Propostas de resolução da unidade 3 do manual

Recorda e Aplica

Página 6 – Aplica

1.1. a) Os elementos de $A\cup B$ são 5, 6, 7, 8 e 9.

b) Os elementos de $A\cap B$ são 6 e 8.

1.2. a) $\#A=3$ b) $\#B=4$

c) $\#(A\cup B)=5$ d) $\#(A\cap B)=2$

2. Tabela de dupla entrada

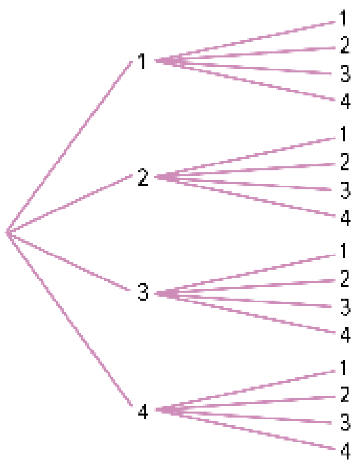
1º \ 2º	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

2.1. O número de possibilidades para que a soma das pontuações seja igual a 7 é 6 (situações rodeadas, na tabela, a cor vermelha).

2.2. O número de possibilidades para que o produto das pontuações seja para é 27 (situações rodeadas, na tabela, a cor verde).

Página 7 – Aplica

3.1. Diagrama em árvore



Os números são: 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43 e 44

3.2. Os números são: 41, 42, 43 e 44

4. Para um treino, pode fazer $2\times 3\times 2$, ou seja, 12 escolhas diferentes. Dessas, há 10 em que o boné tem cor diferente do restante equipamento:

$$2\times 3\times \underset{\text{Boné vermelho}}{1} + 2\times \underset{\text{\textit{T-shirt} amarela ou azul}}{2} \times \underset{\text{Boné verde}}{1}$$

Tema 1: Contagem

Página 8 – Tarefa inicial

1. $45\,697\,600-5\,290\,000=40\,407\,600$

$\frac{40\,407\,600}{5\,290\,000}\times 100\% \approx 764$. Opção correta: **(A)**

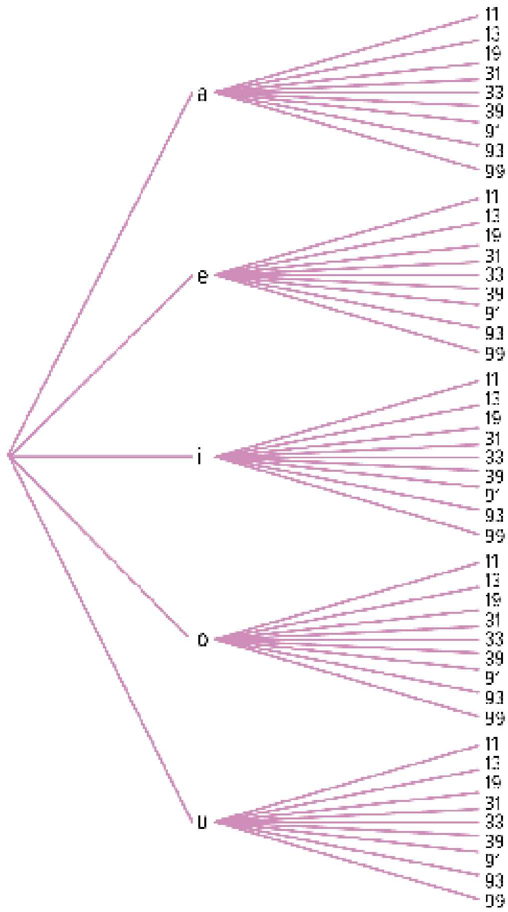
2.1.

V \ A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
e	e0	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
i	i0	i1	i2	i3	i4	i5	i6	i7	i8	i9
o	o0	o1	o2	o3	o4	o5	o6	o7	o8	o9
u	u0	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7	u8	u9

É possível registar 50 matrículas diferentes.

2.2. Divisores de 9: 1, 3 e 9

Pares de algarismos que representam divisores de 9: 11, 13, 19, 31, 33, 39, 91, 93 e 99



É possível registar 45 matrículas diferentes.

Página 9

1.1. *A*: Conjunto dos nomes com duas letras iguais

$A = \{\text{Ana, David, João}\}$

$\#A = 3$

1.2. *B*: Conjunto dos nomes com três letras iguais

$B = \{\text{Mariana, Rodolfo}\}$

$\#B = 2$

1.3. $\#(A \cup B) = \#A + \#B$, porque os conjuntos *A* e *B* são disjuntos, isto é, $A \cap B = \varnothing$.

$\#(A \cup B) = 3 + 2 = 5$

2. $\#B = \dfrac{9}{10}\#A$ e $\#(A \cup B) = 57$

Como *A* e *B* são conjuntos disjuntos, então:

$\#(A \cup B) = \#A + \#B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 57 = \#A + \dfrac{9}{10}\#A$

$\Leftrightarrow 57 = \dfrac{19}{10}\#A$

$\Leftrightarrow \dfrac{57}{\frac{19}{10}} = \#A$

$\Leftrightarrow \#A = 30$

$\#B = \dfrac{9}{10} \times 30 = 27$

Assim, conclui-se que $\#A = 30$ e $\#B = 27$.

Página 10

3.1. **a)** $\#(B \cup V) = \#B + \#V = 22 + 25 = 47$

b) $\#(V \cup P) = \#V + \#P = 25 + 18 = 43$

c) $\#(B \cup V \cup P) = \#B + \#V + \#P =$

$= 22 + 25 + 18 = 65$

3.2. Nas respostas dadas em 3.1. foi utilizado o princípio da adição que pôde ser utilizado porque, como as atividades desportivas decorrem simultaneamente, quaisquer dois dos conjuntos *B*, *V* e *P* são disjuntos.

4. Sabe-se que: $\#(N \cup G) = 28$, $\#N = 23$ e $\#G = 17$

4.1. $\#N + \#G = 23 + 17 = 40$ e $\#(N \cup G) = 28$

$\#(N \cap G) = 40 - 28 = 12$

4.2. $\#(N \cup G) \neq \#N + \#G$, porque os conjuntos *N* e *G* não são disjuntos.

Página 11 – Tarefa 1

1. *A*: Amigos que utilizam a *app* de vídeos

B: Amigos que utilizam a *app* de mensagens

1.1. **a)** $\#A + \#B = 8 + 10 = 18$

b) $\#(A \cap B) = 18 - 15 = 3$

1.2. **a)** $\#(A \setminus B) = \#A - \#(A \cap B) = 8 - 3 = 5$

$\#(B \setminus A) = \#B - \#(A \cap B) = 10 - 3 = 7$

$\#(A \setminus B) = 5$ e $\#(B \setminus A) = 7$

b) Sabe-se que:

$A \setminus B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$

$B \setminus A = \{x \in B \wedge x \notin A\}$

$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$

Se $x \in A \setminus B$, então $x \notin B$. Logo, x não pertence a $B \setminus A$ nem a $A \cap B$.

Daqui se conclui que $A \setminus B$ e $B \setminus A$ são disjuntos, bem como $A \setminus B$ e $A \cap B$.

Se $x \in B \setminus A$, então $x \notin A$. Logo, $x \notin A \cap B$, pelo que se conclui que também $B \setminus A$ e $A \cap B$ são disjuntos.

Assim, os conjuntos $A \setminus B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$ são disjuntos dois a dois.

c) Como $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ e os conjuntos $A \setminus B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$ são disjuntos dois a dois, sabe-se que:

$\#(A \cup B) = \#(A \setminus B) + \#(A \cap B) + \#(B \setminus A)$

Então:

$\#(A \cup B) =$

$= \#A \cancel{- \#(A \cap B)} + \cancel{\#(A \cap B)} + \#B - \#(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

2. $\#B = 23$ e $\#(A \cap B) = 18$

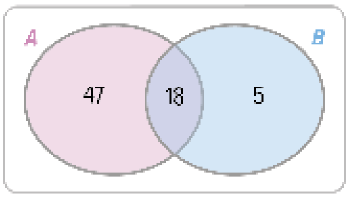
Como a empresa tem 70 colaboradores e cada um manifestou disponibilidade para, pelo menos, uma das opções A e B, então sabe-se que $\#(A \cup B) = 70$.

$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

Então:

$70 = \#A + 23 - 18 \Leftrightarrow \#A = 65$

Diagrama de Venn:



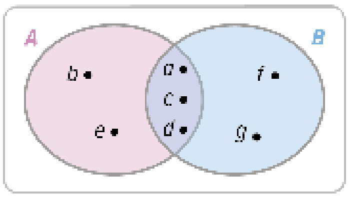
$\#(A \setminus B) = \#A - \#(A \cap B) =$
$= 65 - 18 = 47$

$\#(B \setminus A) = \#B - \#(A \cap B) =$
$= 23 - 18 = 5$

Página 12

5. $A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{a, c, d, f, g\}$

5.1.



5.2. a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

b) $A \cap B = \{a, c, d\}$

c) $A \setminus B = \{b, e\}$

d) $B \setminus A = \{f, g\}$

5.3. $P = \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}$

$\#P = \#A \times \#B = 5 \times 5 = 25$

6. Delegado Subdelegado

25 $\times$ 24 $= 600$

O delegado e o subdelegado podem ser eleitos de 600 maneiras diferentes.

7. A ordenação dos três primeiros lugares pode ser feita de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes.

Miguel, Afonso, Lucas
Miguel, Lucas, Afonso
Afonso, Miguel, Lucas
Afonso, Lucas, Miguel
Lucas, Miguel, Afonso
Lucas, Afonso, Miguel

Para a ordenação dos três primeiros lugares existem 6 possibilidades.

Página 13

8. Para cada um dos quatro dígitos existem 6 possibilidades.
Por aplicação do princípio da multiplicação, o número de códigos distintos que pode ser formado é $6 \times 6 \times 6 \times 6$, ou seja, 1296.

9. Cada cliente tem à escolha 2 sopas, 4 pratos e 3 sobremesas.
Assim, podem-se formar $2 \times 4 \times 3 = 24$ menus distintos.

Página 14 – Pratica

10. *A*: Conjunto dos pratos de peixe
B: Conjunto dos pratos de carne

10.1. $\#(A \cup B) = 12$

10.2. $\#A = \frac{1}{3}\#B$ e $\#A + \#B = 12$

$$\frac{1}{3}\#B + \#B = 12 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\#B = 12 \Leftrightarrow \#B = \frac{12}{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \#B = 9$$

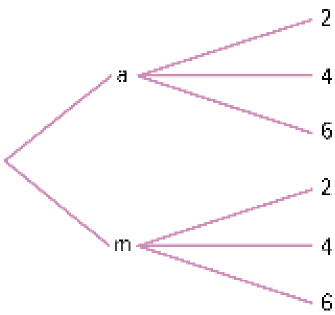
10.3. $\#A = \frac{1}{3}$; $\#B = \frac{1}{3} \times 9 = 3$

11.1. Bolas com uma vogal: a, e, i
Bolas com número primo: 2, 3, 5, 7

	2	3	5	7
a	a 2	a 3	a 5	a 7
e	e 2	e 3	e 5	e 7
i	i 2	i 3	i 5	i 7

Há 12 possibilidades de retirar uma bola com uma vogal e outra com um número primo.

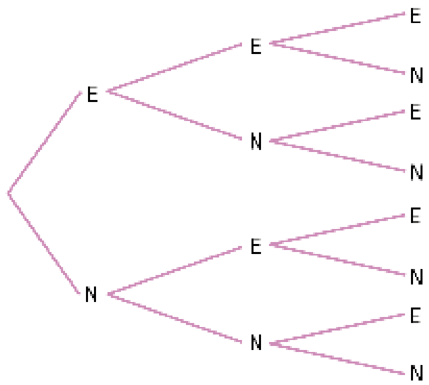
11.2. Bolas com uma letra que faz parte da palavra MAR: a, m
Bolas com número par: 2, 4, 6



Há 6 possibilidades de retirar uma bola com uma letra que faz parte da palavra MAR e outra com um número par.

Página 15 – Pratica

12.1.



Os resultados possíveis são:

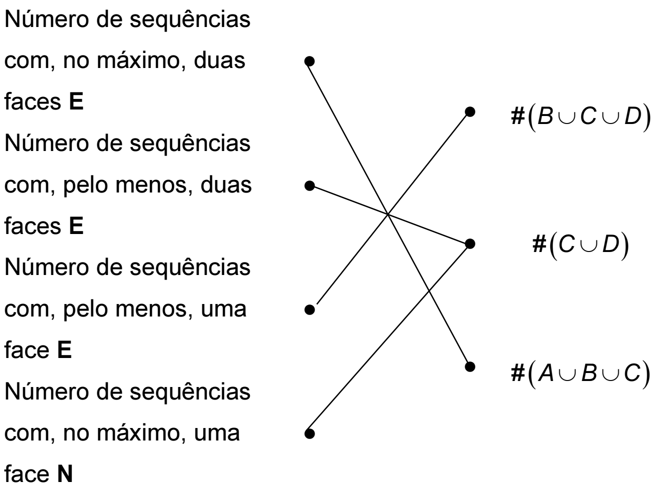
EEE, EEN, ENE, ENN, NEE, NEN, NNE e NNN

12.2. $A = \{\text{NNN}\}$

$B = \{\text{ENN, NEN, NNE}\}$

$C = \{\text{EEN, ENE, NEE}\}$

$D = \{\text{EEE}\}$



13.1. $P - R - F$

$2 \times 3 = 6$

Existem 6 ligações entre P e F passando por R.

13.2. Número total de ligações entre P e F:

$$\underbrace{2 \times 3}_{\text{passam por } R} + \underbrace{1 \times 2}_{\text{passam por } S} = 6 + 2 = 8$$

14. A: conjunto dos participantes que falam alemão;

F: conjunto dos participantes que falam francês.

$\#A = 5$ e $\#F = 13$

$\#(A \cup F) = 16$, pois os 16 elementos que participam na reunião falam pelo menos uma das línguas.

$\#A + \#F = 5 + 13 = 18$

$\#(A \cap F) = 18 - 16 = 2$

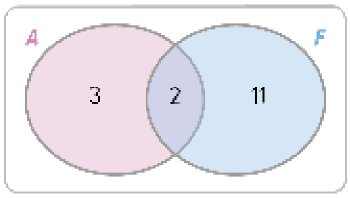
$\#(A \setminus F) = \#A - \#(A \cap F) =$

$= 5 - 2 = 3$

$\#(F \setminus A) = \#F - \#(A \cap F) =$

$= 13 - 2 = 11$

Diagrama de Venn:



15. <u>1.ª vogal</u> <u>2.ª vogal</u> <u>1.º algarismo</u> <u>2.º algarismo</u>

A 2.ª vogal é igual à 1ª.

N.º de códigos: $5 \times 1 \times 10 \times 10 = 500$

Nas condições do enunciado existem 500 códigos.

16. $\underline{L}\ \underline{L}\ \underline{A}\ \underline{A}\ \underline{L}\ \underline{L}$

L: letra

A: algarismo

Se as letras utilizadas são vogais (a, e, i, o, u), então para cada letra há apenas 5 possibilidades.

$\underline{5} \times \underline{5} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{5} \times \underline{5} = 62\ 500$

Nas condições do enunciado podem ser atribuídas 62 500 matrículas.

Página 16 – Tarefa 2

1.1. As afirmações que podemos garantir que são verdadeiras são a **(B)** e a **(C)**.

As outras afirmações não são obrigatoriamente verdadeiras, porque podemos colocar mais do que uma bola em cada compartimento.

1.2. **a)** Não é possível garantir que todos os compartimentos da caixa fiquem ocupados, pois pode colocar-se várias bolas no mesmo compartimento.

b) Sim, pode-se garantir que pelo menos um compartimento fica, no mínimo, com duas bolas, porque há mais bolas (13) do que compartimentos (12).

2. Como o ano tem 12 meses, são necessárias 13 pessoas para garantir que o aniversário de pelo menos duas delas ocorre no mesmo mês.

3. N.º de alunos da turma: 29
N.º de meses: 12
$29 = 12 + 12 + 5$
Os 29 alunos da turma podem ser divididos em dois grupos de 12 alunos e ainda sobram 5 alunos.
Em cada grupo de 12 alunos não se consegue assegurar que dois deles fazem anos no mesmo mês, pois pode acontecer terem nascido em 12 meses diferentes.
Nos dois grupos de 12 alunos (no total 24 alunos) temos a garantia de pelo menos dois fazerem aniversário no mesmo mês.
Como a turma tem mais 5 alunos, sabe-se que pelo menos três alunos têm de fazer aniversário no mesmo mês.
É possível garantir que há, pelo menos, 3 alunos cujo aniversário ocorre no mesmo mês.

Página 17

17.1. O número de sequências distintas que é possível obter é: ${}^{8}A'_2 = 8^2 = 64$

17.2. Se forem feitos três lançamentos consecutivos, então é possível obter ${}^{8}A'_3 = 8^3 = 512$ sequências diferentes de três números.

18. Apenas se podem utilizar os algarismos do número 2018, ou seja, os algarismos 0, 1, 2 e 8.

18.1. N.º de sequências diferentes de dois algarismos que é possível representar: ${}^{4}A'_2 = 4^2 = 16$

18.2. N.º de sequências diferentes de quatro algarismos que é possível representar:
${}^{4}A'_4 = 4^4 = 256$

18.3. N.º de sequências diferentes de cinco algarismos que é possível representar: ${}^{4}A'_5 = 4^5 = 1024$

Página 18 – Tarefa 3

1.1.

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{4 dígitos}}\qquad\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{3 letras}}$$

N.º total de matrículas:
${}^{10}A'_4 \times {}^{26}A'_3 = 10^4 \times 26^3 = 175\ 760\ 000$

1.2. Como o sistema não inclui vogais (A, E, I, O, U) nem as letras N e Q, então apenas estão disponíveis 19 letras.
Assim, o sistema permite apenas:
${}^{10}A'_4 \times {}^{19}A'_3 = 68\ 590\ 000$ matrículas

2. S: Semáforo

1.º S		2.º S		3.º S		4.º S		5.º S		6.º S		7.º S	
3	$\times$	3	$\times$	3	$\times$	3	$\times$	3	$\times$	3	$\times$	3	$= 3^7 = {}^{3}A'_7$

A opção correta é a **(A)**.

3. O inquérito tem quatro pontos a classificar e, para cada um deles, há cinco opções de resposta.
Assim, podem ser dadas ao inquérito
${}^{5}A'_4 = 5^4 = 625$ respostas diferentes.

Página 19

19.1. N.º total de possibilidades:
$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

19.2. N.º total de possibilidades:
$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

20. Código de quatro dígitos
$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 4! = 24$
É possível obter 24 códigos diferentes de quatro dígitos.

21. Dos 11 concorrentes participantes, sabe-se que durante a prova, 4 desistiram. Assim, só chegaram ao final da prova 7 concorrentes.
N.º possível de classificações:
$P_7 = 7! = 5040$
A opção correta é a **(C)**.

Página 20

22. Número de formas diferentes de ordenar as nove pessoas: $P_9 = 9! = 362\ 880$

23. A bandeira tem 6 barras e vai ser pintada com seis cores distintas (uma para cada barra).

23.1. Se não houver restrições, é possível obter $P_6 = 6! = 720$ bandeiras diferentes.

23.2. Se a primeira barra é preta, então é possível obter $1 \times P_5 = 1 \times 5! = 120$ bandeiras diferentes.

23.3. Se a primeira barra é azul e a última é verde, então é possível obter $1 \times 1 \times P_4 = 1 \times 1 \times 4! = 1 \times 1 \times 4! = 24$ bandeiras diferentes.

Página 21

24.1. $\frac{12}{6!} + \frac{2}{4!} = \frac{12}{6 \times 5!} + \frac{2 \times 5}{4! \times 5} = \frac{2}{5!} + \frac{10}{5!} = \frac{12}{5!}$

24.2. $\frac{41}{7! - 5!} = \frac{41}{7 \times 6 \times 5! - 5!} = \frac{41}{(7 \times 6 - 1) \times 5!} = \frac{41}{41 \times 5!} =$

$= \frac{1}{5!}$

24.3. $\frac{1}{3!} - \frac{18}{6!} = \frac{1 \times 4 \times 5}{3! \times 4 \times 5} - \frac{18}{6 \times 5!} = \frac{20}{5!} - \frac{3}{5!} = \frac{17}{5!}$

25.1. $16! - 2 \times 15! = 16 \times 15! - 2 \times 15! = (16 - 2) \times 15! =$

$= 14 \times 15$

25.2. $16! - 14! = 16 \times 15! - \frac{14! \times 15}{15} = 16 \times 15! - \frac{15!}{15} =$

$= \left(16 - \frac{1}{15}\right) \times 15! = \left(\frac{240}{15} - \frac{1}{15}\right) \times 15! = \frac{239}{15} \times 15!$

26.1. As seis pessoas vão ser distribuídas por 6 cadeiras.
O número de possibilidades de se distribuírem é:
$P_6 = 6! = 720$

26.2. Depois de escolhido o lado da mesa (há 2 maneiras de o fazer), as 3 raparigas vão ser distribuídas por 3 cadeiras e os 3 rapazes vão ser distribuídos pelas outras 3 cadeiras.
Assim, o número de possibilidades de se distribuírem é:
$2 \times 3! \times 3! = 2 \times 6 \times 6 = 72$

Página 22 – Pratica

27.1. Lançando o dado tetraédrico quatro vezes consecutivas, é possível obter ${}^4A'_4 = 4^4 = 256$ números diferentes.

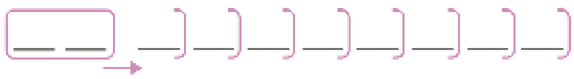
27.2. Lançando os três dados, um após o outro, existem 3 possibilidades para lançar o 1.º dado, 2 para o 2.º dado e 1 para o 3.º dado, ou seja:
$3 \times 2 \times 1 = 6$

Página 23 – Pratica

28.1. Para que os livros do mesmo autor fiquem juntos, temos de formar três grupos de livros que podem permutar entre si $(3!)$, os livros de Fernando Pessoa podem permutar entre si $(3!)$, os livros de José Saramago podem permutar entre si $(5!)$, assim como os livros de Eça de Queirós $(2!)$.
Assim, o número de maneiras diferentes de ordenar os livros de modo que os do mesmo autor fiquem juntos é: $3! \times 3! \times 5! \times 2! = 8640$

28.2. Os livros de Eça de Queirós podem ficar nos extremos de $2!$ maneiras diferentes.
Os restantes 8 livros vão ficar seguidos, podendo permutar entre si de $8!$ maneiras diferentes.
Assim, o número de maneiras diferentes de ordenar livros de modo que os dos extremos sejam os de Eça de Queirós é: $2! \times 8! = 80\ 640$

28.3. N.º total de maneiras de dispor os 10 livros na prateleira: $10!$
N.º total de maneiras de os livros de Eça de Queirós ficarem juntos: $2! \times 9 \times 8!$



N.º total de maneiras dos livros de Eça de Queirós não ficarem juntos:
$10! - 2! \times 9 \times 8! = 2\ 903\ 040$

29.1. N.º de empilhamentos diferentes em que o dado verde e o dado amarelo fiquem juntos:
$2! \times 5 \times 4! = 240$

29.2. N.º de empilhamentos diferentes em que o dado branco e o dado amarelo não fiquem juntos:

$6!-2!\times 5\times 4!=720-240=480$

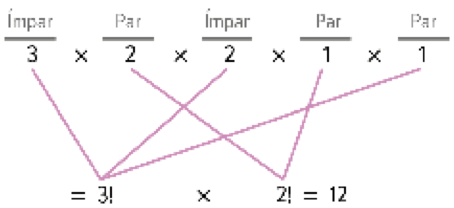
30. Pretende-se que pelo menos um dos namorados (Joana e Pedro) fique num dos topos da mesa.
Existem três situações podem ocorrer:

- Só a Joana ficar num dos topos da mesa: o n.º de maneiras de tal ocorrer é $2\times 4\times 4!=192$.
- Só o Pedro ficar num dos topos da mesa: o n.º de maneiras de tal ocorrer é $2\times 4\times 4!=192$.
- A Joana e o Pedro ficarem nos dois topos da mesa: o n.º de maneiras da tal ocorrer é $2\times 4!=48$.

$192+192+48=432$

O número de maneiras de os seis amigos se distribuírem de modo que pelo menos um dos dois namorados fique num dos topos da mesa é 432.

31.



Há três cartões com número ímpar (1, 3 e 5) e dois cartões com número par (2 e 4).
Os cartões podem ser alinhados de 12 maneiras diferentes de modo que os números de cartões adjacentes não tenham a mesma paridade.

32. *n* cartões numerados de 1 a *n*, sendo *n* par.
Como *n* é um número par, então sabe-se que metade dos cartões têm número par e metade tem número ímpar.

N.º de cartões com número par: $\frac{n}{2}$

N.º de cartões com número ímpar: $\frac{n}{2}$

Os cartões vão ser colocados em linha, lado a lado.
A fila de cartões pode começar com um cartão com número par ou com um cartão com número ímpar. Assim, há 2 possibilidades.

Os cartões com número par e os cartões com número ímpar podem permutar entre si de $\left(\frac{n}{2}\right)!$ maneiras diferentes.
Então, o número de maneiras de colocar os cartões em linha, lado a lado, sem que os números de cartões consecutivos tenham a mesma paridade é $2\times\left(\frac{n}{2}\right)!\times\left(\frac{n}{2}\right)!$, ou seja,

$2\times\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2$.

Página 24

33.1. Se não houver restrições, pode haver repetição de dígitos. Assim, o número de códigos diferentes que é possível formar é: ${}^{10}A'_3=10^3=1000$

33.2. ___ ___ ___

Se os dígitos forem diferentes, o número de códigos diferentes que é possível formar é:

$${}^{10}A_3=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=720$$

33.3. ___ ___ ___ três dígitos diferentes, escolhidos entre 0, 1, 2 e 3.
O número de códigos diferentes que é possível formar é: ${}^{4}A_3=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4!}{1!}=24$

34. O pódio pode ser constituído de ${}^{25}A_3=13\,800$ maneiras diferentes.

Página 25

35. SECUNDARIO $\rightarrow$ 10 letras diferentes

35.1. Utilizando sete letras diferentes da palavra SECUNDARIO é possível formar ${}^{10}A_7$, ou seja, 604 800 sequências.

35.2. Vogais da palavra dada: A, E, I, O, U
Consoantes da palavra dada: C, D, N, R, S

$$\underset{\text{Vogal}}{5}\times\underset{\text{Consoante}}{5}\times\underset{\text{Consoante}}{4}\times\underset{\text{Consoante}}{3}\times\underset{\text{Vogal}}{4}=1200$$

Utilizando cinco letras diferentes da palavra SECUNDARIO, sendo a primeira e a última vogais e as restantes consoantes, é possível formar 1200 sequências.

36. O bilhete do cinema tem o número 856 247. Fazem parte desse número seis algarismos diferentes sendo quatro pares (2, 4, 6, 8) e dois ímpares (5 e 7).

36.1.

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \overset{\text{Par}}{\underline{4}} = 240$$

É possível formar 240 números de quatro algarismos diferentes que sejam pares.

36.2.

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \overset{\text{Ímpar}}{\underline{2}} = 120$$

É possível formar 120 números de quatro algarismos diferentes que sejam ímpares.

36.3. Para o número ser múltiplo de 5 e atendendo a que só podemos utilizar os algarismos 2, 4, 5, 6, 7 e 8, terá de terminar em 5.

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \overset{5}{\underline{1}} = 60$$

É possível formar 60 números de quatro algarismos diferentes que sejam múltiplos de 5.

Página 26 – Pratica

37.1. Das 7 cadeiras vamos escolher 5.

$${}^{7}A_5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 2520$$

A distribuição pode ser feita de 2520 formas diferentes.

37.2. Se as cadeiras dos extremos não forem ocupadas, então os cinco elementos da família distribuem-se pelas cinco cadeiras centrais.
O número de maneiras de o fazer é $5!$, ou seja, 120 maneiras.

38.1. N.º de maneiras diferentes de escolher 3 alunos de uma turma que tem 24 alunos: ${}^{24}A_3 = 12\,144$

38.2. Escolhidos os três alunos, o número de maneiras diferentes de os ordenar é $3!$, ou seja, 6.

Página 27 – Pratica

39. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

39.1. Números de quatro algarismos diferentes, pertencentes ao conjunto A, que sejam maiores do que 5000:

$$\overset{5,\,6\text{ ou }7}{\underline{\quad}}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$$

$$3 \times {}^{5}A_3 = 3 \times 60 = 180$$

Nestas condições, é possível formar 180 números.

39.2. Número de quatro algarismos diferentes, pertencentes ao conjunto A, que sejam pares e menores que 2500:

$$\overset{2}{\underline{1}} \times \overset{3}{\underline{1}} \times \underline{3} \times \overset{4\text{ ou }6}{\underline{2}}$$

ou
(+)

$$\overset{2}{\underline{1}} \times \overset{4}{\underline{1}} \times \underline{3} \times \overset{6}{\underline{1}}$$

Nestas condições, é possível formar 9 números.

40.1. N.º de maneiras de os amigos ocuparem cinco dos sete lugares do sofá: ${}^{7}A_5 = 2520$

40.2.

$$\boxed{\underline{\quad}\ \underline{\quad}}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$$

ou $\boxed{\underline{\quad}\ \underline{\quad}}$ Carla Diogo

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \boxed{\underline{\quad}\ \underline{\quad}}$$

$$2 \times 2! \times {}^{5}A_3 = 2 \times 2 \times 60 = 240$$

A distribuição pode ser feita de 240 maneiras diferentes.

41. Divisores de 4: 1, 2 e 4
Múltiplo de 3 (de 1 a 9): 3, 6 e 9

$$\overset{\text{Divisores de 4}}{\boxed{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}}\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}\ \overset{\text{Múltiplos de 3}}{\boxed{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}}$$

$$3! \times 3! \times 3! = 6 \times 6 \times 6 = 216$$

Nas condições dadas, há 216 disposições diferentes.

42. O número mínimo de apostas que garante ao apostador que é um dos vencedores é ${}^{35}A_3$, ou seja, 39 270.
Como o preço de cada aposta é $2{,}50\,€$, o apostador gastará $39\,270 \times 2{,}50\,€ = 98\,175\,€$.

Como o prémio é $50\ 000\,€$, a estratégia não é compensadora para o apostador.
Conclusão: A estratégia não é compensadora, porque o apostador gastará mais do que irá receber de prémio.

43. Números naturais maiores do que 999 e menores do que 4250.
Pretende-se saber quantos desses números são escritos com os algarismos 1, 2, 3 e 4.

- Entre 1000 e 1999 (inclusive):

$$\underset{1}{\underline{\ 1\ }} \times \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{3!} = 6$$

- Entre 2000 e 2999 (inclusive):

$$\underset{1}{\underline{\ 2\ }} \times \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{3!} = 6$$

- Entre 3000 e 3999 (inclusive):

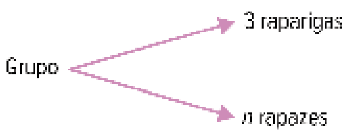
$$\underset{1}{\underline{\ 3\ }} \times \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{3!} = 6$$

- Entre 4000 e 4249 (inclusive):

$$\underset{1}{\underline{\ 4\ }} \times \underset{2}{\underline{\text{1 ou 2}}} \times \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{2!} = 4$$

Nas condições dadas, existem 22 números.

44.



O número de maneiras diferentes de as três raparigas do grupo ocuparem três lugares no mesmo banco é 144 e é dado pela expressão $2 \times 3! \times {}^4A_n$.

Então:

$2 \times 3! \times {}^4A_n = 144 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 12 \times {}^4A_n = 144$
$\Leftrightarrow {}^4A_n = \dfrac{144}{12}$
$\Leftrightarrow {}^4A_n = 12$
$\Leftrightarrow n = 2$

O grupo tinha 2 rapazes.

Página 28

45. Turma de 26 alunos: 17 raparigas e 9 rapazes

45.1. N.º de possibilidades de formar um grupo de 12 alunos:

$${}^{26}C_{12} = \frac{26!}{12!14!} = 9\ 657\ 700$$

45.2. N.º de possibilidades de formar um grupo de 5 rapazes:

$${}^{9}C_{5} = \frac{9!}{5!4!} = 126$$

45.3. N.º de possibilidades de formar um grupo de 10 raparigas:

$${}^{17}C_{10} = \frac{17!}{10!7!} = 19\ 448$$

46.1. N.º de possibilidades de selecionar cinco números:

$${}^{15}C_{5} = \frac{15!}{5!10!} = 3003$$

46.2. No cartão estão marcados 15 números, dos quais 4 são pares.
N.º de possibilidades de selecionar três números pares:

$${}^{4}C_{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

46.3. No cartão há 11 números ímpares.
N.º de possibilidades de selecionar seis números ímpares:

$${}^{11}C_{6} = \frac{11!}{6!5!} = 462$$

46.4. No cartão estão registados 8 números maiores do que 40.
N.º de possibilidades de selecionar cinco números maiores do que 40:

$${}^{8}C_{5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

47. Como o aluno só responde a cinco das nove questões da prova do exame, pode fazer essa escolha de ${}^9C_5$ maneiras diferentes, isto é, de 126 maneiras diferentes.

Página 29

48.1. Das 6 questões de geometria terão de ser selecionadas 5 e das 4 questões de probabilidades terão de ser selecionadas 2. Assim, o número de escolhas possíveis é:

$^6C_5 \times {}^4C_2 = 36$

48.2. Das 6 questões de geometria terão de ser selecionadas 4 e das 4 questões de probabilidades terão de ser selecionadas 3. Assim, o número de escolhas possíveis é:

$^6C_4 \times {}^4C_3 = 60$

49. O número total de apertos de mão é $^{13}C_2$, ou seja, é igual a 78 (as 13 pessoas terão de se cumprimentar 2 a 2, não interessando a ordem). A opção correta é a **(A)**.

Página 30 – Pratica

50.1. Como dois pontos definem uma reta, com os cinco pontos assinalados na circunferência é possível definir $^5C_2 = 10$ retas distintas.

50.2. Como três pontos não colineares definem um triângulo, com os cinco pontos assinalados na circunferência é possível definir $^5C_3 = 10$ triângulos distintos.

50.3. Sendo o ponto *E* um dos vértices do triângulo, então será necessário escolher mais dois vértices de entre os quatro pontos disponíveis (*A*, *B*, *C* e *D*). É possível definir $^4C_2 = 6$ triângulos distintos.

51.1. Utilizando exatamente cinco das oito moedas de valores diferentes, é possível obter $^8C_5 = 56$ valores diferentes.

51.2. Utilizando exatamente quatro das oito moedas de valores diferentes, é possível obter $^8C_4 = 70$ valores diferentes.

52. 15 suplentes: 1 guarda-redes, 3 defesas, 7 médios e 4 avançados

52.1. N.º de grupos de 5 suplentes formados por 2 defesas, 2 médios e 1 avançado:

$^3C_2 \times {}^7C_2 \times {}^4C_1 = 3 \times 21 \times 4 = 252$

52.2. Pretende-se que o grupo de 5 suplentes tenha pelo menos 3 médios. Então, como há 7 médios suplentes, o grupo pode ter 3, 4 ou 5 médios.
O número de grupos que satisfaz essa condição é:

$^7C_3 \times {}^8C_2 + {}^7C_4 \times {}^8C_1 + {}^7C_5 = 980 + 280 + 21 = 1281$

52.3. Pretende-se que o grupo de 5 suplentes tenha, no máximo, 2 avançados e os restantes médios. Assim, o grupo pode ter 2 avançados e 3 médios ou 1 avançado e 4 médios ou apenas 5 médios.
O número de grupos que satisfazem essa condição é:

$^4C_2 \times {}^7C_3 + {}^4C_1 \times {}^7C_4 + {}^7C_5 = 210 + 140 + 21 = 371$

Página 31 – Pratica

53. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

__ __ __ __ __ __ → Com exatamente três 7 e os restantes algarismos diferentes
Nestas condições é possível formar

$^6C_3 \times {}^6A_3 = 20 \times 120 = 2400$ números.

54.1. Para definir uma reta precisamos de escolher 2 dos 8 pontos, não interessando a ordem.
A escolha pode ser feita da seguinte forma:

- Um ponto na reta *r* e um ponto na reta *s*:
  $^5C_1 \times {}^3C_1$
- Dois pontos na reta *r*:
  1 (é sempre definida a reta *r*)
- Dois pontos na reta *s*:
  1 (é sempre definida a reta *s*)

Assim, é possível definir:

$^5C_1 \times {}^3C_1 + 1 + 1 = 5 \times 3 + 1 + 1 = 17$ retas distintas.

54.2. Para definir um triângulo precisamos de escolher 3 pontos não colineares dos 8 assinalados nas retas *r* e *s*.
A escolha pode ser feita de duas formas diferentes:

- Dois vértices na reta *r* e um na reta *s*:
  $^5C_2 \times {}^3C_1$
- Dois vértices na reta *s* e um na reta *r*:
  $^3C_2 \times {}^5C_1$

O número de triângulos que é possível construir é:

$$^{5}C_2 \times {}^{3}C_1 + {}^{3}C_2 \times {}^{5}C_1 =$$
$$= 10 \times 3 + 3 \times 5$$
$$= 30 + 15 = 45$$

55.1. Um prisma hexagonal tem 12 vértices (6 vértices em cada uma das bases).
Como desses 12 vértices não há 3 que sejam colineares, então é possível definir $^{12}C_3 = 220$ triângulos cujos vértices sejam os do prisma.

55.2. Pretende-se saber quantos triângulos existem cujos vértices, escolhidos entre os vértices do prisma haxagonal, estão em bases diferentes do prisma.
Podem ocorrer duas situações: dois vértices pertencem à base inferior do prisma e o outro vértice pertence à base superior do prisma ou um vértice pertence à base inferior do prisma e dois vértices pertencem à base superior do prisma.
Assim, o número de triângulos que é possível construir nas condições do enunciado é $2 \times \left({}^{6}C_2 \times {}^{6}C_1\right)$, ou seja, 180.

Página 32 – Tarefa 4

1. Cinco bolas, sendo três vermelhas (iguais), uma azul e uma vermelha.

1.1. A resposta correta é a 2.

1.2. A resposta 1 está errada, porque o fator $5!$ indica o número de possibilidades de distribuir, em linhas, cinco bolas de cores diferentes.

1.3. $^{5}C_3 \times 2! = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} \times 2!$

$$= \frac{5!}{3!\cancel{2!}} \times \cancel{2!} = \frac{5!}{3!}$$

2.1. $^{9}C_4$: número de maneiras diferentes de escolher os 4 lugares que os frascos com compota de morango ocuparão na prateleira.

$^{5}C_3$: número de maneiras diferentes de escolher os 3 lugares para os frascos com compota de mirtilos dos 5 ainda disponíveis, depois de colocados os frascos de compota de morango.

$^{2}C_2$: número de maneiras diferentes de escolher os 2 lugares para os frascos com compota de pêssego dos 2 que sobraram, depois de colocados os frascos de compota de morango e de mirtilos.

2.2. $N = {}^{9}C_4 \times {}^{5}C_3 \times {}^{2}C_2 = \dfrac{9!}{4!5!} \times \dfrac{5!}{3!2!} \times \dfrac{2!}{2!0!} =$

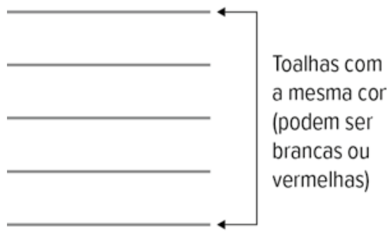
$$= \frac{9! \times \cancel{5!} \times \cancel{2!}}{4! \times \cancel{5!} \times 3! \times 2! \times \cancel{2!}}$$
$$= \frac{9!}{4!3!2!}$$

Página 33 – Tarefa 5

1. O conjunto A é formado por toalhas de três cores diferentes: duas toalhas vermelhas, duas toalhas brancas e uma preta.

1.1. Mantendo juntas as toalhas da mesma cor, é possível dispor as toalhas de $3! = 6$ maneiras diferentes.

1.2. Pretende-se ainda que não haja toalhas consecutivas com a mesma cor.



Assim, a toalha preta terá de ficar no meio.
N.º de disposições nas condições pedidas:
$2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$

1.3. As respostas corretas são a 2 e a 3.

Resposta 2: $^{7}C_3 \times P_4$

$^{7}C_3 \rightarrow$ n.º de maneiras de escolher, das 7 posições do código, 3 para a letra K.

$P_4 \rightarrow$ n.º de maneiras de permutar os 4 algarismos diferentes que constituem o código (2, 3, 5, 7) nas 4 posições ainda livres.

Resposta 3: $\dfrac{7!}{3!}$

$7! \rightarrow$ n.º de maneiras de permutar os 7 elementos que constituem o código (não atendendo a que há alguns iguais (K, K, K)).

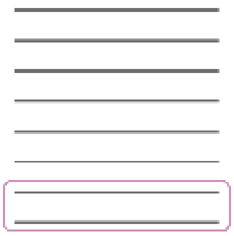
$3! \rightarrow$ como há 3 elementos iguais, ao permutá-los entre si, não originam um código diferente. Assim, é necessário dividir $7!$ por $3!$.

Esta resposta também resulta da aplicação direta da fórmula para permutações com repetição:

$$\frac{7!}{3!\,1!\,1!\,1!\,1!} = \frac{7!}{3!}$$

2. O conjunto B é formado por oito toalhas de cores diferentes.

2.1. N.º de maneiras diferentes de empilhar as oito toalhas e as toalhas castanha e amarela ficarem juntas:



$$2! \times \underbrace{7}_{\substack{\text{nº posições}\\ \text{para o bloco}\\ \text{(castanho e}\\ \text{amarelo)}}} \times 6! = 10\,080$$

2.2. Vão retirar-se três toalhas do conjunto B.

a) Se a cor-de-rosa fizer parte do conjunto, então só é preciso retirar mais duas toalhas das restantes sete. Assim, é possível formar ${}^{7}C_2 = 21$ conjuntos.

b) Se a castanha e a amarela não puderem fazer parte do mesmo conjunto, então é possível formar:

$$\underbrace{{}^{8}C_3}_{\substack{\text{nº total de}\\ \text{conjuntos}\\ \text{de três}\\ \text{toalhas}}} - \underbrace{{}^{2}C_2 \times {}^{6}C_1}_{\substack{\text{nº de conjuntos de três}\\ \text{toalhas em que a castanha}\\ \text{e a amarela fazem parte}}} = 56 - 6 = 50$$

3. As duas toalhas do conjunto A podem ser: preta e vermelha; preta e branca ou vermelha e branca.
O número de escolhas diferentes que o cliente pode fazer é:

$3 \times {}^{8}C_3 = 3 \times 56 = 168$

Página 34 – Consolida

1. Departamento de *marketing*: 8 elementos
(5 mulheres e 3 homens)
Departamento financeiro: 5 elementos
(3 homens e 2 mulheres)

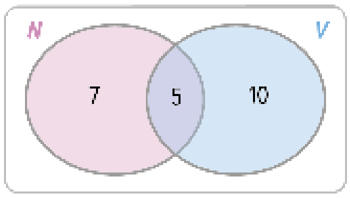
1.1. As opções de escolha de dois elementos, sendo um de cada departamento, são: $8 \times 5 = 40$

1.2. **a)** Se forem escolhidos dois elementos do mesmo sexo, sendo um de cada departamento, então as opções de escolha são: $\underbrace{5 \times 2}_{\text{mulheres}} \times \underbrace{3 \times 3}_{\text{homens}} = 19$

b) Se forem escolhidos dois elementos de sexos diferentes, sendo um de cada departamento, então as opções de escolha são: $40 - 19 = 21$

c) N.º total de escolhas: 40
N.º de escolhas de dois homens: $3 \times 3 = 9$
Assim, se forem escolhidos dois elementos, sendo um de cada departamento, em que pelo menos um é mulher, então as opções de escolha são: $40 - 9 = 31$

2. Recorrendo a um diagrama de Venn:



N: alunos que praticam natação
V: alunos que praticam voleibol

$\#(N \cup V) = 22$

$\#(N \setminus V) = 7$

$\#(N \cap V) = 5$

Então, $\#(V \setminus N) = 22 - 7 - 5 = 10$.

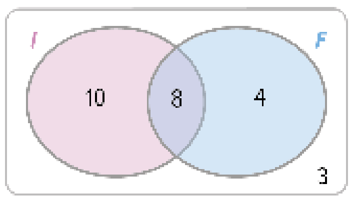
Assim, $\#(A \cup B) = 7 + 10 = 17$.

A opção correta é a (B).

3. Sejam *I* e *F* os conjuntos:
I: pessoas que falam inglês
F: pessoas que falam francês

Sabe-se que $\#I = 18$, $\#F = 12$ e $\#(\overline{I} \cap \overline{F}) = 3$.

Recorrendo a um diagrama de Venn, tem-se:



$\#(I \cup F) = 25 - 3 = 22$

$\#I + \#F = 18 + 12 = 30$

$\#(I \cap F) = 30 - 22 = 8$

$\#(I \setminus F) = 18 - 8 = 10$

$\#(F \setminus I) = 12 - 8 = 4$

Pretende-se escolher duas pessoas, uma que só fale inglês e outra que só fale francês.
As opções de escolha são $10 \times 4 = 40$.

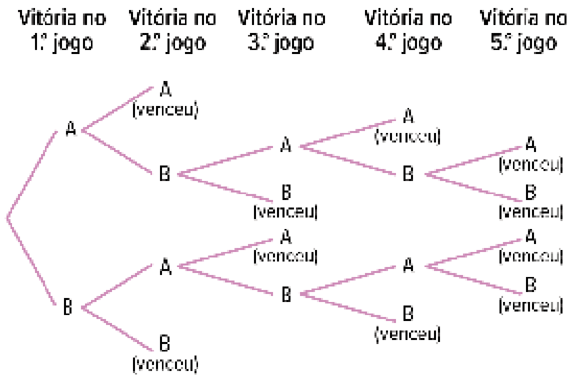
4. Na lista do restaurante constam 3 sopas, 3 pratos de peixe, 5 pratos de carne e 4 sobremesas.

4.1. Se a Catarina optar por sopa e um prato de peixe, então tem $3 \times 3 = 9$ opções.

4.2. Se a Catarina optar por um prato de carne e uma sobremesa, então tem $5 \times 4 = 20$ opções.

4.3. Se a Catarina optar por sopa, um preto de peixe e uma sobremesa, então $3 \times 3 \times 4 = 36$ opções.

5. Designando por *A* e *B* as duas equipas mais bem classificadas e recorrendo a um diagrama em árvore, tem-se:



As equipas têm de disputar, no máximo, 5 jogos até encontrar a vencedora.

Página 35 – Consolida

6. Os algarismos do número 417 são 1, 4 e 7.

6.1. Números de dois algarismos:

$${}^{3}A'_{2} = 3^2 = 9$$

6.2. Números de cinco algarismos:

$${}^{3}A'_{5} = 3^5 = 243$$

6.3. Números de quatro algarismos e par (o algarismo das unidades tem de ser 4):

$$1 \times {}^{3}A'_{3} = 1 \times 3^3 = 27$$

6.4. Números de quatro algarismos e ímpar (o algarismo das unidades é o 1 ou o 7):

$$2 \times {}^{3}A'_{3} = 2 \times 3^3 = 54$$

6.5. Número de três algarismos e inferiores a 500 (o algarismo das centenas é 1 ou 4):

$$2 \times {}^{3}A'_{2} = 2 \times 3^2 = 18$$

7.1. Números pares:

$${}^{8}A'_{3} \times \underbrace{4}_{\substack{\text{tem de terminar} \\ \text{em 2, 4, 6 ou 8}}} = 8^3 \times 4 = 2048$$

7.2. Números múltiplos de 5:

$${}^{8}A'_{3} \times \underbrace{1}_{\substack{\text{tem de} \\ \text{terminar} \\ \text{em 5}}} = 8^3 \times 1 = 512$$

7.3. Números maiores do que 800 e pares:

$$\underbrace{1}_{\substack{\text{tem de} \\ \text{começar} \\ \text{em 8}}} \times {}^{8}A'_{2} \times \underbrace{4}_{\substack{\text{tem de terminar} \\ \text{em 2, 4, 6 ou 8}}} = 1 \times 8^2 \times 4 = 256$$

7.4. Números menores que 5300:

1.º) A começar por 1, 2, 3 ou 4

$$4 \times {}^{8}A'_{3} = 4 \times 8^3 = 2048$$

2.º) A começar por 5 (o 2.º algarismo só pode ser 1 ou 2):

$$1 \times 2 \times {}^{8}A'_{2} = 1 \times 2 \times 8^2 = 128$$

No total existem $2048 + 128 = 2176$ números que são menores do que 5300.

8.1. N.º total de *passwords*:

$${}^{10}A'_{5} = 10^5 = 100\,000$$

A Daniela tem 100 000 opções diferentes para definir a *password* do *tablet*.

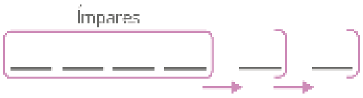
8.2. Pretende-se saber quantas *passwords* são representadas por um número maior do que 9999 e ímpar.
Se o número que representa a *password* é maior do que 9999, então não inicia em zero.
Como o número é ímpar, então tem de terminar em 1, 3, 5, 7 ou 9.
N.º de *passwords* nas condições dadas:

$$9 \times {}^{10}A'_{3} \times 5 = 9 \times 10^3 \times 5 = 45\,000$$

9.1. **a)** O menor número que se pode obter por permutação de algarismos que constituem o número 137 456 é o 134 567.

b) O maior número que se pode obter por permutação de algarismos que constituem o número 137456 é o 765 431.

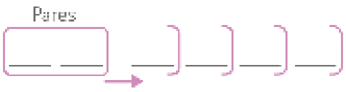
9.2. **a)** Pretende-se que os algarismos ímpares (1, 3, 5 e 7) ocupem posições consecutivas.



$4!\times 3\times 2!=144$ números nas condições pedidas

b) Pretende-se que os algarismos pares (4 e 6) não ocupem posições consecutivas.

Se ocupassem posições consecutivas, então obteríamos:



$2!\times 5\times 4!=240$ números

Sabe-se que permutando os algarismos d número 137 456 é possível obter $6!=720$ números diferentes.

Assim, por permutação dos algarismos do número 137 456, é possível obter $720-240$, ou seja, 480 números em que os algarismos pares não ocupem posições consecutivas.

10. Bandeira de seis barras e há seis cores diferentes disponíveis.

10.1. Se for possível repetir cores, então há $^{6}A'_{6}=6^{6}=46\,656$ possibilidades de pintar as barras.

10.2. Se forem utilizadas as seis cores, então há apenas $6!=720$ possibilidades de pintar as barras.

10.3. Se não for utilizado o amarelo, então há $^{5}A'_{6}=5^{6}=15\,625$ possibilidades de pintar as barras.

11. N.º de formas diferentes de ordenar o atendimento do grupo de 5 alunos:

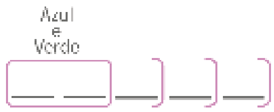
$P_5=5!=120$

Página 36 – Consolida

12.1. N.º de sequências diferentes que é possível formar em que a almofada azul ocupa a posição central: $1\times 4!=24$

12.2. N.º de sequências diferentes que é possível formar em que a almofada azul ocupa um dos extremos: $2\times 4!=48$

12.3. N.º de sequências diferentes que é possível formar em que a almofada azul fica ao lado da almofada verde: $2!\times 4\times 3!=48$



13.1. **a)** N.º de números de dois algarismos diferentes que é possível formar utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6: $^{6}A_{2}=30$

b) N.º de números, múltiplos de 5, com quatro algarismos diferentes que é possível formar utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6:

$1\times {}^{5}A_{3}=60$

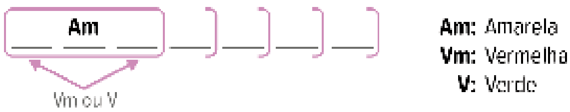
13.2. Os algarismos da sequência 3156 são 1, 3, 5 e 6.

a) N.º pares de três algarismos que é possível formar com os algarismos da sequência 3156: $1\times {}^{3}A_{2}=6$

b) Para que o número de três algarismos não seja múltiplo de 3, podemos utilizar os algarismos 1, 3 e 6 ou 3, 5 e 6.

Nestas condições, é possível formar $3!+3!=12$ números diferentes.

14.



O número de sequências diferentes que é possível formar de modo que as cadeiras vermelha, amarela e verde fiquem juntas e a amarela entre as outras duas é dado por:

$2\times 5\times 4!=240$

15. Numa turma de 23 alunos, é possível formar $^{23}C_{4}$, ou seja, 8855, grupos diferentes de quatro alunos.

16. Táxi A → 4 passageiros

Táxi B → 4 passageiros

O grupo de 7 pessoas pode ser repartido pelos dois táxis das seguintes formas: 4 no táxi A e 3 no táxi B ou 3 no táxi A e 4 no táxi B.

O número de formas diferentes de tal acontecer é: $^7C_4 \times {^3C_3} + {^7C_3} \times {^4C_3} = 35 + 35 = 70$

17. Oito professores: 3 de Matemática, 2 de Português e 3 de História

17.1. N.º de formas diferentes de distribuir os oito professores pelas dez cadeiras de modo que os três professores de História fiquem do mesmo lado da mesa:

$2 \times {^5A_3} \times {^7A_5} = 2 \times 60 \times 2520 = 302\ 400$

17.2. N.º de formas diferentes de distribuir os oito professores pelas dez cadeiras de modo que os professores de Português fiquem em lugares opostos (frente a frente):

$5 \times 2! \times {^8A_6} = 5 \times 2 \times 20\ 160 = 201\ 600$

17.3. N.º de formas diferentes de distribuir os oito professores pelas dez cadeiras de modo que os professores de Matemática e de Português fiquem do mesmo lado da mesa:

$2 \times 5! \times {^5A_3} = 2 \times 120 \times 60 = 14\ 400$

18. 18 equipas e cada uma joga duas vezes com cada uma das restantes.

N.º total de jogos realizados:

$2 \times {^{18}C_2} = 2 \times 153 = 306$

19. Seja n o número de participantes na reunião. Como, no total, foram dados 136 apertos de mão, sabe-se que:

$$^nC_2 = 136 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 136 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}} = 136 \Leftrightarrow \frac{n^2-n}{2} = 136 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n = 272 \Leftrightarrow n^2 - n - 272 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-272)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1089}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1+33}{2} \vee n = \frac{1-33}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 17 \vee n = -16$$

Como $n \in \mathbb{N}$, conclui-se que $n = 17$.

Estiveram na reunião 17 participantes.

Página 37 – Consolida

20.1. N.º de maneiras diferentes de distribuir os sete discos (3 vermelhos, 2 azuis, 1 verde e 1 preto):

$^{16}C_3 \times {^{13}C_2} \times {^{11}A_2} = 560 \times 78 \times 110 = 4\ 804\ 800$

20.2. N.º de linhas: 4

N.º de colunas: 4

N.º de diagonais: 2 (n.º total: 10)

Assim, o número de maneiras diferentes de distribuir os quatro discos (um de cada cor, de modo que fiquem na mesma linha ou na mesma coluna ou na mesma diagonal é $10 \times 4!$, ou seja, é 240.

21.1. — — — — — → algarismos de 1 a 9

Números que não tenham algarismos repetidos:

$^9A_5 = 15\ 120$

21.2. — — — — — → algarismos de 1 a 9

Números que tenham exatamente três 7:

$^5C_3 \times {^8A'_2} = 10 \times 8^2 = 640$

21.3. — — — — — → algarismos de 1 a 9

Números que tenham exatamente quatro 1:

$^5C_4 \times 8 = 5 \times 8 = 40$

21.4. — — — — — → algarismos de 1 a 9

(primos: 2, 3, 5 e 7)

Números que não tenham qualquer algarismo que represente número primo: $^5A'_5 = 5^5 = 3125$

22.1. Das retas definidas por pares de vértices do prisma pentagonal, há 15 que contêm arestas do prisma.

22.2. N.º de retas que não contêm arestas do prisma:

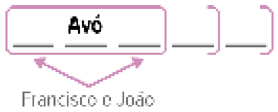
$^{10}C_2 - 15 = 45 - 15 = 30$

22.3. N.º de retas que contêm diagonais das bases do prisma:

$2 \times \left({^5C_2} - 5\right) = 2 \times (10 - 5) = 10$

23.1. N.º de maneiras diferentes de escolher o grupo dos quatro netos que irão ao cinema: $^9C_4 = 126$

23.2.



As possibilidades de a avó Joana ficar entre os Francisco e o João são: $2\times3\times2!=12$

24.1.

A partir da casa da Ana (A) e feitos os movimentos da sequência H H V H V V H H, o ponto de chegada foi a casa do Bernardo (***B***).

24.2. Por exemplo, as sequências HHHHHVVV, VVHHHVHH e HVHHVHVH.

24.3. No total há 8 movimentos (5 na horizontal e 3 na vertical).

N.º de caminhos diferentes que existem para ir de *A* até *B*: ${}^8C_5\times{}^3C_3=56$

24.4. N.º de caminhos diferentes que existem para ir da casa da Ana até à casa da Carla passando pela casa do Bernardo:

$\left({}^8C_5\times{}^3C_3\right)\times\left({}^5C_3\times{}^2C_2\right)=56\times10=560$

Página 38 – Avalia 1 – Parte 1

1. $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

$A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14\}$

$\#(A\cup B)=12$

A opção correta é a **(C)**.

2.

N.º de códigos que é possível obter:

${}^5A'_2\times{}^{10}A_3=5^2\times720=18\,000$

A opção correta é a **(A)**.

3.

Argentina, Brasil e Colômbia

N.º de disposições em que os representantes de cada país ficam juntos: $2!\times2!\times2!\times3!=48$

A opção correta é a **(A)**.

4. ___ ___ ___ ___ ___ ___

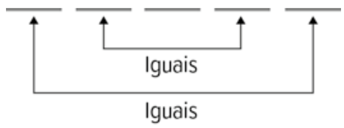
$A=\{1, 4, 5, 7\}$

Os números naturais de seis algarismos, que é possível formar com os algarismos do conjunto *A*, que são pares e têm exatamente três 4, são:

$1\times{}^5C_2\times{}^3A'_3=10\times3^2=270$

A opção correta é a **(B)**.

5.



Algarismos de 1 a 9

Capicuas: $9\times9\times9\times1\times1=729$

A opção correta é a **(D)**.

Página 39 – Avalia 1 – Parte 2

1. Designemos por *n* o número de vértices da pirâmide.

Com os vértices da pirâmide é possível definir 78 retas. Então:

$${}^nC_2=78\Leftrightarrow\frac{n!}{2!(n-2)!}=78\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}}=78$$

$$\Leftrightarrow\frac{n^2-n}{2}=78$$

$$\Leftrightarrow n^2-n=156\Leftrightarrow n^2-n-156=0$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times1\times(-156)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{625}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1+25}{2}\vee n=\frac{1-25}{2}$$

$$\Leftrightarrow n=13\vee n=-12$$

Como $n\in\mathbb{N}$, então $n=13$.

A pirâmide tem 13 vértices, logo tem 24 arestas (12 arestas na base e 12 arestas laterais).

2. 9 livros diferentes: 5 de ficção científica (FC) e 4 de policial (P)

FC	P
1	2
2	1

Número de seleções de três livros com, pelo menos, um de cada género:

$^5C_1 \times {^4C_2} + {^5C_2} \times {^4C_1} = 5 \times 6 + 10 \times 4 = 70$

3. Cinco amigos: 3 raparigas (Ana, Carolina e Sofia) e 2 rapazes (Bernardo e Gil)

3.1. Se as três raparigas ficarem numa das três filas, então o número de maneiras diferentes do grupo de cinco amigos ocupar as cadeiras é:

$3 \times 3! \times {^6A_2} = 540$

3.2. O número de maneiras diferentes do grupo ocupar as cadeiras de forma que a Carolina e o Bernardo ficarem a sós numa fila e os restantes elementos ocuparem uma das outras duas filas é:

$3 \times {^3A_2} \times 2 \times 3! = 216$

4. Departamento administrativo: 5 colaboradores
Departamento técnico: 7 colaboradores

4.1. Equipa: 2 administrativos e 3 técnicos

a) Número de equipas que é possível formar se nem a Ana e nem o Pedro fizerem parte:

$^4C_2 \times {^6C_3} = 6 \times 20 = 120$

b) Número de equipas que é possível formar se a Ana e o Pedro fizerem parte é:

$1 \times {^4C_1} \times 1 \times {^6C_2} = 60$

4.2. O código deve ter pelo menos um cinco e, no máximo, três cincos, ou seja, pode ter 1, 2 ou 3 cincos.

N.º de códigos com um 5:

$^6C_1 \times {^9A'_5} = 6 \times 9^5 = 354\ 294$

N.º de códigos com dois 5:

$^6C_2 \times {^9A'_4} = 15 \times 9^4 = 98\ 415$

N.º de códigos com três 5:

$^6C_3 \times {^9A'_3} = 20 \times 9^3 = 14\ 580$

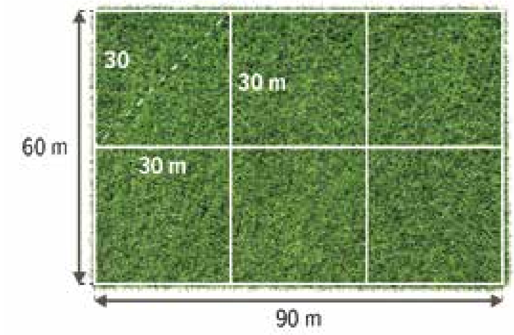
N.º total de códigos com pelo menos um 5 e, no máximo, três cincos:

$354\ 294 + 98\ 415 + 14\ 580 = 467\ 289$

Página 42 – Para Saber +

Um desafio

1. O retângulo pode ser decomposto em seis quadrados de 30 m de lado.



2. A maior distância possível entre dois pontos do mesmo quadrado é, em metros, a medida, *d*, da diagonal desse quadrado.

$d^2 = 30^2 + 30^2$

Como $d > 0$, obtém-se $d = 30\sqrt{2} \approx 42{,}4$.

Assim, $d < 45$, o que significa que a distância entre dois pontos de rega colocados no mesmo quadrado é inferior a 45 m.

3. Como há sete pontos de rega a distribuir, pelo princípio do pombal, pelo menos dois ficam necessariamente no mesmo quadrado, o que torna impossível distribuí-los nas condições referidas.

Página 43 – Para Saber +

Proposta 1

Por exemplo, solicitar ao hóspede que ocupa o quarto número 1 que passe para o quarto número 27, ao que estava no quarto número 2 que passe para o número 28, e assim sucessivamente.
Desta forma ficam libertos os 26 primeiros quartos.

Proposta 2

2.1. Números ímpares

A cada novo hóspede H_n é atribuído o quarto de número Q_n, sendo $Q_n = 2n - 1$ (sucessão dos números ímpares).

2.2. O princípio do pombal aplica-se quando há um número finito de "ninhos" para um número finito e superior de "pombos", o que não é aplicável no caso do Hotel de Hilbert por este ter um número **infinito** (numerável) de quartos (para cada número *n*, há sempre o seguinte, $n+1$).

A estratégia referida permite libertar um conjunto infinito de quartos (conjunto dos números ímpares), ficando ocupados também um conjunto infinito de quartos (conjunto dos números pares).