2. $A(-1, 2)$ e $C(3, 4)$

$$m_{AC} = \frac{4-2}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$A(-1, 2)$ e $F(3, -6)$

$$m_{AF} = \frac{-6-2}{3-(-1)} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$m_{AC} \times m_{AF} = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

Como $m_{AC} \times m_{AF} = -1$, conclui-se que as retas

AC e AF são perpendiculares

($AC \perp AF$, porque $m_{AC} \times m_{AF} = -1$).

5.3. $G(-3, -4)$ e $E(5, 0)$

$$m_{GE} = \frac{0-(-4)}{5-(-3)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$B(2, 1)$ e $D(0, 5)$

$$m_{BD} = \frac{5-1}{0-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$m_{GE} \times m_{BD} = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

$GE \perp BD$, porque $m_{GE} \times m_{BD} = -1$.

$$\alpha = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

A opção correta é a (D).

1.2. $m_r = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

Uma equação da reta r é do tipo $y = -\sqrt{3}x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(4, 0)$ pertence à reta r , tem-se:

$$0 = -\sqrt{3} \times 4 + b \Leftrightarrow 0 = -4\sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 4\sqrt{3}$$

Equação reduzida da reta r : $y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$

A opção correta é a (A).

2. Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero, sabe-se que a amplitude de cada um dos seus ângulos internos é 60° , isto é, $\hat{BAC} = \hat{ABC} = \hat{ACB} = 60^\circ$. Sabe-se, ainda, que $\hat{CAO} = 75^\circ$.

2.1. Inclinação da reta AC : $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

2.2. Inclinação da reta OA : 0°

2.3. Inclinação da reta AB : $180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$

2.4. Inclinação da reta BC :

$$\hat{BCO} + \hat{AOC} = 60^\circ + 15^\circ + 90^\circ = 165^\circ$$

3. A reta r passa nos pontos $A(4, -1)$ e $B(-1, 2)$

θ : inclinação da reta r

Sabe-se que $\tan \theta = m_r$.

$$m_r = \frac{2-(-1)}{-1-4} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}; \tan \theta = -\frac{3}{5}$$

A opção correta é a (C).

4.1. $(x, y) = (2, 3) + k(1, 4)$, $k \in \mathbb{R}$

Um vetor diretor da reta é, por exemplo, $\vec{u}(1, 4)$.

Declive da reta: $m = \frac{4}{1} = 4$

Seja θ a inclinação da reta. Então:

$$\tan \theta = m \Leftrightarrow \tan \theta = 4 \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}(4) \Leftrightarrow \theta \approx 76^\circ$$

A inclinação da reta é, aproximadamente, 76° .

4.2. $y = -2x + 5$

Declive da reta: $m = -2$

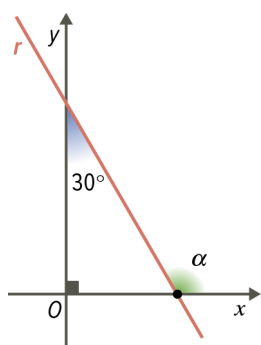
Seja θ a inclinação da reta. Então, tem-se:

$$\tan \theta = m \Leftrightarrow \tan \theta = -2 \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}(-2) \Leftrightarrow \theta \approx 117^\circ$$

A inclinação da reta é, aproximadamente, 117° .

Página 128 – Consolidada

1.1. α : inclinação da reta r





5. $[ABCDE]$ é um pentágono regular.
- 5.1. A amplitude de cada um dos ângulos internos do pentágono regular é $\frac{(5-2) \times 180^\circ}{5}$, ou seja, 108° .
- a) Inclinação da reta AE : 108°
- b) Inclinação da reta BC : $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$
- 5.2. $C\hat{E}D = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$
- Inclinação da reta ED : 36°
- $m_{ED} = \tan(36^\circ) \approx 0,7265$
- $0,72 < m_{ED} < 0,73$
- A opção correta é a (C).

Página 129 – Consolidada

- 6.1. Num paralelogramo, os dois ângulos adjacentes ao mesmo lado são suplementares.

$$(\overline{BA}, \overline{BC}) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

- 6.2. $(\overline{AD}, \overline{CD}) = (\overline{BA}, \overline{BC}) = 140^\circ$

- 6.3. $(\overline{AC}, \overline{BC}) = (\overline{AC}, \overline{AD}) = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$

- 6.4. $(\overline{AC}, \overline{BD}) = 90^\circ$

- 7.1. $\overline{AB} \cdot \overline{OC} = \|\overline{AB}\| \times \|\overline{OC}\| \times \cos(\overline{AB}, \overline{OC}) =$
 $= 5 \times 4 \times \cos(180^\circ) = 20 \times (-1) = -20$

- 7.2. $\overline{OC} \cdot \overline{OA} = \|\overline{OC}\| \times \|\overline{OA}\| \times \cos(\overline{OC}, \overline{OA}) =$
 $= 4 \times \sqrt{2^2 + 4^2} \times \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 8$

- 7.3. $\overline{OC} \cdot \overline{OB} = \|\overline{OC}\| \times \|\overline{OB}\| \times \cos(\overline{OC}, \overline{OB}) =$
 $= 4 \times \overline{OB} \times \left(-\frac{3}{\overline{OB}}\right) = -12$

Cálculo auxiliar:

Seja $(\overline{OC}, \overline{OB}) = \alpha$.

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{3}{\overline{OB}} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{3}{\overline{OB}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{\overline{OB}}$$

- 8.1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 4 \times \cos(180^\circ)$
 $= 8 \times (-1) = -8$

- 8.2. $\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{w}) = 2 \times 6 \times \cos(0^\circ)$
 $= 12 \times 1 = 12$

- 8.3. $\vec{u} \cdot \vec{s} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{s}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{s}) =$
 $= 2 \times \sqrt{2^2 + 3^2} \times \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 4$

- 8.4. $\vec{u} \cdot \vec{t} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{t}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{t}) = 2 \times 5 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -8$

Cálculos auxiliares:

$$\|\vec{t}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Seja $(\vec{u}, \vec{t}) = \alpha$. Então, sabe-se que:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

- 8.5. $\vec{v} \cdot \vec{s} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{s}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{s}) = 4 \times \sqrt{13} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = -8$

Cálculo auxiliar:

Seja $(\vec{v}, \vec{s}) = \theta$. Então, sabe-se que:

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{2}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow -\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

- 8.6. $\vec{u} \cdot \vec{r} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{r}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{r}) = 2 \times 3 \times \cos(90^\circ) = 6 \times 0 = 0$

- 9.1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4,2$; $\|\vec{u}\| = 2,5$ e $\|\vec{v}\| = 4$

$\cos \theta = ?$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow 4,2 = 2,5 \times 4 \times \cos \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4,2 = 10 \times \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{4,2}{10} \Leftrightarrow \cos \theta = 0,42$$

- 9.2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3,15$ e $\cos \theta = 0,35$

$$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = ?$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow 3,15 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times 0,35$$

$$\frac{3,15}{0,35} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = 9$$

- 9.3. $\|\vec{u}\| = 2,8$; $\|\vec{v}\| = 4,5$ e $\theta = 120^\circ$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ?$$



$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2,8 \times 4,5 \times \cos(120^\circ) \\ &= 12,6 \times \cos(180^\circ - 60^\circ) = 12,6 \times (-\cos(60^\circ)) \\ &= 12,6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6,3\end{aligned}$$

10. altura da pirâmide: 6

M : ponto médio de $[AV]$

$$\overline{AB} = 4$$

$$\begin{aligned}10.1. \overline{AB} \cdot \overline{DB} &= \|\overline{AB}\| \times \|\overline{DB}\| \times \cos(\widehat{\overline{AB}, \overline{DB}}) = \\ &= 4 \times \sqrt{4^2 + 4^2} \times \cos(45^\circ) = 4 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\end{aligned}$$

$$10.2. \overline{AV} \cdot \overline{AC} = \|\overline{AV}\| \times \|\overline{AC}\| \times \cos(\widehat{\overline{AV}, \overline{AC}})$$

Designemos por O o centro da base da pirâmide.

$$\overline{AV}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OV}^2 \Leftrightarrow \overline{AV}^2 = (2\sqrt{2})^2 + 6^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AV}^2 = 44 \Leftrightarrow \overline{AV} = \sqrt{44} \Leftrightarrow \overline{AV} = 2\sqrt{11}$$

Seja $(\widehat{\overline{AV}, \overline{AC}}) = \alpha$.

Então, sabe-se que:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AO}}{\overline{AV}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

$$\overline{AV} \cdot \overline{AC} = 2\sqrt{11} \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = 16$$

$$\begin{aligned}10.3. \overline{AB} \cdot \overline{CD} &= \|\overline{AB}\| \times \|\overline{CD}\| \times \cos(\widehat{\overline{AB}, \overline{CD}}) = \\ &= 4 \times 4 \times \cos(180^\circ) \\ &= 16 \times (-1) \\ &= -16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10.4. \overline{AM} \cdot \overline{AV} &= \|\overline{AM}\| \times \|\overline{AV}\| \times \cos(\widehat{\overline{AM}, \overline{AV}}) = \\ &= \frac{2\sqrt{11}}{2} \times 2\sqrt{11} \times \cos(0^\circ) = 22 \times 1 = 22\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}11. \overline{BD} \cdot \overline{BE} &= \|\overline{BD}\| \times \|\overline{BE}\| \times \cos(\widehat{\overline{BD}, \overline{BE}}) = \\ &= \overline{BD} \times \overline{BE} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \overline{BD} \times \overline{BD} = \overline{BD}^2\end{aligned}$$

O triângulo $[ABD]$ é retângulo em A , pelo que:

$$\begin{aligned}&= \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \\ &= a^2 + a^2 \\ &= 2a^2\end{aligned}$$

Página 130 – Consolida

12. Atendendo aos dados da figura sabe-se que o triângulo $[AEF]$ é equilátero ($\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{AF} = 1$).

A amplitude de cada um dos seus ângulos internos é 60° .

$$\begin{aligned}12.1. \overline{AG} \cdot \overline{DB} &= (2\overline{AE}) \cdot (-\overline{AE}) = -2(\overline{AE} \cdot \overline{AE}) = \\ &= -2 \times \|\overline{AE}\|^2 = -2 \times 1^2 = -2\end{aligned}$$

$$12.2. \overline{AB} \cdot \overline{AB} = \|\overline{AB}\|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

Cálculo auxiliar:

Como o triângulo $[ABG]$ é retângulo em B , tem-se

$$\tan(\widehat{BAG}) = \frac{\overline{BG}}{\overline{AB}}, \text{ ou seja:}$$

$$\tan(30^\circ) = \frac{1}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{3}$$

$$12.3. (5\overline{AC}) \cdot \overline{CM} = 5(\overline{AC} \cdot \overline{CM}) = 5 \times 0 = 0$$

Nota: Como $\overline{AC} \perp \overline{CM}$, então $\overline{AC} \cdot \overline{CM} = 0$.

$$\begin{aligned}12.4. \left(\frac{1}{2}\overline{AM}\right) \cdot \overline{CK} &= \overline{AG} \cdot \overline{CK} = (2\overline{AE}) \cdot (4\overline{EF}) = \\ &= 8(\overline{AE} \cdot \overline{EF}) = 8(\|\overline{AE}\| \times \|\overline{EF}\| \times \cos(\widehat{\overline{AE}, \overline{EF}})) \\ &= 8(1 \times 1 \times \cos(120^\circ)) = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$\cos(120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}12.5. (-\overline{HL}) \cdot \overline{EA} &= (-2\overline{EF}) \cdot \overline{EA} = -2(\overline{EF} \cdot \overline{EA}) = \\ &= -2(\|\overline{EF}\| \times \|\overline{EA}\| \times \cos(\widehat{\overline{EF}, \overline{EA}})) = -2(1 \times 1 \times \cos(60^\circ)) \\ &= -2\left(1 \times \frac{1}{2}\right) = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}12.6. \left(\frac{1}{3}\overline{AG}\right) \cdot (-2\overline{DB}) &= -\frac{2}{3}(\overline{AG} \cdot \overline{DB}) \\ &= -\frac{2}{3}(\|\overline{AG}\| \times \|\overline{DB}\| \times \cos(\widehat{\overline{AG}, \overline{DB}})) \\ &= -\frac{2}{3}(2 \times 1 \times \cos(180^\circ)) \\ &= -\frac{2}{3}(2 \times (-1)) = \\ &= -\frac{2}{3} \times (-2) = \frac{4}{3}\end{aligned}$$



$$13. \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 5 \text{ e } \vec{v} \cdot \vec{w} = -2$$

$$13.1. \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = 5 + (-2) = 3$$

$$13.2. \quad \vec{w} \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} - \vec{w} \cdot (2\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{w} - 2(\vec{w} \cdot \vec{v}) \\ = 5 - 2(\vec{v} \cdot \vec{w}) = 5 - 2(-2) = 5 + 4 = 9$$

14. M : ponto médio de $[VA]$

$$\overline{VA} = 2\overline{VM}$$

$$\overline{VB} = 4\overline{VC}$$

$$\overline{VC} = 1,5$$

$$\overline{VM} = 2$$

O triângulo $[VCM]$

é retângulo em C e $C \in [VB]$.

$$\overline{VA} \cdot \overline{VB} = ?$$

$$\overline{VA} = 2\overline{VM} = 2 \times 2 = 4$$

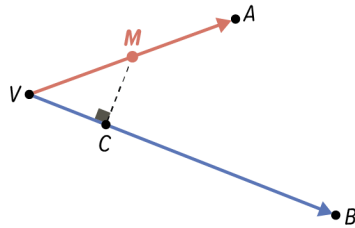
M é o ponto médio de $[VA]$

Como $\overline{VB} = 4\overline{VC}$, então $\overline{VB} = 4\overline{VC} = 4 \times 1,5 = 6$.

Seja $\alpha = (\overline{VB}, \overline{VA})$. Então, sabe-se que:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{VC}}{\overline{VM}} = \frac{1,5}{2}$$

$$\overline{VA} \cdot \overline{VB} = \|\overline{VA}\| \times \|\overline{VB}\| \times \cos(\overline{VA}, \overline{VB}) = 4 \times 6 \times \frac{1,5}{6} = 18$$



$$15.4. \quad \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AC} \cdot (\overline{BA} + \overline{AD}) = \overline{AC} \cdot \overline{BA} + \overline{AC} \cdot \overline{AD}$$

$$= \overline{AC} \cdot (-\overline{AB}) + \|\overline{AC}\| \times \|\overline{AD}\| \times \cos(\overline{AC}, \overline{AD})$$

$$= -(\overline{AC} \cdot \overline{AB}) + 4 \times 4 \times \cos(60^\circ)$$

$$= -(\|\overline{AC}\| \times \|\overline{AB}\| \times \cos(\overline{AC}, \overline{AB})) + 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -(4 \times 4 \times \cos(60^\circ)) + 8 = -\left(16 \times \frac{1}{2}\right) + 8 = -8 + 8 = 0$$

$$16. \quad \vec{u}\left(-2, \frac{1}{2}\right), \vec{v}(3, -1) \text{ e } \vec{w}(1, 4)$$

$$16.1. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \left(-2, \frac{1}{2}\right) \cdot (3, -1) = (-2) \times 3 + \frac{1}{2} \times (-1) =$$

$$= -6 - \frac{1}{2} = -\frac{13}{2}$$

$$16.2. \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = (3, -1) \cdot (1, 4) = 3 \times 1 + (-1) \times 4 = 3 - 4 = -1$$

$$16.3. \quad (-2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = (-2(3, -1)) \cdot \left(\left(-2, \frac{1}{2}\right) + (1, 4)\right)$$

$$= (-6, 2) \cdot \left(-1, \frac{9}{2}\right) = (-6) \times (-1) + 2 \times \frac{9}{2} = 6 + 9 = 15$$

$$16.4. \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \left(-2, \frac{1}{2}\right) \cdot ((3, -1) - (1, 4))$$

$$= \left(-2, \frac{1}{2}\right) \cdot (2, -5) = (-2) \times 2 + \frac{1}{2} \times (-5) = -4 - \frac{5}{2} = -\frac{13}{2}$$

$$17.1. \quad \vec{u}(3, -1), \vec{v}(-2, -4) \text{ e } \vec{w}(-1, 2)$$

17.2. $P \in Oy$, logo $P(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$

$$a) \quad \overline{AP} = P - A = (0, y) - (3, -2) = (-3, y+2)$$

$$\vec{v} \perp \overline{AP} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \overline{AP} = 0 \Leftrightarrow (-2, -4) \cdot (-3, y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2) \times (-3) + (-4) \times (y+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow -4y = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } P\left(0, -\frac{1}{2}\right).$$

$$b) \quad \vec{u} + \vec{w} = (3, -1) + (-1, 2) = (2, 1)$$

$$(\vec{u} + \vec{w}) \perp \overline{AP} \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{w}) \cdot \overline{AP} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2, 1) \cdot (-3, y+2) = 0 \Leftrightarrow 2 \times (-3) + 1 \times (y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 4$$

$$\text{Então, } P(0, 4).$$



Página 131 – Consolida

18. $A(4, 0, 0)$ e $C(0, 4, 0)$

18.1. $\vec{u}(-4, 0, 4)$, $\vec{v}(-4, -4, 4)$ e $\vec{w}(4, -4, 0)$

18.2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-4, 0, 4) \cdot (-4, -4, 4)$
 $= (-4) \times (-4) + 0 \times (-4) + 4 \times 4 = 16 + 0 + 16 = 32$
 $\vec{w} \cdot \vec{v} = (4, -4, 0) \cdot (-4, -4, 4)$
 $= 4 \times (-4) + (-4) \times (-4) + 0 \times 4 = -16 + 16 + 0 = 0$

18.3. a) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} =$
 $= \frac{32}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} \times \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2}} =$
 $= \frac{32}{\sqrt{32} \times \sqrt{48}} = \frac{32}{4\sqrt{2} \times 4\sqrt{3}} = \frac{32}{16\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} =$
 $= \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} = (-4, 0, 4) \cdot (4, -4, 0)$
 $= (-4) \times 4 + 0 \times 4 + 4 \times 0 = -16$
 $\|\vec{u}\| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\|} = \frac{-16}{4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-16}{32} = -\frac{1}{2}$$

c) $\cos(\vec{w}, \vec{v}) = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{0}{4\sqrt{2} \times 4\sqrt{3}} = 0$

19. $\vec{u}(-1, 3)$, $\vec{v}(3, 2)$ e $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$

19.1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 3) \cdot (3, 2) = -1 \times 3 + 3 \times 2 = -3 + 6 = 3$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{10} \times \sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{130}} = \frac{3\sqrt{130}}{130}$$

19.2. $\cos \theta = \frac{3\sqrt{130}}{130}$

$$\text{Logo, } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{130}}{130}\right).$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que $\theta \approx 74,74^\circ$.

20. $[OABC]$ é um quadrado de lado 6.

$$\overline{OE} = \frac{1}{3}\overline{OC} \text{ e } \overline{OD} = \frac{2}{3}\overline{OA}$$

20.1. a) $C(0, 6)$

$$\overline{OD} = \frac{2}{3}\overline{OA} = \frac{2}{3} \times 6 = 4, \text{ logo } D(4, 0).$$

$$m_{CD} = \frac{0-6}{4-0} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$CD: y = -\frac{3}{2}x + 6$$

b) $B(6, 6)$

$$\overline{OE} = \frac{1}{3}\overline{OC} = \frac{1}{3} \times 6 = 2, \text{ logo } E(0, 2).$$

$$m_{BE} = \frac{2-6}{0-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$BE: y = \frac{2}{3}x + 2$$

20.2. $m_{CD} = -\frac{3}{2}$ e $m_{BE} = \frac{2}{3}$

$$m_{CD} = -\frac{1}{m_{BE}}$$

Conclui-se que as retas CD e BE são perpendiculares.

21. $\overline{AP}(2, -4)$

$$s: (x, y) = (4, -2) + k(6, 3), k \in \mathbb{R}$$

21.1. \overline{AP} é um vetor diretor da reta r , logo

$$m_r = \frac{-4}{2} = -2.$$

Um vetor diretor da reta s é, por exemplo, $\vec{s}(6, 3)$.

$$\text{Logo, } m_s = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Como $m_r \times m_s = -2 \times \frac{1}{2} = -1$, conclui-se que as retas r e s são perpendiculares.

Assim sendo, o triângulo $[ABP]$ é retângulo em P .



21.2. Designemos o eixo Oy por reta t .

Um vetor diretor da reta t é, por exemplo, $\vec{t}(0, 1)$.

$$\begin{aligned} \cos(\vec{s}, \vec{t}) &= \left| \cos(\vec{s}, \vec{t}) \right| = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{t}|}{\|\vec{s}\| \times \|\vec{t}\|} = \frac{|(6, 3) \cdot (0, 1)|}{\sqrt{6^2 + 3^2} \times 1} = \\ &= \frac{|6 \times 0 + 3 \times 1|}{\sqrt{45} \times 1} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\vec{s}, \vec{t}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \approx 63^\circ$$

A reta s e o eixo Oy formam um ângulo de, aproximadamente, 63° .

22. $A(-2, -3)$

$$r: y = 2x - 3$$

$$s: (x, y) = (-1, 2) + k(4, -1), k \in \mathbb{R}$$

22.1. Reta $r: y = 2x - 3$

$$m_r = 2$$

Um vetor diretor da reta r é, por exemplo, $\vec{r}(1, 2)$

$$\text{Reta } s: (x, y) = (-1, 2) + k(4, -1), k \in \mathbb{R}$$

Um vetor diretor da reta s é, por exemplo,

$$\vec{s}(4, -1).$$

$$m_s = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

22.2. $(\vec{r}, \vec{s}) = ?$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (1, 2) \cdot (4, -1) = 1 \times 4 + 2 \times (-1) = 4 - 2 = 2$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\cos(\vec{r}, \vec{s}) = \left| \cos(\vec{r}, \vec{s}) \right| = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{|2|}{\sqrt{5} \times \sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{85}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\vec{r}, \vec{s}) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{85}}\right) \approx 77,5^\circ$$

22.3. Seja t a reta que passa em A e é perpendicular à reta r .

$$\text{Como } t \perp r, \text{ então } m_t = -\frac{1}{m_r}.$$

$$m_r = 2, \text{ logo } m_t = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Uma equação da reta } t \text{ é do tipo } y = -\frac{1}{2}x + b$$

Como $A \in t$, tem-se:

$$-3 = -\frac{1}{2} \times (-2) + b \Leftrightarrow -3 = 1 + b \Leftrightarrow b = -4$$

$$t: y = -\frac{1}{2}x - 4$$

22.4. Seja u a reta que passa em A e é perpendicular à reta s .

$$u \perp s, \text{ logo } m_u = -\frac{1}{m_s}.$$

$$\text{Como } m_s = -\frac{1}{4}, \text{ conclui-se que } m_u = 4.$$

Um vetor diretor da reta u é, por exemplo, $\vec{u}(1, 4)$.

Uma equação vetorial da reta u é:

$$(x, y) = (-2, 3) + k(1, 4), k \in \mathbb{R}$$

Página 132 – Avaliação 1 – Parte 1

$$1. m_{AB} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{4}$$

$$B\hat{A}O = 180^\circ - \alpha$$

$$\tan(B\hat{A}O) = \tan(180^\circ - \alpha) =$$

$$= -\tan \alpha = -\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

A opção correta é a (C).

$$2. \vec{u}(a, 2) \text{ e } \vec{v}(a-1, a), a \in \mathbb{R}$$

O ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é obtuso se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow (a, 2) \cdot (a-1, a) < 0 \Leftrightarrow a \times (a-1) + 2 \times a < 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a + 2a < 0 \Leftrightarrow a^2 + a < 0 \Leftrightarrow a \in]-1, 0[$$

Cálculo auxiliar:

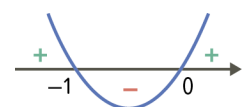
$$a^2 + a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(a+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = -1$$

A opção correta é a (A).





$$3. \quad \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 4 \Leftrightarrow \overline{AC} = 2$$

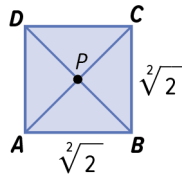
Como as diagonais de um quadrado se bissetam, sabe-se

$$\text{que } \overline{AP} = \overline{PC} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\overline{PC} \cdot \overline{PA} = \|\overline{PC}\| \times \|\overline{PA}\| \times \cos(\widehat{PC, PA}) =$$

$$= 1 \times 1 \times \cos(180^\circ) = 1 \times (-1) = -1$$

A opção correta é a **(B)**.



$$4. \quad A(-1, -2, 0), C(0, 3, 0) \text{ e } C(-3, 1, 5)$$

4.1. Os vetores \overline{AB} e \overline{DH} são perpendiculares, logo $\overline{AB} \cdot \overline{DH} = 0$.

A afirmação verdadeira é a (C).

4.2. Um vetor diretor da reta CH :

$$\overline{CH} = H - C = (-3, 1, 5) - (0, 3, 0) = (-3, -2, 5)$$

Um vetor diretor da reta AH :

$$\overline{AH} = H - A = (-3, 1, 5) - (-1, -2, 0) = (-2, 3, 5)$$

$$\overline{CH} \cdot \overline{AH} = (-3, -2, 5) \cdot (-2, 3, 5)$$

$$= (-3) \times (-2) + (-2) \times 3 + 5 \times 5 = 6 - 6 + 25 = 25$$

$$\|\overline{CH}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

$$\|\overline{AH}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

$$\cos(\widehat{CH, AH}) = \left| \cos(\widehat{CH, AH}) \right| = \frac{|\overline{CH} \cdot \overline{AH}|}{\|\overline{CH}\| \times \|\overline{AH}\|} =$$

$$= \frac{|25|}{\sqrt{38} \times \sqrt{38}} = \frac{25}{38}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\widehat{CH, AH}) = \cos^{-1}\left(\frac{25}{38}\right) \approx 49^\circ$$

A opção correta é a **(D)**.

$$5. \quad r: (x, y) = (-2, 3) + k(1, -4), \quad k \in \mathbb{R}$$

Seja s a reta que passa no ponto $(-4, 11)$ e é perpendicular à reta r .

Um vetor diretor da reta r é, por exemplo, $\vec{r}(1, -4)$.

$$\text{Declive da reta } r: m_r = \frac{-4}{1} = -4$$

$$s \perp r, \text{ logo } m_s = -\frac{1}{m_r} = \frac{1}{4}$$

Uma equação da reta s é do tipo $y = \frac{1}{4}x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(-4, 11)$ pertence à reta s , então tem-se:

$$11 = \frac{1}{4} \times (-4) + b \Leftrightarrow 11 = -1 + b \Leftrightarrow b = 12$$

Equação reduzida da reta s : $y = \frac{1}{4}x + 12$

A opção correta é a **(C)**.

Página 133 – Avaliação 1 – Parte 2

1. Reta r : tem 60° de inclinação e interseca Ox no ponto de abscissa 2

Reta s : é perpendicular a r e interseca o eixo Oy no ponto de ordenada 3

$$1.1. \quad m_r = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$r: y = \sqrt{3}x + b$$

Como a reta r passa no ponto de coordenadas $(2, 0)$, tem-se:

$$0 = \sqrt{3} \times 2 + b \Leftrightarrow 0 = 2\sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = -2\sqrt{3}$$

Então, a reta r é definida pela equação

$$y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}.$$

$$1.2. \quad \text{Como } s \perp r, \text{ então } m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Seja θ a inclinação da reta s .

$$\text{Sabe-se que } \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge 90^\circ < \theta < 180^\circ.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 180^\circ = -30^\circ + 180^\circ = 150^\circ$$

A inclinação da reta s é 150° .

$$2. \quad A(-2, 5) \text{ e } B(3, 6)$$

$$r: (x, y) = (-2, 5) + k(5, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$P \in r, \text{ logo } P(-2+5k, 5-k), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\overline{OP} = P - O = (-2+5k, 5-k) - (0, 0) = (-2+5k, 5-k)$$

$$\overline{AB} = B - A = (3, 6) - (-2, 5) = (5, 1)$$



$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{OP} &= 0 \Leftrightarrow (5, 1) \cdot (-2 + 5k, 1 - k) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5 \times (-2 + 5k) + 1 \times (1 - k) = 0 \Leftrightarrow -10 + 25k + 1 - k = 0 \\ &\Leftrightarrow 24k = 9 \Leftrightarrow k = \frac{9}{24} \Leftrightarrow k = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Então, $P\left(-2 + 5 \times \frac{3}{8}, 1 - \frac{3}{8}\right)$, ou seja, $P\left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right)$.

3. $P(9, 0, 2)$, $Q(1, 3, 0)$ e $R(0, 1, 1)$

$$\overline{QP} = P - Q = (9, 0, 2) - (1, 3, 0) = (8, -3, 2)$$

$$\overline{QR} = R - Q = (0, 1, 1) - (1, 3, 0) = (-1, -2, 1)$$

$$\overline{QP} \cdot \overline{QR} = (8, -3, 2) \cdot (-1, -2, 1) =$$

$$= 8 \times (-1) + (-3) \times (-2) + 2 \times 1 = -8 + 6 + 2 = 0$$

Como $\overline{QP} \cdot \overline{QR} = 0$, então $\overline{QP} \perp \overline{QR}$.

Logo, o triângulo $[PQR]$ é retângulo em Q .

4. $r: y = 2 + 2x$

$$s: y = 2 - x$$

A e B têm abscissa 4 e pertencem, respectivamente, às retas r e s .

$$A(4, 2 + 2 \times 4), \text{ ou seja, } A(4, 10)$$

$$B(4, 2 - 4), \text{ ou seja, } B(4, -2)$$

$$P \in s, \text{ logo } P(x, 2 - x).$$

Se o triângulo $[APB]$ é retângulo em P , então

$$\widehat{APB} = 90^\circ, \text{ logo } \overline{PA} \perp \overline{PB}.$$

Assim, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 0$.

$$\overline{PA} = A - P = (4, 10) - (x, 2 - x) = (4 - x, 8 + x)$$

$$\overline{PB} = B - P = (4, -2) - (x, 2 - x) = (4 - x, -4 + x)$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 0 \Leftrightarrow (4 - x, 8 + x) \cdot (4 - x, -4 + x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4 - x) \times (4 - x) + (8 + x) \times (-4 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 8x + x^2 - 32 + 8x - 4x + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 + 6}{2} \vee x = \frac{2 - 6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$$

Como P é distinto do ponto B , então $x \neq 4$.

Assim, $x = -2$ e $P(-2, 4)$.

$$\begin{aligned}5. \quad \vec{u} &= \overline{EB} = \overline{EA} + \overline{AB} = -\frac{1}{3}\overline{AD} + \overline{AB} \\ \vec{v} &= \overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} = \frac{2}{3}\overline{AD} + \overline{DC} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(-\frac{1}{3}\overline{AD} + \overline{AB}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\overline{AD} + \overline{DC}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\overline{AD}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\overline{AD}\right) + \left(-\frac{1}{3}\overline{AD}\right) \cdot \overline{DC} + \\ &\quad + \overline{AB} \cdot \left(\frac{2}{3}\overline{AD}\right) + \overline{AB} \cdot \overline{DC} \\ &= -\frac{2}{9}(\overline{AD} \cdot \overline{AD}) - \frac{1}{3}(\overline{AD} \cdot \overline{DC}) + \frac{2}{3}(\overline{AB} \cdot \overline{AD}) \\ &\quad + \|\overline{AB}\| \times \|\overline{DC}\| \times \cos(0^\circ) \\ &\stackrel{\substack{\overline{AD} \perp \overline{DC} \text{ e } \overline{AB} \perp \overline{AD}, \text{ logo} \\ \overline{AD} \cdot \overline{DC} = 0 \text{ e } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0}}{=}{=} -\frac{2}{9}\|\overline{AD}\|^2 - \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 0 + a \times a \times 1 \\ &= -\frac{2}{9}a^2 + a^2 = \frac{7}{9}a^2\end{aligned}$$

Tema 3: Equações cartesianas de planos no espaço

Página 134 – Tarefa inicial

1. Como $\vec{v}(2, 3)$ é um vetor diretor da reta r , então $m_r = \frac{3}{2}$.

$$\text{Sendo } s \perp r, \text{ então } m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{2}{3}.$$

$$s: y = -\frac{2}{3}x + b$$

Como $O \in s$, então $b = 0$.

$$\text{Equação reduzida da reta } s: y = -\frac{2}{3}x$$

2. Seja θ a inclinação da reta s .

$$\text{Sabe-se que } \tan \theta = m_s, \text{ ou seja, } \tan \theta = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Logo, } \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) + 180^\circ \approx 146,3^\circ.$$

$$\alpha + \theta = 180^\circ, \text{ logo } \alpha \approx 33,7^\circ.$$



Página 135 – Tarefa 6

1. Sendo P um ponto do plano α distinto de A , então $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$, ou seja, $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$.
A opção correta é a (C).
2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (5, 0, -1) - (-1, 2, -3) = (6, -2, 2)$
 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (6, -2, 2) \cdot (3, 1, -4) = 6 \times 3 + (-2) \times 1 + 2 \times (-4) = 18 - 2 - 8 = 8$
 $B \notin \alpha$, porque $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} \neq 0$.
3. $\overrightarrow{AC} = C - A = (-4, 3, -5) - (-1, 2, -3) = (-3, 1, -2)$
 $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = (-3, 1, -2) \cdot (3, 1, -4) = -3 \times 3 + 1 \times 1 + (-2) \times (-4) = -9 + 1 + 8 = 0$
 $C \in \alpha$, porque $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$

- 4.1. Sendo $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano α e \vec{n} um vetor normal ao plano α , então $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$.
- 4.2. $\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, z) - (-1, 2, -3) = (x+1, y-2, z+3)$
 $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x+1, y-2, z+3) \cdot (3, 1, -4) = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1) \times 3 + (y-2) \times 1 + (z+3) \times (-4) = 0$
 $\Leftrightarrow 3x+3+y-2-4z-12=0$
 $\Leftrightarrow 3x+y-4z-11=0$
- 4.3. $a = 3$, $b = 1$ e $c = -4$
Como $\vec{n}(3, 1, -4)$, conclui-se que a , b e c correspondem, respetivamente, à 1.ª, 2.ª e 3.ª coordenada do vetor \vec{n} .

Página 136

51. $A(2, -4, 3)$ é um ponto do plano θ
 $\vec{u}(-1, 2, 5)$ é um vetor normal ao plano θ
- 51.1. $\overrightarrow{AR} = R - A = (1, 3, 0) - (2, -4, 3) = (-1, 7, -3)$
 $\overrightarrow{AR} \cdot \vec{u} = (-1, 7, -3) \cdot (-1, 2, 5) = 1 + 14 - 15 = 0$, logo $R \in \theta$.

$$\overrightarrow{AS} = S - A = (-4, 1, -2) - (2, -4, 3) = (-6, 5, -5)$$

$$\overrightarrow{AS} \cdot \vec{u} = (-6, 5, -5) \cdot (-1, 2, 5) = 6 + 10 - 25 = -9$$

Como $\overrightarrow{AR} \cdot \vec{u} \neq 0$, então $S \notin \theta$.

$$\overrightarrow{AT} = T - A = (-1, -3, 2) - (2, -4, 3) = (-3, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AT} \cdot \vec{u} = (-3, 1, -1) \cdot (-1, 2, 5) = 3 + 2 - 5 = 0, \text{ logo}$$

$T \in \theta$.

Os pontos que pertencem ao plano θ são R e T .

- 51.2. $P(k, -2, k+1)$, $k \in \mathbb{R}$

Como $P \in \theta$, sabe-se que $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (k, -2, k+1) - (2, -4, 3) = (k-2, 2, k-2)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (k-2, 2, k-2) \cdot (-1, 2, 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow -1(k-2) + 2 \times 2 + 5(k-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -k + 2 + 4 + 5k - 10 = 0 \Leftrightarrow 4k = 4 \Leftrightarrow k = 1$$

- 52.1. $Q(1, 1, 2)$ e $\vec{n}(-2, 1, 3)$

Seja α o plano que passa em Q e admite \vec{n} como vetor normal.

Sendo $P(x, y, z)$ um ponto qualquer de α ,

então $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (x, y, z) - (1, 1, 2) = (x-1, y-1, z-2)$$

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-1, z-2) \cdot (-2, 1, 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x-1) + 1(y-1) + 3(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 + y - 1 + 3z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + y + 3z - 5 = 0 \rightarrow \text{Equação do plano } \alpha$$

- 52.2. $Q(0, -3, 1)$ e $\vec{n}(2, -1, 2)$

Seja α o plano que passa em Q e admite \vec{n} como vetor normal.

Sendo $P(x, y, z)$ um ponto qualquer de α ,

então $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (x, y, z) - (0, -3, 1) = (x, y+3, z-1)$$

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x, y+3, z-1) \cdot (2, -1, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1(y+3) + 2(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y - 3 + 2z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 2z - 5 = 0 \rightarrow \text{Equação do plano } \alpha$$



Página 137 – Tarefa 7

$$\alpha: 2x - 3y + z + 6 = 0$$

1.

$$\bullet \left(-\frac{1}{2}, 1, -2\right) \in \alpha?$$

$$2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \times 1 + (-2) + 6 = 0$$

$$-1 - 3 - 2 + 6 = 0 \rightarrow \text{Proposição verdadeira}$$

$$\text{Logo, o ponto de coordenadas } \left(-\frac{1}{2}, 1, -2\right)$$

pertence a α .

$$\bullet (-3, 0, 1) \in \alpha?$$

$$2 \times (-3) - 3 \times 0 + 1 + 6 = 0$$

$$-6 - 0 + 1 + 6 = 0 \rightarrow \text{Proposição falsa}$$

Logo, o ponto de coordenadas $(-3, 0, 1)$ não

pertence a α .

$$\bullet (4, -1, 1) \in \alpha?$$

$$2 \times 4 - 3 \times (-1) + 1 + 6 = 0$$

$$8 + 3 + 1 + 6 = 0 \rightarrow \text{Proposição falsa}$$

Logo, o ponto de coordenadas $(4, -1, 1)$ não

pertence a α .

$$\bullet (3, 4, 0) \in \alpha?$$

$$2 \times 3 - 3 \times 4 + 0 + 6 = 0$$

$$6 - 12 + 0 + 6 = 0 \rightarrow \text{Proposição verdadeira}$$

Logo, o ponto de coordenadas $(3, 4, 0)$ pertence

a α .

Conclusão: Os pontos de coordenadas

$$\left(-\frac{1}{2}, 1, -2\right) \text{ e } (3, 4, 0) \text{ pertencem ao plano } \alpha.$$

2.1. $P(1, -3, z) \in \alpha$, logo tem-se:

$$2 \times 1 - 3 \times (-3) + z + 6 = 0 \Leftrightarrow 2 + 9 + z + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = -17$$

Então, $P(1, -3, -17)$.

2.2. $P(0, y, -6) \in \alpha$, logo tem-se:

$$2 \times 0 - 3y + (-6) + 6 = 0 \Leftrightarrow -3y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Então, $P(0, 0, -6)$.

2.3. $P(x, 1, z) \in \alpha$, logo tem-se:

$$2x - 3 \times 1 + z + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x + z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = -2x - 3$$

Por exemplo, se $x = 1$, então $z = -5$. Logo,

$P(1, 1, -5)$. Neste caso, a resposta não é única,

porque qualquer ponto de coordenadas

$(x, 1, -2x - 3)$, $x \in \mathbb{R}$ pertence ao plano α .

3.1. $Ox: y = 0 \wedge z = 0$

$$2x - 3 \times 0 + 0 + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$$

As coordenadas do ponto de interseção do plano α com o eixo Ox são $(-3, 0, 0)$.

3.2. $Oy: x = 0 \wedge z = 0$

$$2 \times 0 - 3y + 0 + 6 = 0 \Leftrightarrow -3y = -6 \Leftrightarrow y = 2$$

As coordenadas do ponto de interseção do plano α com o eixo Oy são $(0, 2, 0)$.

3.3. $Oz: x = 0 \wedge y = 0$

$$2 \times 0 - 3 \times 0 + z + 6 = 0 \Leftrightarrow z = -6$$

As coordenadas do ponto de interseção do plano α com o eixo Oz são $(0, 0, -6)$.

4. $2x - 3y + z + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x + 6 - 3y + 1z = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x + 3) - 3(y - 0) + 1(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - (-3)) - 3(y - 0) + 1(z - 0) = 0$$

Um ponto do plano α : $A(-3, 0, 0)$

Um vetor normal ao plano α : $\vec{n}(2, -3, 1)$

Página 138 – Prática

53.1. $\vec{v}(2, 1, -1)$ é um vetor normal a α .

Uma equação do plano α é do tipo

$$2x + y - z + d = 0.$$

O ponto $T(2, -6, 3)$ pertence a α , logo:

$$2 \times 2 + (-6) - 3 + d = 0 \Leftrightarrow 4 - 6 - 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 5$$

$$\alpha: 2x + y - z + 5 = 0$$

53.2. Se a reta r é perpendicular ao plano α , então tem a direção do vetor $\vec{v}(2, 1, -1)$.

Como o ponto $T(2, -6, 3)$ pertence a r , então uma equação vetorial da reta r é:



$$(x, y, z) = (2, -6, 3) + k(2, 1, -1), k \in \mathbb{R}$$

54. $\beta: \frac{1}{2}x - y + 3z = 2$

54.1. Por exemplo, $\vec{n}\left(\frac{1}{2}, -1, 3\right)$.

54.2. $t: (x, y, z) = (3, -7, 5) + k\vec{u}, k \in \mathbb{R}$

Como $t \perp \beta$, então \vec{u} é um vetor normal ao plano β e, conseqüentemente, colinear com o vetor $\vec{n}\left(\frac{1}{2}, -1, 3\right)$.

Como $(-1, 2, -6) = -2\vec{n}$, conclui-se que a opção correta é a (C).

55. Seja M o ponto médio de $[AB]$.

Como $A(2, 0, 0)$ e $B(0, 4, 0)$, então

$$M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right), \text{ ou seja, } M(1, 2, 0).$$

$$\vec{MV} = V - M = \left(-2, \frac{1}{2}, -2\right) - (1, 2, 0) = \left(-3, -\frac{3}{2}, -2\right)$$

é um vetor normal ao plano que contém a base do cone.

Uma equação cartesiana do plano é do tipo

$$-3x - \frac{3}{2}y - 2z + d = 0.$$

Como $A(2, 0, 0)$ pertence ao plano, tem-se:

$$-3 \times 2 - \frac{3}{2} \times 0 - 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow -6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$$

Uma equação cartesiana do plano que contém a

$$\text{base do cone é } -3x - \frac{3}{2}y - 2z + 6 = 0.$$

Página 139 – Prática

56. $\alpha: x + 2y - z + 4 = 0$

A, B e C são os pontos de interseção do plano α com os eixos Ox, Oy e Oz , respectivamente.

56.1.

- $A \in Ox$, logo $A(x, 0, 0)$

Como $A \in \alpha$, tem-se:

$$x + 2 \times 0 - 0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

Então, $A(-4, 0, 0)$.

- $B \in Oy$, logo $B(0, y, 0)$

Como $B \in \alpha$, tem-se:

$$0 + 2y - 0 + 4 = 0 \Leftrightarrow 2y = -4 \Leftrightarrow y = -2$$

Então, $B(0, -2, 0)$.

- $C \in Oz$, logo $C(0, 0, z)$

Como $C \in \alpha$, tem-se:

$$0 + 2 \times 0 - z + 4 = 0 \Leftrightarrow -z = -4 \Leftrightarrow z = 4$$

Então, $C(0, 0, 4)$.

56.2. r : reta que passa em B e é perpendicular ao plano α .

Como $r \perp \alpha$, então tem a direção de qualquer vetor normal a α .

O vetor $\vec{n}(1, 2, -1)$ é normal a α .

Assim, \vec{n} é um vetor diretor da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (0, -2, 0) + k(1, 2, -1), k \in \mathbb{R}$$

57. $\beta: 2x - z + 3 = 0$; $\theta: x + y - 2z + 1 = 0$

Um vetor normal a β é: $\vec{u}(2, 0, -1)$

Um vetor normal a θ é: $\vec{v}(1, 1, -2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 0, -1) \cdot (1, 1, -2) = 2 \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times (-2) = 2 + 0 + 2 = 4$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos \left(\hat{u}, \hat{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{5} \times \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{30}} \right)$$

Recorrendo à calculadora, tem-se:

$$\left(\hat{u}, \hat{v} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{4}{\sqrt{30}} \right) \approx 43,09^\circ$$

58. $r: (x, y, z) = (1, 0, -2) + k(-1, 1, 3), k \in \mathbb{R}$

As coordenadas de qualquer ponto da reta r são do tipo $(1-k, k, -2+3k)$.

58.1. $P \in r$, logo $P(1-k, k, -2+3k)$.

$$xOz: y = 0$$

Como $P \in xOz$, tem-se: $k = 0$

Então, $P(1, 0, -2)$.



58.2. $P \in r$, logo $P(1-k, k, -2+3k)$.

$$xOy : z = 0$$

Como $P \in xOy$, tem-se: $-2+3k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$

Então, $P\left(1-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -2+3 \times \frac{2}{3}\right)$, ou seja,

$$P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right).$$

58.3. $P \in r$, logo $P(1-k, k, -2+3k)$.

Como P pertence ao plano definido por $2x-y-z=3$, tem-se:

$$2(1-k) - k - (-2+3k) = 3 \Leftrightarrow 2-2k-k+2-3k = 3$$

$$\Leftrightarrow -6k = -1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$$

Então, $P\left(1-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -2+3 \times \frac{1}{6}\right)$, ou seja,

$$P\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{3}{2}\right).$$

58.4. $P \in r$, logo $P(1-k, k, -2+3k)$.

Como P pertence ao plano definido por $y+2z=-1$, tem-se:

$$k + 2(-2+3k) = -1 \Leftrightarrow k - 4 + 6k = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{7}$$

Então, $P\left(1-\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, -2+3 \times \frac{3}{7}\right)$, ou seja,

$$P\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{5}{7}\right).$$

Página 140

59.1. $\alpha : 2x+3y-2z+5=0$

Um vetor normal a $\alpha : \vec{u}_\alpha(2, 3, -2)$

$$\beta : -3x-9y+3z-1=0$$

Um vetor normal a $\beta : \vec{v}_\beta(-3, -9, 3)$

Os vetores \vec{u}_α e \vec{v}_β não são colineares, pois

não existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}_\beta = k\vec{u}_\alpha$.

$$\vec{v}_\beta = k\vec{u}_\alpha \Leftrightarrow (-3, -9, 3) = k(2, 3, -2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3, -9, 3) = (2k, 3k, -2k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -3 \\ 3k = -9 \\ -2k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{3}{2} \\ k = -3 \\ k = -\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \text{Impossível}$$

Como \vec{u}_α e \vec{v}_β não são colineares, então os planos α e β não são paralelos.

59.2. $\theta : x+3y-z=0$

Um vetor normal a $\theta : \vec{w}_\theta(1, 3, -1)$

De 59.1. já sabemos que o vetor $\vec{v}_\beta(-3, -9, 3)$ é normal a β .

Como $\vec{v}_\beta = -3\vec{w}_\theta$, então os vetores \vec{v}_β e \vec{w}_θ são colineares.

Então, os planos β e θ são paralelos.

60. $\alpha : -4x+2z+1=0$ e $P(-1, 2, -3)$

60.1. Um vetor normal a $\alpha : \vec{n}(-4, 0, 2)$

Sendo $r \perp \alpha$, então $\vec{n}(-4, 0, 2)$ é um vetor diretor da reta r .

Como $P \in r$, então uma equação vetorial da reta r é: $(x, y, z) = (-1, 2, -3) + k(-4, 0, 2)$, $k \in \mathbb{R}$

60.2. Se β é paralelo a α , então $\vec{n}(-4, 0, 2)$,

sendo normal ao plano α , também é normal ao plano β .

Assim sendo, uma equação do plano β é do tipo $-4x+2z+d=0$.

Como $P(-1, 2, -3)$ pertence ao plano β , tem-se:

$$-4 \times (-1) + 2 \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow 4 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$$

$$\beta : -4x+2z+2=0 \Leftrightarrow -2x+z+1=0$$

61. $\alpha : 3x-2y+z+7=0$

Um vetor normal a $\alpha : \vec{u}_\alpha(3, -2, 1)$

$$\beta : -6x+ky-2kz+3=0, k \in \mathbb{R}$$

Um vetor normal a $\beta : \vec{v}_\beta(-6, k, -2k)$



Os planos α e β são paralelos se os vetores

\vec{u}_α e \vec{v}_β forem colineares.

$$\text{Ora, } \frac{-6}{3} = -2, \frac{k}{-2} = -\frac{k}{2} \text{ e } \frac{-2k}{1} = -2k.$$

Os vetores seriam colineares se

$$-\frac{k}{2} = -2 \wedge -2k = -2, \text{ ou seja, } k = 4 \wedge k = 1, \text{ o}$$

que é impossível.

Como os vetores \vec{u}_α e \vec{v}_β não são colineares, então, para qualquer número real k , os planos α e β não são paralelos.

Página 141

62.1. $\alpha: x+3z=1$ e $\theta: 2x+y-z+3=0$

Um vetor normal a $\alpha: \vec{u}_\alpha(1, 0, 3)$

Um vetor normal a $\theta: \vec{v}_\theta(2, 1, -1)$

Os vetores \vec{u}_α e \vec{v}_θ não são colineares, pois

$$\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{3}{-1}.$$

Então, os planos α e θ não são paralelos.

62.2. $A \in Ox$, logo $A(x, 0, 0)$

Como $A \in \alpha$, então tem-se: $x+3 \times 0 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$A(1, 0, 0)$

Como o plano β é paralelo a θ , então é definido por uma equação do tipo $2x+y-z+d=0$.

Como $A \in \beta$, tem-se:

$$2 \times 1 + 0 - 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Uma equação do plano β é: $2x+y-z-2=0$.

63. $\alpha: -x+y+2z=0$

$V(0, 2, 5)$

$AV: (x, y, z) = (-3, 7, 7) + k(-3, 5, 2), k \in \mathbb{R}$

63.1. $\beta \parallel \alpha$ e $V \in \beta$

Como o plano β é paralelo a α , então é definido por uma equação do tipo: $-x+y+2z+d=0$.

$V \in \beta$, logo:

$$-0 + 2 + 2 \times 5 + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 10 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

Uma equação cartesiana do plano β é:

$$-x + y + 2z - 12 = 0.$$

63.2. A é um ponto da reta AV , logo as suas coordenadas são do tipo $(-3-3k, 7+5k, 7+2k)$.

Como A pertence ao plano α , tem-se:

$$-(-3-3k) + (7+5k) + 2(7+2k) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3k + 7 + 5k + 14 + 4k = 0 \Leftrightarrow 12k = -24 \Leftrightarrow k = -2$$

$A(-3-3 \times (-2), 7+5 \times (-2), 7+2 \times (-2))$, ou seja,

$A(3, -3, 3)$

Página 142

64. $\alpha: 2x+y-z-5=0$ e $A(2, 1, -3)$

Um vetor normal ao plano $\alpha: \vec{n}(2, 1, -1)$

Sendo $t \perp \alpha$, então o vetor $\vec{n}(2, 1, -1)$ é um vetor diretor da reta t .

Como $A \in t$, então uma equação vetorial da reta t

é: $(x, y, z) = (2, 1, -3) + k(2, 1, -1), k \in \mathbb{R}$.

65.1. a) $\alpha: 3x-y+z+3=0$

$$\beta: -2x+y-z-1=0$$

Um vetor normal ao plano $\alpha: \vec{u}(3, -1, 1)$

Um vetor normal ao plano $\beta: \vec{v}(-2, 1, -1)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -1, 1) \cdot (-2, 1, -1) = -6 - 1 - 1 = -8$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, então os vetores \vec{u} e \vec{v} não são perpendiculares.

Logo, os planos α e β não são perpendiculares.

b) $\beta: -2x+y-z-1=0$

$$\theta: -4x-3y+5z=0$$

Um vetor normal ao plano $\beta: \vec{v}(-2, 1, -1)$

Um vetor normal ao plano $\theta: \vec{w}(-4, -3, 5)$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-2, 1, -1) \cdot (-4, -3, 5) = 8 - 3 - 5 = 0$$

Então, $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Assim sendo, os planos β e θ são perpendiculares.



65.2. A: ponto de interseção do plano α com o eixo

Oy

$A \in Oy$, logo $A(0, y, 0)$.

Como $A \in \alpha$, tem-se:

$$3 \times 0 - y + 0 + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$$

$A(0, 3, 0)$

$\vec{v}(-2, 1, -1)$ é um vetor normal ao plano β .

Sendo $r \perp \beta$, então o vetor \vec{v} é diretor da reta r .

Como $A \in r$, então uma equação vetorial da reta r

é: $(x, y, z) = (0, 3, 0) + k(-2, 1, -1)$, $k \in \mathbb{R}$

4.1. Como o plano α é perpendicular à reta OB , então o vetor \overline{OB} , sendo vetor diretor da reta OB , é um vetor normal ao plano α .

$$\overline{OB} = B - O = (4, 4, 0) - (0, 0, 0) = (4, 4, 0)$$

Uma equação do plano α é do tipo

$$4x + 4y + d = 0.$$

Como $D\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$ pertence ao plano α , tem-se:

$$4 \times 3 + 4 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow 12 + 12 + d = 0 \Leftrightarrow d = -24$$

$$4x + 4y - 24 = 0 \Leftrightarrow x + y - 6 = 0$$

$$\alpha: x + y - 6 = 0$$

Página 143 – Tarefa 8

1. $A \in Ox$, logo $A(x, 0, 0)$.

Como A pertence à reta AV , tem-se:

$$(x, 0, 0) = (0, 4, 10) + k\left(-1, 1, \frac{5}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 - k \\ 0 = 4 + k \\ 0 = 10 + \frac{5}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ k = -4 \\ k = -4 \end{cases}$$

Então $A(4, 0, 0)$.

2. $B(4, 4, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $V(2, 2, 5)$ e

$$D\left(3, 3, \frac{5}{2}\right).$$

Cálculo auxiliar:

Como D é o ponto médio da aresta $[BV]$ sabe-se

que $D\left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{0+5}{2}\right)$, ou seja, $D\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$.

3.1. Como o plano θ é paralelo à base da pirâmide e passa em D , então G é o ponto médio de $[AV]$.

$$G\left(\frac{4+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+5}{2}\right), \text{ ou seja, } G\left(3, 1, \frac{5}{2}\right).$$

3.2. O quadrilátero $[DEFG]$ é um quadrado.

$$\overline{DG} = \sqrt{(3-3)^2 + (3-1)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{0+4+0} = 2$$

Então, $P_{[DEFG]} = 4\overline{DG} = 4 \times 2 = 8$.

4.2. a) $R \in [AB]$, logo $R(4, y, 0)$ e $0 < y < 4$.

$$R \in \alpha, \text{ então: } 4 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

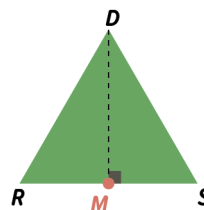
$R(4, 2, 0)$

$S \in [BC]$, logo $S(x, 4, 0)$ e $0 < x < 4$

$$S \in \alpha, \text{ então: } x + 4 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$S(2, 4, 0)$

b)



$$\overline{RS} = \sqrt{(4-2)^2 + (2-4)^2 + (0-0)^2} \\ = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

M : ponto médio de $[RS]$

$$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right), \text{ ou seja, } M(3, 3, 0).$$

$$\overline{DM} = \frac{5}{2} \text{ e } \overline{DR} = \overline{DS}$$

$$A_{[DRS]} = \frac{\overline{RS} \times \overline{DM}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{5}{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Página 144 – Prática

66. $A(2, -1, 3)$ e $B(-4, 1, -1)$

$$\alpha: x + 2y - z + 3 = 0$$

$$\beta: -3x + y - 2z + 5 = 0$$



66.1. a) Um vetor normal ao plano α : $\vec{u}(1, 2, -1)$

Um vetor normal ao plano β : $\vec{v}(-3, 1, -2)$

Como $\frac{-3}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1}$, os vetores \vec{u} e \vec{v} não são colineares.

Logo, os planos α e β não são paralelos.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, -1) \cdot (-3, 1, -2) = -3 + 2 + 2 = 1$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, os vetores \vec{u} e \vec{v} não são perpendiculares.

Logo, os planos α e β não são paralelos.

66.2. $\overline{AB} = B - A = (-4, 1, -1) - (2, -1, 3) =$

$$= (-6, 2, -4)$$

\overline{AB} é um vetor diretor da reta AB .

$\vec{v}(-3, 1, -2)$ é um vetor normal ao plano β .

Como $\overline{AB} = 2\vec{v}$, os vetores \overline{AB} e \vec{v} são colineares.

Donde se conclui que a reta AB é perpendicular ao plano β .

67. α : $x + 2y + 4z = 23$ e $B(2, 2, -1)$

67.1. O plano θ é paralelo ao plano α , logo é definido por uma equação do tipo $x + 2y + 4z + d = 0$.

Como $B \in \theta$, tem-se:

$$2 + 2 \times 2 + 4 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 4 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Uma equação cartesiana do plano θ é

$$x + 2y + 4z - 2 = 0.$$

67.2. A reta AB é perpendicular ao plano α .

O vetor $\vec{u}(1, 2, 4)$ é normal ao plano α , logo é um vetor diretor da reta AB .

Como B pertence à reta AB , então uma equação vetorial da reta AB é:

$$(x, y, z) = (2, 2, -1) + k(1, 2, 4), \quad k \in \mathbb{R}$$

67.3. Como $A \in AB$, então $A(2+k, 2+2k, -1+4k)$.

Sabe-se, ainda, que $A \in \alpha$, logo:

$$2 + k + 2(2 + 2k) + 4(-1 + 4k) = 23$$

$$\Leftrightarrow 2 + k + 4 + 4k - 4 + 16k = 23 \Leftrightarrow 21k = 21 \Leftrightarrow k = 1$$

Então, $A(3, 4, 3)$.

68. β : $x - 2z + 4 = 0$

68.1. $A \in Ox$, logo $A(x, 0, 0)$.

Como $A \in \beta$, tem-se: $x - 2 \times 0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

Então, $A(-4, 0, 0)$.

$B \in Oz$, logo $B(0, 0, z)$.

Como $B \in \beta$, tem-se:

$$0 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow -2z = -4 \Leftrightarrow z = 2$$

Então, $B(0, 0, 2)$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4}$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$V_{\text{cubo}} = (\overline{AB})^3 = (2\sqrt{5})^3 = (2\sqrt{5})^2 \times (2\sqrt{5})$$

$$= (4 \times 5) \times (2\sqrt{5}) = 20 \times 2\sqrt{5} = 40\sqrt{5}$$

68.2. Se o plano é perpendicular à reta AB , então \overline{AB} é um vetor normal ao plano.

$$\overline{AB} = B - A = (0, 0, 2) - (-4, 0, 0) = (4, 0, 2)$$

a) Vetor normal ao plano: $\overline{AB}(4, 0, 2)$

Ponto do plano: $A(-4, 0, 0)$

Equação do plano:

$$4(x+4) + 0(y-0) + 2(z-0) = 0$$

b) Vetor normal ao plano: $\overline{AB}(4, 0, 2)$

Ponto do plano: $B(0, 0, 2)$

Equação do plano:

$$4(x-0) + 0(y-0) + 2(z-2) = 0$$

69. θ : $-y + 3z = 5$ e $P(3, -1, 2)$

Um vetor normal ao plano θ é: $\vec{u}(0, -1, 3)$

- Como P não pertence ao plano de equação $x = 5$, a opção (A) está excluída.

- (B) α_1 : $x + 2y + z = 3$

Um vetor normal a α_1 : $\vec{n}_1(1, 2, 1)$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = (1, 2, 1) \cdot (0, -1, 3) = 0 - 2 + 3 = 1$$

Como $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} \neq 0$, os vetores \vec{n}_1 e \vec{u} não são perpendiculares.

Então, os planos θ e α_1 não são perpendiculares.

A opção (B) está excluída.



- (C) $\alpha_2: 3y + z = -1$

Um vetor normal a α_2 : $\vec{n}_2(0, 3, 1)$

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{u} = (0, 3, 1) \cdot (0, -1, 3) = 0 - 3 + 3 = 0, \text{ logo}$$

$$\vec{n}_2 \perp \vec{u}.$$

Assim sendo, os planos θ e α_2 são perpendiculares.

$$P \in \alpha_2, \text{ porque } 3 \times (-1) + 2 = -1.$$

Logo, a opção correta é a (C).

Página 145 – Prática

70. $B(4, 4, 0)$ e $E(0, 0, 4)$

$$RST: \frac{3}{2}x + y + 3z - 19 = 0$$

O polígono que resulta da interseção do plano RST com o cubo é o triângulo $[RST]$.

$$R \in [FG], \text{ logo } R(4, y, 4) \text{ e } 0 \leq y \leq 4.$$

Como R pertence ao plano RST , tem-se:

$$\frac{3}{2} \times 4 + y + 3 \times 4 - 19 = 0 \Leftrightarrow 6 + y + 12 - 19 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

$$R(4, 1, 4)$$

$$S \in [BG], \text{ logo } S(4, 4, z) \text{ e } 0 \leq z \leq 4.$$

Como S pertence ao plano RST , tem-se:

$$\frac{3}{2} \times 4 + 4 + 3z - 19 = 0 \Leftrightarrow 6 + 4 + 3z - 19 = 0 \Leftrightarrow z = 3$$

$$S(4, 4, 3)$$

$$T \in [GD], \text{ logo } T(x, 4, 4) \text{ e } 0 \leq x \leq 4.$$

Como T pertence ao plano RST , tem-se:

$$\frac{3}{2}x + 4 + 3 \times 4 - 19 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x + 4 + 12 - 19 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$T(2, 4, 4)$$

$$P_{[RST]} = \overline{RS} + \overline{RT} + \overline{ST}$$

$$\overline{RS} = \sqrt{(4-4)^2 + (1-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{0+9+1} = \sqrt{10}$$

$$\overline{RT} = \sqrt{(4-2)^2 + (1-4)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}$$

$$\overline{ST} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-4)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$$

$$\text{Então, } P_{[RST]} = \sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{5} \approx 9.$$

A medida do perímetro do polígono que resulta da interseção do plano RST com o cubo é, aproximadamente, igual a 9.

71. $B(1, 3, -2)$ e r :

$$(x, y, z) = (0, 1, 2) + k(2, -1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Como $P \in r$, então $P(2k, 1-k, 2+k)$.

\overline{BP} é o menor possível se $BP \perp r$.

$$\overline{BP} = P - B = (2k, 1-k, 2+k) - (1, 3, -2)$$

$$= (2k-1, -k-2, k+4)$$

Um vetor diretor da reta r : $\vec{r}(2, -1, 1)$

$$BP \perp r \Leftrightarrow \overline{BP} \perp \vec{r} \Leftrightarrow \overline{BP} \cdot \vec{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2k-1, -k-2, k+4) \cdot (2, -1, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2k-1) + -1(-k-2) + 1(k+4) = 0$$

$$4k - 2 + k + 2 + k + 4 = 0 \Leftrightarrow 6k = -4 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Então, } P\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Página 146

72.1. Por exemplo, BC e BD .

72.2. Por exemplo, AF e BD .

72.3. Por exemplo, a reta AF é estritamente paralela ao plano BCD .

72.4. AFE e BCD

72.5. Por exemplo, AFE e AFD .

72.6. Por exemplo, a reta CF é concorrente não perpendicular ao plano AFE .

72.7. Por exemplo, a reta AB é perpendicular ao plano BCD .

72.8. Por exemplo, a reta AE é aposta ao plano AFE .

Página 147

73. $\beta: x - 3y + 2z = 2$

O vetor $\vec{u}(1, -3, 2)$ é normal ao plano β .

- 73.1. $r: (x, y, z) = (3, 1, 4) + k(2, 0, -1), k \in \mathbb{R}$

O vetor $\vec{r}(2, 0, -1)$ tem a direção da reta r .

$$\vec{r} \cdot \vec{u} = (2, 0, -1) \cdot (1, -3, 2) = 2 + 0 - 2 = 0$$



Como $\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$, então a reta r é paralela ao plano β .

Resta saber se r é estritamente paralela a β ou se está contida em β .

Para tal, basta verificar se um ponto da reta r pertence ao plano β .

$A(3, 1, 4)$ pertence à reta r e não pertence ao plano β , pois $3 - 3 \times 1 + 2 \times 4 = 2$ é falso.

Assim, a reta r é estritamente paralela ao plano β .

73.2. $r: (x, y, z) = (5, 1, 0) + k(3, 1, 1), k \in \mathbb{R}$

O vetor $\vec{r}(3, 1, 1)$ tem a direção da reta r .

$$\vec{r} \cdot \vec{u} = (3, 1, 1) \cdot (1, -3, 2) = 3 - 3 + 2 = 2.$$

Como $\vec{r} \cdot \vec{u} \neq 0$, a reta r não é paralela ao plano β .

Logo, a reta r é concorrente com o plano β .

Resta saber se r é perpendicular ou oblíqua ao plano β .

Para tal, basta verificar se os vetores \vec{r} e \vec{u} são colineares, ou seja, se $\exists k \in \mathbb{R} : \vec{r} = k\vec{u}$.

$$\vec{r} = k\vec{u} \Leftrightarrow (3, 1, 1) = k(1, -3, 2)$$

$$\Leftrightarrow (3, 1, 1) = (k, -3k, 2k)$$

$$\Leftrightarrow 3 = k \wedge 1 = -3k \wedge 1 = 2k \rightarrow \text{Impossível}$$

Assim, a reta r é concorrente oblíqua ao plano β .

73.3. $r: (x, y, z) = (4, 2, 2) + k(1, 1, 1), k \in \mathbb{R}$

O vetor $\vec{r}(1, 1, 1)$ tem a direção da reta r .

$$\vec{r} \cdot \vec{u} = (1, 1, 1) \cdot (1, -3, 2) = 1 - 3 + 2 = 0$$

Como $\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$, então a reta r é paralela ao plano β .

Resta saber se r é estritamente paralela a β ou se está contida em β .

$A(4, 2, 2)$ pertence à reta r e pertence ao plano β , pois $4 - 3 \times 2 + 2 \times 2 = 2$ é verdadeiro.

Assim sendo, a reta r está contida no plano β .

74. $\alpha: x - 2y + z = 6$ e $A(3, -1, -4)$

74.1. a) Se a reta é perpendicular ao plano xOy ,

então um vetor diretor da reta é, por exemplo,

$$\vec{u}(0, 0, 1).$$

Uma equação vetorial da reta que passa em A e é perpendicular ao plano xOy é:

$$(x, y, z) = (3, -1, -4) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$$

b) Se a reta é perpendicular ao plano xOz , então o vetor $\vec{v}(0, 1, 0)$ tem a direção da reta.

Uma equação vetorial da reta que passa em A e é perpendicular ao plano xOz é:

$$(x, y, z) = (3, -1, -4) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$$

c) Se a reta é perpendicular ao plano yOz , então o vetor $\vec{w}(1, 0, 0)$ tem a direção da reta.

Uma equação vetorial da reta que passa em A e é perpendicular ao plano yOz é:

$$(x, y, z) = (3, -1, -4) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$$

d) Um vetor normal ao plano α é: $\vec{n}(1, -2, 1)$.

Se a reta r é perpendicular ao plano α , então o vetor $\vec{n}(1, -2, 1)$ tem a direção da reta.

Uma equação vetorial da reta que passa em A e é perpendicular ao plano α é:

$$(x, y, z) = (3, -1, -4) + k(1, -2, 1), k \in \mathbb{R}$$

74.2. $\overline{AB} = B - A = (k^2, 1, -2k) - (3, -1, -4)$

$$= (k^2 - 3, 2, -2k + 4)$$

Um vetor normal ao plano α é: $\vec{n}(1, -2, 1)$.

Como a reta AB é paralela ao plano α , então os vetores \overline{AB} e \vec{n} são perpendiculares.

$$\overline{AB} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 3, 2, -2k + 4) \cdot (1, -2, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 3 - 4 - 2k + 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Leftrightarrow k = 3 \vee k = -1$$

Se $k = 3$, então $B(9, 1, -6)$.

Se $k = -1$, então $B(1, 1, 2)$.

Conclusão: $B(9, 1, -6)$ ou $B(1, 1, 2)$

Página 148 – Tarefa 9

$$\alpha: -4x + y - z + 3 = 0; \theta: z = 2$$

1. $A(2, -1, 3)$



1.1. $A \notin \theta$, porque a cota do ponto A não é igual a 2.

1.2. **Etapa 1:** r : reta que passa em A e é perpendicular a θ

$\vec{n}(0, 0, 1)$ é um vetor normal ao plano θ .

Como $r \perp \theta$, então $\vec{n}(0, 0, 1)$ é um vetor diretor da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (2, -1, 3) + k(0, 0, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Etapa 2: Qualquer ponto da reta r é da forma $(2, -1, 3+k)$.

Seendo T o ponto de interseção da reta r com o plano θ , então $T(2, -1, 3+k)$ e $3+k=2$.

$$3+k=2 \Leftrightarrow k=-1$$

Então, $T(2, -1, 2)$

$$\begin{aligned} \text{Etapa 3: } \overline{AT} &= \sqrt{(2-2)^2 + (-1+1)^2 + (3-2)^2} = \\ &= \sqrt{0+0+1} = 1 \end{aligned}$$

A distância do ponto A ao plano θ é igual a 1.

2. $B(1, -2, 3)$

2.1. $B \in \alpha$, pois $-4 \times 1 + (-2) - 3 + 3 = 0$ é falso.

Seja r a reta que passa em B e é perpendicular a α .

$\vec{u}(-4, 1, -1)$ é um vetor normal ao plano α .

Como $r \perp \alpha$, então $\vec{u}(-4, 1, -1)$ tem a direção da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (1, -2, 3) + k(-4, 1, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Seja T o ponto de interseção da reta r com o plano α .

Como $T \in r$, então $T(1-4k, -2+k, 3-k)$.

$T \in \alpha$, logo:

$$-4(1-4k) + (-2+k) - (3-k) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 + 16k - 2 + k - 3 + k + 3 = 0 \Leftrightarrow 18k = 6 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Então, $T\left(1-4 \times \frac{1}{3}, -2+\frac{1}{3}, 3-\frac{1}{3}\right)$, ou seja,

$$T\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} \overline{BT} &= \sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-2+\frac{5}{3}\right)^2 + \left(3-\frac{8}{3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

A distância do ponto B ao plano α é $\sqrt{2}$.

2.2. $B \notin \theta$, porque $z_B = 3$ e o plano θ é formado por todos os pontos de cota igual a 2.

Seja s a reta que passa em B e é perpendicular a θ .

Uma equação vetorial da reta s é:

$$(x, y, z) = (1, -2, 3) + k(0, 0, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Seja T_1 o ponto de interseção da reta s com o plano θ .

Como $T_1 \in s$, então $T_1(1, -2, 3+k)$.

$T_1 \in \theta$, logo: $3+k=2 \Leftrightarrow k=-1$

Então, $T_1(1, -2, 2)$.

$$\overline{BT_1} = \sqrt{(1-1)^2 + (-2+2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{0+0+1} = 1$$

A distância do ponto B ao plano θ é 1.

3. $C(0, 1, -2)$

Para sabermos se o ponto C está mais próximo do plano α ou do plano θ , temos de calcular a distância de C a cada um dos planos.

Distância de C ao plano α :

Seja r a reta que passa em C e é perpendicular a α .

Como $r \perp \alpha$, então $\vec{u}(-4, 1, -1)$, vetor normal a α , é um vetor diretor da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (0, 1, -2) + k(-4, 1, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Seja T o ponto de interseção da reta r com o plano α .

Como $T \in r$, então $T(-4k, 1+k, -2-k)$.

$T \in \alpha$, logo:

$$-4(-4k) + (1+k) - (-2-k) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16k + 1 + k + 2 + k + 3 = 0 \Leftrightarrow 18k = -6$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$$



$$\text{Então, } T\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} \overline{CT} &= \sqrt{\left(0 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(-2 + \frac{5}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

A distância do ponto C ao plano α é $\sqrt{2}$.

Distância de C ao plano θ :

Como $C(0, 1, -2)$ e $\theta: z = 2$, então a distância

de C ao plano θ é igual a $\overline{CC'}$, sendo

$$C'(0, 1, -2).$$

$$\text{Ora, } \overline{CC'} = \sqrt{(0-0)^2 + (1-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

A distância de C ao plano θ é 4.

Conclusão: O ponto C está mais próximo do plano α .

Página 149 – Tarefa 10

$$V\left(2, 2, \frac{3}{2}\right) \rightarrow \text{Vértice do cone}$$

$$\text{VS: } (x, y, z) = (2, 1, -1) + k\left(0, 1, \frac{5}{2}\right), \quad k \in \mathbb{R}$$

$z = 9 \rightarrow$ Equação do plano que contém a base do cone.

1. O centro da base do cone é o ponto V' , projeção ortogonal de V sobre o plano que contém a base do cone (plano de equação $z = 9$).

Então, $V'(2, 2, 9)$.

$$\text{Altura do cone: } \overline{VV'} = 9 - \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$T \text{ pertence à reta VS, logo } T\left(2, 1+k, -1+\frac{5}{2}k\right).$$

Como T também pertence ao plano de equação $z = 9$, então tem-se:

$$-1 + \frac{5}{2}k = 9 \Leftrightarrow \frac{5}{2}k = 10 \Leftrightarrow k = 4$$

Logo, $T(2, 5, 9)$.

Seja r o raio da base do cone.

$$r = \overline{V'T} = 3$$

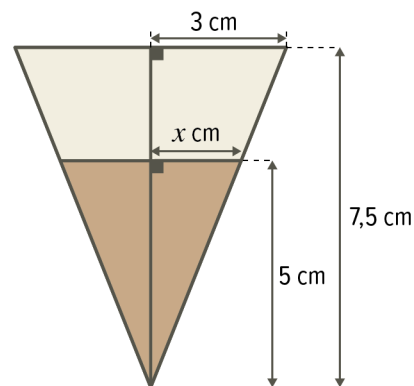
$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times \frac{15}{2} = \frac{45}{2} \pi$$

$$V_{\text{cone}} \approx 70,686 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cone}} \approx 0,070686 \text{ dm}^3$$

$$V_{\text{cone}} \approx 0,071 \text{ L}$$

2. Atendendo à semelhança de triângulos, sabe-se que:



$$\frac{5}{7,5} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5 \times 3}{7,5} \Leftrightarrow x = 2$$

$$V_{\text{café}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 5 = \frac{20}{3} \pi \text{ cm}^3$$

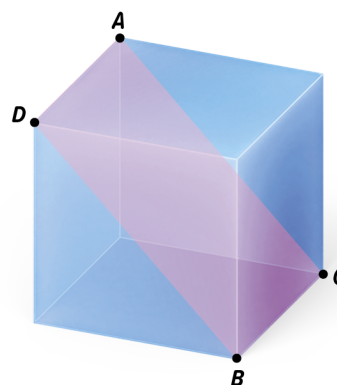
$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$$

Então, $V_{\text{café}} \approx 20,9 \text{ mL}$

Ao Ivo foi servido, aproximadamente, 20,9 mL de café.

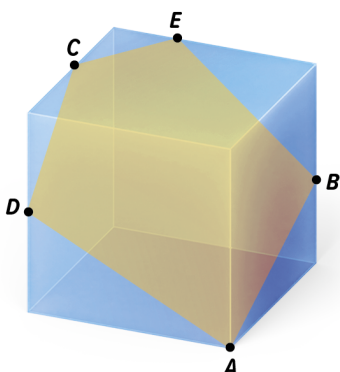
Página 150 – Tarefa 11

- 1.1. O polígono que resulta da construção da secção produzida no cubo pelo plano ABC é o retângulo $[ABCD]$.





- 1.2. O polígono que resulta da construção da secção produzida no cubo pelo plano ABC é o pentágono $[ABECD]$.



2. O plano que produz uma secção no cubo que seja um quadrado tem de ser um plano paralelo a uma face do cubo e que intersekte o cubo.

3. $V_{\text{cubo}} = 512 \text{ cm}^3$

a : aresta do cubo

$$a^3 = 512 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{512} \Leftrightarrow a = 8$$

O corte produzido no cubo pelo plano ABC divide-o em dois sólidos: um prisma triangular e um prisma quadrangular.

Prisma triangular:

$$V = A_{\text{base}} \times h = \frac{4 \times 8}{2} \times 8 = 128, \text{ ou seja, } 128 \text{ cm}^3$$

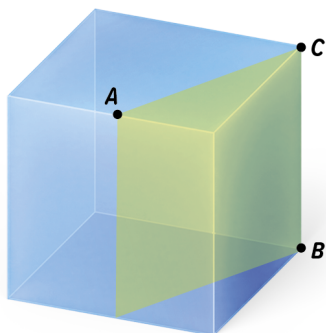
Prisma quadrangular:

$$V = V_{\text{cubo}} - V_{\text{prisma triangular}} = 512 - 128 = 384, \text{ ou seja,}$$

$$384 \text{ cm}^3.$$

O volume de cada uma das partes é 128 cm^3 e

$$384 \text{ cm}^3.$$



Página 151 – Tarefa 11

4.1. $H(4, 3, 4)$

a) $I(4, 4, 3)$, $J(3, 4, 4)$ e $G(4, 4, 4)$

b) $\overline{HI} = \sqrt{(4-4)^2 + (3-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

Como o $\Delta[HIJ]$ é equilátero, então:

$$P_{[HIJ]} = 3\overline{HI} = 3\sqrt{2}$$

c) $\overline{OG} = G - O = (4, 4, 4) - (0, 0, 0) = (4, 4, 4)$

Como \overline{OG} é um vetor normal ao plano HIJ , então uma equação do plano HIJ é do tipo $4x + 4y + 4z + d = 0$.

O ponto $H(4, 3, 4)$ pertence ao plano HIJ , logo tem-se:

$$4 \times 4 + 4 \times 3 + 4 \times 4 + d = 0 \Leftrightarrow 16 + 12 + 16 + d = 0 \Leftrightarrow d = -44$$

$$HIJ: 4x + 4y + 4z - 44 = 0, \text{ ou seja, } x + y + z - 11 = 0$$

4.2. $L(4, 4, 1)$

Como K e M são pontos médios das arestas a que pertencem, então $K(4, 2, 4)$ e $M(2, 4, 4)$.

$$V_{[KMLG]} = \frac{1}{3} \times A_{[KGM]} \times \overline{GL} = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times 3 = 2$$

Página 152 – Consolida

1. $A(3, 4, -1)$ e $B(2, -5, 6)$

- 1.1. α : plano que passa em A e admite \overline{AB} como vetor normal

$$\overline{AB} = B - A = (2, -5, 6) - (3, 4, -1) = (-1, -9, 7)$$

Uma equação do plano α é do tipo

$$-x - 9y + 7z + d = 0.$$

Como $A \in \alpha$, tem-se:

$$-3 - 9 \times 4 + 7 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow -3 - 36 - 7 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = 46$$

Uma equação cartesiana do plano α é

$$-x - 9y + 7z + 46 = 0.$$



- 1.2. β : plano que passa em B e admite \overline{AB} como vetor normal

Uma equação do plano β é do tipo

$$-x - 9y + 7z + d = 0.$$

Como $B \in \beta$, tem-se:

$$-2 - 9 \times (-5) + 7 \times 6 + d = 0 \Leftrightarrow -2 + 45 + 42 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -85$$

Uma equação cartesiana do plano β é

$$-x - 9y + 7z - 85 = 0.$$

- 2.1. Sabe-se que \overline{AB} e \vec{u} são vetores perpendiculares.

$$\overline{AB} = B - A = (3, -4, 0) - (-1, 3, -1) = (4, -7, 1)$$

$$\overline{AB} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (4, -7, 1) \cdot (k, 5-k, -k) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4k - 7(5-k) + 1(-k) = 0 \Leftrightarrow 4k - 35 + 7k - k = 0$$

$$\Leftrightarrow 10k = 35 \Leftrightarrow k = \frac{7}{2}$$

A opção correta é a (D).

- 2.2. Se $k = \frac{7}{2}$, então $\vec{u} = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$.

Como \vec{u} é um vetor normal ao plano α , então uma equação cartesiana do plano α é do tipo

$$\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{7}{2}z + d = 0.$$

Como $A \in \alpha$, tem-se:

$$\frac{7}{2} \times (-1) + \frac{3}{2} \times 3 - \frac{7}{2} \times (-1) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2} + \frac{9}{2} + \frac{7}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{9}{2}$$

Uma equação cartesiana do plano α é

$$\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{7}{2}z - \frac{9}{2} = 0.$$

3. $P(2, 0, -5)$

- 3.1. Seja r a reta que passa em P e é perpendicular ao plano de equação $-2x + y - 3z = 5$.

O vetor $\vec{n}(-2, 1, -3)$ é normal ao plano.

Como a reta é perpendicular ao plano, então o

vetor \vec{n} tem a direção da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (2, 0, -5) + k(-2, 1, -3), k \in \mathbb{R}$$

- 3.2. Seja r a reta que passa em P e é perpendicular ao plano de equação $4y - 3z = 0$.

O vetor $\vec{n}(0, 4, -3)$ é normal ao plano.

Como a reta é perpendicular ao plano, então o

vetor \vec{n} tem a direção da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (2, 0, -5) + k(0, 4, -3), k \in \mathbb{R}$$

- 3.3. Seja r a reta que passa em P e é perpendicular ao plano de equação $z = 4$.

O vetor $\vec{n}(0, 0, 1)$ é normal ao plano.

Como a reta r é perpendicular ao plano, então o

vetor \vec{n} tem a direção da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (2, 0, -5) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$$

- 3.4. $z = x - y - z + 1 \Leftrightarrow -x + y + 2z - 1 = 0$

Seja r a reta que passa em P e é perpendicular ao plano de equação $-x + y + 2z - 1 = 0$.

O vetor $\vec{n}(-1, 1, 2)$ é normal ao plano.

Como a reta r é perpendicular ao plano, então o

vetor \vec{n} tem a direção da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (2, 0, -5) + k(-1, 1, 2), k \in \mathbb{R}$$

- 4.1. $2x - y + 3z = 7 \Leftrightarrow 2x - y - 7 + 3z = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x-0) - (y+7) + 3(z-0) = 0$$

Por exemplo, $\vec{n}(2, -1, 3)$ e $A(0, -7, 0)$.

- 4.2. $-x - y + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -1(x-0) - 1(y-0) + 2(z+2) = 0$$

Por exemplo, $\vec{n}(-1, -1, 2)$ e $A(0, 0, -2)$.

- 4.3. $x + z + 5 = 0 \Leftrightarrow 1(x-0) + 0(y-0) + 1(z+5) = 0$

Por exemplo, $\vec{n}(1, 0, 1)$ e $A(0, 0, -5)$.

5. $\vec{u}(4, -2, 7)$ é normal ao plano θ e tem a direção da reta r .

$A(2, -2, 0)$ pertence a θ e a r .

- 5.1. Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (2, -2, 0) + k(4, -2, 7), k \in \mathbb{R}$$



5.2. Uma equação do plano θ é do tipo

$$4x - 2y + 7z + d = 0$$

Como $A \in \theta$, tem-se:

$$4 \times 2 - 2 \times (-2) + 7 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow 8 + 4 + 0 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -12$$

Uma equação do plano θ é $4x - 2y + 7z - 12 = 0$.

- $Ox: y = 0 \wedge z = 0$

$$4x - 2 \times 0 + 7 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \therefore l_1(3, 0, 0)$$

- $Oy: x = 0 \wedge z = 0$

$$4 \times 0 - 2y + 7 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow y = -6 \therefore l_1(0, -6, 0)$$

- $Oz: x = 0 \wedge y = 0$

$$4 \times 0 - 2 \times 0 + 7z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{12}{7} \therefore l_1\left(0, 0, \frac{12}{7}\right)$$

O plano θ interseca os eixos coordenados nos pontos de coordenadas $(3, 0, 0)$, $(0, -6, 0)$ e

$$\left(0, 0, \frac{12}{7}\right).$$

5.3. O ponto $P(2k^2, k+1, -k)$ pertence ao plano θ

se:

$$4(2k^2) - 2(k+1) + 7(-k) - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8k^2 - 2k - 2 - 7k - 12 = 0 \Leftrightarrow 8k^2 - 9k - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 8 \times (-14)}}{16}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{9-23}{16} \vee k = \frac{9+23}{16} \Leftrightarrow k = -\frac{7}{8} \vee k = 2$$

6. $\vec{u}(-1, 3, 5)$ é um vetor normal ao plano α e $R(2, 4, -3)$ é um ponto desse plano.

6.1. A opção correta é a (C), pois $\overline{CR} \cdot \vec{u} = 0$.

$$\overline{CR} = R - C = (2, 4, -3) - (3, 1, -1) = (-1, 3, -2)$$

$$\overline{CR} \cdot \vec{u} = (-1, 3, -2) \cdot (-1, 3, 5) = 1 + 9 - 10 = 0$$

A, B e D não pertencem a α , porque $\overline{AR} \cdot \vec{u} \neq 0$, $\overline{BR} \cdot \vec{u} \neq 0$ e $\overline{DR} \cdot \vec{u} \neq 0$

6.2. $\overline{AB} = B - A = (-5, 0, 4) - (-3, -6, -6) = (-2, 6, 10)$

Os vetores \overline{AB} e \vec{u} são colineares, porque

$$\overline{AB} = 2\vec{u}.$$

Então, a reta AB é perpendicular ao plano α .

Os pontos que definem uma reta perpendicular a α são A e B .

6.3. Seja r a reta que passa na origem e é perpendicular a α .

Como $\vec{u}(-1, 3, 5)$ é normal a α e $r \perp \alpha$, então

\vec{u} é um vetor diretor da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(-1, 3, 5), k \in \mathbb{R}$$

Página 153 – Consolida

7. $A(3, -3, 1)$ e $B(1, 0, 2)$

7.1. O vetor \overline{AB} é normal ao plano ADE .

Uma equação do plano ADE é do tipo

$$-2x + 3y + z + d = 0.$$

Como A pertence ao plano ADE , tem-se:

$$-2 \times 3 + 3 \times (-3) + 1 + d = 0 \Leftrightarrow -6 - 9 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 14$$

$$ADE: -2x + 3y + z + 14 = 0$$

7.2. O plano mediador de $[FG]$ é paralelo ao plano ADE .

Então, uma equação desse plano é do tipo

$$-2x + 3y + z + d = 0.$$

O plano mediador de $[FG]$ passa no ponto médio de $[AB]$, cujas coordenadas são

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-3+0}{2}, \frac{1+2}{2}\right), \text{ ou seja, } \left(2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right). \text{ Logo,}$$

tem-se:

$$-2 \times 2 + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} + d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 - \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = 7$$

Uma equação cartesiana do plano mediador de

$$[FG] \text{ é } -2x + 3y + z + 7 = 0.$$

7.3. O plano GBC é paralelo ao plano ADE , logo é definido por uma equação do tipo

$$-2x + 3y + z + d = 0.$$

Como B pertence ao plano GBC , tem-se:

$$-2 \times 1 + 3 \times 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$



Uma equação cartesiana do plano GBC é
 $-2x + 3y + z = 0$.

7.4. $P(k^2, 1-2k, k+4)$ pertence ao plano GBC se:

$$\begin{aligned} -2(k^2) + 3(1-2k) + (k+4) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2k^2 + 3 - 6k + k + 4 &= 0 \Leftrightarrow -2k^2 - 5k + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-2) \times 7}}{-4} \Leftrightarrow k = \frac{5+9}{-4} \vee k = \frac{5-9}{-4} \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{7}{2} \vee k = 1 \end{aligned}$$

8. $\alpha: x + y - 2z + 3 = 0$ e $V(-1, 2, 5)$

8.1. O vetor $\vec{u}(1, 1, -2)$ é normal ao plano α .

Seja C o centro da base do cone e r a reta que passa em V e é perpendicular a α .

Como $r \perp \alpha$, então $\vec{u}(1, 1, -2)$ é um vetor diretor da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (-1, 2, 5) + k(1, 1, -2), \quad k \in \mathbb{R}$$

Como $C \in r$, então $C(-1+k, 2+k, 5-2k)$.

$C \in \alpha$, logo tem-se:

$$\begin{aligned} -1 + k + 2 + k - 2(5 - 2k) + 3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 + k + 2 + k - 10 + 4k + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6k &= 6 \Leftrightarrow k = 1 \end{aligned}$$

Então, $C(0, 3, 3)$.

8.2. Altura do cone:

$$\overline{VC} = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

A altura do cone é $\sqrt{6}$.

9. $r: (x, y, z) = (1, 5, -3) + k(0, -2, 1), \quad k \in \mathbb{R}$

$r \perp \alpha$

$A(1, 9, -5)$ é o ponto de interseção de α com r .

9.1. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(0, -2, 1)$.

Como $r \perp \alpha$, então $\vec{r}(0, -2, 1)$ é um vetor normal a α .

Uma equação do plano α é do tipo

$$-2y + z + d = 0.$$

Como $A \in \alpha$, tem-se:

$$-2 \times 9 + (-5) + d = 0 \Leftrightarrow -18 - 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = 23$$

Uma equação cartesiana do plano α é
 $-2y + z + 23 = 0$.

9.2. Com o plano β é paralelo a α , então é definido por uma equação do tipo $-2y + z + d = 0$.

O ponto de coordenadas $(1, 0, 8)$ pertence ao plano β , logo: $-2 \times 0 + 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$

Uma equação cartesiana do plano β é
 $-2y + z - 8 = 0$.

9.3. Como $r \perp \alpha$ e $\alpha \parallel \beta$, então $r \perp \beta$.

A reta r é perpendicular ao plano β .

9.4. Seja l o ponto de interseção da reta r com o plano β .

Como $l \in r$, então $l(1, 5 - 2k, -3 + k)$.

$l \in \beta$, logo: $-2(5 - 2k) + (-3 + k) - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -10 + 4k - 3 + k - 8 = 0 \Leftrightarrow 5k = 21 \Leftrightarrow k = \frac{21}{5}$$

Então, $l\left(1, 5 - 2 \times \frac{21}{5}, -3 + \frac{21}{5}\right)$, ou seja,

$$l\left(1, -\frac{17}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

10. $A(-5, 1, 0)$, $E(4, -2, 3)$ e $G(5, 0, 2)$

10.1. O vetor \overline{AE} é normal ao plano ABC .

$$\overline{AE} = E - A = (4, -2, 3) - (-5, 1, 0) = (9, -3, 3)$$

Uma equação cartesiana do plano ABC é do tipo
 $9x - 3y + 3z + d = 0$.

Como A pertence ao plano ABC , tem-se:

$$9 \times (-5) - 3 \times 1 + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 48$$

Uma equação cartesiana do plano ABC é

$$9x - 3y + 3z + 48 = 0.$$

Simplificando, tem-se $ABC: 3x - y + z + 16 = 0$.

10.2. Como o plano EFG é paralelo ao plano ABC ,

então uma equação do plano EFG é do tipo
 $3x - y + z + d = 0$.

Como G pertence ao plano EFG , tem-se:

$$3 \times 5 - 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -17$$

Uma equação cartesiana do plano EFG é

$$3x - y + z - 17 = 0.$$

10.3. $C = G + \overline{EA} = (5, 0, 2) + (-9, 3, -3) = (-4, 3, -1)$



Página 154 – Consolida

11.1. Um vetor normal ao plano θ : $\vec{u}(3, 2, -1)$

Um vetor diretor da reta r : $\vec{r}(1, -2, 5)$

$$\vec{r} \cdot \vec{u} = (1, -2, 5) \cdot (3, 2, -1) = 3 - 4 - 5 = -6$$

Como $\vec{r} \cdot \vec{u} \neq 0$, a reta r não é paralela ao plano θ .

Resta saber se a reta r é perpendicular ou oblíqua ao plano θ .

Para tal, vamos verificar se os vetores \vec{r} e \vec{u} são colineares.

\vec{r} e \vec{u} são colineares se $\exists k \in \mathbb{R} : \vec{r} = k\vec{u}$.

$$\vec{r} = k\vec{u} \Leftrightarrow (1, -2, 5) = k(3, 2, -1)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 3k \wedge -2 = 2k \wedge 5 = -k \rightarrow \text{Impossível}$$

Assim, a reta r é concorrente não perpendicular (oblíqua) ao plano θ .

A opção correta é a (D).

11.2. Plano xOy : $z = 0$

$$(x, y, 0) = (0, 2, 3) + k(1, -2, 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 2 - 2k \\ 0 = 3 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = 2 - 2\left(-\frac{3}{5}\right) \\ k = -\frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{16}{5} \\ k = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

A reta r intersesta o plano xOy no ponto de coordenadas $\left(-\frac{3}{5}, \frac{16}{5}, 0\right)$.

Plano xOz : $y = 0$

$$(x, 0, z) = (0, 2, 3) + k(1, -2, 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ 0 = 2 - 2k \\ z = 3 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 1 \\ z = 8 \end{cases}$$

A reta r intersesta o plano xOz no ponto de coordenadas $(1, 0, 8)$

Plano yOz : $x = 0$

$$(0, y, z) = (0, 2, 3) + k(1, -2, 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = k \\ y = 2 - 2k \\ z = 3 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

A reta r intersesta o plano yOz no ponto de coordenadas $(0, 2, 3)$.

12. $A(-1, 2, -3)$

$$(I) \quad -x + y - 2z + 15 = 0$$

$$(II) \quad x - y + 2z + 9 = 0$$

$$(III) \quad -x + y + z = 0$$

12.1. Como as equações (I) e (II) representam planos paralelos, conclui-se que a equação (III) corresponde ao plano ABG .

O ponto A pertence ao plano representado pela equação (III), pois $-1 - 2 + 2 \times (-3) + 9 = 0$ é verdadeiro.

Assim, a equação (II) corresponde ao plano ABC e a equação (I) corresponde ao plano FGH .

$$(I) \rightarrow FGH, (II) \rightarrow ABC \text{ e } (III) \rightarrow ABG.$$

12.2. F é o ponto de interseção da reta AF com o plano FGH .

$$FGH: -x + y - 2z + 15 = 0$$

Um vetor normal ao plano FGH é: $\vec{u}(-1, 1, -2)$

Como a reta AF é perpendicular ao plano FGH , então o valor $\vec{u}(-1, 1, -2)$ tem a direção da reta AF .

Uma equação vetorial da reta AF é:

$$(x, y, z) = (-1, 2, -3) + k(-1, 1, -2), \quad k \in \mathbb{R}$$

Como F pertence à reta AF , então:

$$F(-1-k, 2+k, -3-2k)$$

$F \in FGH$, logo:

$$-(-1-k) + (2+k) - 2(-3-2k) + 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+k+2+k+6+4k+15=0 \Leftrightarrow 6k=-24 \Leftrightarrow k=-4$$

Então, $F(3, -2, 5)$.

12.3. Altura do prisma:

$$\begin{aligned} \overline{AF} &= \sqrt{(-1-3)^2 + (2+2)^2 + (-3-5)^2} = \\ &= \sqrt{16+16+64} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

A altura do prisma é $4\sqrt{6}$.

13. $A(-4, 0, 5)$ e α : $x - 3y + 2z - 8 = 0$

Um vetor normal ao plano α é: $\vec{u}(1, -3, 2)$



O ponto A satisfaz qualquer uma das quatro condições.

Um vetor normal ao plano representado na condição (C) é $\vec{v}(-1, 3, 2)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -3, 2) \cdot (-1, 3, 2) = -1 - 9 + 4 = -6$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, então os planos α e β não são perpendiculares.

A condição que não pode definir o plano β é a (C).

14. $r: (x, y, z) = (4, 0, -1) + k(1, 3, -2), k \in \mathbb{R}$

$$\beta: 3x - 4y + z - 7 = 0$$

14.1. $V(2, y, z) \in r$, logo tem-se:

$$(2, y, z) = (4, 0, -1) + k(1, 3, -2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4 + k \\ y = 0 + 3k \\ z = -1 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ y = -6 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$V(2, -6, 3)$$

14.2. Seja s a reta que passa em V e é perpendicular ao plano β .

Um vetor normal ao plano β é: $\vec{u}(3, -4, 1)$.

Como $s \perp \beta$, então o vetor $\vec{u}(3, -4, 1)$ tem a direção da reta s .

Uma equação vetorial da reta s é:

$$(x, y, z) = (2, -6, 3) + k(3, -4, 1), k \in \mathbb{R}$$

Seja l o ponto de interseção da reta s com o plano β .

$$l \in s, \text{ logo } l(2 + 3k, -6 - 4k, 3 + k).$$

Como $l \in \beta$, tem-se:

$$3(2 + 3k) - 4(-6 - 4k) + (3 + k) - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 + 9k + 24 + 16k + 3 + k - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 26k = -26 \Leftrightarrow k = -1$$

Então, $l(-1, -2, 2)$.

A altura da pirâmide é dada por \overline{VI} .

$$\begin{aligned} \overline{VI} &= \sqrt{(2+1)^2 + (-6+2)^2 + (3-2)^2} = \\ &= \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26} \end{aligned}$$

A medida da altura da pirâmide é $\sqrt{26}$.

15. $F(4, 3, -1)$

$$BC: (x, y, z) = (1, 5, -1) + k(-2, 7, 3), k \in \mathbb{R}$$

15.1. B é o ponto de interseção das retas BC e BF .

Como B pertence à reta BC , então

$$B(1 - 2k, 5 + 7k, -1 + 3k).$$

$$\overline{BF} = F - B = (4, 3, -1) - (1 - 2k, 5 + 7k, -1 + 3k)$$

$$= (3 + 2k, -2 - 7k, -3k)$$

$\vec{u}(-2, 7, 3)$ é um vetor diretor da reta BC .

Como $BF \perp BC$, então $\overline{BF} \perp \vec{u}$, ou seja,

$$\overline{BF} \cdot \vec{u} = 0.$$

$$\overline{BF} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (3 + 2k, -2 - 7k, -3k) \cdot (-2, 7, 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(3 + 2k) + 7(-2 - 7k) + 3(-3k) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6 - 4k - 14 - 49k - 9k = 0 \Leftrightarrow -62k = 20$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{10}{31}$$

$$B\left(1 - 2\left(-\frac{10}{31}\right), 5 + 7\left(-\frac{10}{31}\right), -1 + 3\left(-\frac{10}{31}\right)\right), \text{ ou}$$

$$\text{seja, } B\left(\frac{51}{31}, \frac{85}{31}, -\frac{61}{31}\right).$$

15.2. Sendo $k = -\frac{10}{31}$, então $\overline{BF} = \left(\frac{73}{31}, \frac{8}{31}, \frac{30}{31}\right)$.

\overline{BF} é um vetor normal ao plano EFG .

Uma equação do plano EFG é do tipo

$$\frac{73}{31}x + \frac{8}{31}y + \frac{30}{31}z + d = 0.$$

Como F pertence ao plano EFG , tem-se:

$$\frac{73}{31} \times 4 + \frac{8}{31} \times 3 + \frac{30}{31} \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{292}{31} + \frac{24}{31} - \frac{30}{31} + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -\frac{286}{31}$$

Uma equação do plano EFG é

$$\frac{73}{31}x + \frac{8}{31}y + \frac{30}{31}z - \frac{286}{31} = 0$$

Simplificando, tem-se:

$$73x + 8y + 30z - 286 = 0$$



Página 155 – Consolida

16. $A(5, -2, 4)$

$$r: (x, y, z) = (4, 1, 2) + k(-3, 2, -1), k \in \mathbb{R}$$

16.1. Seja l o ponto de interseção da reta r com o plano yOz .

$$l(0, y, z)$$

Como $l \in r$, tem-se:

$$(0, y, z) = (4, 1, 2) + k(-3, 2, -1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4 - 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = 2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ y = 1 + 2 \times \frac{4}{3} \\ z = 2 - \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{11}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Então, } l\left(0, \frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

16.2. Seja α o plano perpendicular a r e que passa em A .

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(-3, 2, -1)$.

Como $\alpha \perp r$, então $\vec{r}(-3, 2, -1)$ é um vetor normal a α .

Uma equação do plano α é do tipo

$$-3x + 2y - z + d = 0.$$

Como $A \in \alpha$, tem-se:

$$\begin{aligned} -3 \times 5 + 2 \times (-2) - 4 + d = 0 &\Leftrightarrow -15 - 4 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d = 23 \end{aligned}$$

Uma equação do plano α é $-3x + 2y - z + 23 = 0$.

16.3. Seja s a reta paralela a r e que passa por A .

Como $s \parallel r$, então o vetor $\vec{r}(-3, 2, -1)$, sendo vetor diretor da reta r , também é vetor diretor da reta s .

Uma equação vetorial da reta s é:

$$(x, y, z) = (5, -2, 4) + k(-3, 2, -1), k \in \mathbb{R}$$

17. $ABC: 3x - z + 2z = 8$

$$V(5, 4, -3) \text{ e } F(6, 0, 2)$$

$$ABC \parallel EFG \text{ e } F \in [BV]$$

17.1. B é o ponto de interseção da reta FV com o plano ABC .

$$\overline{FV} = V - F = (5, 4, -3) - (6, 0, 2) = (-1, 4, -5)$$

é um vetor diretor da reta FV .

Uma equação vetorial da reta FV é:

$$(x, y, z) = (6, 0, 2) + k(-1, 4, -5), k \in \mathbb{R}$$

Como B pertence a FV , então

$$B(6 - k, 4k, 2 - 5k).$$

B pertence ao plano ABC , logo:

$$3(6 - k) - (4k) + 2(2 - 5k) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 - 3k - 4k + 4 - 10k = 8$$

$$\Leftrightarrow -17k = -14 \Leftrightarrow k = \frac{14}{17}$$

Então, $B\left(6 - \frac{14}{17}, 4 \times \frac{14}{17}, 2 - 5 \times \frac{14}{17}\right)$, ou seja,

$$B\left(\frac{88}{17}, \frac{56}{17}, -\frac{36}{17}\right).$$

17.2. Como EFG é um plano paralelo ao plano ABC , então é definido por uma equação do tipo

$$3x - y + 2z + d = 0.$$

Como F pertence ao plano EFG , tem-se:

$$3 \times 6 - 0 + 2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow 18 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -22$$

Uma equação cartesiana do plano EFG é

$$3x - y + 2z - 22 = 0.$$

17.3. A altura da pirâmide $[ABCDV]$ é dada por \overline{VT} ,

sendo T a projeção ortogonal de V sobre o plano ABC .

Seja r a reta que é perpendicular ao plano ABC e passa em V .

Como $r \perp ABC$, então o vetor $\vec{n}(3, -1, 2)$, que é normal ao plano ABC , tem a direção da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (5, 4, -3) + k(3, -1, 2), k \in \mathbb{R}$$

$$T \in r, \text{ então } T(5 + 3k, 4 - k, -3 + 2k).$$

Como T pertence ao plano ABC , tem-se:

$$3(5 + 3k) - (4 - k) + 2(-3 + 2k) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 + 9k - 4 + k - 6 + 4k = 8 \Leftrightarrow 14k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{14}$$

$$T\left(5 + 3 \times \frac{3}{14}, 4 - \frac{3}{14}, -3 + 2 \times \frac{3}{14}\right), \text{ ou seja,}$$

$$T\left(\frac{79}{14}, \frac{53}{14}, -\frac{18}{7}\right).$$



$$\begin{aligned}\overline{VT} &= \sqrt{\left(5 - \frac{79}{14}\right)^2 + \left(4 - \frac{53}{14}\right)^2 + \left(-3 + \frac{18}{7}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{126}{196}} = \frac{\sqrt{126}}{14} = \frac{3\sqrt{14}}{14}\end{aligned}$$

A altura da pirâmide $[ABCDV]$ é $\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

18. $r: (x, y, z) = (0, -2, -5) + k(1, -1, 4), k \in \mathbb{R}$

$$\alpha: m^2x - my - 3z - 7 = 0, m \in \mathbb{R}$$

18.1. Seja I o ponto de interseção da reta r com o plano xOz .

Então, $I(x, 0, z)$.

Como $I \in r$, tem-se:

$$(x, 0, z) = (0, -2, -5) + k(1, -1, 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + k \\ 0 = -2 - k \\ z = -5 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ k = -2 \\ z = -13 \end{cases}$$

$$I(-2, 0, -13)$$

18.2. Vetor diretor da reta $r: \vec{r}(1, -1, 4)$

Vetor normal ao plano $\alpha: \vec{u}(m^2, -m, -3)$

$$r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1, -1, 4) \cdot (m^2, -m, -3) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = -4 \vee m = 3$$

$$\boxed{m = -4}$$

O plano α é definido pela equação

$$16x + 4y - 3z - 7 = 0.$$

O ponto $A(0, -2, -5)$ pertence à reta r .

Como $16 \times 0 + 4 \times (-2) - 3 \times (-5) - 7 = 0$ é verdadeiro, conclui-se que $A \in \alpha$. Então, neste caso, r é aposta ao plano α .

$$\boxed{m = 3}$$

O plano α é definido pela equação

$$9x - 3y - 3z - 7 = 0.$$

O ponto $A(0, -2, -5)$ pertence à reta r .

Como $9 \times 0 - 3(-2) - 3(-5) - 7 = 0$ é falso, conclui-se que $A \notin \alpha$. Então, neste caso, r é estritamente paralela a α .

Conclusão: $m = 3$

19. $EF: x = 5 \wedge z = 2\sqrt{3}$ e $F(5, 4, 2\sqrt{3})$

A base $[ABCD]$ está contida no plano $z = 0$ e a aresta $[AD]$ está contida no eixo Ox .

19.1. Como $A \in Ox$, então $A(x, 0, 0)$.

O prisma é triangular regular, então as bases são triângulos equiláteros.

Seja E' a projeção ortogonal do ponto E sobre o eixo Ox .

Então:

$$\tan(60^\circ) = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE'}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{AE'}} \Leftrightarrow \overline{AE'} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AE'} = 2$$

Como o ponto E tem abscissa 5, conclui-se que $A(5+2, 0, 0)$, ou seja, $A(7, 0, 0)$.

19.2. Sabe-se que $B(7, 4, 0)$ e $F(5, 4, 2\sqrt{3})$.

Sendo M o ponto médio de $[BF]$, então

$$M\left(\frac{7+5}{2}, \frac{4+4}{2}, \frac{0+2\sqrt{3}}{2}\right), \text{ ou seja, } M(6, 4, \sqrt{3}).$$

$$\overline{CM} = M - C = (6, 4, \sqrt{3}) - (3, 4, 0) = (3, 0, \sqrt{3})$$

Como o vetor \overline{CM} é normal ao plano ABF , então uma equação do plano ABF é do tipo

$$3x + \sqrt{3}z + d = 0.$$

Como $A(7, 0, 0)$ pertence ao plano ABF , tem-se:

$$3 \times 7 + \sqrt{3} \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -21$$

Uma equação do plano ABF é $3x + \sqrt{3}y - 21 = 0$.

19.3. r : reta paralela a OF e que passa em A

Como $r \parallel OF$, então \overline{OF} é um vetor diretor da reta r .

$$\overline{OF} = F - O = (5, 4, 2\sqrt{3}) - (0, 0, 0) = (5, 4, 2\sqrt{3})$$

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (7, 0, 0) + k(5, 4, 2\sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$$



Página 156 – Avaliação 2 – Parte 1

1. $\alpha : 4x - 2y - 2z + 1 = 0$

Um vetor normal ao plano $\alpha : \vec{n}(4, -2, -2)$

A reta r passa pelos pontos E e V .

A reta VE é perpendicular ao plano α .

Seja \vec{v} um vetor com a direção da reta VE , então, como $VE \perp \alpha$, \vec{v} é colinear com o vetor $\vec{n}(4, -2, -2)$.

$$\vec{v} = k(4, -2, -2), k \in \mathbb{R}$$

Assim sendo, a opção correta é a (D).

2. $\alpha : 2x - y + z - 1 = 0$

$$\beta : kx + 3y - 3z = 0, k \in \mathbb{R}$$

Vetor normal ao plano $\alpha : \vec{u}(2, -1, 1)$

Vetor normal ao plano $\beta : \vec{v}(k, 3, -3)$

$$\beta \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (k, 3, -3) \cdot (2, -1, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2k - 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2k = 6 \Leftrightarrow k = 3$$

A opção correta é a (C).

3. $(x, y, z) = (-2, 1, 3) + k(1, -2, -1), k \in \mathbb{R}$

Vetor diretor da reta: $\vec{r}(1, -2, -1)$

Vetor normal aos planos representados em (A) e

(C): $\vec{u}(-1, 1, -3)$

$$\vec{r} \cdot \vec{u} = (1, -2, -1) \cdot (-1, 1, -3) = -1 - 2 + 3 = 0$$

Como $\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$, então r é paralela aos planos representados nas opções (A) e (C).

O ponto $R(-2, 1, 3)$ pertence à reta. Vamos verificar se R pertence a algum dos planos representados nas opções (A) e (C).

Como $-2(-2) + 1 - 3 \times 3 + 10 = 0$ é falso e

$-2(-2) + 1 - 3 \times 3 + 6 = 0$ é verdadeiro, conclui-se

que a reta está contida no plano de equação

$$-x + y - 3z + 6 = 0.$$

A opção correta é a (C).

4. $\alpha : \frac{1}{2}x - 2y + z - 1 = 0$

$$\beta : -\frac{1}{4}x + y - \frac{1}{2}z + 2 = 0$$

$$r : (x, y, z) = (2, 1, 2) + k\left(1, -1, \frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{R}$$

Vetor normal ao plano $\alpha : \vec{u}\left(\frac{1}{2}, -2, 1\right)$

Vetor normal ao plano $\beta : \vec{v}\left(-\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

\vec{u} e \vec{v} são colineares porque $\vec{u} = -2\vec{v}$.

Então, os planos α e β são paralelos.

A opção correta é a (A).

Página 157 – Avaliação 2 – Parte 2

1. $A(1, -1, -2), \vec{u}(-1, 2, -2)$

$$\alpha : -2x + 2y - z = 1$$

1.1. Como o vetor \vec{u} é normal a β , então uma equação do plano β é do tipo

$$-x + 2y - 2z + d = 0.$$

$A \in \beta$, logo:

$$-1 + 2 \times (-1) - 2 \times (-2) + d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 - 2 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

Uma equação cartesiana do plano β é

$$-x + 2y - 2z - 1 = 0.$$

1.2. r : reta que passa em A e tem a direção de \vec{u}

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (1, -1, -2) + k(-1, 2, -2), k \in \mathbb{R}$$

Seja B o ponto de interseção da reta r com o plano α .

$$B \in r, \text{ logo } B(1-k, -1+2k, -2-2k).$$

Como $B \in \alpha$, tem-se:

$$-2(1-k) + 2(-1+2k) - (-2-2k) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + 2k - 2 + 4k + 2 + 2k = 1 \Leftrightarrow 8k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{8}$$

$$B\left(1 - \frac{3}{8}, -1 + 2 \times \frac{3}{8}, -2 - 2 \times \frac{3}{8}\right), \text{ ou seja,}$$

$$B\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}\right).$$

2. $A(0, 0, 3); P \in [BC]$ e $P(-1, 3, 1)$

$$BFG: -x - 2y + 2z = -3$$



2.1. O vetor $\vec{u}(-1, -2, 2)$ é normal ao plano BFG .

Como o plano ADH é paralelo ao plano BFG , então o vetor $\vec{u}(-1, -2, 2)$ também é normal ao plano ADH .

Uma equação do plano ADH é do tipo

$$-x - 2y + 2z + d = 0.$$

Como A pertence ao plano ADH , tem-se:

$$-0 - 2 \times 0 + 2 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$$

Uma equação cartesiana do plano ADH é

$$-x - 2y + 2z - 6 = 0.$$

2.2. Seja r a reta perpendicular ao plano BFG e que passa em P .

Como $r \perp BFG$, então o vetor $\vec{u}(-1, -2, 2)$, normal ao plano BFG , tem a direção da reta r .

Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (-1, 3, 1) + k(-1, -2, 2), \quad k \in \mathbb{R}$$

3. $\alpha: x + y - 1 = 0$

$$PQ \perp \alpha \text{ e } P(1, 2, 1)$$

Q : ponto de interseção da reta PQ com o plano α .

$$R(-1, 2, -1) \in \alpha$$

Um vetor normal ao plano α é: $\vec{u}(1, 1, 0)$

Como $PQ \perp \alpha$, então \vec{u} é um vetor diretor da reta PQ .

Uma equação vetorial da reta PQ é:

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + k(1, 1, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

Q pertence à reta PQ , logo $Q(1+k, 2+k, 1)$.

Como $Q \in \alpha$, tem-se:

$$1 + k + 2 + k - 1 = 0 \Leftrightarrow 2k = -2 \Leftrightarrow k = -1$$

Então, $Q(0, 1, 1)$.

$$\vec{PQ} = Q - P = (0, 1, 1) - (1, 2, 1) = (-1, -1, 0)$$

$$\vec{PR} = R - P = (-1, 2, -1) - (1, 2, 1) = (-2, 0, -2)$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = (-1, -1, 0) \cdot (-2, 0, -2) = 2 + 0 + 0 = 2$$

$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{PR}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos(\widehat{PQ, PR}) = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{PR}}{\|\vec{PQ}\| \times \|\vec{PR}\|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } (\widehat{PQ, PR}) = 60^\circ.$$

Página 160 – Para Saber +

1.1. $\vec{AP} \cdot \vec{AC} = 0$ Esta condição representa a reta tangente à circunferência no ponto A .

$$\vec{AP} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-4) \cdot (2, -5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 - 5y + 20 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{18}{5}$$

1.2. $\vec{MP} \cdot \vec{AC} = 0$. Esta condição representa a mediatriz do segmento de reta $[AC]$.

$$M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+4}{2}\right), \text{ ou seja, } M\left(2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\vec{MP} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow \left(x-2, y-\frac{3}{2}\right) \cdot (2, -5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 - 5y + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{10}$$

Página 161 – Para Saber +

2.1. O plano β é definido pelos pontos $P(x, y, z)$ do espaço que satisfazem a condição $\vec{AP} \cdot \vec{CA} = 0$.

$$\vec{AP} \cdot \vec{CA} = 0 \Leftrightarrow (x-3, y-1, z-2) \cdot (2, 2, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 + 2y - 2 + 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0$$

2.2. O plano mediador de $[AB]$ é o plano que passa em C e é perpendicular a AC . Pode ser definido pela condição $\vec{CP} \cdot \vec{CA} = 0$.

$$\vec{CP} \cdot \vec{CA} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y+1, z) \cdot (2, 2, 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 + 2y + 2 + 2z = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

Página 164 – Questões tipo exame – Unidade 1

$$1. \quad \sin \alpha = \frac{h}{PR} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{h}{6} \Leftrightarrow h = 6 \sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - 150^\circ) = \frac{h}{QR} \Leftrightarrow \sin(30^\circ) = \frac{6 \sin \alpha}{QR} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{6 \sin \alpha}{QR} \Leftrightarrow QR = 12 \sin \alpha$$

A opção correta é a (C).



$$2. \begin{cases} \tan(49^\circ) = \frac{\overline{EH}}{\overline{FH}} \\ \tan(30^\circ) = \frac{\overline{EH}}{75 - \overline{FH}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{EH} = \overline{FH} \tan(49^\circ) \\ \overline{EH} = (75 - \overline{FH}) \tan(30^\circ) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \overline{FH} \tan(49^\circ) = 75 \tan(30^\circ) - \overline{FH} \tan(30^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \overline{FH} \tan(49^\circ) + \overline{FH} \tan(30^\circ) = 75 \tan(30^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \overline{FH} (\tan(49^\circ) + \tan(30^\circ)) = 75 \tan(30^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \overline{FH} = \frac{75 \tan(30^\circ)}{\tan(49^\circ) + \tan(30^\circ)} \Leftrightarrow \overline{FH} \approx 25,06$$

$$\Leftrightarrow \overline{EH} = 25,06 \tan(49^\circ) \Leftrightarrow \overline{EH} \approx 28,83$$

Designemos por h a altura do Monumento aos Restauradores.

Ora, $h = \overline{EH} + 1,5 = 28,83 + 1,5 = 30,33 \approx 30$

O Monumento aos Restauradores tem, aproximadamente, 30 m de altura.

3. Se $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, então sabe-se que $\sin x > 0$,

$\cos x < 0$ e $\tan x < 0$. Assim, conclui-se que:

- $\tan x + \cos x < 0$
- $\sin x \times \tan x < 0$
- $\frac{\cos x}{\sin x} < 0$
- $\sin x - \cos x > 0$

A opção correta é a (D).

4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{4}$ e $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{3}{4} \text{ e } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{3}{4} \text{ e } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\cos(13\pi + \alpha) - \tan(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha) - (-\tan \alpha) =$$

$$= -\cos \alpha + \tan \alpha$$

Aplicando a fórmula fundamental da trigonometria, tem-se:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{16} + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{7}{16}} \vee \cos \alpha = -\sqrt{\frac{7}{16}}$$

Como $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, então $\cos \alpha > 0$.

Donde se conclui que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\cos(13\pi + \alpha) - \tan(\pi - \alpha) = -\cos \alpha + \tan \alpha =$$

$$= -\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{7} = \frac{5\sqrt{7}}{28}$$

Página 165 – Questões tipo exame – Unidade 1

5. $C(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $P(\cos \alpha, 0)$, $Q(1, \tan \alpha)$,

$R(-1, \tan \alpha)$ e $S(-\cos \alpha, 0)$

$$A_{[PQRS]} = \frac{\overline{QR} + \overline{PS}}{2} \times \overline{AQ}$$

$$\overline{QR} = 2, \overline{PS} = 2\cos \alpha \text{ e } \overline{AQ} = \tan \alpha$$

$$A(\alpha) = \frac{2 + 2\cos \alpha}{2} \times \tan \alpha =$$

$$= (1 + \cos \alpha) \times \tan \alpha = \tan \alpha + \cos \alpha \times \tan \alpha$$

$$= \tan \alpha + \cos \alpha \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \tan \alpha + \sin \alpha = \sin \alpha + \tan \alpha$$

6. Período da função:

$$\frac{7\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

A opção correta é a (C).

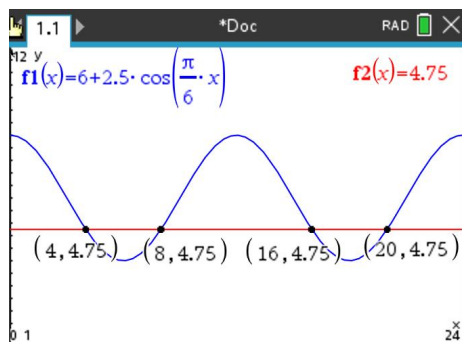
7. $f(x) = 6 + 2,5 \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$, com $x \in [0, 24[$

Pretende-se resolver, graficamente, a condição

$$f(x) \geq 4,75.$$



Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



conclui-se que $x \in [0, 4] \cup [8, 16] \cup [20, 24]$.

Assim, conclui-se que, entre as zero e as vinte e quatro horas, desse dia, a embarcação pode entrar ou sair da marinha durante 16 horas.

Página 166 – Questões tipo exame – Unidade 2

1. $\hat{A}BC = 180^\circ - \hat{B}AC - \hat{C}BA = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$
Designando por α a inclinação da reta BC , sabe-se que: $\alpha = 180^\circ - \hat{A}BC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$
 $m_{BC} = \tan(150^\circ) = \tan(180^\circ - 30^\circ) =$
 $= -\tan(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
A opção que pode representar a reta BC é a **(C)**.

- 2.1. $A \in t$, logo $A(x, 4)$.

Como α é a inclinação da reta s , então $m_s = \tan \alpha$.

A reta s passa na origem, logo

$$s: y = \tan(\alpha)x$$

$$A \in s, \text{ então: } 4 = \tan(\alpha)x \Leftrightarrow x = \frac{4}{\tan \alpha}$$

$$A\left(\frac{4}{\tan \alpha}, 4\right)$$

- 2.2. Se o triângulo $[OAB]$ é retângulo em O , então

$$\overline{OA} \perp \overline{OB}, \text{ ou seja, } \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0.$$

B é o ponto de interseção das retas r e t .

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -2x \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$B(-2, 4)$$

$$\overline{OB} = B - O = (-2, 4) - (0, 0) = (-2, 4)$$

$$\overline{OA} = A - O = \left(\frac{4}{\tan \alpha}, 4\right) - (0, 0) = \left(\frac{4}{\tan \alpha}, 4\right)$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{\tan \alpha}, 4\right) \cdot (-2, 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8}{\tan \alpha} + 16 = 0 \Leftrightarrow \frac{-8}{\tan \alpha} = -16$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Então, $\alpha \approx 26,6^\circ$.

3. $\hat{B}AC = \hat{D}EF = 90^\circ$

$$A(x, x, z) \text{ e } B(-1, 3, 1)$$

$$AC: (x, y, z) = (3, -1, 4) + k(0, 4, -3), k \in \mathbb{R}$$

- 3.1. $\vec{u}(0, 4, -3)$ é um vetor com a direção da reta AC .

$AC \perp ABF$, logo o vetor \vec{u} é normal ao plano ABF .

Assim sendo, uma equação do plano ABF é do tipo $4y - 3z + d = 0$.

Como o ponto B pertence ao plano ABF , então:

$$4 \times 3 - 3 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$$

Uma equação do plano ABF é $4y - 3z = 9$.

- 3.2. O ponto $A(x, x, z)$ pertence à reta AC , então:

$$(x, x, z) = (3, -1, 4) + k(0, 4, -3), \text{ para algum } k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 + 4k \\ z = 4 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3 = -1 + 4k \\ z = 4 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ k = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$A(3, 3, 1)$$

$$A\hat{O}B = (\overline{OA}, \overline{OB})$$

$$\overline{OA} = A - O = (3, 3, 1) - (0, 0, 0) = (3, 3, 1)$$

$$\overline{OB} = B - O = (-1, 3, 1) - (0, 0, 0) = (-1, 3, 1)$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = (3, 3, 1) \cdot (-1, 3, 1) = -3 + 9 + 1 = 7$$

$$\|\overline{OA}\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{19}$$

$$\|\overline{OB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

$$\cos(\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{\|\overline{OA}\| \times \|\overline{OB}\|} = \frac{7}{\sqrt{19} \times \sqrt{11}} = \frac{7}{\sqrt{209}}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que:

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{209}}\right) \approx 61^\circ$$



Página 167 – Questões tipo exame – Unidade 2

4. $A(1, 0, 0)$

$$DGF : 5x + 5y + 2z = 10$$

D e F são os pontos médios de $[AH]$ e $[CJ]$,
respetivamente.

4.1. $G \in Oz$, logo $G(0, 0, z)$

Como G pertence ao plano DGF , tem-se:

$$5 \times 0 + 5 \times 0 + 2z = 10 \Leftrightarrow z = 5 \quad \therefore G(0, 0, 5)$$

$$A(1, 0, 0) \text{ e } H(1, 0, 5), \text{ logo } D\left(1, 0, \frac{5}{2}\right)$$

$$C(0, 1, 0) \text{ e } J(0, 1, 5), \text{ logo } F\left(0, 1, \frac{5}{2}\right)$$

$$D\hat{G}F = (\overline{GD}, \hat{\overline{GF}})$$

$$\overline{GD} = D - G = \left(1, 0, \frac{5}{2}\right) - (0, 0, 5) = \left(1, 0, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\overline{GF} = F - G = \left(0, 1, \frac{5}{2}\right) - (0, 0, 5) = \left(0, 1, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\overline{GD} \cdot \overline{GF} = \left(1, 0, -\frac{5}{2}\right) \cdot \left(0, 1, -\frac{5}{2}\right) = 0 + 0 + \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\|\overline{GD}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\|\overline{GF}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\cos(\overline{GD}, \hat{\overline{GF}}) = \frac{\overline{GD} \cdot \overline{GF}}{\|\overline{GD}\| \times \|\overline{GF}\|} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{\sqrt{29}}{2} \times \frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{29}{4}} = \frac{25}{29}$$

Recorrendo à calculadora gráfica, conclui-se que:

$$D\hat{G}F = \cos^{-1}\left(\frac{25}{29}\right) \approx 30,5^\circ$$

4.2. $P \in [OG]$ e tem cota 1, logo $P(0, 0, 1)$

Seja α o plano paralelo ao DGF e que passa por P .

Como $\alpha \parallel DGF$, então uma equação do plano

$$DGF \text{ é do tipo } 5x + 5y + 2z + d = 0.$$

$P \in \alpha$, logo tem-se:

$$5 \times 0 + 5 \times 0 + 2 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Uma equação cartesiana do plano α é

$$5x + 5y + 2z - 2 = 0.$$

- $Ox : y = 0 \wedge z = 0$

$$5x + 5 \times 0 - 2 \times 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$$

- $Oy : x = 0 \wedge z = 0$

$$5 \times 0 + 5y - 2 \times 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}$$

O plano α intersesta os eixos Ox e Oy nos

pontos de coordenadas $\left(\frac{2}{5}, 0, 0\right)$ e $\left(0, \frac{2}{5}, 0\right)$,

respetivamente.

5.1. Como o prisma é triangular regular, sabe-se que as suas bases são triângulos equiláteros.

Assim, $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB} = \sqrt{11}$ e cada um dos ângulos internos tem 60° de amplitude.

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= \|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\| \times \cos(\overline{AB}, \hat{\overline{AC}}) = \\ &= \sqrt{11} \times \sqrt{11} \times \cos(60^\circ) = 11 \times \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

5.2. A reta AE é perpendicular ao plano ABC .

Como $AE \perp ABC$, então o vetor $\vec{u}(1, -2, 1)$, sendo normal ao plano ABC , tem a direção de reta AE .

Uma equação vetorial da reta AE é:

$$(x, y, z) = (2, -1, 0) + k(1, -2, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Como A pertence à reta AE , então

$$A(2+k, -1-2k, k).$$

A pertence ao plano ABC , logo tem-se:

$$2+k-2(-1-2k)+k=-6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+k+2+4k+k=-6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6k=-10 \Leftrightarrow k=-\frac{5}{3}$$

$$A\left(2-\frac{5}{3}, -1-2\left(-\frac{5}{3}\right), -\frac{5}{3}\right), \text{ ou seja,}$$

$$A\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

A altura do prisma é dada por \overline{AE} .

$$\overline{AE} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{7}{3}+1\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}-0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{100}{9} + \frac{25}{9}} = \frac{5\sqrt{6}}{3} \approx 4$$

A medida da altura do prisma é, aproximadamente, 4.