Propostas de resolução da unidade 4 do manual

Recorda e Aplica

Página 46 – Aplica

1.1. Depois da primeira figura, cada uma das figuras tem mais três círculos do que a figura anterior. Assim, na figura 6 existem $15+3$, ou seja, 18 círculos.

1.2. Os oito primeiros números da sequência são: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 e 24

2.

$$3 \xrightarrow[2\times 3-1]{} 5 \xrightarrow[2\times 5-1]{} 9 \xrightarrow[2\times 9-1]{} 17 \xrightarrow[2\times 17-1]{} 33 \xrightarrow[2\times 33-1]{} 65$$

Os seis primeiros termos da sequência são: 3, 5, 9, 17, 33 e 65

Página 47 – Aplica

3. Sabe-se que o 3.º termo da sequência é 24 e cada termo após o 1.º é igual a metade do anterior mais dois.

3.1. 4.º termo: $\frac{24}{2}+2=12+2=14$

3.2. 2.º termo: $2\times(24-2)=2\times 22=44$

3.3. 1.º termo: $2\times(44-2)=2\times 42=84$

4. Termo geral da sequência: $5n-3$

4.1. a) 6.º termo: $5\times 6-3=30-3=27$

b) Termo de ordem 8: $5\times 8-3=40-3=37$

4.2. a) $5n-3=52 \Leftrightarrow 5n=55 \Leftrightarrow n=\frac{55}{5} \Leftrightarrow n=11$

52 é termo da sucessão de ordem 11.

b) $5n-3=87 \Leftrightarrow 5n=90 \Leftrightarrow n=\frac{90}{5} \Leftrightarrow n=18$

87 é termo da sucessão de ordem 18.

c) $5n-3=45 \Leftrightarrow 5n=48 \Leftrightarrow n=\frac{48}{5} \Leftrightarrow n=9{,}6$

45 não é termo da sucessão, porque $9{,}6 \notin \mathbb{N}$.

d) $5n-3=112 \Leftrightarrow 5n=115 \Leftrightarrow n=\frac{115}{5} \Leftrightarrow n=23$

112 é termo da sucessão de ordem 23.

e) $5n-3=98 \Leftrightarrow 5n=101 \Leftrightarrow n=\frac{101}{5} \Leftrightarrow n=20{,}2$

98 não é termo da sucessão, porque $20{,}2 \notin \mathbb{N}$.

5.1. 4, 6, 8, 10, 12, …

$2\times 1+k=4 \Leftrightarrow 2+k=4 \Leftrightarrow k=2$

Termo geral da sucessão: $2n+2$

5.2. 0, 2, 4, 6, 8, …

$2\times 1+k=0 \Leftrightarrow 2+k=0 \Leftrightarrow k=-2$

Termo geral da sucessão: $2n-2$

5.3. 7, 9, 11, 13, 15, …

$2\times 1+k=7 \Leftrightarrow 2+k=7 \Leftrightarrow k=5$

Termo geral da sucessão: $2n+5$

5.4. -9, -7, -5, -3, -1, …

$2\times 1+k=-9 \Leftrightarrow 2+k=-9 \Leftrightarrow k=-11$

Termo geral da sucessão: $2n-11$

6.1. a) A figura 1 é constituída por 5 quadrados, a figura 2 é constituída por 8 quadrados, a figura 3 é constituída por 11 quadrados e, como a regularidade se mantém, cada uma das figuras seguintes tem mais 3 quadrados do que a anterior.

Assim sendo, os cinco primeiros termos da sequência numérica são: 5, 8, 11, 14 e 17

b) O termo geral é $3n+2$.

6.2. O último termo da sequência é $3\times 100+2$, ou seja, 302.

6.3. $3n+2>100 \wedge 3n+2<130 \Leftrightarrow 3n>98 \wedge 3n<128$

$\Leftrightarrow n>\frac{98}{3} \wedge n<\frac{128}{3}$

$\Leftrightarrow n\in\{33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42\}$

O 33.º termo é $3\times 33+2=101$.

Os termos entre 100 e 130 são:

101, 104, 107, 110, 113, 116, 119, 122, 125 e 128

7. Termo geral da sucessão: $-3+4n$

7.1. a) Termo de ordem 7: $-3+4\times 7=-3+28=25$

b) Termo de ordem 12: $-3+4\times 12=-3+48=45$

7.2. $-3+4n=112 \Leftrightarrow 4n=115 \Leftrightarrow n=\frac{115}{4} \Leftrightarrow n=28{,}75$

$28<28{,}75<29$

Termo de ordem 28: $-3+4\times 28=109$

Termo de ordem 29: $-3+4\times 29=113$

O número 112 está entre os termos 109 e 113, cujas ordens são 28 e 29.

Tema 1: Sucessões

Página 48 – Tarefa inicial

1. O número mínimo de movimentos para um só disco é igual a 1 e o número mínimo de movimentos para *n* discos é igual ao dobro do número de movimentos para $n-1$ discos mais 1.

2.

N.º de discos, *n*	1	2	3	4	5	6	…	10	11	…
N.º mínimo de movimentos para cumprir o objetivo	1	3	7	15	31	63	…	1023	2047	…

C.A.:

$n=4$: $2\times 7+1=15$

$n=5$: $2\times 15+1=31$

$n=6$: $2\times 31+1=63$

$n=7$: $2\times 63+1=127$

$n=8$: $2\times 127+1=255$

$n=9$: $2\times 255+1=511$

$n=11$: $2\times 1023+1=2047$

Página 49

1.1. Os primeiros seis termos da sucessão são: 3, 6, 9, 12, 15 e 18

1.2. Termo geral da sucessão: $3n$

1.3. $3n=267 \Leftrightarrow n=\frac{267}{3} \Leftrightarrow n=89$

267 é o termo de ordem 89 da sucessão.

1.4. $3n=145 \Leftrightarrow n=\frac{145}{3} \Leftrightarrow n=48,(3)$

Como $48,(3)\notin \mathbb{N}$, conclui-se que 145 não é termo da sucessão.

2. $w_n = 3-\frac{2}{n}$

2.1. $w_{15}-w_5=\left(3-\frac{2}{15}\right)-\left(3-\frac{2}{5}\right)=\cancel{3}-\frac{2}{15}\cancel{-3}+\frac{2}{5}$

$=-\frac{2}{15}+\frac{2}{5}=-\frac{2}{15}+\frac{6}{15}=\frac{4}{15}$

2.2. $w_n=\frac{14}{5} \Leftrightarrow 3-\frac{2}{n}=\frac{14}{5} \Leftrightarrow -\frac{2}{n}=\frac{14}{5}-3$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{n}=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow -\frac{2}{n}=-\frac{2}{10} \Leftrightarrow n=10$

$\frac{14}{5}$ é o termo de ordem 10.

2.3. $\forall n\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, sabe-se que:

$n\geq 1$ e $\frac{2}{n}>0$

Logo, $3-\frac{2}{n}<3$, ou seja, $w_n<3$.

Página 50

3. $u_n=n^3-12n$

3.1. $u_n=0 \Leftrightarrow n^3-12n=0 \Leftrightarrow n\left(n^2-12\right)=0$

$\Leftrightarrow n=0 \vee n^2=12 \Leftrightarrow n=0 \vee n=-\sqrt{12} \vee n=\sqrt{12}$

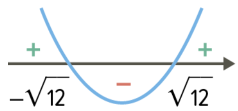
Como $0\notin \mathbb{N}\{0\}$, $-\sqrt{12}\notin \mathbb{N}\{0\}$ e $\sqrt{12}\notin \mathbb{N}\{0\}$,

conclui-se que a sucessão não tem termos nulos.

3.2. $u_n<0 \Leftrightarrow n^3-12n<0 \Leftrightarrow n\left(n^2-12\right)<0$

$\underset{n\in\mathbb{N}\{0\}}{\Leftrightarrow} n^2-12<0 \Leftrightarrow -\sqrt{12}<n<\sqrt{12} \wedge n\in \mathbb{N}\{0\}$

$\Leftrightarrow n\in\{1, 2, 3\}$



A sucessão tem três termos negativos.

4. $t_n=\begin{cases} 4 & \text{se } n<5 \\ \frac{n}{n+1} & \text{se } n\geq 5 \end{cases}$

4.1. $t_1=4$; $t_2=4$; $t_3=4$; $t_4=4$; $t_5=\frac{5}{5+1}=\frac{5}{6}$ e

$t_6=\frac{6}{6+1}=\frac{6}{7}$.

4.2. Por exemplo, t_2 e t_3.

$t_3-t_2=4-4=0$

4.3. Os quatro primeiros termos da sucessão são iguais a 4, logo não são menores do que 0,9.

$t_n<0{,}9 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}<0{,}9 \wedge n\geq 5 \Leftrightarrow n<0{,}9(n+1) \wedge n\geq 5$

$\Leftrightarrow n<0{,}9n+0{,}9 \wedge n\geq 5 \Leftrightarrow 0{,}1n<0{,}9 \wedge n\geq 5$

$\Leftrightarrow n<9 \wedge n\geq 5 \Leftrightarrow n\in\{5, 6, 7, 8\}$

A sucessão tem quatro termos menores do que 0,9.

A opção correta é a **(A)**.

Página 51

5. Por observação gráfica, sabe-se que:

$w_1 = -1$, $w_2 = 2$, $w_3 = -3$, $w_4 = 4$ e $w_5 = -5$

A expressão que pode representar o termo geral de (w_n) é $(-1)^n n$

A opção correta é a **(D)**.

6. $t_n = n + \dfrac{10}{n}$

6.1. Recorrendo à calculadora gráfica, conclui-se que quando n tende para $+\infty$, a sucessão tende para $+\infty$.

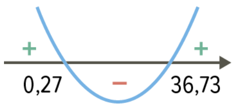
6.2. $t_n < 37 \Leftrightarrow n + \dfrac{10}{n} < 37 \underset{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}{\Leftrightarrow} n^2 + 10 < 37n$

$\Leftrightarrow n^2 - 37n + 10 < 0 \Leftrightarrow 0{,}27 < n < 36{,}73$

C.A.:

$n^2 - 37n + 10 = 0 \Leftrightarrow n = \dfrac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4\times1\times10}}{2}$

$\Leftrightarrow n \approx 0{,}27 \vee n \approx 36{,}73$



Como $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ a maior ordem dos termos da sucessão (t_n) que são menores que 37 é a ordem 36.

7. $u_{n+1} - u_n = -3 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n - 3$

Então, $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $u_{n+1} < u_n$.

Assim, a sucessão (u_n) é decrescente.

Página 52 – Tarefa 1

1.1. Um polígono com $n+2$ lados tem $n+2$ vértices. ${}^{n+2}C_2$ representa o número de maneiras de escolher 2 dos $n+2$ vértices do polígono.

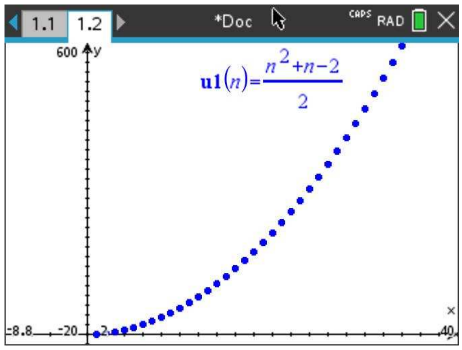
1.2. $u_{10} = {}^{12}C_2 - 12 = 66 - 12 = 54$

1.3. $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tem-se:

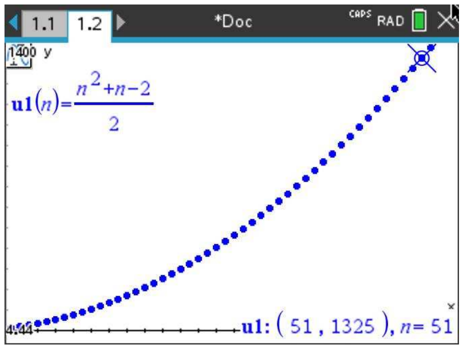
$$u_n = {}^{n+2}C_2 - (n+2) = \frac{(n+2)!}{2!(n+2-2)!} - (n+2)$$
$$= \frac{(n+2)!}{2\times n!} - n - 2 = \frac{(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{2\cancel{n!}} - n - 2$$
$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2} - n - 2 = \frac{n^2+n+2n+2}{2} - n - 2$$
$$= \frac{n^2+3n+2-2n-4}{2} = \frac{n^2+n-2}{2}$$

1.4. $u_n = \dfrac{n^2+n-2}{2}$

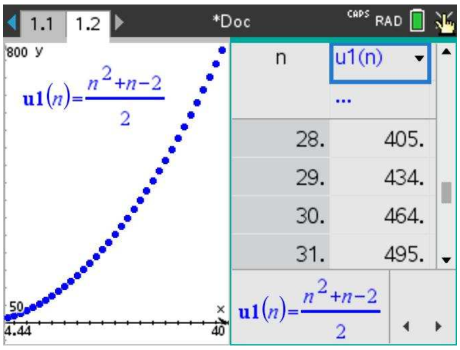
a) Recorrendo à calculadora gráfica, conclui-se que a sucessão (u_n) é crescente, porque $\forall n \in \mathbb{N}_0\setminus\{0\}$, $u_{n+1} > u_n$.



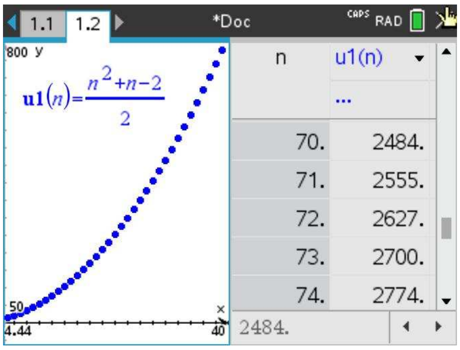
b) Recorrendo à calculadora gráfica, conclui-se que $u_{51} = 1325$.



c) Recorrendo à calculadora gráfica, conclui-se que o número 450 está entre dois termos consecutivos da sucessão (u_n), a saber 434 (termo de ordem 29) e 464 (termo de ordem 30).

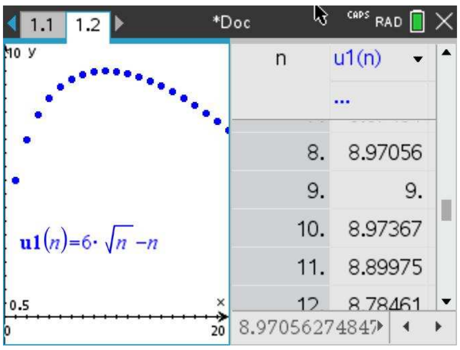


d) Recorrendo à calculadora gráfica, constata-se que existem quatro termos da sucessão (u_n) que são maiores do que 2500 e menores do que 2800 (desde o 71.º termo até ao 74.º termo).

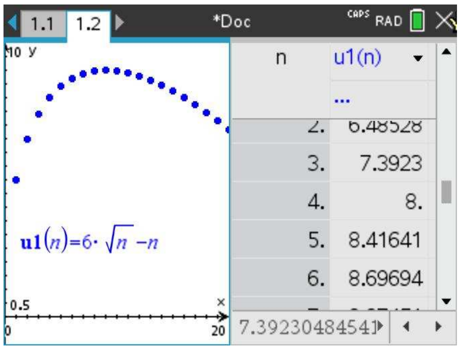


2. $v_n = 6\sqrt{n} - n$

2.1. **a)** Dois termos consecutivos que satisfaçam a condição $u_{n+1} - u_n < 0$ são, por exemplo, u_9 e u_{10}.

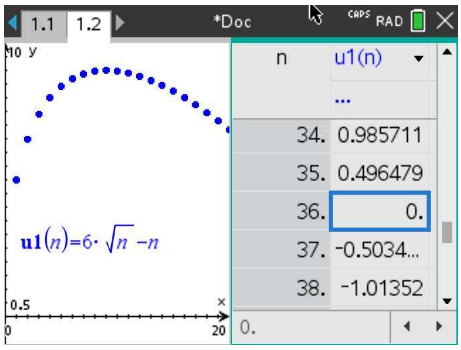


b) Dois termos consecutivos que satisfaçam a condição $u_{n+1} - u_n > 0$ são, por exemplo, u_4 e u_5.



2.2. A sucessão (u_n) não é monótona, pois, por exemplo, $u_5 > u_4$ e $u_{10} < u_9$

2.3. Recorrendo à calculadora gráfica, constata-se que $u_{36} = 0$, ou seja, o termo de ordem 36 é igual a 0.



2.4. Recorrendo à calculadora gráfica, verifica-se que há cinco termos positivos representados por números inteiros, a saber: $u_1 = 5$, $u_4 = 8$, $u_9 = 9$, $u_{16} = 8$ e $u_{25} = 5$.

Página 53

8.1. $v_1 = 2$

$v_2 = 3 \times v_1 - 2 = 4$

$v_3 = 3 \times v_2 - 2 = 10$

$v_4 = 3 \times v_3 - 2 = 28$

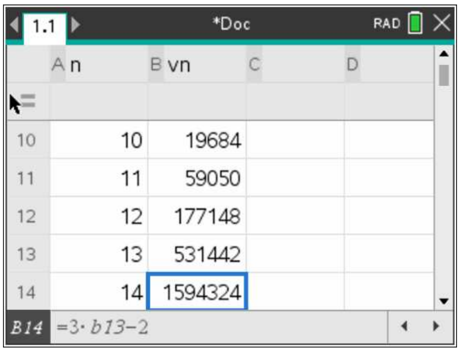
$v_1 = 2$, $v_2 = 4$, $v_3 = 10$ e $v_4 = 28$

8.2. A sucessão (v_n) é definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 3 \times v_n - 2, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

8.3. Recorrendo à calculadora gráfica:

$v_{10} = 19\,684$, $v_{11} = 59\,050$, $v_{12} = 177\,148$, $v_{13} = 531\,442$ e $v_{14} = 1\,594\,324$



9.1. $u_1 = 2$

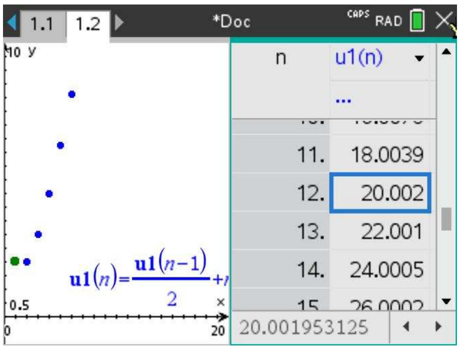
$u_2 = \frac{u_1}{2} + 1 = \frac{2}{2} + 1 = 2$

$u_3 = \frac{u_2}{2} + 2 = \frac{2}{2} + 2 = 3$

Os três primeiros termos da sucessão (u_n) são:

2, 2 e 3

9.2. Recorrendo à calculadora gráfica, constata-se que o 12.º termo da sucessão é 20,002.



Página 54

10.1. Se participarem apenas três pessoas (A, B e C), então existem três apertos de mão $(\text{A}-\text{B};\ \text{A}-\text{C};\ \text{B}-\text{C})$.

Se participarem quatro pessoas (A, B, C e D), então existem seis apertos de mão $(\text{A}-\text{B};\ \text{A}-\text{C};\ \text{A}-\text{D};\ \text{B}-\text{C};\ \text{B}-\text{D};\ \text{C}-\text{D})$.

10.2. $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_n = u_{n+1} + n - 1,\ n > 1 \end{cases}$

Sabe-se que se forem 40 pessoas, serão dados 780 apertos de mão, ou seja, $u_{40} = 780$.

$u_{41} = u_{40} + 40 = 780 + 40 = 820$

Se forem 41 pessoas, serão dados 820 apertos de mão.

Por outro lado, tem-se:

$u_{40} = u_{39} + 39 \Leftrightarrow 780 = u_{39} + 39 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_{39} = 780 - 39 \Leftrightarrow u_{39} = 741$

$u_{39} = u_{38} + 38 \Leftrightarrow 741 = u_{38} + 38 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_{38} = 741 - 38 \Leftrightarrow u_{38} = 703$

Se forem 38 pessoas, serão dados 703 apertos de mão.

Página 55 – Tarefa 2

1. $u_n = \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

1.1. Os termos de ordem ímpar são da forma $u_n = 3n + 1$.

Como n é ímpar e n é natural, então $3n \in \mathbb{N}$ e $3n + 1 \in \mathbb{N}$.

Assim, os termos de ordem ímpar são naturais.

Os termos de ordem par são da forma $u_n = \frac{n}{2}$.

Como n é par, é divisível por 2. Logo, $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$.

Então, os termos de ordem par são naturais.

Conclusão: Todos os termos da sucessão são números naturais.

1.2. $u_1 = 3 \times 1 + 1 = 4$; $u_2 = \frac{2}{2} = 1$ e $u_3 = 3 \times 3 + 1 = 10$

Como $u_2 < u_1$ e $u_3 > u_2$, conclui-se que a sucessão (u_n) não é monótona.

2. A sucessão (v_n) é definida por:

$$\begin{cases} v_1 = k,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ v_{n+1} = \begin{cases} 3v_n + 1 & \text{se } v_n \text{ ímpar} \\ \frac{v_n}{2} & \text{se } v_n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

2.1. **a)** Sendo $k = 1$, então:

$v_1 = 1$, $v_2 = 3v_1 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$, $v_3 = \frac{v_2}{2} = 2$ e $v_4 = \frac{v_3}{2} = 1$

Os quatro primeiros termos da sucessão (v_n) são 1, 4, 2 e 1.

b) Sendo $k = 2$, então:

$v_1 = 2$, $v_2 = \frac{v_1}{2} = 1$, $v_3 = 3v_2 + 1 = 4$,

$v_4 = \frac{v_3}{2} = 2$ e $v_5 = \frac{v_4}{2} = 1$

Os cinco primeiros termos da sucessão (v_n) são: 2, 1, 4, 2 e 1

c) Sendo $k = 3$, então:

$v_1 = 3$ $\quad$ $v_2 = 3v_1 + 1 = 10$

$v_3 = \frac{v_2}{2} = 5$ $\quad$ $v_4 = 3v_3 + 1 = 16$

$v_5 = \frac{v_4}{2} = 8$ $\quad$ $v_6 = \frac{v_5}{2} = 4$

$v_7 = \frac{v_6}{2} = 2$ $\quad$ $v_8 = \frac{v_7}{2} = 1$

$v_9 = 3v_8 + 1 = 4$ $\quad$ $v_{10} = \frac{v_9}{2} = 2$

$v_{11} = \frac{v_{10}}{2} = 1$

Os 11 primeiros termos da sucessão (v_n) são: 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2 e 1

d) Sendo $k = 4$, então:

$v_1 = 4$ $\quad$ $v_2 = \frac{v_1}{2} = 2$

$v_3 = \frac{v_2}{2} = 1$ $\quad$ $v_4 = 3v_3 + 1 = 4$

$v_5 = \frac{v_4}{2} = 2$ $\quad$ $v_6 = \frac{v_5}{2} = 1$

Os seis primeiros termos da sucessão (v_n) são: 4, 2, 1, 4, 2 e 1

2.2. Nas sequências construídas desta forma, há um termo que é igual a 1, a partir do qual se repetem os termos iguais a 4, 2 e 1.

2.3. Se $k = 7$, então é necessário escrever 17 termos até aparecer o número 1 (inclusive).

$v_1 = 7$ $\quad$ $v_2 = 3 \times 7 + 1 = 22$

$v_3 = \frac{22}{2} = 11$ $\quad$ $v_4 = 3 \times 11 + 1 = 34$

$v_5 = \frac{34}{2} = 17$ $\quad$ $v_6 = 3 \times 17 + 1 = 52$

$v_7 = \frac{52}{2} = 26$ $\quad$ $v_8 = \frac{26}{2} = 13$

$v_9 = 3 \times 13 + 1 = 40$ $\quad$ $v_{10} = \frac{40}{2} = 20$

$v_{11} = \frac{20}{2} = 10$ $\quad$ $v_{12} = \frac{10}{2} = 5$

$v_{13} = 3 \times 5 + 1 = 16$ $\quad$ $v_{14} = \frac{16}{2} = 8$

$v_{15} = \frac{8}{2} = 4$ $\quad$ $v_{16} = \frac{4}{2} = 2$

$v_{17} = \frac{2}{2} = 1$

Atendendo à regularidade escrita em **2.2.**, conclui-se que os cinco termos seguintes são: 4, 2, 1, 4 e 2.

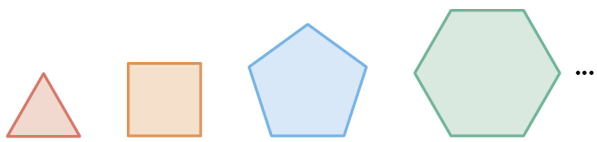
3.

```
k=(int(input('Indica o 1º termo da sucessão: ')))

def collatz(k):
    seq = [k]
    if k < 1:
        return[]
    while k>1:
        if k % 2 == 0:
            k = k//2
        else:
            k = 3*k+1
        seq.append(k)

    return seq
print(collatz(k))
```

A execução do programa fica ao cuidado do aluno.

Página 56 – Pratica

11.1.



$v_1 = 9$ $\quad$ $v_2 = 12$ $\quad$ $v_3 = 15$ $\quad$ $v_4 = 18$

$v_1 = 9$; $v_2 = 12$; $v_3 = 15$; $v_4 = 18$

11.2. $v_n = 45 \Leftrightarrow 3n + 6 = 45 \Leftrightarrow 3n = 39 \Leftrightarrow n = \frac{39}{3} \Leftrightarrow n = 13$

Como $13 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, conclui-se que 45 é termo da sucessão (de ordem 13).

O polígono de ordem 13 tem $13 + 2$ lados, ou seja, 15 lados.

11.3. $v_n = 58 \Leftrightarrow 3n + 6 = 58 \Leftrightarrow 3n = 52 \Leftrightarrow n = \frac{52}{3}$

Como $\frac{52}{3} \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$, então 58 não é termo da sucessão.

Outro processo: $v_n = 3n + 6 = 3(n + 2)$

Todos os termos da sucessão (v_n) são múltiplos de 3.

Como 58 não é múltiplo de 3 (e todos os termos da sucessão são), então 58 não é múltiplo de 3.

12.1. Sabe-se que $v_1 = 4$, $v_2 = 7$, $v_3 = 10$, $v_4 = 13$, …

Qualquer termo, a partir do primeiro, é igual ao anterior mais 3.

Assim, o termo geral da sucessão (v_n) é

$v_n = 3n + 1$.

12.2. $v_n = 120 \Leftrightarrow 3n + 1 = 120 \Leftrightarrow 3n = 119 \Leftrightarrow n = \dfrac{119}{3}$

$\Leftrightarrow n = 39,(6)$

$v_{39} = 3 \times 39 + 1 = 118$

A figura de maior ordem que a Catarina consegue construir é a figura de ordem 39 e sobraram dois fósforos.

12.3. A sucessão (v_n) é definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} v_1 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 3, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Página 57 – Pratica

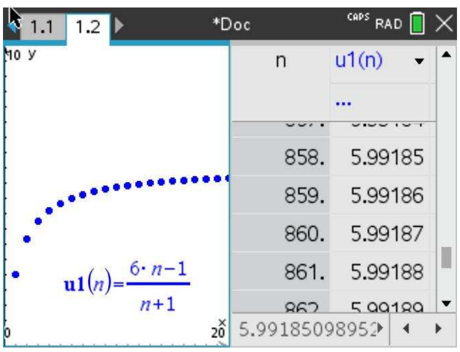
13. $u_n = \dfrac{6n - 1}{n + 1}$

13.1. $u_n = 5 \Leftrightarrow \dfrac{6n-1}{n+1} = 5 \Leftrightarrow 6n - 1 = 5(n+1)$

$\Leftrightarrow 6n - 1 = 5n + 5 \Leftrightarrow n = 6$

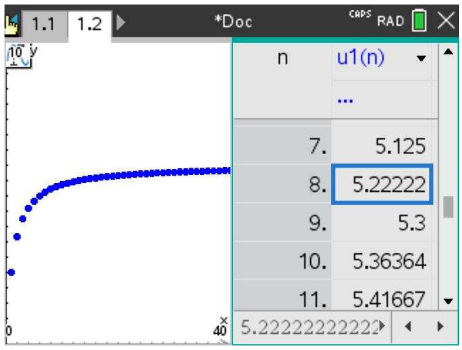
A ordem do termo igual a 5 é 6.

13.2. a) Recorrendo à representação gráfica da sucessão na calculadora, verifica-se que, de forma intuitiva, à medida que *n* toma valores suficientemente grandes, os termos da sucessão aproximam-se cada vez mais de 6.



Assim, quando *n* tende para $+\infty$, os termos da sucessão tendem para 6.

b) Recorrendo à calculadora gráfica, verifica-se que todos os termos de ordem superior ou igual a 8 e inferior ou igual a 33 são maiores do que 5,2 e menores do que 5,8.



$33 - 8 + 1 = 26$

Conclui-se que a sucessão tem 26 termos maiores do que 5,2 e menores do que 5,8.

14. Sendo *n* ímpar, então $n + 1$ é par.

$v_n = \dfrac{4n}{n+1}$ e $v_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4n}{n+1} = \dfrac{1 - 4n}{n+1}$

A opção correta é a **(A)**.

15. $\begin{cases} u_1 = a, \ a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

15.1. $u_2 = 2u_1 + 3 = 2a + 3$

$u_3 = 2u_2 + 3 = 2(2a + 3) + 3 =$

$= 4a + 6 + 3 = 4a + 9$

A opção correta é a **(C)**.

15.2. $u_4 = 2u_3 + 3 = 2(4a + 9) + 3 = 8a + 18 + 3 = 8a + 21$

$u_4 = 5 \Leftrightarrow 8a + 21 = 5 \Leftrightarrow 8a = -16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{-16}{8} \Leftrightarrow a = -2$

16.1. $c_1 = 1$; $c_2 = 1 + 2^2 = 5$;

$c_3 = 5 + 4^2 = 21$; $c_4 = 21 + 6^2 = 57$;

$c_5 = 57 + 8^2 = 121$

Os cinco primeiros termos da sucessão (c_n) são 1, 5, 21, 57 e 121.

16.2. A sucessão (c_n) é definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = c_n + (2n)^2, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

16.3. $c_{18} = 7141$

$c_{19} = c_{18} + (2 \times 18)^2 =$

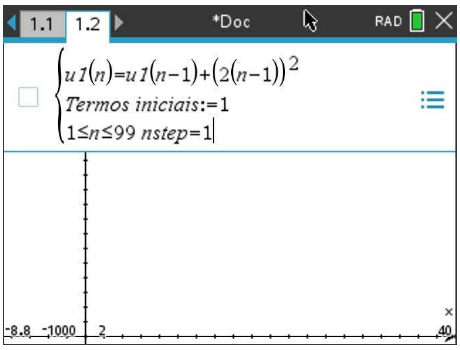
$= 7141 + 36^2 = 8437$

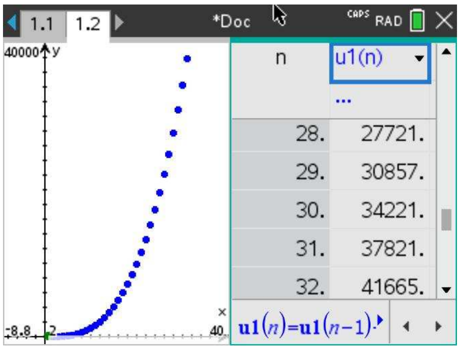
$c_{20} = c_{19} + (2 \times 19)^2 =$

$= 8437 + 38^2 = 9881$

Para construir a figura de ordem 20 são necessários 9881 cubos.

16.4. Recorrendo à calculadora gráfica, sabe-se que $c_{29} = 30\,857$ e $c_{30} = 34\,221$.





Como (c_n) é uma sucessão crescente, conclui-se que 32 000 não é termo da sucessão.

Tema 2: Progressões aritméticas e geométricas

Página 58 – Tarefa inicial

1.1. $a_6 = a_5 + 3 = 15 + 3 = 18$

1.2. A sucessão (a_n) é definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 3, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

2.1. Termo de ordem 6 da sucessão (b_n):

$b_5 + 5 = 28 + 5 = 33$

2.2. Termo geral de (b_n): $b_n = 5n + 3$

3.1. O termo de ordem 6 da sucessão (f_n) pode ser obtido multiplicando o termo de ordem 5 por 2.

3.2. A sucessão (f_n) é definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} f_1 = 4 \\ f_{n+1} = 2f_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Página 59

17.1. $u_n = 3 - 2n$

$u_{n+1} - u_n = 3 - 2(n+1) - (3 - 2n)$

$= 3 - 2n - 2 - 3 + 2n = -2, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Como a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é constante e igual a -2, conclui-se que (u_n) é uma progressão aritmética de razão -2.

17.2. $u_n = \dfrac{2}{n}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{2}{n} = \dfrac{2n - 2n - 2}{n(n+1)} =$

$= \dfrac{-2}{n(n+1)}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Como a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos não é constante, conclui-se que (u_n) não é uma progressão aritmética.

17.3. $u_n = n^2 - 2$

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 2 - (n^2 - 2) =$

$= n^2 + 2n + 1 - 2 - n^2 =$

$= 2n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Como a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos não é constante, conclui-se que (u_n) não é uma progressão aritmética.

17.4. $u_n = \dfrac{n+4}{2}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1+4}{2} - \dfrac{n+4}{2} =$

$= \dfrac{n+5-n-4}{2} = \dfrac{1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Como a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é constante e igual a $\frac{1}{2}$, conclui-se que (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.

17.5. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

$u_{n+1} = u_n + n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Como a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos não é constante, conclui-se que (u_n) não é uma progressão aritmética.

18.1. Como $2 - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, conclui-se que $\frac{7}{2}$, 2 e $\frac{1}{2}$ podem ser termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão $-\frac{3}{2}$.

18.2. Como $-1-(-5)=4$ e $2-(-1)=3$, conclui-se que -5, -1 e 2 não podem ser termos consecutivos de uma progressão aritmética, porque $1-(-5) \neq 2-(-1)$.

18.3. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$

Como $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ e $\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, conclui-se que $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ podem ser termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{2}$.

19.1. Como 3, $2a$ e 1 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, sabe-se que $2a-3 = 1-2a$.

$2a-3 = 1-2a \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$

19.2. A razão da progressão aritmética é: $2 \times 1 - 3 = -1$

5.º termo: 9

4.º termo: $9-(-1)=10$

3.º termo: $10-(-1)=11$

2.º termo: $11-(-1)=12$

6.º termo: $9+(-1)=8$

Página 60

20. (u_n): progressão aritmética

20.1. $u_1 = 4$ e $r = -5$

$u_n = u_1 + (n-1)r$

Neste caso, $u_n = 4 + (n-1) \times (-5)$, ou seja,

$u_n = -5n + 9$.

20.2. $u_1 = 2$ e $u_3 = 4u_1$, ou seja, $u_3 = 8$.

$u_3 = u_1 + (3-1)r \Leftrightarrow 8 = 2 + 2r \Leftrightarrow 6 = 2r \Leftrightarrow r = 3$

Então, $u_n = 2 + (n-1) \times 3$, ou seja, $u_n = 3n - 1$.

20.3. $u_2 = -3$ e $r = 5$.

$u_2 = u_1 + r \Leftrightarrow -3 = u_1 + 5 \Leftrightarrow u_1 = -8$

Então, $u_n = -8 + (n-1) \times 5$, ou seja, $u_n = 5n - 13$.

21. $v_n = 4n - 1$

$v_n = 35 \Leftrightarrow 4n - 1 = 35 \Leftrightarrow 4n = 36 \Leftrightarrow n = 9$

35 é o 9.º termo da progressão aritmética (v_n).

Sendo *a*, 35, *b* e *c* quatro termos consecutivos de (v_n), conclui-se que:

$a = v_8 = 4 \times 8 - 1 = 31$

$b = v_{10} = 4 \times 10 - 1 = 39$

$c = v_{11} = 4 \times 11 - 1 = 43$

22.1. (u_n): progressão aritmética

$u_1 = 2$ e $u_9 = 34$

$u_9 = u_1 + (9-1)r \Leftrightarrow 34 = 2 + 8r \Leftrightarrow 32 = 8r \Leftrightarrow r = 4$

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$

Neste caso, $u_n = 2 + (n-1) \times 4$, ou seja,

$u_n = 4n - 2$.

22.2. $u_6 = 2$ e $u_{14} = 4$

$$\begin{cases} u_6 = u_1 + 5r \\ u_{14} = u_1 + 13r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = u_1 + 5r \\ 4 = u_1 + 13r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 - 5r \\ 4 = 2 - 5r + 13r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 - 5r \\ 2 = 8r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 - 5 \times \frac{1}{4} \\ r = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{3}{4} \\ r = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$

Neste caso, $u_n = \frac{3}{4}(n-1)\times\frac{1}{4}$, ou seja, $u_n = \frac{n}{4}+\frac{1}{2}$.

23. Seja (u_n) a progressão aritmética.

Sabe-se que $u_3 = 9$ e $r = 7$.

23.1. $u_3 = u_1 + 2r \Leftrightarrow 9 = u_1 + 2\times 7 \Leftrightarrow u_1 = 9 - 14 \Leftrightarrow u_1 = -5$

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$

Neste caso, $u_n = -5 + (n-1)\times 7$, ou seja,

$u_n = 7n - 12$.

23.2. $u_{10} = 7\times 10 - 12 = 58$

Página 61

24.1. A situação pode ser modelada por uma progressão aritmética (u_n), em que $u_1 = 7$ e a razão é igual a 4.

Termo geral: $u_n = 7 + (n-1)\times 4$, ou seja,

$u_n = 4n + 3$

$u_{11} = 4\times 11 + 3 = 47$

Na fila 11 existem 47 lugares.

24.2. $u_n = 39 \Leftrightarrow 4n + 3 = 39 \Leftrightarrow 4n = 36 \Leftrightarrow n = 9$

A fila que tem 39 lugares é a fila 9.

25. 4000 euros

Taxa juro anual: 2%

25.1. O capital que a Ana tem ao fim de *n* anos é dado por uma progressão aritmética (u_n).

$u_n = u_1 + (n-1)r$

$u_n = 4000 + 0{,}02\times 4000 = 4080$

$r = 0{,}02\times 4000 = 80$

Então, $u_n = 4080n + (n-1)\times 80$, ou seja,

$u_n = 80n + 4000$.

25.2. Capital ao fim de sete anos:

$u_7 = 80\times 7 + 4000 = 4560$

Ao fim de sete anos, o capital é 4560 euros.

25.3. $u_n > 5000 \Leftrightarrow 80n + 4000 > 5000 \Leftrightarrow 80n > 1000 \Leftrightarrow$

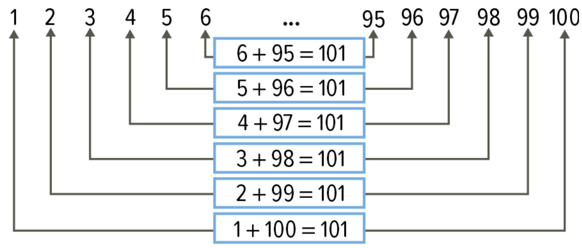
$\Leftrightarrow n > \frac{1000}{80} \Leftrightarrow n > 12{,}5$

No 13.º ano o capital atingiu, pela primeira vez, mais de 5000 euros.

A Ana manteve o depósito 13 anos.

Página 62 – Tarefa 3

1.1.



1.2. No contexto apresentado, sabe-se que $\frac{1+100}{2}$ representa a semissoma de quaisquer dois termos equidistantes dos extremos e 100 representa o número de termos.

2.1. A soma dos primeiros 16 termos é dada por

$\frac{u_1 + u_{16}}{2}\times 16$.

$u_1 = 2\times 1 + 3 = 5$ e $u_{16} = 2\times 16 + 3 = 35$

$\frac{u_1 + u_{16}}{2}\times 16 = \frac{5+35}{2}\times 16 = 20\times 26 = 320$

2.2. A soma dos primeiros 20 termos é dada por

$\frac{u_1 + u_{20}}{2}\times 20$.

$u_1 = 2\times 1 + 3 = 5$ e $u_{20} = 2\times 20 + 3 = 43$

$\frac{u_1 + u_{20}}{2}\times 20 = \frac{5+43}{2}\times 20 = 480$

Página 63

26. (u_n) progressão geométrica, tal que $u_n = 5n - 2$

26.1. $S_{15} = \frac{u_1 + u_{15}}{2}\times 15 = \frac{(5\times 1 - 2) + (5\times 15 - 2)}{2}\times 15 =$

$= \frac{76}{2}\times 15 = 570$

26.2. $u_n < 250 \Leftrightarrow 5n - 2 < 250 \Leftrightarrow 5n < 252 \Leftrightarrow n < 50{,}4$

Os primeiros 50 termos da sucessão (u_n) são menores do que 250.

$S_{50} = \frac{u_1 + u_{50}}{2}\times 50 = \frac{(5\times 1 - 2) + (5\times 50 - 2)}{2}\times 50 =$

$= \frac{3 + 248}{2}\times 50 = 6275$

27.1. Como a tabela tem quatro colunas e nela estão representados 88 números, conclui-se que a tabela tem 22 linhas $(88:4)$.

27.2. Seja (u_n) a progressão aritmética da qual fazem parte os números da segunda coluna e sendo 2 o primeiro termo.

a) $r = u_2 - u_1 = 6 - 2 = 4$

Termo geral: $u_n = 2(n-1)\times 4$, ou seja,

$u_n = 4n - 2$

b) Pretende-se calcular a soma de todos os números da segunda coluna, ou seja, a soma dos 22 primeiros termos da sucessão (u_n).

$$S_{22} = \frac{u_1 + u_{22}}{2}\times 22 = \frac{(4\times 1 - 2)+(4\times 22 - 2)}{2}\times 22$$
$$= \frac{2+86}{2}\times 22 = 968$$

c) $u_8 + u_9 + u_{10} + \ldots + u_{18} + u_{19} + u_{20} =$

$$= \frac{u_8 + u_{20}}{2}\times(20-8+1)$$
$$= \frac{(4\times 8-2)+(4\times 20-2)}{2}\times 13$$
$$= \frac{30+78}{2}\times 13 = 702$$

Página 64 – Pratica

28. (u_n) progressão aritmética, tal que $u_n = 7n - 5$.

28.1. $u_n > 55 \Leftrightarrow 7n - 5 > 55 \Leftrightarrow 7n > 60 \Leftrightarrow n > \frac{60}{7}$

Como $\frac{60}{7} \approx 8{,}57$, conclui-se que o termo de menor ordem que é maior do que 55 é o 9.º termo, cujo valor é:

$v_9 = 7\times 9 - 5 = 58$

28.2. $u_n < 125 \Leftrightarrow 7n - 5 < 125 \Leftrightarrow 7n < 130 \Leftrightarrow n < \frac{130}{7}$

Como $\frac{130}{7} \approx 18{,}57$, conclui-se que o termo de maior ordem que é menor do que 125 é o 18.º termo, cujo valor é: $u_{18} = 7\times 18 - 5 = 121$

28.3. $u_n \in]55, 125[\Leftrightarrow 55 < u_n < 125 \Leftrightarrow \frac{60}{7} < n < \frac{130}{7}$

Então, $9 \le n \le 18,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

N.º de termos que pertencem ao intervalo $]55, 125[$:

$18 - 9 + 1 = 10$

28.4. $S = \frac{u_9 + u_{18}}{2}\times 10 = \frac{58+121}{2}\times 10 = 895$

29. (u_n) progressão aritmética, em que $u_1 = 2$ e a razão é 3.

29.1. Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$

Neste caso, $u_n = 2 + (n-1)\times 3$, ou seja,

$u_n = 3n - 1$.

29.2. $u_n = 120 \Leftrightarrow 3n - 1 = 120 \Leftrightarrow 3n = 121 \Leftrightarrow n = \frac{121}{3}$

Como $\frac{121}{3} \notin \mathbb{N}\setminus\{0\}$, conclui-se que 120 não é termo da sucessão.

29.3. $S_{50} = \frac{u_1 + u_{50}}{2}\times 50 = \frac{2+(3\times 50 - 1)}{2}\times 50 =$

$$= \frac{151}{2}\times 50 = 3775$$

A soma dos números dos 50 copos expostos é 3775.

30.1. $\begin{cases} v_{20} = 3v_7 \\ w_{13} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + 19r = 3(v_1 + 6r) \\ v_1 + 12r = 50 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + 19r = 3v_1 + 18r \\ v_1 + 12r = 50 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2v_1 \\ v_1 + 12(2v_1) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2v_1 \\ v_1 + 24v_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2v_1 \\ 25v_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ v_1 = 2 \end{cases}$

Termo geral: $v_n = 2(n-1)\times 4$, ou seja,

$v_n = 4n - 2$

$v_n = 150 \Leftrightarrow 4n - 2 = 150 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4n = 152 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = \frac{152}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = 38$

O termo 150 é o termo de ordem 38.

30.2. $v_n < 100 \Leftrightarrow 4n - 2 < 100 \Leftrightarrow 4n < 102 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n < \frac{102}{4} \Leftrightarrow n < 25{,}5$

Os primeiros 25 termos da sucessão (v_n) são menores do que 100 e a sua soma é dada por:

$S_{25} = \frac{v_1 + v_{25}}{2} \times 25 = \frac{2 + 4 \times 25 - 2}{2} \times 25 =$

$= \frac{100}{2} \times 25 = 1250$

Página 65 – Pratica

31.1. O número de vasos por fila está em progressão aritmética, em que o 1.º termo é 4 e a razão é 3.

Seja (u_n) essa progressão.

Termo geral: $u_n = 4 + (n-1) \times 3$, ou seja,

$u_n = 3n + 1$.

O número de vasos da 10.ª fila é dado por u_{10}.

$u_{10} = 3 \times 10 + 1 = 31$

A 10.ª fila tem 31 vasos.

31.2. Seja k o número de filas.

$S_k = 531 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_k}{2} \times k = 531 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4 + 3k + 1}{2} \times k = 531 \Leftrightarrow \frac{5 + 3k}{2} \times k = 531 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5k + 3k^2}{2} = 531 \Leftrightarrow 5k + 3k^2 = 1062 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3k^2 + 5k - 1062 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times (-1062)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 18 \vee k = -\frac{59}{3}$

Como $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, conclui-se que $k = 18$.

O número de filas é 18.

32.1. Os valores depositadospela Joana estão em progressão aritmética, em que o primeiro termo é 250 e a razão é 30.

Seja (u_n) essa progressão.

Termo geral: $u_n = 250 + (n-1) \times 30$, ou seja,

$u_n = 30n + 220$

Julho $\rightarrow$ 7.º mês

$u_7 = 30 \times 7 + 220 = 430$

Novembro $\rightarrow$ 11.º mês

$u_{11} = 30 \times 11 + 220 = 550$

A Joana no mês de julho depositou 430 euros e no mês de novembro depositou 550 euros.

32.2. O valor total depositado durante o ano de 2026 é dado por S_{12}.

$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = \frac{250 + 580}{2} \times 12 = 4980$

No total, durante o ano de 2026, foram depositados 4980 euros.

33. Sabe-se que a razão é 3 e o 1.º termo é k.

$\begin{cases} u_1 = k \\ u_{n+1} = u_n + 3, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

$S_{10} = 95 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 = 95 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{k + k + 9 \times 3}{2} \times 10 = 95 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2k + 27}{2} \times 10 = 95 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(k + \frac{27}{2}\right) \times 10 = 95 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10k + 135 = 95 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10k = -40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -4$

Termo geral: $u_n = -4 + (n-1) \times 3$, ou seja,

$u_n = 3n - 7$

$u_n = 218 \Leftrightarrow 3n - 7 = 218 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n = 225 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{225}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 75$

218 é o termo de ordem 75.

34. Valor de compra do automóvel: 28 000 euros

Desvalorização anual: 8% em relação ao valor de compra

34.1. O valor do automóvel decorridos n anos, após a sua compra, é dado por uma progressão aritmética (u_n).

$u_1 = 28\,000 - 0{,}08 \times 28\,000 = 25\,760$

$r = -0{,}08 \times 28\,000 = -2240$

$u_n = 25\,760 + (n-1) \times (-2240)$, ou seja,

$u_n = -2240n + 28\,000$

O valor do automóvel ao fim de dez anos é dado por u_{10}.

$u_{10} = -2240 \times 10 + 28\,000 = 5600$

Decorridos dez anos, após a sua compra, o valor do automóvel é 5600 euros.

34.2. Valor da venda do automóvel, seis anos após a compra: 15 400 euros

O valor do automóvel ao fim de seis anos é dado por u_6 .

Assim, o vendedor fez um bom negócio, porque, com a venda do automóvel, teve 840 euros de lucro.

Página 66

35. A opção em que estão representados quatro termos consecutivos de uma progressão geométrica é a **(C)**, porque o quociente entre quaisquer dois termos consecutivos é constante

$$\left(\frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{2} = \frac{\frac{25}{2}}{5} = \frac{5}{2} \right).$$

36.1. -2 , 6, $\square$, $\square$ $\rightarrow$ os termos estão em progressão geométrica

A razão dessa progressão é: $r = \frac{6}{-2} = -3$

Qualquer termo, depois do primeiro termo, obtém-se multiplicando o anterior pela razão.

Assim, a sequência é: -2 , 6, -18 , 54

36.2. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \square, \square$ $\rightarrow$ os termos estão em progressão geométrica

A razão dessa progressão é:

$r = \frac{2}{9} : \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Qualquer termo, depois do primeiro, obtém-se multiplicando o anterior pela razão.

Assim, a sequência é: $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}$

36.3. $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\frac{5}{2}$, 5 $\rightarrow$ os termos estão em progressão geométrica

A razão dessa progressão é: $r = \frac{5}{\frac{5}{2}} = 2$

$b \times 2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}$

$a \times 2 = b \Leftrightarrow a \times 2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow a = \frac{5}{8}$

Assim, a sequência é: $\frac{5}{8}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}, 5$

36.4. 9, 6, $\square$, $\square$ $\rightarrow$ estão em progressão geométrica

A razão dessa progressão é: $r = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Qualquer termo, depois do primeiro, obtém-se multiplicando o anterior pela razão.

Assim, a sequência é: 9, 6, 4, $\frac{8}{3}$

37. (u_n) : progressão geométrica decrescente

8, *a*, 2 e *b* são quatro termos consecutivos.

Sabe-se que $\frac{a}{8} = \frac{2}{a}$.

$\frac{a}{8} = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a^2 = 16 \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a = 4 \vee a = -4) \wedge a \neq 0$

Se *a* fosse igual a -4 , então a progressão não seria decrescente (os termos seriam alternadamente positivos e negativos).

Então, conclui-se que $a = 4$ e a razão é

$r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Logo, $b = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Assim, a sequência é 8, 4, 2 e 1.

38. (w_n) progressão geométrica

$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2} \\ w_{n+1} = 4w_n , \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$ $\rightarrow$ a razão é 4

$w_9 = 32\,768$

$w_{10} = 4 \times w_9 = 4 \times 32\,768 = 131\,072$

$w_8 = \frac{w_9}{4} = \frac{32\,768}{4} = 8192$

Assim, $w_{10} - w_8 = 131\,072 - 8192 = 122\,880$.

A opção correta é a **(C)**.

Página 67

39.1. (u_n) é uma progressão geométrica em que

$u_1 = 2$ e $r = \frac{1}{5}$.

O termo geral é $u_n = u_1 \times r^{n-1}$.

$$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 2 \times \left(5^{-1}\right)^{n-1} = 2 \times 5^{-n+1}$$

39.2. (u_n) é uma progressão geométrica em que

$u_1 = -3$ e $r = 4$.

O termo geral é $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

$u_n = -3 \times 4^{n-1}$

39.3. (u_n) é uma progressão geométrica em que

$u_1 = -2$ e $r = 0{,}1$.

O termo geral é $u_n = u_1 \times r^{n-1}$.

$$u_n = -2 \times 0{,}1^{n-1} = -2 \times \left(10^{-1}\right)^{n-1} = -2 \times 10^{-n+1}$$

39.4. (u_n) é uma progressão geométrica em que

$u_1 = \frac{3}{2}$ e $r = \frac{1}{4}$.

O termo geral é $u_n = u_1 \times r^{n-1}$.

$$u_n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} =$$
$$= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{4^n} \times 4 =$$
$$= \frac{12}{2 \times 4^n} = \frac{6}{4^n}$$

40. $u_n = 5^{2-n}$ e sabe-se que (u_n) é uma progressão geométrica.

Primeiro termo: $u_1 = 5^{2-1} = 5^1 = 5$

Razão:

$$r = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{2-(n+1)}}{5^{2-n}} = \frac{5^{2-n-1}}{5^{2-n}} =$$
$$= 5^{1-n-(2-n)} = 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

A opção correta é a **(C)**.

41. (v_n) é uma progressão geométrica.

$v_4 = 36$, $v_5 = 108$ e $v_6 = 324$

41.1. Sendo (v_n) uma progressão geométrica, sabe-se que a razão é o quociente entre dois termos consecutivos.

$$r = \frac{v_5}{v_4} = \frac{108}{36} = 3$$

$$v_4 = v_3 \times r \Leftrightarrow 36 = v_3 \times 3 \Leftrightarrow$$
$$v_3 = \frac{36}{3} \Leftrightarrow v_3 = 12$$
$$v_3 = v_2 \times r \Leftrightarrow 12 = v_2 \times 3 \Leftrightarrow$$
$$v_2 = \frac{12}{3} \Leftrightarrow v_2 = 4$$

41.2. Termo geral: $v_n = v_1 \times r^{n-1}$

$$v_1 = \frac{v_2}{3} = \frac{4}{3}$$

Neste caso:

$$v_n = \frac{4}{3} \times 3^{n-1} = 4 \times \frac{1}{3} \times 3^{n-1} =$$
$$= 4 \times 3^{-1} \times 3^{n-1} = 4 \times 3^{n-2}$$

42.1. $u_n = 2 \times 3^{2-n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{2} \times 3^{2-(n+1)}}{\cancel{2} \times 3^{2-n}} = \frac{3^{2-n-1}}{3^{2-n}} =$$
$$= 3^{1-n-(2-n)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Como $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, conclui-se que (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

42.2. $u_n = -5 \times 2^{-n+3}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{-5} \times 2^{-(n+1)+3}}{\cancel{-5} \times 2^{-n+3}} = \frac{2^{-n-1+3}}{2^{-n+3}} =$$
$$= \frac{2^{-n+2}}{2^{-n+3}} = 2^{-n+2-(-n+3)} =$$
$$= 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Como $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, conclui-se que (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Página 68

43. Seja (u_n) a progressão geométrica cujo 2.º termo é 6 e o 4.º termo é 54.

$u_2 = 6$ e $u_4 = 54$

$u_4 = u_2 \times r^2 \Leftrightarrow 54 = 6 \times r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2 = \frac{54}{6} \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = 3 \vee r = -3$

Como os termos da progressão são positivos, então $r = 3$.

Logo, $u_1 = \frac{u_2}{r} = \frac{6}{3} = 2$.

A opção correta é a **(B)**.

44. (u_n) é uma progressão geométrica de razão positiva.

$u_4 = 5$ e $u_8 = \frac{1}{125}$

44.1. $u_8 = u_4 \times r^4 \Leftrightarrow \frac{1}{125} = 5 \times r^4 \Leftrightarrow \frac{1}{625} = r^4 \Leftrightarrow$

$\underset{r>0}{\Leftrightarrow} r = \sqrt[4]{\frac{1}{625}} \Leftrightarrow r = \frac{1}{5}$

44.2. O termo geral é dado por $u_n = u_1 \times r^{n-1}$.

$u_4 = u_1 \times r^3 \Leftrightarrow 5 = u_1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 = u_1 \times \frac{1}{125} \Leftrightarrow u_1 = 625$

Neste caso:

$u_n = 625 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 5^4 \times \left(5^{-1}\right)^{n-1} =$

$= 5^4 \times 5^{-n+1} = 5^{4-n+1} =$

$= 5^{5-n}$

45.1. $w_n = 5 \times 4^{1-n}$

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\cancel{5} \times 4^{1-(n+1)}}{\cancel{5} \times 4^{1-n}} = \frac{4^{1-n-1}}{4^{1-n}} =$

$= \frac{4^{-n}}{4^{1-n}} = 4^{-n-(1-n)} =$

$= 4^{-1} = \frac{1}{4}$

Como $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, conclui-se que (w_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

45.2. $w_1 = 5 \times 4^{1-1} = 5 \times 4^0 = 5 \times 1 = 5$

(w_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo 5 e razão $\frac{1}{4}$, logo é definida por recorrência de seguinte forma:

$$\begin{cases} w_1 = 5 \\ w_{n+1} = \frac{1}{4} w_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

45.3. $w_n = 320 \Leftrightarrow 5 \times 4^{1-n} = 320 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4^{1-n} = 64 \Leftrightarrow 4^{1-n} = 4^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - n = 3 \Leftrightarrow n = -2$

Como $-2 \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$, conclui-se que 320 não é termo da sucessão (w_n).

46. Sendo (a_n) uma progressão geométrica de razão r_1, sabe-se que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r_1$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Sendo (b_n) uma progressão geométrica de razão r_2, sabe-se que $\frac{b_{n+1}}{b_n} = r_2$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$c_n = a_n \times b_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1} \times b_{n+1}}{a_n \times b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \times \frac{b_{n+1}}{b_n} = r_1 \times r_2 = r_1 r_2$

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Logo, (c_n) é uma progressão geométrica de razão $r = r_1 r_2$.

Página 69 – Tarefa 4

1.1. **a)** $u_1 = 12\,000 + 0{,}03 \times 12\,000 =$

$12\,000 + 360 = 12\,360$

b) A sucessão (u_n) pode ser definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_1 = 12\,360 \\ u_{n+1} = u_n + 360, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Nota: Como os juros são simples à taxa anual de 3%, sabe-se que, por cada ano de depósito, acresce 3% de $12\,000$ €, ou seja, 360 €.

c) Atendendo a **1.1. b)**, sabe-se que (u_n) é uma progressão aritmética de primeiro termo 12 360 e razão 360.

O termo geral de (u_n) é:

$u_n = 12\,360 + (n-1)\times 360$, ou seja,

$u_n = 360n + 12\,000$

1.2. **a)** $v_1 = 12\,000 + 0{,}025 \times 12\,000 = 12\,000 + 300 = 12\,300$

b) $v_{n+1} = v_n = 0{,}025v_n = v_n(1+0{,}025) = v_n \times 1{,}025$

A sucessão (v_n) pode ser definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} v_1 = 12\,300 \\ v_{n+1} = 1{,}025v_n, \ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases}$$

c) Atendendo a **1.2. b)**, sabe-se que (v_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo 12 300 e razão 1,025.

O termo geral de (v_n) é:

$v_n = 12\,300 \times 1{,}025^{n-1}$

1.3. **a)** Se o depósito do capital tiver a duração de 3 anos, então $n = 3$.

Proposta A:

$u_3 = 360 \times 3 + 12\,000 = 13\,080$

Proposta B:

$v_3 = 12\,300 \times 1{,}025^2 \approx 12\,922{,}69$

Conclusão: A proposta mais favorável para a Sofia é a A, porque o capital final será 13 080€ , enquanto na proposta B será apenas 12 022,69€ .

b) Se o depósito do capital tiver a duração de 6 anos, então $n = 6$.

Proposta A:

$u_6 = 360 \times 6 + 12\,000 = 14\,160$

Proposta B:

$v_6 = 12\,300 \times 1{,}025^5 = 13\,916{,}32$

Conclusão: A proposta mais favorável para a Sofia continua a ser a A, porque o capital final é 14 160 € , enquanto na proposta B é apenas 13 916,32 € .

c) Se o depósito de capital tiver a duração de 16 anos, então $n = 16$.

Proposta A:

$u_{15} = 360 \times 16 + 12\,000 = 17\,760$

Proposta B:

$v_{16} = 12\,300 \times 1{,}025^{15} = 17\,814{,}07$

Conclusão: A proposta mais favorável para a Sofia é a B, porque o capital final é 17 814,07€ , enquanto na proposta A é apenas 17 760€ .

2. Valor inicial do automóvel: 35 000€

Desvalorização: 15% ao ano

(w_n): valor do automóvel, em euros, passados n anos da sua compra.

2.1. $w_1 = 35\,000 - 0{,}15 \times 35\,000 =$

$= (1-0{,}15)\times 35\,000 =$

$= 0{,}85 \times 35\,000 =$

$= 29\,750$

Sabe-se que o automóvel, em cada ano, vale menos 15% do que valia no ano anterior, ou seja, que: $w_{n+1} = w_n - 0{,}15w_n = 0{,}85w_n, \ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Então, (w_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo 29 750 e razão 0,85.

O termo geral da sucessão (w_n) é:

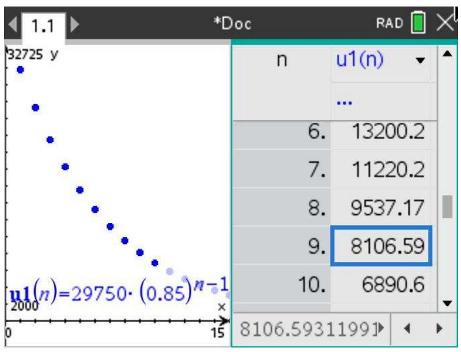
$w_n = 29\,750 \times 0{,}85^{n-1}$

2.2. $w_4 = 29\,750 \times 0{,}85^3 \approx 18\,270{,}22$

O valor do automóvel ao fim de quatro anos é, aproximadamente, 18 270,22€ .

2.3. Pretende-se determinar o maior valor de n para o qual $w_n > 8000$.

Recorrendo à calculadora gráfica, pode-se construir uma tabela com os valores do automóvel ao fim de alguns anos.



Analisando a tabela, conclui-se que o automóvel deve ser vendido com nove anos de modo que ainda seja vendido por, pelo menos, 8000 euros.

Página 70

47. $u_n = 2^n$

47.1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
u_n	2	4	8	16	32	64	128	256	…

O menor termo da sucessão (u_n) que é maior do que 100 é o termo de ordem 7, que é igual a 128.

A opção correta é a **(C)**.

47.2. $u_9 = 512$, $u_{10} = 1024$, $u_{11} = 2048$, …

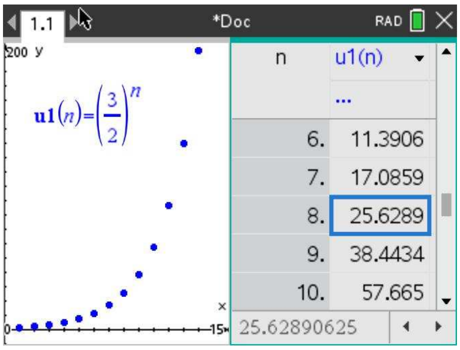
O maior termo da sucessão que é menor do que 1000 é 512 e a sua ordem é 9.

A opção correta é a **(B)**.

48. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

48.1. Pretende-se determinar a ordem do menor termo da sucessão que é maior do que 20.

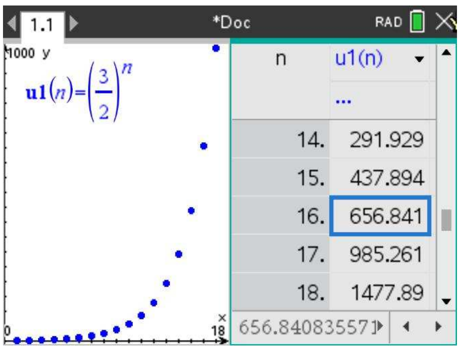
Representando a sucessão na calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que a ordem pedida é a 8.

48.2. Pretende-se determinar a ordem do menor termo da sucessão que é maior do que 100.

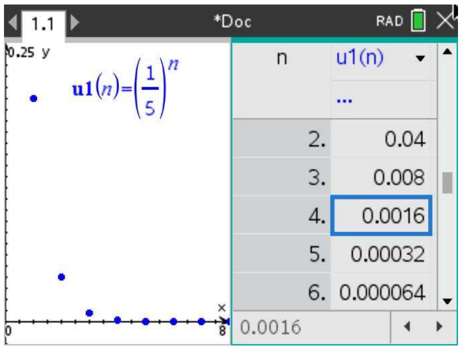
Representando a sucessão na calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que a ordem pedida é a 12.

48.3. Pretende-se determinar a ordem do menor termo da sucessão que é maior do que 500.

Representando a sucessão na calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que a ordem pedida é a 16.

49. $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

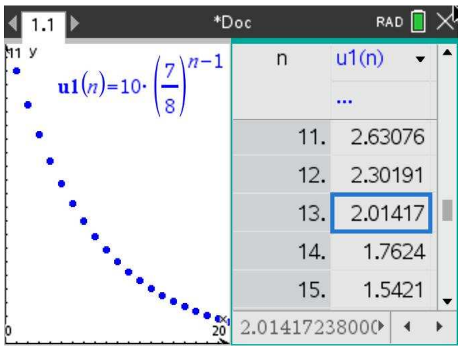
49.1. O maior termo da sucessão (v_n) é o primeiro, porque a sucessão é decrescente.

$v_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$

O maior termo da sucessão é $\frac{1}{5}$

49.2. Pretende-se determinar o maior termo da sucessão que é menor do que 0,002.

Representando a sucessão na calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que o maior termo da sucessão que é menor do que 0,002 é 0,0016.

A opção correta é a **(D)**.

49.3. Como $0 < \frac{1}{5} < 1$, sabe-se que à medida que n aumenta e toma valores muito grandes, $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ tende para 0.

A opção correta é a **(D)**.

Página 71

50. $u_n = 3^n \rightarrow$ progressão geométrica crescente

$(r > 1 \text{ e } u_1 > 0)$

$u_n = 1{,}8^n \rightarrow$ progressão geométrica crescente

$(r > 1 \text{ e } u_1 > 0)$

$u_n = 0{,}9^n \rightarrow$ progressão geométrica decrescente

$(0 < r < 1 \text{ e } u_1 > 0)$

$u_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n \rightarrow$ progressão geométrica crescente

$(r > 1 \text{ e } u_1 > 0)$

A opção correta é a **(C)**.

51. $v_n = (-4)^n \rightarrow$ é uma progressão geométrica

51.1. $v_1 = (-4)^1 = -4$

$$r = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(-4)^{n+1}}{(-4)^n} = (-4)^{n+1-n} = (-4)^1 = -4$$

$v_n = -4$ e $r = -4$

51.2. Como (v_n) é uma progressão geométrica de razão negativa $(r = -4)$, então os seus termos são alternadamente negativos e positivos.

Logo, a sucessão (v_n) não é monótona.

A opção correta é a **(D)**.

52.1. Como o 1.º termo é positivo (é igual a 8) e a Inês considerou uma progressão decrescente, então a razão dessa progressão estará compreendida entre 0 e 1. Assim, terá de ser $\frac{7}{8}$.

No caso do Lucas, o primeiro termo é positivo (é o mesmo) e a progressão é crescente, então a razão dessa progressão terá de ser superior a 1.

Assim, terá de ser $\frac{6}{5}$.

No caso da Rita, a razão será 1 (correspondente à etiqueta que restou).

Inês: $r = \frac{7}{8}$

Rita: $r = 1$

Lucas: $r = \frac{6}{5}$

52.2. A sucessão da Rita é constante, porque é uma progressão geométrica de razão 1.

Página 72 – Pratica

53. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

53.1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\cancel{u_n}}{\cancel{u_n}} = 2, \ \forall n \in \mathbb{N}\{0\}$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

53.2. Termo geral: $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

Neste caso, $u_n = 3 \times 2^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

53.3. $u_7 - u_4 = 3 \times 2^6 - 3 \times 2^3 = 3 \times (2^6 - 2^3)$

A opção correta é a **(D)**.

54. $v_n = 3 \times 5^{-n+2}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\cancel{3} \times 5^{-(n+1)+2}}{\cancel{3} \times 5^{-n+2}} = \frac{5^{-n-1+2}}{5^{-n+2}} =$$

$$= \frac{5^{-n+2}}{5^{-n+2}} = 5^{-n+1-(-n+2)} =$$

$$= 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

Como $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, conclui-se que (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

O 1.º termo da sucessão é:

$v_1 = 3 \times 5^{-1+2} = 3 \times 5 = 15$

A sucessão (v_n) é definida por recorrência da seguinte forma:

$\begin{cases} v_1 = 15 \\ v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

55.1. (u_n) é uma progressão geométrica em que $u_1 = 9$ e $r = -3$.

O termo geral é $u_n = u_1 \times r^{n-1}$.

Neste caso, $u_n = 9 \times (-3)^{n-1}$.

55.2. (u_n) é uma progressão geométrica em que $u_1 = -4$ e $u_2 = -3$.

Razão da progressão: $r=\frac{u_2}{u_1}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$

O termo geral é $u_n=u_1\times r^{n-1}$.

Neste caso, $u_n=-4\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

55.3. (u_n) é uma progressão geométrica em que

$u_3=\frac{1}{6}$ e $r=\frac{1}{2}$.

$$u_3=u_1\times r^2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}=u_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}=u_1\times\frac{1}{4} \Leftrightarrow u_1=\frac{4}{6} \Leftrightarrow u_1=\frac{2}{3}$$

O termo geral é $u_n=u_1\times r^{n-1}$.

Neste caso, $u_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

55.4. (u_n) é uma progressão geométrica em que

$u_6=9$, $u_8=225$ e a razão é positiva.

$u_8=u_1\times r^7$

$u_6=u_1\times r^5$

$$u_8=u_1\times r^7 \Leftrightarrow 225=\underbrace{u_1\times r^5}_{u_6}\times r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 225=u_6\times r^2 \Leftrightarrow 225=9\times r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{225}{9}=r^2 \Leftrightarrow 25=r^2 \underset{r>0}{\Leftrightarrow} r=5$$

$$u_6=u_1\times r^5 \Leftrightarrow 9=u_1\times 5^5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1=\frac{9}{5^5} \Leftrightarrow u_1=\frac{9}{3125}$$

O termo geral é $u_n=u_1\times r^{n-1}$.

Neste caso, $u_n=\frac{9}{3125}\times 5^{n-1}$.

56. Modalidade de pagamento:

- 12 prestações
- o valor de cada prestação, depois da primeira, é 75% do valor da prestação anterior.

56.1. Designando por *a*, *b* e *c* os valores, em euros, da primeira, segunda e terceira prestações, respetivamente.

Sabe-se que $c=1125$ e pretende-se determinar o valor de *a*.

Como o valor de cada prestação, depois da primeira, é 75% do valor da prestação anterior, então:

$$b=\frac{c}{0,75}=\frac{1125}{0,75}=1500$$

$$a=\frac{b}{0,75}=\frac{1500}{0,75}=2000$$

O valor da primeiro prestação é 2000 euros.

56.2. Os valores das prestações estão em progressão geométrica, sendo a razão 0,75 e o primeiro termo 2000.

Termo geral: $u_n=2000\times 0,75^{n-1}$

$$u_{12}=2000\times 0,75^{11}\approx 84,47$$

O valor da última prestação é, aproximadamente, 84,47 euros.

Página 73 – Pratica

57.1. Seja (u_n) a sucessão das distâncias, em metros, percorridas pela bola em cada descida.

A sucessão é definida por recorrência da seguinte forma:

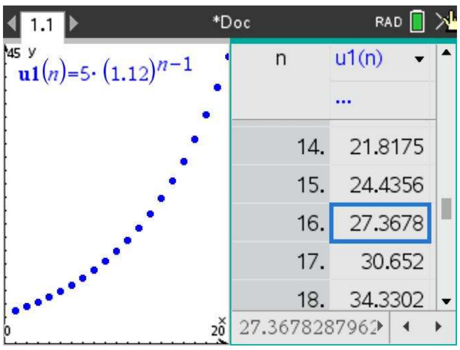
$$\begin{cases} u_1=10 \\ u_{n+1}=\frac{7}{8}u_n, \ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases}$$

57.2. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{7}{8}u_n}{u_n}=\frac{7}{8}$, $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, logo (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{7}{8}$.

Termo geral: $u_n=10\times\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}$

57.3. Pretende-se saber a ordem do último toque dado pela bola no solo em que a bola percorreu, na descida, mais de 2 metros.

Representando a sucessão na calculadora gráfica e construindo uma tabela com uma lista de termos, tem-se:



Pela análise da tabela, conclui-se que a ordem do último toque dado pela bola no solo em que a bola percorreu, na descida, mais de 2 metros é 13.

58.1. a) A sucessão (u_n) é definida por recorrência da seguinte forma:

$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}12u_n \end{cases}$, ou seja,

$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 1{,}12u_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

b) Como $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1{,}12\cancel{u_n}}{\cancel{u_n}} = 1{,}12$, conclui-se que (u_n) é uma progressão geométrica de razão 1,12.

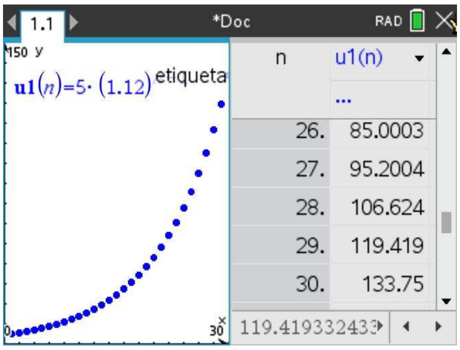
O termo geral da sucessão (u_n) é

$u_n = u_1 \times r^{n-1}$.

Neste caso, $u_n = 5 \times 1{,}12^{n-1}$.

58.2. a) Meia hora $=$ 30 minutos

Recorrendo à calculadora gráfica, representam-se os primeiros termos da sucessão.

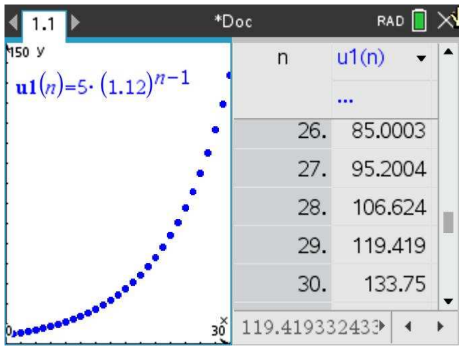


Donde se conclui que a atividade de recuperação muscular foi inferior a meia hora durante 16 dias.

b) Pela análise da tabela que consta da questão anterior (**58.2. a)**), conclui-se que foi no dia 17 de abril em que pela primeira vez a atividade de recuperação muscular ultrapassa meia hora.

c) Uma hora e trinta minutos $=$ 90 minutos

Recorrendo à calculadora gráfica, representam-se os termos da sucessão correspondentes ao tempo de atividade de recuperação nos últimos dias do mês de abril.



Donde se conclui que está prevista mais de uma hora e trinta minutos de atividade de recuperação durante quatro dias (de 27 a 30 de abril).

59. Sabe-se que as medidas dos comprimentos dos lados do triângulo retângulo $[ABC]$ estão em progressão geométrica. Seja r a razão dessa progressão $(r > 0)$.

Se considerarmos que $\overline{BC} = a \quad (a > 0)$, então $\overline{AB} = ar$ e $\overline{AC} = ar^2$.

Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow (ar^2)^2 = (ar)^2 + a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2r^4 = a^2r^2 + a^2 \Leftrightarrow$

$\underset{a^2>0}{\Leftrightarrow} r^4 = r^2 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^4 - r^2 - 1 = 0$

Considerando $r^2 = y$, tem-se:

$y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Como $y = r^2$, tem-se:

$r^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee \underbrace{r^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{\substack{\text{Equação impossível} \\ \text{porque } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0}} \underset{r>0}{\Leftrightarrow}$

$\underset{r>0}{\Leftrightarrow} r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r \approx 1{,}27$

A opção correta é a **(A)**.

Página 74 – Tarefa 5

1. (u_n) é a progressão geométrica em que o 1.º termo é 1 e a razão é 2.

O termo geral de uma progressão geométrica é $u_n = u_1 \times r^{n-1}$.

Neste caso, $u_n = 1 \times 2^{n-1}$, ou seja, $u_n = 2^{n-1}$.

2.

Ordem da casa do tabuleiro de xadrez, *n*	**Número de grãos de trigo, u_n**	**Soma do número de grãos de trigo correspondentes às primeiras *n* casas, $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$**
1	1	1
2	2	3
3	4	7
…	…	…
15	16 384	32 767
…	…	…
20	524 288	1 048 575
…	…	…
45	17 592 186 044 416	35 184 372 088 831
…	…	…

Página 75

60.1. (u_n) é uma progressão geométrica tal que $u_n = 3 \times 2^{n-1}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{n+1-1}}{3 \times 2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2^{n-(n-1)} = 2$$

ou seja, $r = 2$

$$u_1 = 3 \times 2^{1-1} = 3 \times 2^0 = 3 \times 1 = 3$$

$$S_8 = u_1 \times \frac{1-r^8}{1-r} =$$

$$= 3 \times \frac{1-2^8}{1-2} =$$

$$= 3 \times \frac{-255}{-1} =$$

$$= 3 \times 255 = 765$$

A soma dos oito primeiros termos é 765.

60.2. (u_n) é uma progressão geométrica definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

$$S_{10} = u_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1-\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{1-\frac{1024}{59\,049}}{\frac{1}{3}} = \frac{58\,025}{19\,683}$$

A soma dos dez primeiros termos é $\frac{58\,025}{19\,683}$.

61. (w_n) é uma progressão geométrica crescente, tal que $r = \frac{3}{2}$ e $w_3 = \frac{9}{2}$.

61.1. $w_3 = w_1 \times r^2 \Leftrightarrow \frac{9}{2} = w_1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{2} = w_1 \times \frac{9}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow w_1 = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow w_1 = 2$$

61.2. $S_5 = w_1 \times \frac{1-r^5}{1-r} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^5}{1-\frac{3}{2}} =$

$$= 2 \times \frac{1-\frac{243}{32}}{-\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{-\frac{211}{32}}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \times \frac{211}{16} = \frac{211}{8}$$

A soma dos cinco primeiros termos da sucessão (w_n) é $\frac{211}{8}$.

62. Sabe-se que as medidas dos lados do pentágono estão em progressão geométrica de razão 1,25, que $\overline{CD} = 12{,}5$ e que $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{CD} < \overline{DE} < \overline{EA}$.

Então, tem-se que:

- $\overline{DE} = \overline{CD} \times 1{,}25 = 12{,}5 \times 1{,}25 = 15{,}625$
- $\overline{EA} = \overline{CD} \times 1{,}25^2 = 12{,}5 \times 1{,}25^2 = 19{,}53125$
- $\overline{BC} = \frac{\overline{CD}}{1{,}25} = \frac{12{,}5}{1{,}25} = 10$

- $\overline{AB} = \frac{\overline{CD}}{1{,}25^2} = \frac{12{,}5}{1{,}25^2} = 8$

$P_{[ABCDE]} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} =$
$= 8 + 10 + 12{,}5 + 15{,}625 + 19{,}53125 =$
$= 65{,}65625 \approx 65{,}66$

O perímetro do pentágono $[ABCDE]$ é, aproximadamente, 65,66.

Página 76

63. (u_n): progressão geométrica

$u_n = 0{,}1 \times 2^{n-1}$

Pretende-se calcular a soma dos sete termos consecutivos de (u_n) a começar no 4.º termo.

(u_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

$u_4 = 0{,}1 \times 2^{4-1} = 0{,}1 \times 2^3 = 0{,}1 \times 8 = 0{,}8$

Seja S a soma pedida.

$$S = u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} =$$
$$= u_4 \times \frac{1 - r^{10-4+1}}{1-r} =$$
$$= 0{,}8 \times \frac{1-2^7}{1-2} =$$
$$= 0{,}8 \times \frac{-127}{-1}$$
$$= 0{,}8 \times 127 =$$
$$= 101{,}6$$

Assim, a soma dos sete termos consecutivos de (u_n) a começar no quarto termo é 101,6.

64. $v_n = 5 \times \frac{6}{2^n}$

64.1. $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\cancel{5} \times \frac{6}{2^{n+1}}}{\cancel{5} \times \frac{6}{2^n}} = \frac{\frac{6}{2^{n+1}}}{\frac{6}{2^n}} =$$
$$= \frac{\cancel{6} \times 2^n}{\cancel{6} \times 2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} =$$
$$= 2^{n-(n+1)} = 2^{-1} = \frac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Logo, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

64.2. $$v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = v_3 \times \frac{1 - r^{8-3+1}}{1-r} =$$
$$= \left(5 \times \frac{6}{2^3}\right) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{30}{8} \times \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{4} \times \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{15}{4} \times \frac{63}{32} = \frac{945}{128} \approx 7{,}38$$

65. Seja (u_n) a sucessão em que os primeiros 14 termos correspondem ao número de pessoas contratadas em cada um dos 14 dias das duas semanas da campanha publicitária.

Sabe-se que a sucessão (u_n) é definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 100 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}2u_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases},\ \text{ou seja,}$$

$$\begin{cases} u_1 = 100 \\ u_{n+1} = 1{,}2u_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Então, (u_n) é uma progressão geométrica de razão 1,2.

O termo geral da sucessão (u_n) é:

$u_n = 100 \times 1{,}2^{n-1}$

Pretende-se determinar o número de pessoas contactadas durante a segunda semana, ou seja, calcular a soma.

$S = u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14}$

$u_8 = 100 \times 1{,}2^7 = 358{,}31808$

$$S = u_8 \times \frac{1 - r^{14-8+1}}{1-r} =$$
$$= 358{,}318\,08 \times \frac{1 - 1{,}2^7}{1 - 1{,}2} \approx 4628$$

Durante a segunda semana foram contactadas 4628 pessoas.

Página 77 – Tarefa 6

1.1. $u_1 = 40\,000 - 0{,}15 \times 40\,000 = 34\,000$

$u_2 = 34\,000 - 0{,}15 \times 34\,000 = 28\,900$

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{28\,900}{34\,000} 0{,}85$, ou seja, $r = 0{,}85$

1.2.

N.º de anos decorridos, *n*	u_n	v_n
1	$40\,000\times\boxed{0,85}$	$0,15\times\boxed{40\,000}$ $=\boxed{6000}$
2	$40\,000\times\boxed{0,85}^{\boxed{2}}$	$0,15\times 40\,000\times\boxed{0,85}=$ $=\boxed{6000}\times 0,85$
…	…	…
n	$u_n=40\,000\times\boxed{0,85}^{\boxed{n}}$	$v_n=\boxed{6000}\times 0,85^{\boxed{n-1}}$

1.3. Valor do automóvel no dinal do 4.º ano (ou seja, u_4)

$$\underbrace{40\,000}_{\text{Valor de compra do automóvel}} - \underbrace{\left(v_1+v_2+v_3+v_4\right)}_{\text{Valor total da desvalorização do automóvel nos quatro primeiros anos}}$$

A opção correta é a **(A)**.

2. u_4 representa o valor do automóvel no final de 2016.

$u_4=40\,000\times 0,85^4=20\,880,25$

Valor do automóvel no final de 2016:

$20\,880,25$ €

Do final de 2017 ao final de 2025 $\rightarrow$ número de anos: 9

Atendendo a que, neste período, a desvalorização foi 8% em relação ao ano anterior, o valor do automóvel, em euros, no final de 2025 é: $20\,880,25\times 0,92^9\approx 9858,85$

Assim, a estimativa do valor venal para o automóvel, no final de 2025, antes do acidente é $9858,85$ € .

Página 78 – Pratica

66. (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2 e quinto termo igual a 8.

66.1. $u_5=u_1\times r^4 \Leftrightarrow 8=u_1\times 2^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8=u_1\times 16 \Leftrightarrow \dfrac{8}{16}=u_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_1=\dfrac{1}{2}$

O termo geral de uma progressão geométrica é $u_n=u_1\times r^{n-1}$.

$u_n=\dfrac{1}{2}\times 2^{n-1}=2^{-1}\times 2^{n-1}=$

$=2^{-1+n-1}=2^{n-2}$

66.2. $S_{10}=u_1\times\dfrac{1-r^{10}}{1-r}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-2^{10}}{1-2}=$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-1024}{-1}=\dfrac{1023}{2}$

66.3. $S=u_5+u_6+u_7+u_8+u_9+u_{10}+u_{11}+u_{12}$

$u_5\times\dfrac{1-r^8}{1-r}=8\times\dfrac{1-2^8}{1-2}=$

$=8\times\dfrac{1-256}{-1}=$

$=8\times 255=2040$

67. (w_n) é uma progressão geométrica, tal que $w_n=0,25\times 2^{n-1}$.

67.1. $S_{15}=w_1\times\dfrac{1-r^{15}}{1-r}$

$w_1=0,25\times 2^{1-1}=0,25\times 2^0=0,25\times 1=0,25$

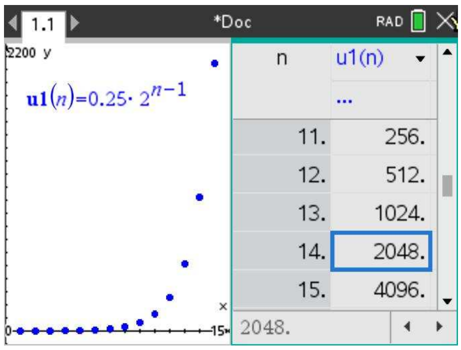
$r=\dfrac{w_2}{w_1}=\dfrac{0,25\times 2^1}{0,25}=2$

$S_{15}=0,25\times\dfrac{1-2^{15}}{1-2}=$

$=0,25\times 32\,767=8191,75$

67.2. Pretende-se determinar a soma dos termos inferiores a 2000.

Recorrendo à calculadora gráfica, identificam-se os termos que satisfazem a condição do enunciado.

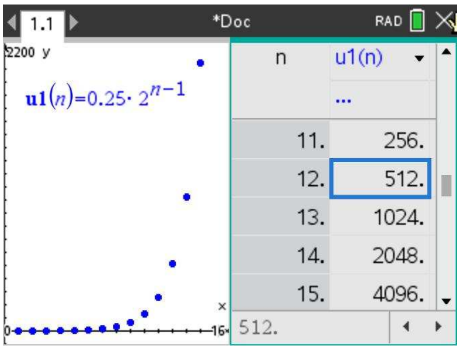


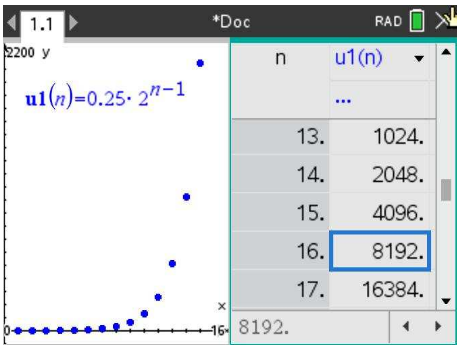
Neste caso, são os 13 primeiros termos.

$S_{13}=0,25\times\dfrac{1-2^{13}}{1-2}=$

$=0,25\times 8191=2047,75$

67.3. Pretende-se determinar a soma dos termos compreendidos entre 500 e 15 000.
Recorrendo à calculadora gráfica, identificam-se os termos que satisfazem a condição pedida.





Neste caso, são cinco termos a começar no 12.º termo e a terminar no 16.º termo.

$S = w_{12} + w_{13} + w_{14} + w_{15} + w_{16} =$

$= w_{12} \times \dfrac{1-r^5}{1-r} = 512 \times \dfrac{1-2^5}{1-2} =$

$= 512 \times 31 = 15\,872$

68.

- 1.ª hora: $0{,}50\,€$
- Restantes horas: acréscimo de 25% ao preço da hora anterior

68.1. Tempo de estacionamento: 8 horas
Seja (u_n) a sucessão em que u_n representa o valor a pagar, em euros, pela hora *n* se estacionamento.
Atendendo ao tarifário do parque de estacionamento, sabe-se que (u_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo 0,50 e razão 1,25.
Pretende-se determinar o valor pago pelo estacionamento, ou seja, S_8.

$S_8 = u_1 \times \dfrac{1-r^8}{1-r} = 0{,}50 \times \dfrac{1-1{,}25^8}{1-1{,}25} \approx 0{,}92$

O valor pago pelas 8 horas em que o automóvel esteve estacionado no parque foi $9{,}92\,€$.

68.2. Pretende-se determinar o preço pago pelas últimas quatro horas de estacionamento, ou seja, entre a 5.ª hora e 8.ª hora de estacionamento.

$S = u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = u_5 \times \dfrac{1-r^4}{1-r}$

$= \left(0{,}50 \times 1{,}25^4\right) \times \dfrac{1-1{,}25^4}{1-1{,}25} \approx 7{,}04$

$u_5 = u_1 \times r^4 = 0{,}50 \times 1{,}25^4$

O valor pago pelas últimas quatro horas de estacionamento foi de $7{,}04\,€$.

Página 79 – Pratica

69.1. Seja (u_n) a progressão geométrica em que os primeiros sete termos correspondem ao número de vendas nos sete dias da última semana (de segunda-feira a domingo).
Sabe-se que na quarta-feira foram vendidos 288 jornais e que na quinta-feira foram vendidos 432 jornais, ou seja, $u_3 = 288$ e $u_4 = 432$.

$u_4 = u_3 \times r \Leftrightarrow 432 = 288 \times r \Leftrightarrow \dfrac{432}{288} = r \Leftrightarrow 1{,}5 = r$

Termo geral da sucessão (u_n):

$u_n = u_1 \times r^{n-1}$

$u_3 = u_1 \times r^2 \Leftrightarrow 288 = u_1 \times 1{,}5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_1 = \dfrac{288}{1{,}5^2} \Leftrightarrow u_1 = 128$

Então, $u_n = 128 \times 1{,}5^{n-1}$.

O número de vendas no domingo corresponde ao valor de u_7.

$u_7 = 128 \times 1{,}5^{7-1} = 128 \times 1{,}5^6 = 1458$

No domingo foram vendidos 1458 jornais.

69.2. Pretende-se saber quantos jornais foram vendidos, na cidade, nos últimos cinco dias da semana.

$u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 =$

$= u_3 \times \dfrac{1-r^{7-3+1}}{1-r}$

$= 288 \times \dfrac{1-1{,}5^5}{1-1{,}5}$

$= 3798$

Nos últimos cinco dias da semana foram vendidos, na cidade, 3798 jornais.

70. (u_n) é uma progressão geométrica decrescente

a, 4 e b são três termos consecutivos de (u_n), tais que a sua soma é igual a 14.

Sabe-se que $\frac{4}{a}=\frac{b}{4}$ e $a+4+b=14$.

$$\begin{cases}\frac{4}{a}=\frac{b}{4}\\ a+4+b=14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ab=16\\ b=10-a\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a(10-a)=16\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-a^2+10a-16=0\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{-10\pm\sqrt{100-64}}{-2}\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{-10\pm 6}{-2}\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=2 \vee a=8\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=8\end{cases} \vee \begin{cases}a=8\\ b=2\end{cases}$$

Como a progressão geométrica (u_n) é decrescente, conclui-se que $a=8$ e $b=2$.

71.1. Sabe-se que $a_1=3 \wedge a_{n+1}=2a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo 3 e razão 2.

Termo geral de uma progressão geométrica:

$a_n=a_1\times r^{n-1}$

Neste caso, $a_n=3\times 2^{n-1}$.

(c_n) é a sucessão das medidas dos comprimentos das linhas vermelhas.

$c_1=\pi\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\pi$; $c_2=\pi\times 1=\pi$; $c_3=\pi\times 2=2\pi$; …

(c_n) é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{\pi}{2}$ e a razão é 2.

Termo geral:

$c_n=c_1\times r^{n-1}$, ou seja, $c_n=\frac{\pi}{2}\times 2^{n-1}$

71.2. $b_n+a_n+c_n=3\times 2^{n-1}+\frac{\pi}{2}\times 2^{n-1}=$

$=\left(3+\frac{\pi}{2}\right)\times 2^{n-1}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\cancel{\left(3+\frac{\pi}{2}\right)}\times 2^{n+1-1}}{\cancel{\left(3+\frac{\pi}{2}\right)}\times 2^{n-1}}=$$

$$=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2^{n-(n-1)}=2,\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$$

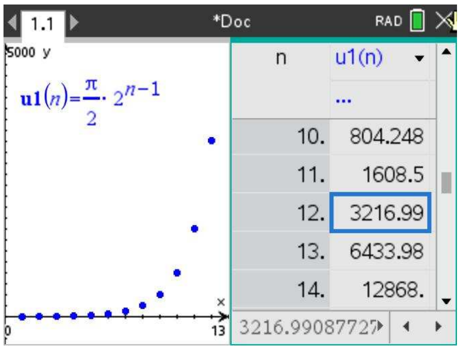
Como $\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$, $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, conclui-se que (b_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

Primeiro termo:

$b_1=\left(3+\frac{\pi}{2}\right)\times 2^0=\left(3+\frac{\pi}{2}\right)\times 1=3+\frac{\pi}{2}$

71.3. a) Pretende-se determinar a maior ordem dos termos de (c_n) inferiores a 5000.

Recorrendo à calculadora gráfica, identificam-se os termos que satisfazem a condição anterior.



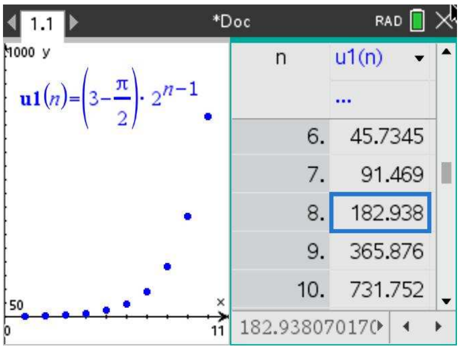
Neste caso, dos termos de (c_n) inferiores a 5000 o que tem maior ordem é o 12.º termo (termo de ordem 12).

b) Pretende-se determinar a menor ordem dos termos que satisfazem a condição $a_n-c_n>100$.

$a_n-c_n>100 \Leftrightarrow 3\times 2^{n-1}-\frac{\pi}{2}\times 2^{n-1}>100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(3-\frac{\pi}{2}\right)\times 2^{n-1}>100$

Recorrendo à calculadora gráfica, identifica-se o termo de menor ordem que satisfaz a condição dada.



Conclui-se que o termo de menor ordem que satisfaz a condição $a_n - c_n > 100$ é o 8.º termo (termo de ordem 8).

Página 80

72.1. (u_n) é uma progressão geométrica em que

$u_1 = 20$ e $r = 0{,}4$.

Termo geral: $u_n = u_1 \times r^{n-1}$, ou seja, $u_n = 20 \times 0{,}4^{n-1}$

$$S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 20 \times \frac{1-0{,}4^n}{1-0{,}4} =$$

$$= 20 \times \frac{1-0{,}4^n}{0{,}6} = 20 \times \frac{10}{6} \times \left(1-0{,}4^n\right) =$$

$$= \frac{100}{3}\left(1-0{,}4^n\right)$$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $0{,}4^n$ tende para 0.

$$S = \frac{100}{3}(1-0) = \frac{100}{3}$$

72.2. (u_n) é uma progressão geométrica em que

$u_1 = 35$ e $r = \frac{1}{5}$.

Termo geral:

$u_n = u_1 \times r^{n-1}$, ou seja, $u_n = 35 \times 0{,}2^{n-1}$

$$S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 35 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} =$$

$$= 35 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}} = 35 \times \frac{5}{4} \times \left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{175}{4} \times \left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ tende para 0.

$$S = \frac{175}{4}(1-0) = \frac{175}{4}$$

72.3. (u_n) é uma progressão geométrica em que

$u_1 = -50$ e $r = 0{,}8$.

Termo geral: $u_n = u_1 \times r^{n-1}$, ou seja, $u_n = -50 \times 0{,}8^{n-1}$

$$s_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = -50 \times \frac{1-0{,}8^n}{1-0{,}8} =$$

$$= -50 \times \frac{1-0{,}8^n}{0{,}2} = -250\left(1-0{,}8^n\right)$$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão tende para $0{,}8^n$ tende para 0.

$$S = -250(1-0) = -250$$

73. (v_n) é uma progressão geométrica em que

$v_1 = 200$ e $r = -0{,}6$

73.1. $$s_n = v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 200 \times \frac{1-(-0{,}6)^n}{1-(-0{,}6)} =$$

$$= 200 \times \frac{1-(-0{,}6)^n}{1{,}6} = \frac{200}{1{,}6} \times \left(1-(-0{,}6)^n\right) =$$

$$= 125\left(1-(-0{,}6)^n\right)$$

73.2. Recorrendo a uma folha de cálculo, quando n toma valores suficientemente grandes, verifica-se que S_n tende para 125, logo $S = 125$.

Página 81 – Tarefa 7

1. (u_n) uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$

$\overline{CD} = 108$, ou seja, $u_3 = 108$

1.1. $$u_3 = u_1 \times r^2 \Leftrightarrow 108 = u_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 108 = u_1 \times \frac{4}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 108 \times \frac{9}{4} = u_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 243$$

1.2. $S_6 = u_1 \times \frac{1-r^6}{1-r} = 243 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^6}{1-\frac{2}{3}} =$

$= 243 \times \frac{1-\frac{64}{729}}{\frac{1}{3}} = 43 \times \frac{\frac{665}{729}}{\frac{1}{3}} =$

$= 243 \times \frac{665}{243} = 665$

A opção correta é a **(A)**.

1.3. $S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 243 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} =$

$= 243 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} = 729\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ tende para 0.

$S = 729(1-0) = 729$

1.4. Recorrendo a uma folha de cálculo, quando n toma valores suficientemente grandes, S_n tende para 729.

2. Seja (u_n) a sucessão das medidas dos comprimentos dos segmentos de reta da linha poligonal.

(u_n) é uma progressão geométrica de razão r.

2.1. $\overline{AB} = 8$ e $r = \frac{3}{4}$

Como $[AB]$ é o primeiro segmento de reta da sequência, sabe-se que $u_1 = 8$.

1.º processo (sem recorrer à tecnologia):

$S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 8 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} =$

$= 8 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}} = 32 \times \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ tende para 0. Então, $S = 32(1-0) = 32$.

2.º processo (recorrendo à tecnologia):

Recorrendo a uma folha de cálculo, constata-se que, quando n toma valores suficientemente grandes, S_n tende para 32.

Então, a soma das medidas de todos os segmentos de reta é igual a 32, ou seja, $S = 32$.

2.2. $\overline{AB} = 130$ e $r = \frac{4}{5}$

Como $[AB]$ é o primeiro segmento de reta da sequência, sabe-se que $u_1 = 130$.

1.º processo (sem recorrer à tecnologia):

$S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 130 \times \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}} =$

$= 130 \times \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}} =$

$= 650 \times \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ tende para 0.

$S = 650(1-0) = 650$

2.º processo (recorrendo à tecnologia):

Recorrendo a uma folha de cálculo, constata-se que, quando n toma valores suficientemente grandes, S_n tende para 650.

Então, a soma das medidas de todos os segmentos de reta da espiral é igual a 650, ou seja, $S = 650$.

2.3. $\overline{AB} = 258$ e $r = \frac{2}{7}$

Como $[AB]$ é o 1.º segmento de reta da sequência, sabe-se que $u_1 = 258$.

1.º processo (sem recorrer à tecnologia):

$$S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 258 \times \frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^n}{1-\frac{2}{7}} =$$

$$= 258 \times \frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^n}{\frac{5}{7}}$$

$$= 361{,}2 \times \left(1-\left(\frac{2}{7}\right)^n\right)$$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{2}{7}\right)^n$ tende para 0.

$S = 361{,}2(1-0) = 361{,}2$

2.º processo (recorrendo à tecnologia):
Recorrendo a uma folha de cálculo, constata-se que, quando n toma valores suficientemente grandes, S_n tende para 361,2.

Então, a soma das medidas de todos os segmentos de reta da espiral é igual a 361,2, ou seja, $S = 361{,}2$.

Página 82 – Tarefa 8

1. (a_n) é a sucessão em que cada termo é igual à medida da área pintada na etapa correspondente à ordem desse termo.
Atendendo ao processo de construção do painel decorativo, sabe-se que $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

2.1. $a_1 + a_2 = 250$

Designando por x a área do painel decorativo, tem-se:

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right) = 250 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{8} = 250 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{8} = 250$$

$$\Leftrightarrow 5x = 2000$$

$$\Leftrightarrow x = 400$$

$a_1 = \frac{400}{2} = 200$ e $r = \frac{1}{4}$.

Termo geral da sucessão (a_n): $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

Neste caso, $a_n = 200 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

2.2. $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 200 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} =$

$$= 200 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = 200 \times \frac{4}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{800}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tende para 0.

$S = \frac{800}{3}(1-0) = \frac{800}{3}$

3. Medida do lado do quadrado que representa o painel: 32

3.1. Medida da área do painel: $32^2 = 1024$

Então, $a_1 = \frac{1024}{2} = 512$.

3.2. $S_8 = a_1 \times \frac{1-r^8}{1-r} = 512 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^8}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} =$

$$= 512 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^8}{\frac{3}{4}} \approx 682{,}656$$

3.3. $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 512 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} =$

$$= 512 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} =$$

$$= 512 \times \frac{4}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{2048}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tende para 0.

$S = \lim\limits_{n\to+\infty}(S_n) = \frac{2048}{3}(1-0) = \frac{2048}{3} = 682,(6)$

Não existe nenhum número natural n tal que $S_n > 685$, porque este valor é maior do que a soma de todos os termos da sucessão.

Página 83 – Tarefa 9

1.1. Seja (a_n) a sucessão em que cada termo representa a distância percorrida em cada uma das etapas se for seguido o plano A.

$a_1 = 380 \wedge a_{n+1} = 0,3a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Então, (a_n) é uma progressão geométrica de razão 0,3.

Termo geral: $a_n = 380 \times 0,3^{n-1}$

$a_2 = 380 \times 0,3 = 114$

$a_1 + a_2 = 380 + 114 = 494$

Como a Lagoa Nascente fica a 460 km do ponto de partida, conclui-se que é visitada na 2.ª etapa (pois $460 < 494$).

1.2. A Lagoa Poente fica a 150 km do ponto de chegada, ou seja, a 600 km do ponto de partida.

$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 380 \times \frac{1-0,3^n}{1-0,3} =$

$= 380 \times \frac{1-0,3^n}{0,7}$

$= \frac{3800}{7}\left(1-0,3^n\right)$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $0,3^n$ tende para 0.

$S = \frac{3800}{7}(1-0) = \frac{3800}{7} \approx 542,86$

Assim, conclui-se que este plano não permite chegar à Lagoa Poente, porque, no total, só é possível percorrer, aproximadamente, 542,86 km.

2.1. Seja (b_n) a sucessão em que cada termo representa a distância percorrida em cada uma das etapas do plano B.

$b_1 = 400 \wedge b_{n+1} = 0,45b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Então, (b_n) é uma progressão geométrica de razão 0,45.

Termo geral: $b_n = 400 \times 0,45^{n-1}$

$b_2 = 400 \times 0,45^1 = 180$

$b_3 = 400 \times 0,45^2 = 81$

$b_1 + b_2 = 400 + 180 = 580$ e

$b_1 + b_2 + b_3 = 580 + 81 = 661$

Donde se conclui que a Lagoa Nascente é visitada na 2.ª etapa e Lagoa Poente é visitada na 3.ª etapa.

2.2. $S_n = b_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 400 \times \frac{1-0,45^n}{1-0,45} =$

$= 400 \times \frac{1-0,45^n}{0,55} =$

$= \frac{8000}{11}\left(1-0,45^n\right)$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $0,45^n$ tende para 0.

$S = \frac{8000}{11}(1-0) = \frac{8000}{11} \approx 727,27$

Não, o plano B não permite chegar à cidade Ciência Antiga, pois esta fica a 750 km da aldeia de origem, o Pulmão Verde, e o plano B só permite percorrer uma distância máxima de, aproximadamente, 727,72 km.

3.1. Seja (c_n) a sucessão em que cada termo representa a distância percorrida em cada uma das etapas do plano C.

$c_1 = 200 \wedge c_{n+1} = 0,75c_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Então, (c_n) é uma progressão geométrica de razão 0,75.

Termo geral: $c_n = 200 \times 0,75^{n-1}$

$S_n = c_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 200 \times \frac{1-0,75^n}{1-0,75} =$

$= 200 \times \frac{1-0,75^n}{0,25} =$

$= 800\left(1-0,75^n\right)$

Recorrendo a uma folha de cálculo, conclui-se que são necessárias 10 etapas para chegar à cidade Ciência Antiga.

3.2. Como $S_3 = 462{,}5$ e $S_5 = 610{,}15625$, conclui-se que a Lagoa Nascente é visitada na 3.ª etapa e a Lagoa Poente na 5.ª etapa.

4. Pretende-se definir um plano de modo que:

- a Lagoa Nascente e a Lagoa Poente sejam visitadas em etapas consecutivas;
- a chegada à cidade Ciência Antiga seja na 6.ª etapa.

Um plano que satisfaz as condições anteriores é, por exemplo, o seguinte:
Plano D: Percorrer, na 1.ª etapa, 385 km e, em cada uma das restantes, percorrer 50% da distância percorrida na etapa anterior.
Seguindo este plano, a Lagoa Nascente será visitada na 2.ª etapa, a Lagoa Poente será visitada na 3.ª etapa e a chegada à cidade Ciência Antiga ocorrerá na 6.ª etapa.

Página 84 – Tarefa 10

1. No 2.º passo da construção obtém-se uma linha poligonal formada por quatro segmentos de reta, em que a medida de cada em deles é $\frac{1}{3}$ da medida do segmento de reta inicial.
Assim, a medida da linha poligonal obtido na 2.ª etapa é $4 \times \frac{a}{3}$, ou seja, $\frac{4}{3}a$.

2. A medida do comprimento da nova linha poligonal é: $\frac{4}{3} \times \left(4 \times \frac{a}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 a$

3.1. A medida do comprimento da linha poligonal obtida, após repetir novamente o procedimento de construção, é: $\frac{4}{3} \times \left(\frac{16a}{9}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 a$

3.2. Designemos por (c_n) a sucessão das medidas dos comprimentos das linhas poligonais obtidas em cada uma das fases de construção.

$c_1 = a$ e $c_{n+1} = \frac{4}{3}c_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Logo, (c_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{4}{3}$.

Termo geral:

$c_n = c_1 \times r^{n-1}$, ou seja, $c_n = a \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

Como $\frac{4}{3} > 1$, $\left(\frac{4}{3}\right)^n \to +\infty$. Então $c_n \to +\infty$, porque $a > 0$.

Página 85 – Tarefa 10 (continuação)

4.1. Medida do lado do triângulo equilátero inicial: 1
Cada lado do polígono F_1 deu origem a quatro lados do polígono F_2 e cada um deles mede $\frac{1}{3}$ do lado inicial (medida 1). Assim , a medida de cada lado do polígono F_2 é $\frac{1}{3}$.

4.2.

Figura, F_n	N.º de lados	Perímetro, P_n
F_1	3	3
F_2	3×4	$12 \times \frac{1}{3} = 4 = 3 \times \frac{4}{3}$
F_3	12×4	$48 \times \frac{1}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$
F_4	48×4	$192 \times \frac{1}{27} = \frac{192}{27} = \frac{64}{9}$
…	…	…
F_n	$3 \times 4^{n-1}$	$3 \times 4^{n-1} \times \frac{1}{3^{n-1}} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

4.3. $P_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, logo (P_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{4}{3}$.
A opção correta é a **(C)**.

4.4. Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ também tende para $+\infty$.
Logo, conclui-se que P_n tende para $+\infty$.
"O perímetro do floco de neve de Koch é infinito."

Página 86 – Consolida

1. $a_n = n^2 - 6n$

1.1. **a)** Por exemplo, a_1 é um termo da sucessão que é negativo.

$a_1 = 1^2 - 6 \times 1 = -5$

b) Por exemplo, a_7 é um termo da sucessão que é positivo.

$a_7 = 7^2 - 6 \times 7 = 49 - 42 = 7$

c) Por exemplo, a_4 e a_5 são termos consecutivos da sucessão tais que $a_5 - a_4 > 0$.

$a_4 = 4^2 - 6 \times 4 = -8$ e $a_5 = 5^2 - 6 \times 5 = -5$

$a_5 - a_4 - 5 - (-8) = 3$

1.2. $a_n = 72 \Leftrightarrow n^2 - 6n = 72 \Leftrightarrow n^2 - 6n - 72 = 0$

$$\Leftrightarrow n = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times (-72)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{6 \pm 18}{2} \Leftrightarrow n = 12 \vee n = -6$$

Como $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, então $n = 12$.

72 é o termo de ordem 12 da sucessão (a_n).

1.3. $a_n = 35 \Leftrightarrow n^2 - 6n = 35 \Leftrightarrow n^2 - 6n - 35 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times (-35)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{6 \pm \sqrt{176}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{6 \pm 2\sqrt{44}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 3 + \sqrt{44} \vee n = 3 - \sqrt{44}$$

Como $3 + \sqrt{44} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $3 - \sqrt{44} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, conclui-se que 35 não é termo da sucessão (não existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $u_n = 35$).

2.

n	$(4-n)^2$	$n^2 - 2n$	$5n - n^2$
1	9	−1	4
2	4	0	6
3	1	3	6
4	0	8	4
5	4	15	0

As sucessões cujo termo geral está representado nas opções (A), (C) e (D) não são decrescentes.
A opção que representa o termo geral de uma sucessão decrescente é a **(B)**.

3.1. $u_n = 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{5}{n} = 0{,}25 \Leftrightarrow n = \frac{5}{0{,}25} \Leftrightarrow n = 20$

0,25 é o termo de ordem 20.

3.2. $u_n > 0{,}12 \Leftrightarrow \frac{5}{n} > 0{,}12 \Leftrightarrow 5 > 0{,}12n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{0{,}12} > n \Leftrightarrow n < 41{,}(6)$$

Donde se conclui que há 41 pontos do gráfico da sucessão (u_n) que têm ordenada maior do que 0,12.

3.3. $u_n < 0{,}07 \Leftrightarrow \frac{5}{n} < 0{,}07 \Leftrightarrow 5 < 0{,}07n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{0{,}07} < n \Leftrightarrow n > \frac{500}{7}$$

Como $\frac{500}{7} \approx 71{,}4$, conclui-se que o termo de menor ordem que é inferior a 0,07 é o 72.º termo.

$u_{77} = \frac{5}{72}$

3.4. Recorrendo a uma folha de cálculo, calcula-se alguns termos da sucessão (u_n) e, analisando o comportamento dos termos da sucessão, conclui-se que, quando n tende para $+\infty$ os termos da sucessão tendem para 0 (zero).

4. $u_n = 3n - \frac{1}{2}$

(v_n) é a sucessão cujos termos resultam de multiplicar cada termo de (u_n) por 2.

4.1. $v_1 = u_1 \times 2 = \left(3 \times 1 - \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{5}{2} \times 2 = 5$

$v_2 = u_2 \times 2 = \left(3 \times 2 - \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{11}{2} \times 2 = 11$

$v_3 = u_3 \times 2 = \left(3 \times 3 - \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{17}{2} \times 2 = 17$

$v_4 = u_4 \times 2 = \left(3 \times 4 - \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{23}{2} \times 2 = 23$

$v_5 = u_5 \times 2 = \left(3 \times 5 - \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{29}{2} \times 2 = 29$

Os cinco primeiros termos de (v_n) são 5, 11, 17, 23 e 29.

4.2. $v_n = 185 \Leftrightarrow u_n \times 2 = 185 \Leftrightarrow \left(3n - \frac{1}{2}\right) \times 2 = 185 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6n - 1 = 185 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6n = 186 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = \frac{186}{6} \Leftrightarrow n = 31$

185 é o termo de ordem 31 da sucessão (v_n).

5. $w_{n+1} - w_n = 11 - n,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

5.1. **a)** $w_{n+1} - w_n > 0 \Leftrightarrow 11 - n > 0 \Leftrightarrow -n > -11 \Leftrightarrow n < 11$

Por exemplo, w_4 e w_5.

$w_3 - w_2 = 11 - 2 = 9 > 0$

b) $w_{n+1} - w_n < 0 \Leftrightarrow 11 - n < 0 \Leftrightarrow -n < -11 \Leftrightarrow n > 11$

Por exemplo, w_{14} e w_{15}.

$w_{15} - w_{14} = 11 - 14 = -3 < 0$

5.2. Como $w_3 > w_2$ e $w_{15} < w_{14}$, conclui-se que a sucessão (w_n) não é monótona.

6. (u_n) é a sucessão das medidas das diagonais dos retângulos.

6.1. $u_1 = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$

$u_6 = \sqrt{1 + 6^2} = \sqrt{37}$

6.2. As medidas dos lados do retângulo de ordem n da sucessão são 1 e $n + 1$.

$u_n = \sqrt{1^2 + (n+1)^2} = \sqrt{1 + n^2 + 2n + 1} =$

$= \sqrt{n^2 + 2n + 2}$

A opção correta é a **(C)**.

6.3. $a < u_{31} < b$, sendo a e b dois quadrados perfeitos consecutivos,

$u_{31} = \sqrt{31^2 + 2 \times 31 + 2} = \sqrt{1025} \approx 32{,}02$

O maior quadrado perfeito inferior a $\sqrt{1025}$ é 25 e o menor quadrado perfeito superior a $\sqrt{1025}$ é 36.

Então, $a = 25$ e $b = 36$.

Página 87 – Consolida

7.1. $u_1 = 5$

$u_2 = u_1 + 2 = 5 + 2 = 7$
$u_3 = u_2 + 3 = 7 + 3 = 10$
$u_4 = u_3 + 4 = 10 + 4 = 14$

Os quatro primeiros termos da sucessão (u_n) são 5, 7, 10 e 14.

7.2. $u_{31} = 500$

a) $u_{31} = u_{30} + 31 \Leftrightarrow 500 = u_{30} + 31 \Leftrightarrow u_{30} = 469$

b) $u_{32} = u_{31} + 32 = 500 + 32 = 532$

$u_{33} = u_{32} + 33 = 532 + 33 = 565$

8.1. $v_1 = -\frac{1}{2}$

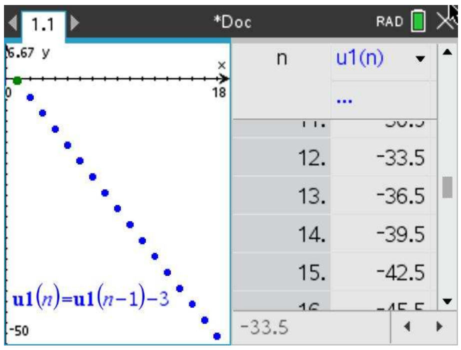
Cada termo depois do primeiro é igual à diferença entre o termo anterior e 3.

Assim, a sucessão (v_n) é definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{1}{2} \\ v_n = v_{n-1} - 3,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \end{cases}$$

8.2. Pretende-se determinar os quatro termos consecutivos da sucessão (v_n) a começar no termo de ordem 12.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Conclusão: $u_{12} = -33{,}5$; $u_{13} = -36{,}5$; $u_{14} = -39{,}5$; $u_{15} = -42{,}5$

9.1. Como 7 e 10 são termos consecutivos de uma progressão aritmética, sabe-se que:

$r = 10 - 7 = 3$

Então, os termos são:

$\boxed{4}$, 7, 10, $\boxed{13}$, $\boxed{16}$

9.2. Sabe-se que $-4+2r=6$, ou seja, $r=5$.

Então, os termos são:

$\boxed{-9}$, -4, $\boxed{1}$, 6, $\boxed{11}$

9.3. Sabe-se que $6+4r=12$, ou seja, $r=\frac{3}{2}$.

Então, os termos são:

6, $\boxed{\frac{15}{2}}$, $\boxed{9}$, $\boxed{\frac{21}{2}}$, 12

10.1. (u_n) é uma progressão aritmética em que $u_1=5$ e $r=2$.

Termo geral: $u_n=u_1+(n-1)r$

Então: $u_n=5+(n-1)\times 2$, ou seja, $u_n=2n+3$.

10.2. (u_n) é uma progressão aritmética em que $u_2=-3$ e $r=4$.

$u_1=u_2-r=-3-4=-7$

Termo geral: $u_n=u_1+(n-1)r$

Então:

$u_n=-7+(n-1\times 4)$, ou seja, $u_n=4n-11$

10.3. (u_n) é uma progressão geométrica em que $u_4=7$ e $u_3=10$.

$r=u_4-u_3=7-10=-3$

$u_3=u_1+2r \Leftrightarrow 10=u_1+2\times(-3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10=u_1-6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_1=16$

Termo geral: $u_n=u_1+(n-1)r$

Então: $u_n=16+(n-1)\times(-3)$, ou seja,

$u_n=-3n+19$

11. (v_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{5}{4}$.

Termo geral: $v_n=v_1+(n-1)r$

Neste caso, $v_n=\frac{3}{2}+(n-1)\times\frac{5}{4}$, ou seja,

$v_n=\frac{5}{4}n+\frac{1}{4}$.

Termo de ordem 43: $v_{43}=\frac{5}{4}\times 43+\frac{1}{4}=\frac{216}{4}=54$

Então, o termo de ordem 43 é inteiro $(54\in\mathbb{Z})$.

12. Sabe-se que *a*, 11 e 19 correspondem a três termos consecutivos de uma progressão aritmética crescente, não estando necessariamente ordenados.

1.º caso $(a<11)$:

Nesta situação tem-se:

$11-a=19-11 \Leftrightarrow 11-a=8 \Leftrightarrow a=3$
$r=19-11=8$

2.º caso $(11<a<19)$:

Nesta situação tem-se:

$a-11=19-a \Leftrightarrow 2a=30 \Leftrightarrow a=15$
$r=19-15=4$

3.º caso $(a>11)$:

Nesta situação tem-se:

$19-11=a-19 \Leftrightarrow 8=a-19 \Leftrightarrow a=27$
$r=19-11=8$

Conclusão: $a=3$ e $r=8$, ou $a=15$ e $r=4$, ou $a=27$ e $r=8$.

13.1. $u_{n+1}-u_n=7(n+1)-3-(7n-3)=$

$=\cancel{7n}+7\cancel{-3}\cancel{-7n}+\cancel{3}=7$

Como $u_{n+1}-u_n=7,\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, conclui-se que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 7.

13.2. $S_{20}=\frac{u_1+u_{20}}{2}\times 20=$

$=\frac{(7\times 1-3)+(7\times 20-3)}{2}\times 20=$

$=\frac{4+137}{2}\times 20=1410$

13.3. Pretende-se determinar a soma dos termos menores do que 180.

$u_n<180 \Leftrightarrow 7n-3<180 \Leftrightarrow 7n<183 \Leftrightarrow n<\frac{183}{7}$

Como $\frac{183}{7}\approx 26{,}14$, conclui-se que há 26 termos da sucessão (u_n) que são inferiores a 180.

$S_{26}=\frac{u_1+u_{26}}{2}\times 26=$

$=\frac{(7\times 1-3)+(7\times 26-3)}{2}\times 26=$

$=\frac{4+179}{2}\times 26=2379$

14. Seja (u_n) a sucessão cujos 14 primeiros termos representam o número de macieiras de cada uma das filas de macieiras.

Sabe-se que $u_1 = 30$ e $u_{14} = 95$.

$$S_{14} = \frac{u_1 + u_{14}}{2} \times 14 = \frac{30+95}{2} \times 14 = 875$$

No total foram plantadas 875 macieiras.

15. Seja (u_n) a sucessão dos números naturais ímpares.

$u_n = 2n - 1$

15.1. $u_n < 200 \Leftrightarrow 2n - 1 < 200 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n < 201 \Leftrightarrow n < \frac{201}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n < 100{,}5$

Pretende-se determinar a soma dos 100 primeiros termos.

$S_{100} = \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 =$

$= \frac{(2\times 1 - 1) + (2\times 100 - 2)}{2} \times 100 =$

$= 10\ 000$

15.2. $u_n > 20 \wedge u_n < 250 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n - 1 > 20 \wedge 2n - 1 < 250 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > \frac{21}{2} \wedge n < \frac{251}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > 10{,}5 \wedge n < 125{,}5$

Pretende-se calcular a soma do 11.º termo ao 125.º termo.

$u_{11} + u_{12} + u_{13} + \ldots + u_{124} + u_{125} =$

$= \frac{u_{11} + u_{125}}{2} \times (125 - 11 + 1) =$

$= \frac{(2\times 11 - 1) + (2\times 125 - 1)}{2} \times 115 =$

$= \frac{21 + 249}{2} \times 115 =$

$= \frac{270}{2} \times 115 = 15\ 525$

16. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão 5.

Termo geral: $u_n + u_1 + (n-1)r$

Então, $u_n = 3 + (n-1)\times 5$, ou seja, $u_n = 5n - 2$

16.1. $u_n < 150 \Leftrightarrow 5n - 2 < 150 \Leftrightarrow n < \frac{152}{5} \Leftrightarrow n < 30{,}4$

Os 30 primeiros termos são inferiores a 150.

$S_{30} = \frac{u_1 + u_{30}}{2} \times 30 =$

$= \frac{3 + (5\times 30 - 2)}{2} \times 30 =$

$= \frac{151}{2} \times 30 = 2265$

16.2. $u_n \geq 10 \wedge u_n \leq 99 \Leftrightarrow 5n - 2 \geq 10 \wedge 5n - 2 \leq 99 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{12}{5} \wedge n \leq \frac{101}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \geq 2{,}4 \wedge n \leq 20{,}2$

Todos os termos entre o 3.º e o 20.º (inclusive) são representados por dois algarismos.

$S = u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{19} + u_{20} =$

$= \frac{u_3 + u_{20}}{2} \times (20 - 3 + 1) =$

$= \frac{(5\times 3 - 2) + (5\times 20 - 2)}{2} \times 18 =$

$= \frac{13 + 98}{2} \times 18 =$

$= 111 \times 9 = 999$

Página 88 – Consolida

17. (u_n) é uma progressão aritmética em que $S_{20} = -280$ e $u_{20} = -33$.

17.1. $S_{20} = -280 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = -280$

$\Leftrightarrow \frac{u_1 + (-33)}{2} \times 20 = -280 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (u_1 - 33) \times 10 = -280 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_1 - 33 = -28 \Leftrightarrow u_1 = 5$

$u_{20} = u_1 + 19r \Leftrightarrow -33 = 5 + 19r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -38 = 19r \Leftrightarrow r = -2$

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-2)r$

$u_n = 5 + (n-1)\times(-2)$, ou seja, $u_n = -2n + 7$

17.2. Pretende-se determinar a soma dos termos da sucessão que são maiores do que -100.

$u_n > -100 \Leftrightarrow -2n + 7 > -100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2n > -107 \Leftrightarrow n < 53{,}5$

A sucessão tem 53 termos que são maiores do que -100 (os 53 primeiros termos).

$$S_{53}=\frac{u_1+u_{53}}{2}\times 53=$$
$$=\frac{(-2\times 1+7)+(-2\times 53+7)}{2}\times 53=$$
$$=\frac{5+(-99)}{2}\times 53=$$
$$=-\frac{94}{2}\times 53=-2491$$

18. As medidas dos lados de um heptágono estão em progressão aritmética. Seja r a razão dessa progressão.

Sabe-se que a medida do lado maior é 18.

Então, as medidas dos outros lados podem ser representadas por $18+r$, $18+2r$, $18+3r$, $18+4r$, $18+5r$ e $18+6r$.

$$P=73,5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 18+(18+r)+(18+2r)+(18+3r)+(18+4r)+$$
$$+(18+5r)+(18+6r)=73,5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 126+21r=73,5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 21r=-52,5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r=-2,5$$

Donde se conclui que as medidas do lado do heptágono são 3; 5,5; 8; 10,5; 13; 15,5; 18.

19. $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=u_n+8,\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases}$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão 8 e primeiro termo 3.

19.1. $S_n=\frac{u_1+u_n}{2}\times n=$

$$=\frac{3+8n-5}{2}\times n$$
$$=\frac{8n-2}{2}\times n$$
$$=(4n-1)\times n$$
$$=4n^2-n$$

Termo geral:

$$u_n=u_1+(n-1)r$$
$$=3+(n-1)\times 8$$
$$=8n-5$$

19.2. a) Pretende-se determinar o número mínimo de termos de modo que $S_n>6,4\times 10^5$.

Recorrendo a uma folha de cálculo, conclui-se que o valor mínimo de n que satisfaz a condição pedida é 401.

b) Pretende-se determinar o número mínimo de termos de modo que $S_n>2,6\times 10^6$.

Recorrendo a uma folha de cálculo, conclui-se que o valor mínimo de n que satisfaz a condição pedida é 807.

19.3. Quando n tende para $+\infty$, S_n tende para $+\infty$.

20.1. Como 3 e 6 são termos consecutivos de uma progressão geométrica (de razão r), sabe-se que:

$$3\times r=6\Leftrightarrow r=\frac{6}{3}\Leftrightarrow r=2$$

Então os termos são:

$\boxed{\frac{3}{2}}$, 3, 6, $\boxed{12}$, $\boxed{24}$

20.2. Sendo r a razão da progressão geométrica:

$$4\times r^2\left(\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow r^2=\frac{1}{16}\Leftrightarrow r=\frac{1}{4}\vee r=-\frac{1}{4}$$

Se $r=\frac{1}{4}$, os termos são: 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{16}$

Se $r=-\frac{1}{4}$, os termos são: -16 , 4, -1 , $\frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{16}$

20.3. Como -5 e 10 são termos consecutivos de uma progressão geométrica (de razão r), sabe-se que:

$$-5\times r=10\Leftrightarrow r=-2$$

Assim, os termos são: $\frac{5}{2}$, -5 , 10 e -20

21. Sejam $k, r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\begin{cases} u_1=k \\ u_{n+1}=ru_n,\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases}$$

21.1. Sendo $k=3$ e $r=2$, então (u_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo 3 e razão 2.

Termo geral: $u_n=u_1\times r^{n-1}$

Neste caso, $u_n=3\times 2^{n-1}$.

21.2. Sendo $k=124$ e $r=0,5$, então (u_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo 124 e razão 0,5.

Termo geral: $u_n=u_1\times r^{n-1}$

Neste caso, $u_n=124\times 0,5^{n-1}$.

22. $v_n = \frac{1}{4} \times 2^{1-n}$

22.1. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}} \times 2^{1-(n+1)}}{\cancel{\frac{1}{4}} \times 2^{1-n}} =$

$= \frac{2^{\cancel{1}-n-1}}{2^{1-n}} = 2^{-n-(1-n)} =$

$= 2^{-1} = \frac{1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Logo, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

22.2. $v_1 = \frac{1}{4} \times 2^{1-1} = \frac{1}{4} \times 2^0 = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$

A sucessão (v_n) é definida por recorrência de seguinte forma:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{4} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

23. (a_n) é uma progressão geométrica em que $a_2 = 6$ e $r = \frac{3}{2}$.

23.1. $a_2 = a_1 \times r \Leftrightarrow 6 = a_1 \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow a_1 = 4$

$S_4 = a_1 \times \frac{1-r^4}{1-r} = 4 \times \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^4}{1-\frac{3}{2}} =$

$= 4 \times \frac{1-\frac{81}{16}}{-\frac{1}{2}} = 4 \times \frac{-\frac{65}{16}}{-\frac{1}{2}} = 4 \times \frac{65}{8} = \frac{65}{2}$

23.2. $S_{12} = a_1 \times \frac{1-r^{12}}{1-r} = 4 \times \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{1-\frac{3}{2}} \approx 1030$

24.1. Sabe-se que $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ e $u_3 = 4$

Atendendo à informação dada, sabe-se também que (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2. O termo geral é $u_n = u_1 \times r^{n-1}$.

Então, $u_n = 1 \times 2^{n-1}$, ou seja, $u_n = 2^{n-1}$.

24.2. $u_n = 2048 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2048 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{11} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n-1 = 11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 12$

O termo 2048 tem ordem 12.

24.3. $S_{15} = u_1 \times \frac{1-r^{15}}{1-r} =$

$1 \times \frac{1-2^{15}}{1-2} = 32\,767$

24.4. Seja S a soma dos 10 termos consecutivos a começar no 4.º termo.

$S = u_4 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 2^3 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 8184$

Página 89 – Consolida

25.1. (v_n) é uma progressão geométrica em que $v_1 = 23$ e $r = \frac{1}{2}$.

$S_n = v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 23 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} =$

$= 23 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 46\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende para 0. Então, $S = 46(1-0) = 46$.

25.2. (v_n) é uma progressão geométrica em que $v_1 = 3$ e $v_2 = 2$.

Sendo r a razão dessa progressão, sabe-se que $r = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{3}$.

$S_n = v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 3 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} =$

$= 3 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} = 9\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ tende para 0.

Então, $S = 9(1-0) = 9$.

25.3. (v_n) é uma progressão geométrica em que

$v_2 = 10$ e $v_3 = 4$.

Sendo r a razão dessa progressão, sabe-se que

$$r = \frac{v_3}{v_2} = \frac{4}{10} = 0,4 \text{ e } v_1 = \frac{v_2}{r} = \frac{10}{0,4} = 25 .$$

$$S_n = v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 25 \times \frac{1-0,4^n}{1-0,4} =$$

$$= 25 \times \frac{1-0,4^n}{0,6} =$$

$$= \frac{125}{3}\left(1-0,4^n\right)$$

Quando n tende para $+\infty$, a sucessão $0,4^n$ tende para 0.

$$S = \frac{125}{3}(1-0) = \frac{125}{3}$$

26. (u_n) é uma progressão geométrica em que

$u_2 = 42$ e $u_4 = 1512$.

$$u_4 = u_2 \times r^2 \Leftrightarrow 1512 = 42 \times r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 6 \vee r = -6$$

26.1. Se (u_n) é crescente, então conclui-se que $r = 6$.

$$u_7 = u_4 \times r^3 \Leftrightarrow u_7 = 1512 \times 6^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_7 = 326\,592$$

Termo geral de (u_n):

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

$$u_n = \frac{u_2}{r} \times 6^{n-1} = \frac{42}{6} \times 6^{n-1} = 7 \times 6^{n-1}$$

26.2. Se (u_n) é não monótono, então conclui-se que $r = -6$.

$$u_7 = u_4 \times r^3 \Leftrightarrow u_7 = 1512 \times (-6)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_7 = -326\,592$$

$$u_1 = \frac{u_2}{r} = \frac{42}{-6} = -7$$

Termo geral de (u_n): $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

Então, $u_n = -7 \times (-6)^{n-1}$.

27. (u_n) é uma sucessão cujos termos são as medidas das áreas das regiões coloridas na sequência de figuras.

27.1.

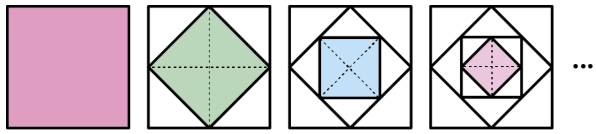


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

$u_2 = \frac{1}{2}u_1$, $u_3 = \frac{1}{2}u_2$, $u_4 = \frac{1}{2}u_3$, e assim sucessivamente.

Então, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ou seja,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} .$$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

27.2. Admite-se que a medida da área do primeiro quadrado é 1200, isto é, $u_1 = 1200$.

a) $$S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 1200 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1200 \times \frac{1-0,5^n}{\frac{1}{2}} = 1200 \times 2 \times \left(1-0,5^n\right) =$$

$$= 2400 \times \left(1-0,5^n\right)$$

b) $$S_4 = 2400 \times \left(1-0,5^4\right) = 2400 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right) =$$

$$= 2400 \times \left(1-\frac{1}{16}\right) = 2400 \times \frac{15}{16} = 2250$$

A soma dos quatro primeiros termos é 2250.

c) $$S = \lim_{n\to+\infty}(S_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(2400 \times \left(1-0,5^n\right)\right)$$

À medida que n tende para $+\infty$, a sucessão $0,5^n$ tende para 0.

$$S = 2400 \times (1-0) = 2400$$

28. População de um país, no final de 2020:
8 milhões de habitantes
Taxa de crescimento: 5% ao ano

28.1. Seja (u_n) a sucessão cujos termos representam a população do país, em milhões de habitantes, no final do ano n.

Sabe-se que $n = 1$ corresponde ao ano 2020.

Como a taxa de crescimento é de 5% ao ano, (u_n) é uma progressão geométrica de razão 1,05.

$$\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = 1{,}05u_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Termo geral da sucessão (u_n): $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

Neste caso, $u_n = 8 \times 1{,}05^{n-1}$.

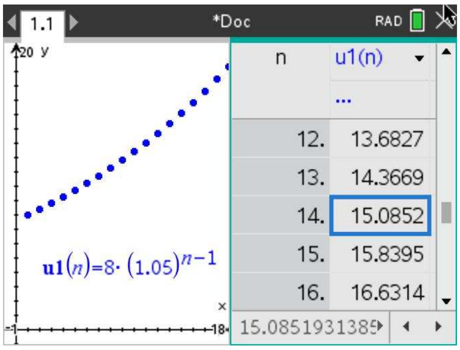
Pretende-se determinar a população do país no final de 2025 $(n = 6)$.

$u_6 = 8 \times 1{,}05^5 \approx 10{,}21$

No final de 2025, a população do país é, aproximadamente, igual a 10,21 milhões de habitantes.

28.2. Pretende-se saber em que ano a população ultrapassa os 15 milhões de habitantes (admitindo que a evolução se mantém com um crescimento anual de 5%), ou seja, pretende-se determinar o menor valor de *n* tal que $u_n > 15$.

Recorrendo à calculadora gráfica, representa-se a sucessão graficamente e constrói-se uma tabela de termos da sucessão.



Pela análise da tabela, conclui-se que $n = 14$. Assim sendo, se a evolução se mantiver, a população ultrapassa 15 milhões de habitantes no final do ano de 2033.

29. $f(x) = \dfrac{4}{2^x}$

(u_n) é a sucessão cujos termos são as medidas das áreas dos retângulos e $u_n = 1 \times f(n)$.

29.1. $u_n = 1 \times f(n) = 1 \times \dfrac{4}{2^n} = \dfrac{4}{2^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4}{2^{n+1}}}{\frac{4}{2^n}} = \frac{\cancel{4} \times 2^n}{\cancel{4} \times 2^{n+1}} =$$

$$= \frac{2^n}{2^{n+1}} = 2^{n-(n+1)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$.

29.2. $S = \lim\limits_{n \to +\infty} (S_n)$

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{4}{2^1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \times \frac{1 - 0{,}5^n}{\frac{1}{2}} = 4 \times \left(1 - 0{,}5^n\right)$$

À medida que *n* tende para $+\infty$, a sucessão $0{,}5^n$ tende para 0.

$S = 4 \times (1 - 0) = 4$

30. Idade da Rita: x anos

Idade da Sofia: *y* anos

Idade da Joana: 45 anos

Como as idades das três, em anos, são termos consecutivos de uma progressão geométrica, sabe-se que $\dfrac{y}{x} = \dfrac{45}{y}$, ou seja, $y^2 = 45x$.

Como a soma das idades das três é igual a 65:

$x + y + 45 = 65 \Leftrightarrow x + y + 20 \Leftrightarrow x = 20 - y$

Então:

$y^2 = 45x \wedge x = 20 - y \Leftrightarrow y^2 = 45(20 - y) \wedge x = 20 - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 = 900 - 45y \wedge x = 20 - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 + 45y - 900 = 0 \wedge x = 20 - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{-45 \pm \sqrt{45^2 - 4 \times 1 \times (-900)}}{2 \times 1} \wedge x = 20 - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{-45 \pm \sqrt{5625}}{2} \wedge x = 20 - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(y = \dfrac{-45 + 75}{2} \vee y = \dfrac{-45 - 75}{2} \right) \wedge x = 20 - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(y = 15 \vee \underbrace{\cancel{y = -60}}_{\text{Impossível}} \right) \wedge x = 20 - y \Leftrightarrow$

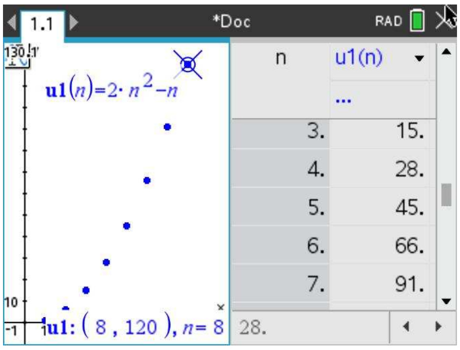
$\Leftrightarrow y = 15 \wedge x = 5$

A Sofia tem 15 anos.

Página 90 – Avalia – Parte 1

1. $u_n = 2n^2 - n$

Para saber o número de termos da sucessão com dois algarismos podemos recorrer à representação da sucessão na calculadora gráfica.



Donde se conclui que a sucessão tem cinco termos com dois algarismos.
A opção correta é a **(C)**.

2. $w_n = \dfrac{7}{n}$

$w_n < 6 \times 10^{-2} \Leftrightarrow \dfrac{7}{n} < 6 \times 10^{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{6 \times 10^{-2}} < n \Leftrightarrow 116{,}(6) < n$

Assim, o termo de ordem 117 é o que tem menor ordem e é menor do que 6×10^{-2}.

3. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

$u_{11} = 8187 \Leftrightarrow 2u_{10} + 5 = 8187 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2u_{10} = 8182 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_{10} = \dfrac{8182}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_{10} = 4091$

A opção correta é a **(B)**.

4. (u_n) : progressão aritmética

$u_1 = 4$ e $u_5 = 24$

Sabe-se que a última ficha do jogo tem o número 249.

$u_5 = u_1 + 4r \Leftrightarrow 24 = 4 + 4r \Leftrightarrow 20 = 4r \Leftrightarrow r = 5$

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$

$u_n = 4 + (n-1) \times 5$, ou seja, $u_n = 5n - 1$

$u_n = 249 \Leftrightarrow 5n - 1 = 249 \Leftrightarrow 5n = 250 \Leftrightarrow n = 50$

A última ficha é a de ordem 50.
Então, o jogo tem 50 fichas.
A opção correta é a **(D)**.

5. Os números das fichas das sete torres estão em progressão geométrica e de razão 3 e 1.º termo 1.

$S_7 = 1 \times \dfrac{1-3^7}{1-3} = \dfrac{-2186}{-2} = 1093$

No jogo do Bernardo existem 1093 fichas.
A opção correta é a **(C)**.

Página 91 – Avalia – Parte 2

1. $v_{n+1} - v_n = 4 - n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

1.1. $v_4 - v_3 = 4 - 3 = 1$

1.2. **a)** A afirmação é falsa porque, por exemplo, $v_5 - v_4 = 0$, ou seja, $v_5 = v_4$.

b) A afirmação é falsa porque, por exemplo, $v_7 - v_6 = -2$, logo $v_7 < v_6$.

2. $\begin{cases} u_1 = 35 \\ u_{n+1} = u_n + 8, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão 8.

Pretende-se determinar a soma de 12 termos consecutivos de (u_n) a começar no 6.º termo, ou seja, $u_6 + u_7 + \ldots + u_{17}$.

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$

Neste caso, $u_n = 35 + (n-1) \times 8$, ou seja,

$u_n = 8n + 27$.

$u_6 = 8 \times 6 + 27 = 48 + 27 = 75$
$u_{17} = 8 \times 17 + 27 = 136 + 27 = 163$

Assim:

$u_6 + u_7 + \ldots + u_{17} = \dfrac{u_6 + u_{17}}{2} \times 12 = \dfrac{75 + 163}{2} \times 12 =$
$= \dfrac{238}{2} \times 12 = 119 \times 12 = 1428$

3. (u_n) sucessão cujos termos são o preço a pagar, em euros, por *n* horas de estacionamento no parque A.

$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}50, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão 0,50.

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$

Neste caso, $u_n = 1 + (n-1) \times 0,50$, ou seja,

$u_n = 0,50n + 0,50$.

$u_6 = 0,50 \times 6 + 0,50 = 3,50$

$$S_6 = \frac{u_1 + u_6}{2} \times 6 =$$
$$= \frac{1 + 3,50}{2} \times 6 =$$
$$= \frac{4,50}{2} \times 6 = 13,50$$

No parque A, por um estacionamento de seis horas, o automobilista paga $13,50$ € .

(v_n) sucessão cujos termos são o preço a pagar, em euros, por *n* horas de estacionamento no parque B.

$\begin{cases} v_1 = 0,50 \\ v_{n+1} = v_n + 0,5v_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$, ou seja,

$\begin{cases} v_1 = 0,50 \\ v_{n+1} = 1,5v_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão 1,5 e 1.º termo 0,50.

$$S_6 = v_1 \times \frac{1-r^6}{1-r} = 0,50 \times \frac{1-1,5^6}{1-1,5} \approx 10,39$$

No parque B, por um estacionamento de seis horas, o automobilista paga 10,39 €.
Assim, o automobilista deve optar pelo parque B pois paga, aproximadamente, 10,39 € enquanto no parque A paga 13,50 €.

4.1. Seja (u_n) a sucessão cujos cinco primeiros termos são os valores das subidas diárias, em metros, efetuados pelo montanhista.

$u_1 = 500$ e $u_2 = 400$

Como (u_n) é uma progressão geométrica,

então: $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5} = 0,8$

$u_5 = u_1 \times r^4 = 500 \times 0,8^4 = 204,8$

No último dia, o montanhista prevê subir 204,8 metros.

4.2. $S_5 = u_1 \times \frac{1-r^5}{1-r} =$

$$500 \times \frac{1-0,8^5}{1-0,8} = 1680,8$$

Até atingir o cimo da montanha, o montanhista subiu 1680,8 metros.

5. Seja (u_n) a sucessão das medidas das áreas dos triângulos da sequência.
Como a área de cada um dos triângulos, depois do primeiro, é metade da área do anterior, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Sabe-se que a soma das medidas de todas as áreas é igual a 560, ou seja, $S = 560$.

$S = 560 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (S_n) = 560$

$$S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= u_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2u_1 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Quando *n* tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende para 0.

$S = 2u_1 \times (1-0) = 2u_1$

$S = 560 \Leftrightarrow 2u_1 = 560 \Leftrightarrow u_1 = 280$

$u_2 = u_1 \times r = 280 \times \frac{1}{2} = 140$

A medida da área do 2.º triângulo é 140.

Página 94 – Para Saber +

Recorrendo a uma folha de cálculo, podemos inserir a sucessão de Fibonacci atribuindo 1 aos dois primeiros termos e construindo cada um dos termos seguintes como a soma dos dois anteriores.
Arrasta-se o suficiente para visualizar os termos que dão resposta às questões colocadas.

fx =F4+F3

meses	f_n
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377

1. 89 casais de coelhos
   (Note-se que a sucessão começa aos 0 meses.)
2. 11 meses

Página 95 – Para Saber +

1. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

2. Recorrendo a uma folha de cálculo, podemos considerar a sucessão de Fibonacci e a sucessão das razões entre termos consecutivos da sucessão de Fibonacci.

fx =F6/F5

meses	f_n	f_n/f_{n-1}
1	1	1
2	1	1
3	2	2
4	3	1,5
5	5	1,666667
6	8	1,6
7	13	1,625
8	21	1,615385
9	34	1,619048
10	55	1,617647
11	89	1,618182
12	144	1,617978
13	233	1,618056
14	377	1,618026

2.1. A sucessão não é crescente nem decrescente, isto é, é não monótona.

Considerando $r_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}$, basta observar que, por exemplo $r_3 > r_2$ e $r_3 > r_4$.

2.2. À medida que n tende para $+\infty$, verifica-se que r_n tende para o número de ouro $\Phi \approx 1{,}618\,034$.

Página 98 – Questões tipo exame – Unidade 3

1. Cartões: $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ e $\boxed{8}$

___ ___ ___ ___ ___

(números de 5 algarismos)

Pretende-se que os números sejam maiores do que 60 mil, então terão de iniciar em 6, 7 ou 8.

1.º caso: Iniciar em 6 ou 8

a) 6 ou 8 ___ ___ 7 1 (terminar em 1 ou 7)

Nesta situação há $2 \times 2! \times 3 \times 2 = 24$ números

b) 6 ou 8 ___ ___ ___ 3

Nesta situação, há $2 \times 2 \times 2! \times 2 \times 1 = 16$ números

2.º caso: Iniciar em 7

7 1 _ _ 3

Nesta situação há $1 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ números

Total de números que satisfazem as condições pedidas: $24 + 16 + 6 = 46$

2. O número total de *cupcakes* diferentes que é possível construir: $5 \times 4 = 20$

Desses, há 4 que têm massa de chocolate.

O número de formas diferentes de dispor os 20 *cupcakes* na montra de forma que os 4 que têm massa de chocolate fiquem juntos é: $4! \times 17!$

A opção correta é a **(B)**.

3. ___ ___ ___ ___ ___

(algarismos de 1 a 9)

Números de cinco algarismos que têm exatamente três 2: ${}^5C_3 \times {}^8A'_2$

A opção correta é a **(A)**.

4. Número de maneiras diferentes de dispor as nove peças de fruta, em linha, atendendo ao seu nome: $\dfrac{9!}{3!\times 2!\times 4!}=1260$

Página 99 – Questões tipo exame – Unidade 3

5. 12 marca A e 8 marca B

5.1. A resposta correta é a **1**.

No contexto descrito, a expressão:

$$^{20}C_2 - {}^{12}C_1 \times {}^{8}C_1$$

representa a diferença entre o número total de escolhas possíveis $\left({}^{20}C_2\right)$ e o número de escolhas em que há um carro de cada marca $\left({}^{12}C_1 \times {}^{8}C_1\right)$.

5.2. A resposta **2**, ${}^{12}C_2 \times {}^{8}C_2$, está incorreta, pois traduz a situação em que são escolhidos quatro carros, sendo dois de cada marca.

6. 7 frascos de compota: 3 de morango, 2 de ananás e 2 de mirtilo.

O número de distribuições diferentes que é possível fazer, atendendo ao nome das compotas:

$${}^{9}C_3 \times {}^{6}C_2 \times {}^{4}C_2 = 7560$$

7. Turma de 25 alunos

Auditório com 15 filas de 10 cadeiras cada

Uma expressão que, nas condições do enunciado, permite determinar o número de maneiras diferentes de os alunos se distribuírem pelos lugares para assistirem à palestra é, por exemplo:

$$\underbrace{{}^{25}A_{20}}_{\substack{\text{N.º de maneiras}\\ \text{diferentes de preencher}\\ \text{as duas primeiras filas}}} \times \underbrace{{}^{10}C_5}_{\substack{\text{N.º de maneiras}\\ \text{diferentes de escolher}\\ \text{5 lugares da 3.ª fila}}} \times \underbrace{5!}_{\substack{\text{N.º de maneiras}\\ \text{diferentes de distribuir}\\ \text{os 5 alunos restantes}\\ \text{pelos lugares selecionados}}}$$

Página 100 – Questões tipo exame – Unidade 4

1. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases}$

$u_2 = 3u_1 + 1 = 3\times 2 + 1 = 7$
$u_3 = 3u_2 + 1 = 3\times 7 + 1 = 22$
$u_4 = 3u_3 + 1 = 3\times 22 + 1 = 67$

A opção correta é a **(C)**.

2. (u_n): progressão aritmética

$u_5 = 3$ e $u_{12} = 17$

$u_{12} = u_5 + 7r \Leftrightarrow 17 = 3 + 7r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 14 = 7r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r = 2$

$u_5 = u_1 + 4r \Leftrightarrow 3 = u_1 + 4\times 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3 - 8 = u_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -5 = u_1$

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$

Neste caso, $u_n = -5 + (n-1)\times 2$, ou seja,

$u_n = 2n - 7$

$u_n = 229 \Leftrightarrow 2n - 7 = 229 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2n = 236 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = \dfrac{236}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = 118$

Sim, 229 é termo de (u_n). É o 118.º termo $(u_{118} = 229)$.

3. Seja (u_n) a sucessão em que os x primeiros termos representam o número de cadeiras da fila x do anfiteatro.

Cada fila, depois da primeira, tem mais duas cadeiras do que a anterior, ou seja,

$u_{n+1} = u_n + 2, \ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Então, (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

Sabe-se, ainda, que a fila dez tem 27 cadeiras.

Então, $u_{10} = 27$ e $S_x = 468$.

$u_{10} = u_1 + 9r \Leftrightarrow 27 = u_1 + 9\times 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_1 = 27 - 18 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_1 = 9$

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$

Neste caso, $u_n = 9 + (n-1)\times 2$, ou seja,

$u_n = 2n + 7$.

$S_x = 468 \Leftrightarrow \dfrac{u_1 + u_x}{2} \times x = 468 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{9 + 2x + 7}{2} \times x = 468 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{2x + 16}{2} \times x = 468 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x + 8) \times x = 468 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 8x - 468 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times (-468)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{1936}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-8 + 44}{2} \vee x = \dfrac{-8 - 44}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 18 \vee x = -26$

Como $x \in \mathbb{N}$, então $x = 18$.

O anfiteatro tem 18 filas de cadeiras.

4. (u_n) é uma progressão aritmética

$u_3 = 9$ e $S_{10} = 190$

Cálculo auxiliar:

$u_1 = u_3 - 2r$
$= 9 - 2r$
$u_{10} = u_3 + 7r$
$= 9 + 7r$

$S_{10} = 190 \Leftrightarrow \dfrac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 = 190 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{9 - 2r + 9 + 7r}{2} \times 10 = 190 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{18 + 5r}{2} \times 10 = 190 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 18 + 5r = 38 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5r = 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r = 4$

Então, $u_1 = 9 - 2 \times 4 = 1$.

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$

Neste caso, $u_n = 1 + (n-1) \times 4$, ou seja,

$u_n = 4n - 3$.

5. Seja (d_n) a sucessão das medidas dos diâmetros das semicircunferências.

$d_{n+1} = d_n + 2,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(d_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

Sabe-se que $d_1 = 2$, $d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 8$ e $d_5 = 10$.

Seja (c_n) a sucessão das medidas dos comprimentos das semicircunferências, em centímetros.

$c_{n+1} = \dfrac{\pi \times d_{n+1}}{2} = \dfrac{\pi \times (d_n + 2)}{2} =$
$= \dfrac{\pi \times d_n + 2\pi}{2} =$
$= \dfrac{\pi \times d_n}{2} + \pi =$
$= c_n + \pi,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(c_n) é uma progressão aritmética de razão π

Termo geral de (c_n):

$c_n = c_1 + (n-1)r$
$\Leftrightarrow c_n = \pi + (n-1) \times \pi$
$\Leftrightarrow c_n = \pi n$

$S_{20} = \dfrac{c_1 + c_{20}}{2} \times 20$
$= \dfrac{\pi + 20\pi}{2} \times 20$
$= \dfrac{21\pi}{2} \times 20$
$= 210\pi \approx 659{,}7$ cm
$659{,}7 \text{ cm} = 6{,}597 \text{ m} \approx 6{,}6 \text{ m}$

O comprimento total da espiral, constituída por 20 semicircunferências, é, aproximadamente, 6,6m.

6. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n + n,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

$v_n = 4n + 1$

$u_2 = 5u_1 + 1 = 5 \times 2 + 1 = 11$
$u_3 = 5u_2 + 2 = 5 \times 11 + 2 = 57$

$v_n = u_3 \Leftrightarrow 4n + 1 = 57 \Leftrightarrow 4n = 56 \Leftrightarrow n = 14$

A opção correta é a **(C)**.

Página 101 – Questões tipo exame – Unidade 4

7. (u_n): progressão geométrica de razão positiva

$u_4 = 54$ e $u_6 = 468$

$u_6 = u_4 \times r^{6-4} \Leftrightarrow 468 = 54 \times r^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9 = r^2 \Leftrightarrow r = 3 \vee r = -3$

Como $r > 0$, conclui-se que $r = 3$.

$u_4 = u_1 \times r^3 \Leftrightarrow 54 = u_1 \times 3^3 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{54}{27} \Leftrightarrow u_1 = 2$

A opção correta é a **(A)**.

8. Seja (u_n) a sucessão do número de pessoas que têm conhecimento da informação X, através do processo descrito, no dia *n*.

$u_1 = 5 \wedge u_{n+1} = 2u_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Então, (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

Termo geral: $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

Neste caso, $u_n = 5 \times 2^{n-1}$.

$$S_7 = u_1 \times \frac{1-r^7}{1-r} = 5 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 5 \times 127 = 635$$

Ao fim de sete dias há 635 pessoas que têm conhecimento da informação X, através do processo descrito.

9. Seja (l_n) a sucessão em que l_n representa a medida do lado do quadrado de ordem *n*, na sequência de quadrados.

Sabe-se que $l_1 = 4 \wedge l_{n+1} = \frac{1}{2} l_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(u_n): sucessão em que u_n representa a área do quadrado de ordem *n*, na sequência de quadrados.

$a_1 = (l_1)^2 = 4^2 = 16$

$$a_{n+1} = (l_{n+1})^2 = \left(\frac{1}{2} l_n\right)^2 = \frac{1}{4}(l_n)^2 = \frac{1}{4} a_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Então, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e primeiro termo 16.

S_n : soma dos *n* primeiros termos da sucessão (a_n)

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 16 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} =$$

$$= 16 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = 16 \times \frac{4}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{64}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

Quando *n* tende para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tende para 0. Então, a soma de todos os termos da sucessão (a_n) é:

$$S = \lim_{n \to +\infty} (S_n) = \frac{64}{3} \times (1-0) = \frac{64}{3}$$

10. $\begin{cases} u_1 = 500 \\ u_n = 0{,}6u_{n-1}, \text{ se } n > 1 \end{cases}$

- Como $u_n = 0{,}6u_{n-1}$, se $n > 1$, ou seja, $\frac{u_n}{u_{n-1}} = 0{,}6$, se $n > 1$, conclui-se que (u_n) é uma progressão geométrica de razão 0,6.

$0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Termo geral: $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

Então, $u_n = 500 \times 0{,}6^{n-1}$.

- O 5.º termo da sucessão (u_n) é:

$u_5 = 500 \times 0{,}6^4 = 64{,}8$

- Soma dos oito primeiros termos de (u_n):

$$S_8 = u_1 \times \frac{1-r^8}{1-r} = 500 \times \frac{1-0{,}6^8}{1-0{,}6} \approx 1229$$

- S_n : Soma dos *n* primeiros termos de (u_n)

$$S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} =$$

$$= 500 \times \frac{1-0{,}6^n}{1-0{,}6} =$$

$$= 500 \times \frac{1-0{,}6^n}{0{,}4} =$$

$$= \frac{500}{0{,}4} \times \left(1-0{,}6^n\right) =$$

$$= 1250 \times \left(1-0{,}6^n\right)$$

S: soma de todos os termos de (u_n)

$$S = \lim_{n \to +\infty} (S_n)$$

Quando *n* tende para $+\infty$, a sucessão $0{,}6^n$ tende para 0.

$S = 1250 \times (1-0) = 1250$

Conclusão:

I – c), **II – b)**, **III – a)**, **IV –b)**