

# Propostas de resolução da unidade 5 do manual

## Tema 1: Funções cúbicas e quárticas

### Página 6

1.1.  $f(x) = ax$

$$f(-2) = 1 \Leftrightarrow a \times (-2) = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Então,  $f(x) = -\frac{1}{2}x$ .

$$g(x) = -\frac{3}{2}$$

$$h(x) = ax + b$$

O gráfico de  $h$  passa nos pontos  $C(-2, -1)$  e  $D(2, 3)$ .

$$\begin{cases} h(-2) = -1 \\ h(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -1 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 1 \\ 2a + 2a - 1 = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Logo,  $h(x) = x + 1$ .

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2, g(x) = -\frac{3}{2} \text{ e } h(x) = x + 1$$

1.2.  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \text{ e } h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

1.3.  $f$  é decrescente,  $g$  é constante e  $h$  é crescente.

1.4.  $h(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Zero de  $h$ :  $-1$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$0$	$+$

### Página 7

2. Por exemplo:

2.1.  $f(x) = -x + 2$

2.2.  $f(x) = 4$

2.3.  $f(x) = 2x + 1$

2.4.  $f(x) = 0$

3.1.  $f(x) = x^2 - 4x - 5 =$

$$= (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 - 5$$

$$= (x - 2)^2 - 9$$

3.2. a)  $V(2, -9)$

b)  $D_f = [-9, +\infty[$

3.3.

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f$	$\searrow$	$-9$	$\nearrow$

3.4.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 3 \vee x - 2 = -3 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$

Zeros de  $f$ :  $-1$  e  $5$

$x$	$-\infty$	$-1$	$5$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

### Página 8

4.1.  $x = 3$

4.2.  $D_h = [-3, +\infty[$

4.3. a)  $D_i = ]-\infty, 1]$

b)  $i(x) = 0 \Leftrightarrow -4(x - 3)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow x - 3 = \frac{1}{2} \vee x - 3 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \vee x = \frac{5}{2}$$

Zeros de  $i$ :  $\frac{5}{2}$  e  $\frac{7}{2}$ .

c)

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$i$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$

5.1. Vértice:  $V(-3, 2)$

$$f(x) = a(x + 3)^2 + 2$$

$$f(0) = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow a(0 + 3)^2 + 2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 9a = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$$

5.2.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 2 \vee x + 3 = -2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -5$$

Zeros de  $f$ :  $-5$  e  $-1$



## Página 9

6.1.  $f(x) = 5 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 4 = 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

6.2.  $P(x, x)$  pertence ao gráfico de  $f$ .

Então,  $f(x) = x$ .

$$f(x) = x \Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 4 = x \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

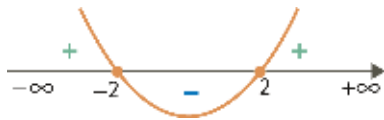
Logo, conclui-se que  $P(-1, -1)$  ou  $P(2, 2)$ .

7.1.  $x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0$

Zeros:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Esquema de variação do sinal:



$$x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in ]-2, 2[$$

$$\text{C.S.} = ]-2, 2[$$

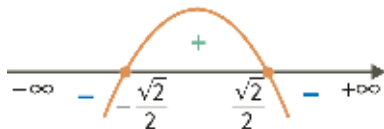
7.2.  $1 - 2x^2 < 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 1 < 0$

Zeros:

$$-2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esquema de variação do sinal:



$$1 - 2x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[ \cup \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$$

$$\text{C.S.} = \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[ \cup \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$$

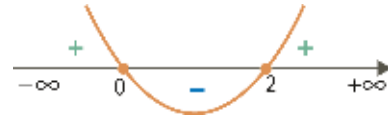
7.3.  $3x^2 - 6x \geq 0$

Zeros:

$$3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Esquema de variação do sinal:



$$3x^2 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$$

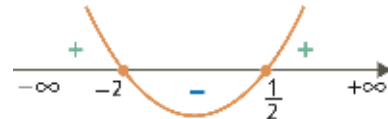
$$\text{C.S.} = ]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$$

7.4.  $2x^2 + 3x > 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 > 0$

Zeros:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -2$$

Esquema de variação do sinal:



$$2x^2 + 3x > 2 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$\text{C.S.} = ]-\infty, -2[ \cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

8.1.  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 5x = -x + 8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

Como a abcissa de  $A$  é menor do que a abcissa de  $B$ , então  $A(2, g(2))$  e  $B(4, g(4))$ .

$$g(2) = -2 + 8 = 6 \text{ e } g(4) = -4 + 8 = 4$$

Assim,  $A(2, 6)$  e  $B(4, 4)$ .

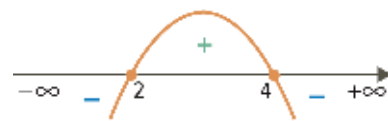
8.2.  $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 5x \geq -x + 8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8 \geq 0$$

Zeros:

$$-x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

Esquema de variação do sinal:



$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in [2, 4]$$



9.1. a)  $A_{[DEF]} = \frac{\overline{DE} \times \overline{EF}}{2}$   
 $\overline{DE} = \overline{EC} - \overline{DC} = 2 \times 40 - x = 80 - x$   
 $\overline{EF} = \overline{AE} - \overline{AF} = 40 - x$   
 $T(x) = \frac{(80-x)(40-x)}{2} = \frac{3200 - 80x - 40x + x^2}{2} =$   
 $= 1600 - 40x - 20x + 0,5x^2 = 0,5x^2 - 60x + 1600$

b)  $A_{[ABCDF]} = A_{[ABCE]} - A_{[DEF]}$   
 $= 80 \times 40 - (0,5x^2 - 60x + 1600)$   
 $= 3200 - 0,5x^2 + 60x - 1600 = -0,5x^2 + 60x + 1600$

9.2. a)  $T(x) = 682 \Leftrightarrow 0,5x^2 - 60x + 1600 = 682 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 0,5x^2 - 60x + 918 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{60 \pm \sqrt{3600 - 1836}}{1}$   
 $\Leftrightarrow x = 60 \pm \sqrt{1764} \Leftrightarrow x = 60 + 42 \vee x = 60 - 42$   
 $\Leftrightarrow x = 102 \vee x = 18$   
 Como  $x \in ]0, 40[$ , então  $x = 18$ .

b)  $T(x) \leq 600 \Leftrightarrow 0,5x^2 - 60x + 1600 \leq 600 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 0,5x^2 - 60x + 1000 \leq 0$   
 Zeros:  
 $0,5x^2 - 60x + 1000 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{60 \pm \sqrt{3600 - 2000}}{1}$   
 $\Leftrightarrow x = 60 + 40 \vee x = 60 - 40$   
 $\Leftrightarrow x = 100 \vee x = 20$

Esquema de variação do sinal:



$T(x) \leq 600 \Leftrightarrow x \in [20, 100] \wedge x \in ]0, 40[ \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x \in [20, 40[$

**Página 10 – Tarefa inicial**

1.  $f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 \times 9810$   
 $x$  : raio da esfera (m)  
 $f(x)$  : impulsão sentida pela esfera na água (N)

1.1. a)  $5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m} \rightarrow x = 0,05$   
 $f(0,05) = \frac{4}{3}\pi \times 0,05^3 \times 9810 \approx 5,14$

Neste caso, a impulsão sentida pela esfera é, aproximadamente, 5,14 N.

b)  $15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m} \rightarrow x = 0,15$   
 $f(0,15) = \frac{4}{3}\pi \times 0,15^3 \times 9810 \approx 138,69$

Neste caso, a impulsão sentida pela esfera é, aproximadamente, 138,69 N.

c)  $22 \text{ cm} = 0,22 \text{ m} \rightarrow x = 0,22$   
 $f(0,22) = \frac{4}{3}\pi \times 0,22^3 \times 9810 \approx 437,55$

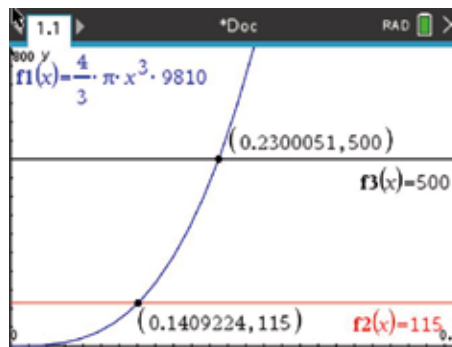
Neste caso, a impulsão sentida pela esfera é, aproximadamente, 437,55 N.

d)  $30 \text{ cm} = 0,30 \text{ m} \rightarrow x = 0,30$   
 $f(0,30) = \frac{4}{3}\pi \times 0,30^3 \times 9810 \approx 1109,48$

Neste caso, a impulsão sentida pela esfera é, aproximadamente, 1109,48 N.

- 1.2. Pretende-se determinar entre que valores se situa o raio da esfera, se a impulsão sentida estiver entre 115 N e 500 N, ou seja, pretende-se resolver a condição  $115 < f(x) < 500$ .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



Conclui-se que  $0,141 < x < 0,230$ .

Assim, se a impulsão sentida pela esfera estiver entre 115 N e 500 N, então o raio da esfera situa-se entre 14,1 cm e 23,0 cm.

**Página 11**

- 1.1. Zeros de  $f$ : -2 e 1  
 1.2.

$x$	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	+



- 1.3. a) A afirmação  $\forall x \in ]-2, 0[, f(x) \leq 4$  é verdadeira.
- b) A afirmação  $\forall x \in ]-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}[, f(x) \geq 0$  é falsa.
- c) A afirmação  $\forall x \in ]0, 2[, f(x) \geq 0$  é verdadeira.
- d) A afirmação  $\forall x \in ]1, +\infty[, f(x) \geq 4$  é falsa.

2.

$x$	$-\infty$	$-1$		$1$	$+\infty$
$g$	$\searrow$	$-1$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$

**Página 12**

3.1. Na expressão da função  $f$ , o sinal de  $a$  é negativo e na expressão da função  $g$ , o sinal de  $a$  é positivo.

3.2. a) Quando  $x$  tende para  $-\infty$ ,  $f(x)$  tende para  $+\infty$ .

b) Quando  $x$  tende para  $-\infty$ ,  $g(x)$  tende para  $-\infty$ .

**Página 13 – Tarefa 1**

1.1. Se  $a > 0$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Se  $a < 0$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

1.2. As funções são crescentes se  $a > 0$  e decrescentes se  $a < 0$ .

As funções da família não têm extremos.

1.3. Seja  $f$  uma função, tal que

$$f(x) = ax^3 + d, \quad a \neq 0 \text{ e } d \neq 0.$$

$$f(0) = d$$

O ponto de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Oy$  tem coordenadas  $(0, d)$ .

2. O número de zeros de qualquer função da família é um.

Se  $a$  e  $d$  têm o mesmo sinal, então o sinal do zero é negativo.

Se  $a$  e  $d$  têm sinais diferentes, então o sinal do zero é positivo.

**Página 14**

4.1.  $f(x) = ax^3$ ;  $a \neq 0$

$$f(1) = -2 \Leftrightarrow a \times 1^3 = -2 \Leftrightarrow a = -2$$

$$f(x) = -2x^3$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

A opção correta é a (C).

4.2.

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$

5.1. A afirmação  $g(-\pi) > g(-3)$  é falsa, pois  $g$  é crescente.

5.2. A afirmação  $g(-2) = -g(2)$  é verdadeira, pois a função  $g$  é ímpar.

5.3. A afirmação  $g\left(\frac{3}{2}\right) - g\left(\frac{2}{3}\right) \leq 0$  é falsa, pois  $g$  é crescente.

5.4. A afirmação  $g(\sqrt{2}) < g(\sqrt{2}-1)$  é falsa, pois  $g$  é crescente.

5.5. A afirmação é verdadeira, pois  $g$  é injetiva e  $D_g = \mathbb{R}$ .

6.1.  $f(x) = -1,5x^3$

$f$  é decrescente, porque  $a < 0$  e  $f(0) = 0$ , logo a representação gráfica que corresponde à função  $f$  é a I.

$$g(x) = 0,05x^3$$

$g$  é crescente, porque  $a > 0$  e  $g(0) = 0$ , logo a representação gráfica que corresponde à função  $g$  é a III.

$$f \rightarrow \text{I}; \quad g \rightarrow \text{III}$$

6.2. A representação gráfica II foi excluída, porque não passa na origem do referencial.



## Página 15 – Prática

7.  $f(x) = ax^3 + d$ ;  $a \neq 0$  e  $d \neq 0$

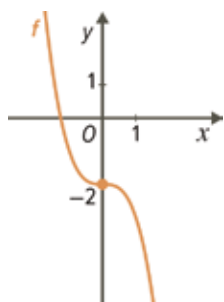
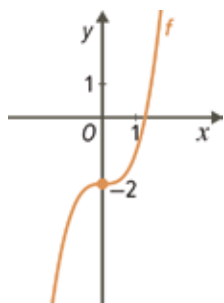
$f(0) = -2 \Leftrightarrow d = -2$

Então,  $f(x) = ax^3 - 2$ .

7.1. Se quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , então  $f$  é decrescente. Logo,  $a < 0$ .

Um exemplo é  $f(x) = -x^3 - 2$ .

Representação gráfica:

7.2. Se, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , então  $f$  é crescente. Logo,  $a < 0$ .Um esboço de uma representação gráfica de uma função  $f$  da família é:

8. A opção que pode corresponder às expressões algébricas das funções representadas é a (C).

Razão para rejeitar cada uma das outras opções:

(A)  $\rightarrow f(0) = 1$  e  $g(0) = 2$  e as funçõesrepresentadas interseçam o eixo  $Oy$  em pontos de ordenada negativa.(B)  $\rightarrow f(0) < g(0)$ , pois  $f(0) = -2$  e  $g(0) = -1$  e, no caso das funções representadas,  $f(0) > g(0)$ .(D)  $\rightarrow f$  é crescente, pois  $a > 0$  e  $g$  é decrescente, pois  $a < 0$  e, no caso das funções representadas,  $f$  é decrescente e  $g$  é crescente.9.1. Se  $f$  é decrescente, então  $a < 0$ .Se  $f$  tem um zero positivo, então  $a$  e  $d$  têm sinais diferentes. Como  $a < 0$ , conclui-se que  $d > 0$ .

Por exemplo,  $y = -x^3 + 2$ .

9.2. Se  $f$  é crescente, então  $a > 0$ .Se  $f$  tem um zero negativo, então  $a$  e  $d$  têm o mesmo sinal. Como  $a > 0$ , conclui-se que  $d > 0$ .

Por exemplo,  $y = 4x^3 + 1$ .

9.3. Se o gráfico interseca o eixo  $Oy$  no ponto de coordenadas  $(0, \frac{2}{3})$ , então  $d = \frac{2}{3}$ .Se, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , então  $f$  é decrescente. Logo  $a < 0$ .

Por exemplo,  $y = -5x^3 + \frac{2}{3}$ .

10.  $y = ax^3 + d$ ,  $a \neq 0$  e  $d \neq 0$ Pretende-se uma função  $g$  que satisfaça a condição “existem números reais  $n$  e  $m$ , tais que  $0 < n < m$  e  $g(n) \times g(m) < 0$ ”. $n$  e  $m$  são números positivos,  $n < m$  e  $g(n)$  e  $g(m)$  têm sinais diferentes (pois o seu produto é negativo).

Por exemplo,  $g(x) = x^3 - 4$ .

$1 < 2$ ,  $g(1) = 1^3 - 4 = -3$  e  $g(2) = 2^3 - 4 = 4$

Logo,  $g(1) \times g(2) < 0$ .

11.1.  $\underbrace{y}_{f(x)} = ax^3$ ,  $a \neq 0$  e  $D = \mathbb{R}$ 

$f(-x) = a(-x)^3 = a(-1)^3 x^3 = a(-1)x^3 = -ax^3 = -f(x)$

 $f$  é ímpar, porque  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = -f(x)$ .11.2.  $\underbrace{y}_{f(x)} = ax^3 + d$ ;  $a \neq 0$  e  $d \neq 0$ ;  $D_f = \mathbb{R}$ 

$f(-x) = a(-x)^3 + d = a(-1)^3 x^3 + d = a(-1)x^3 + d = -ax^3 + d$

$-f(x) = -(ax^3 + d) = -ax^3 - d$

 $f(-x) \neq -f(x)$ , logo  $f$  não é ímpar.



### Página 16 – Tarefa 2

- 1.1.** Se  $a > 0$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .
- Se  $a < 0$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .
- 1.2.** O número de zeros de qualquer função da família é dois.
- Qualquer função da família admite 0 como zero.
- Se  $a > 0$ , os sinais de  $b$  e do zero não nulo são diferentes.
- Se  $a < 0$ , os sinais de  $b$  e do zero não nulo são iguais.

**1.3.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(ax + b) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ 0, -\frac{b}{a} \right\}$$

Conclui-se que:

- A função  $f$  tem dois zeros.
- Um dos zeros de função é 0.
- O outro zero é  $-\frac{b}{a}$ .
- Se  $a > 0$ , então  $-\frac{b}{a}$  tem o sinal de  $-b$ .
- Se  $a < 0$ , então  $-\frac{b}{a}$  tem o sinal de  $b$ .

**2. (A)**  $a > 0 \wedge b < 0 \rightarrow$  função  $h$

Como  $a > 0$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  e,

quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Se  $a > 0$ , então o zero não nulo tem sinal contrário ao de  $b$ . Se  $b < 0$ , então o zero não nulo é positivo.

**(B)**  $a < 0 \wedge b > 0 \rightarrow$  função  $f$

Como  $a < 0$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  e,

quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Se  $a < 0$ , então o zero não nulo tem o mesmo sinal de  $b$ . Se  $b > 0$ , então o zero não nulo é positivo.

**(C)**  $a < 0 \wedge b < 0 \rightarrow$  função  $i$

Como  $a < 0$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  e,

quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Se  $a < 0$ , então o zero não nulo tem o mesmo sinal de  $b$ . Se  $b < 0$ , então o zero não nulo é negativo.

**(D)**  $a > 0 \wedge b > 0 \rightarrow$  função  $g$

Como  $a > 0$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  e,

quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Se  $a > 0$ , então o zero não nulo tem sinal contrário ao de  $b$ . Se  $b > 0$ , então o zero não nulo é negativo.

### Página 17

**12.**  $f(x) = ax^3 + bx^2$ ,  $d \neq 0$  e  $b \neq 0$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,

$f(x) \rightarrow -\infty$ , logo  $a < 0$ .

Sendo  $a < 0$  sabe-se que o zero não nulo, que neste caso é positivo, tem o mesmo sinal de  $b$ .

Donde se conclui que  $b > 0$ .

Assim, a opção correta é a **(C)**.

**13.**  $g(x) = ax^3 + bx^2 + d$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  e  $d \neq 0$

**13.1.** Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,

$f(x) \rightarrow +\infty$ , logo  $a > 0$ .

A afirmação é verdadeira.

**13.2.** A função  $g$  representada na figura tem três zeros: um negativo e dois positivos.

Então, o produto dos zeros de  $g$  é negativo.

A afirmação é falsa.

**13.3.**  $g(0) = 2 \rightarrow$  Por observação gráfica.

Como  $g(0) = d$ , então  $d = 2$ .

A afirmação é verdadeira.



- 13.4. A afirmação  $\forall x > 0, g(x) > 0$  é falsa, pois, por exemplo, a função  $g$  tem dois zeros positivos, ou seja,  $\exists x > 0: g(x) = 0$ .

### Página 18 – Tarefa 3

1.1. Por exemplo:

- a)  $f(x) = 2x^3$   
 b)  $g(x) = x^3 - x^2$   
 c)  $h(x) = -x^3 + x^2 + 2x$

1.2.  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ , com  $a \neq 0$

a) Atendendo a que:

$$ax^3 + bx^2 + cx = x(ax^2 + bx + c)$$

conclui-se que a função  $g$  tem, no máximo, três zeros.

b)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 + bx + c = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

b<sub>1</sub>)  $f$  tem um único zero, se  $b^2 - 4ac < 0$  e esse zero é 0.

b<sub>2</sub>)  $f$  tem exatamente dois zeros, se  $b^2 - 4ac = 0 \wedge c \neq 0$ .

b<sub>3</sub>)  $f$  tem exatamente três zeros, se  $b^2 - 4ac > 0 \wedge c \neq 0$ .

2. Por exemplo:

2.1.  $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$

2.2.  $g(x) = -x^3$

2.3.  $g(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

3.  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ,  $a \neq 0$

3.1.  $a < 0$ , porque quando  $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow +\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow -\infty$ .

3.2. Como  $a < 0$ , as opções (B) e (C) estão excluídas.

Por observação gráfica, sabe-se que a função  $f$  tem exatamente dois zeros (um negativo e o outro nulo). Então,  $b^2 - 4ac = 0$ .

Assim, a opção correta é a (A), pois

$$(-2)^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 0.$$

### Página 19

14.1.  $f(x) = ax^3 + cx + d$ ,  $a \neq 0$

a)  $a > 0$ , porque quando  $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow -\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$ .

b)  $d = 0$ , porque  $f(0) = d$ .

c)  $c \neq 0$ , porque, se  $c = 0$ , a função teria apenas um zero.

14.2.  $a > 0, c \neq 0$  e  $d = 0$

Um exemplo para uma possível expressão analítica da função  $f$  é  $f(x) = x^3 - 2x$ .

15.  $f(x) = ax^3 + cx + d$ , com  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$

15.1.  $a < 0$ , porque, quando  $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow +\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow -\infty$ .

$c < 0$ , pois, considerando  $g(x) = ax^3 + cx$ , e

sendo  $a < 0$ , esta função terá apenas um zero

quando  $c < 0$ . Como  $f(x) = g(x) + d$ , a função  $f$  terá apenas um zero.

$d > 0$ , porque  $d = f(0)$  e  $f(0) > 0$ .

Conclusão:  $a < 0, c < 0$  e  $d > 0$

15.2. Se, por exemplo,  $a = -2, c = 0$  e  $d = 3$ , então

$$f(x) = -2x^3 - x + 3.$$

### Página 20 – Prática

16.  $f(x) = ax^3 + bx^2$ ,  $a \neq 0$

16.1.  $a > 0$ , porque, quando  $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow -\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$ .



**16.2.**  $b \neq 0$ , porque a função tem dois zeros. Se  $b$  fosse igual a zero, então a função tinha um único zero (0).

**16.3.** Como  $a > 0$ , então o zero não nulo tem sinal contrário ao de  $b$ . O zero não nulo é positivo. Então, conclui-se que  $b$  é negativo ( $b < 0$ ).

**17.1. a)** Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

**b)** De acordo com **a)**, sabe-se que  $a < 0$ . Sendo  $a < 0$ , então o zero não nulo tem o mesmo sinal de  $b$ . O zero não nulo é positivo (ver representação gráfica). Donde se conclui que  $b > 0$ .

**c)** Se  $f(x) = -x^3 - 3x^2$ , então  $f$  teria dois zeros, sendo um nulo e o outro negativo. Por observação gráfica, sabe-se que  $f$  tem um zero nulo e outro positivo.

**17.2. a)** Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $g(x) \rightarrow -\infty$  e, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$ .

**b)** Atendendo a **a)** sabe-se que  $a > 0$ . Sendo  $a > 0$ , então o zero não nulo tem sinal contrário ao de  $b$ . O zero não nulo da função  $g$  é negativo. Logo, conclui-se que  $b > 0$ . Então, por exemplo,  $g(x) = 2x^3 + 3x^2$ .

**18.**  $h(x) = ax^3 + bx^2 + d$ ,  $a \neq 0$ . Por exemplo:

**18.1.**  $h(x) = x^3 - 2x^2 - 2$

**18.2.**  $h(x) = -x^3 + 1$

**18.3.**  $h(x) = -2x^3 - 4x^2 - 1$

### Página 21 – Prática

**19.**  $f(x) = ax^3 + cx$ ,  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$ .

**19.1.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^3 + cx = 0 \Leftrightarrow x(ax^2 + c) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = -\frac{c}{a}$$

Se  $-\frac{c}{a} < 0$ , então  $f$  tem um único zero (0).

Se  $-\frac{c}{a} > 0$ , então  $f$  tem três zeros

$$\left(-\sqrt{-\frac{c}{a}}, 0 \text{ e } \sqrt{-\frac{c}{a}}\right).$$

**19.2.** A função  $f$  não pode ter exatamente dois zeros. Como se concluiu em **19.1.**, sabe-se que:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = -\frac{c}{a}$$

Sendo  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$ , a equação  $x^2 = -\frac{c}{a}$  ou é impossível ou tem duas raízes simétricas.

**19.3.** A função  $f$  tem exatamente três zeros se  $-\frac{c}{a} > 0$ .

$$-\frac{c}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \rightarrow a \text{ e } c \text{ têm sinais contrários.}$$

Por exemplo,  $f(x) = x^3 - 4x$ .

**20.**  $ax^3 + cx = 0 \Leftrightarrow x(ax^2 + c) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = -\frac{c}{a}$$

- Se  $-\frac{c}{a} < 0$ , então a equação  $x^2 = -\frac{c}{a}$  é impossível e a função definida por  $y = ax^3 + cx$  tem um único zero ( $x = 0$ ).
- Se  $c = 0$ , então a função também tem um único zero ( $x = 0$ ).
- Se  $-\frac{c}{a} > 0$ , então a equação  $x^2 = -\frac{c}{a}$  tem duas soluções reais simétricas.

Assim, a soma dos zeros é igual a zero.

**Conclusão:** A soma dos zeros de qualquer função da família de funções do tipo  $y = ax^3 + cx$ , com  $a \neq 0$ , é sempre igual a zero.

**21.**  $V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times h = A_{[PQRS]} \times h$ ;  $h = x$

$$A_{[PQRS]} = A_{[ABCD]} - 4A_{[APQ]} = 6^2 - 4 \times \frac{x \times (6-x)}{2} = 36 - 4 \times \frac{6x - x^2}{2} = 36 - 12x + 2x^2 = 2x^2 - 12x + 36$$

$$V(x) = (2x^2 - 12x + 36) \times x = 2x^3 - 12x^2 + 36x$$

$$a = 2, b = -12 \text{ e } c = 36$$

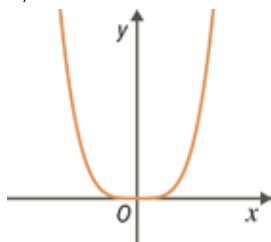


## Página 22

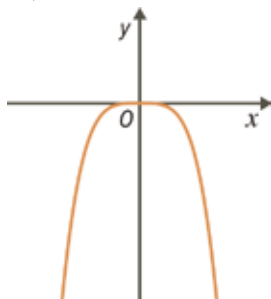
- 22.1.** A função  $f$  tem cinco zeros, pois o seu gráfico intersesta o eixo  $Ox$  cinco vezes.
- 22.2. a)** Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .
- b)** Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .
- 22.3.** Sim, a resposta dada em **22.1.** permite concluir que  $f$  é uma função quártica, porque uma função quártica tem no máximo quatro zeros. Sim, a resposta dada em **22.2.** também permite concluir que  $f$  não é uma função quadrática, porque, em qualquer função quadrática, o comportamento no infinito quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$  é o mesmo.

## Página 23 – Tarefa 4

- 1.1. a)**  $y = ax^4$ ,  $a > 0$



- b)**  $y = ax^4$ ,  $a < 0$



## 1.2.

Família de funções $f$ , sendo $f(x) = ax^4$ , com $a \neq 0$				
Se $a > 0$ :			Se $a < 0$ :	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Zeros: 0</li> <li>Comportamento no infinito: Quando <math>x \rightarrow -\infty</math>, <math>f(x) \rightarrow +\infty</math>.</li> <li>Quando <math>x \rightarrow +\infty</math>, <math>f(x) \rightarrow +\infty</math>.</li> <li>Quadro de variação e extremos:</li> </ul>			<ul style="list-style-type: none"> <li>Zeros: 0</li> <li>Comportamento no infinito: Quando <math>x \rightarrow -\infty</math>, <math>f(x) \rightarrow -\infty</math>.</li> <li>Quando <math>x \rightarrow +\infty</math>, <math>f(x) \rightarrow -\infty</math>.</li> <li>Quadro de variação e extremos:</li> </ul>	
$x$	$-\infty$	0	0	$+\infty$
$f$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow +\infty$
Extremos: 0 é mínimo relativo.			Extremos: 0 é máximo relativo.	

## 2.

Família de funções $f$ do tipo $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ , com $a \neq 0$	
Se $a > 0$ :	Se $a < 0$ :
Quando $x \rightarrow -\infty$ , $f(x) \rightarrow +\infty$ .	Quando $x \rightarrow -\infty$ , $f(x) \rightarrow -\infty$ .
Quando $x \rightarrow +\infty$ , $f(x) \rightarrow +\infty$ .	Quando $x \rightarrow +\infty$ , $f(x) \rightarrow -\infty$ .

## Página 24

- 23.1.** Se  $a < 0$ , então quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ . Assim, as opções em que  $a < 0$  são **(B)** e **(C)**.

- 23.2.** Se  $a > 0$ , então, quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Estão, nesta situação, as funções representadas nas opções **(A)** e **(D)**.

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 = 0 &\Leftrightarrow x^3(ax + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 = 0 \vee ax + b = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\text{Se } a > 0 \wedge b < 0, \text{ então } -\frac{b}{a} > 0.$$

Assim, a função tem dois zeros: um nulo e outro positivo.

Logo, conclui-se que a opção em que  $a > 0 \wedge b < 0$  é a **(D)**.

- 23.3.** Se  $a < 0$ , como explicado em **23.1.**, então as opções possíveis são **(B)** e **(C)**.

$$\text{Se } a < 0 \wedge b < 0, \text{ então } -\frac{b}{a} < 0.$$

Assim, a função tem dois zeros: um nulo e outro negativo.

Logo, conclui-se que a opção em que  $a < 0 \wedge b < 0$  é a **(C)**.

- 23.4.** Se  $b > 0$ , então a função tem dois zeros: um nulo e outro de sinal contrário ao de  $a$ . Assim, as opções em que  $b > 0$  são **(A)** e **(B)**.



## Página 25 – Tarefa 5

### 1. Função $f$

$a < 0$ , porque, quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

$k > 0$ , porque o gráfico de  $f$  intersesta o eixo  $Oy$  num ponto de ordenada positiva.

Então, por exemplo,  $f(x) = -x^4 + 2$ .

### Função $g$

$a > 0$ , porque quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

$k < 0$ , porque o gráfico de  $f$  intersesta o eixo  $Oy$  num ponto de ordenada negativa.

Então, por exemplo,  $g(x) = x^4 - 1$ .

### Função $h$

$a < 0$ , porque quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

$k = 0$ , porque o gráfico passa na origem do referencial.

Então, por exemplo,  $h(x) = -\frac{1}{2}x^4$ .

**2.1.** Não, porque em todas elas o gráfico passa na origem do referencial, ou seja,  $k = 0$ .

**2.2.** O valor de  $a$  é positivo na função  $g$  pois, nesse caso, quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$ .

**2.3.** Por observação gráfica, sabe-se que há um zero negativo nas funções  $g$  e  $h$ .

$k = 0 \rightarrow y = ax^4 + cx$ ,  $a \neq 0$

$ax^4 + cx = 0 \Leftrightarrow x(ax^3 + c) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax^3 + c = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{-\frac{c}{a}}$

A função tem um zero negativo se  $-\frac{c}{a} < 0$ .

$-\frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} > 0$

Então,  $a$  e  $c$  têm o mesmo sinal.

**2.4.** Por observação gráfica, sabe-se que a função  $f$  tem um zero positivo.

Em **2.3.**, provou-se que:

$$ax^4 + cx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{-\frac{c}{a}}$$

A função tem um zero positivo se  $-\frac{c}{a} > 0$ .

$$-\frac{c}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0$$

Então,  $a$  e  $c$  têm sinais diferentes.

**2.5.** Por exemplo,  $f(x) = -x^4 + 2x$ ,  $g(x) = x^4 + 3x$  e  $h(x) = -x^4 - 4x$ .

**3.**  $a < 0$ , porque quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

A expressão analítica da função  $f$  é um polinómio do 4.º grau em que o termo independente é zero, pois  $f(0) = 0$ .

A função  $f$  tem três zeros: um nulo, um negativo e um positivo.

Como a soma dos zeros é igual a zero, concluiu-se que os zeros não nulos são simétricos.

Então, por exemplo,  $f(x) = -x^4 + 4x^2$ .

## Página 26

$$\begin{aligned} \mathbf{24.1.} \quad C(x) - B(x) &= -x^3 + 2x - (-2x^2 + x + 3) = \\ &= -x^3 + 2x + 2x^2 - x - 3 = -x^3 + 2x^2 + x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{24.2.} \quad A(x) \times B(x) &= (-2x + 3) \times (-2x^2 + x + 3) = \\ &= 4x^3 - 2x^2 - 6x - 6x^2 + 3x + 9 = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{24.3.} \quad B(x) + (A(x))^2 &= -2x^2 + x + 3 + (-2x + 3)^2 = \\ &= -2x^2 + x + 3 + 4x^2 - 12x + 9 = 2x^2 - 11x + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{24.4.} \quad A(x) \times C(x) &= (-2x + 3) \times (-x^3 + 2x) = \\ &= 2x^4 - 4x^2 - 3x^3 + 6x \\ &= 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x \end{aligned}$$



25.1. Área da região colorida da peça B:

$$\begin{aligned} 8 \times 5 - [(8 - 2x) \times (5 - 2x)] &= \\ = 40 - (40 - 16x - 10x + 4x^2) &= \\ = 40 - 40 + 16x + 10x - 4x^2 &= \\ = -4x^2 + 26x \end{aligned}$$

25.2. Volume da peça A:

$$\begin{aligned} (-4x^2 + 26x) \times (2x + 1) &= \\ = -8x^3 + 52x^2 - 4x^2 + 26x &= \\ = -8x^3 + 48x^2 + 26x \end{aligned}$$

### Página 27

26.1.  $P(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= (2x + 3) \times (-3x^2 + 2) + (-4) \\ P(x) &= -6x^3 + 4x - 9x^2 + 6 - 4 \\ P(x) &= -6x^3 - 9x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

26.2.  $P(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= (-x^2 + x - 2) \times (-3x + 1) + (-x + 2) \\ P(x) &= 3x^3 - x^2 - 3x^2 + x + 6x - 2 - x + 2 \\ P(x) &= 3x^3 - 4x^2 + 6x \end{aligned}$$

26.3.  $P(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^3 - 2x + 1) \times \left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 0 \\ P(x) &= \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x^2 - 2x + \frac{1}{2}x + 1 \\ P(x) &= \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \end{aligned}$$

27. O polinómio divisor  $(-5x + 2)$  é do 1.º grau.

Como o grau do polinómio resto é menor do que o grau do polinómio divisor, então o resto é um polinómio de grau zero.

A opção que pode representar  $R(x)$  é a **(B)**.

### Página 28

28.1.  $3x^2 + x - 1 \mid x + 2$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + x - 1 \quad | \quad x + 2 \\ -3x^2 - 6x \quad | \quad 3x - 5 \\ \hline -5x - 1 \\ 5x + 10 \\ \hline 9 \end{array}$$

28.2.  $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 \mid x^2 - 2x$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 2x + 3 \quad | \quad x^2 - 2x \\ -x^3 + 2x^2 \quad | \quad -x - 2 \\ \hline -2x^2 + 2x + 3 \\ 2x^2 - 4x \\ \hline -2x + 3 \end{array}$$

29.1.  $(6x^2 - 2x + 1) : (2x - 1)$

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 2x + 1 \quad | \quad 2x - 1 \\ -6x^2 + 3x \quad | \quad 3x + \frac{1}{2} \\ \hline x + 1 \\ -x + \frac{1}{2} \\ \hline \frac{3}{2} \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = 3x + \frac{1}{2}$

Resto:  $R(x) = \frac{3}{2}$

29.2.  $(-x^3 + x^2 - 3x + 1) : (x^2 + x)$

$$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 - 3x + 1 \quad | \quad x^2 + x \\ -x^3 + x^2 \quad | \quad -x + 2 \\ \hline 2x^2 - 3x + 3 \\ -2x^2 - 2x \\ \hline -5x + 3 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = -x + 2$

Resto:  $R(x) = -5x + 3$

29.3.  $(x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5) : (x^2 + 1)$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -x^4 \quad - \quad x^2 \quad | \quad x^2 - 2x \\ \hline -2x^3 + 0x^2 + 3x - 5 \\ 2x^3 \quad + 2x \\ \hline 5x - 5 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = x^2 - 2x$

Resto:  $R(x) = 5x - 5$

29.4.  $(x^3 + 3x^2 - x + 2) : (-x + 2)$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - x + 2 \quad | \quad -x + 2 \\ -x^3 + 2x^2 \quad | \quad -x^2 - 5x - 9 \\ \hline 5x^2 - x + 2 \\ -5x^2 + 10x \\ \hline 9x + 2 \\ -9x + 18 \\ \hline 20 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = -x^2 - 5x - 9$

Resto:  $R(x) = 20$



## Página 29

$$\begin{array}{r}
 30. \quad 2x^3 + \boxed{0x^2} - 3x + \boxed{0} \quad | \quad x + 3 \\
 \hline
 -2x^3 + \boxed{-6x^2} \quad \quad \quad \boxed{2x^2} - 6x + \boxed{15} \\
 \hline
 \boxed{-6x^2} - 3x + \boxed{0} \\
 \quad \quad \quad \boxed{6x^2} + \boxed{18x} \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 15x + \boxed{0} \\
 \quad \quad \quad \boxed{-15x} - \boxed{45} \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad -\boxed{45}
 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = 2x^2 - 6x + 15$ Resto:  $R(x) = -45$ 

$$31.1. A(x) = -2x^3 - x^2 + 1 \text{ e } B(x) = -x^2 + 1$$

$$\begin{array}{r}
 -2x^3 - x^2 + 0x + 1 \quad | \quad -x^2 + 1 \\
 \hline
 2x^3 \quad -2x \quad \quad \quad 2x + 1 \\
 \hline
 \quad -x^2 - 2x + 1 \\
 \quad \quad \quad x^2 \quad -1 \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad -2x + 0
 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = 2x + 1$ Resto:  $R(x) = -2x$ 

$$31.2. A(x) = x^4 - 3x^2 \text{ e } B(x) = x^3 - x$$

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 0 \quad | \quad x^3 - x \\
 \hline
 -x^4 + \quad x^2 \quad \quad \quad x \\
 \hline
 \quad \quad \quad -2x^2 + 0x + 0
 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = x$ Resto:  $R(x) = -2x^2$ 

$$31.3. A(x) = -x^3 + 2x + 3 \text{ e } B(x) = 2x^2 + 1$$

$$\begin{array}{r}
 -x^3 + 0x^2 + 2x + 3 \quad | \quad 2x^2 + 1 \\
 \hline
 x^3 + \quad \frac{1}{2}x \quad \quad -\frac{1}{2}x \\
 \hline
 \quad \quad \quad \frac{5}{2}x + 3
 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = -\frac{1}{2}x$ Resto:  $R(x) = \frac{5}{2}x + 3$ 

$$32.1. A(x) = 6x^3 - 5x^2 + x \text{ e } B(x) = 2x^2 - x$$

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - 5x^2 + x + 0 \quad | \quad 2x^2 - x \\
 \hline
 -6x^3 + 3x^2 \quad \quad \quad 3x - 1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad -2x^2 + x + 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2x^2 - x \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = 3x - 1$ Resto:  $R(x) = -2x$ Como o resto da divisão inteira de  $A(x)$  por  $B(x)$  é zero, então  $A(x)$  é divisível por  $B(x)$ .

$$32.2. A(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6 \text{ e } B(x) = x^2 + 2$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 + 2x - 6 \quad | \quad x^2 + 2 \\
 \hline
 -x^3 - \quad 2x \quad \quad \quad x - 3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad -3x^2 + 0x - 6 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3x^2 + \quad 6 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = x - 3$ Resto:  $R(x) = 0$ Como o resto da divisão inteira de  $A(x)$  por  $B(x)$  é zero, então  $A(x)$  é divisível por  $B(x)$ .

## Página 30

$$33.1. (x^3 + 5x^2 - x + 2) : (x - 4)$$

1.º passo da regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 5 & -1 & 2 \\
 4 & & & & \\
 \hline
 & & & & 1
 \end{array}$$

$$33.2. (x^3 - 3x^2 + 1) : (x + 1)$$

$$x + 1 = x - (-1)$$

1.º passo da regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 1 \\
 -1 & & & & \\
 \hline
 & & & & 1
 \end{array}$$

$$34.1.$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 5 & -2 \\
 3 & & & & \\
 \hline
 & & & & 1
 \end{array}$$

Dividendo:  $A(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ Divisor:  $B(x) = x - 3$



34.2.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & 0 & -3 \\ 4 & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

Dividendo:  $A(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3$ Divisor:  $B(x) = x - 4$ 

34.3.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

Dividendo:  $A(x) = 3x^3 - x$ Divisor:  $B(x) = x + 2$ **Página 31**35.1.  $(x^3 + 3x^2 - x + 7) : (x - 1)$ 

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & & \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline & 1 & \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{10} \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = x^2 + 4x + 3$ Resto:  $R(x) = 10$ 35.2.  $(2x^3 + x - 3) : (x + 2)$ 

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & & \boxed{-4} & \boxed{8} & \boxed{-18} \\ \hline & 2 & \boxed{-4} & \boxed{9} & \boxed{-21} \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = 2x^2 - 4x + 9$ Resto:  $R(x) = -21$ 36.1.  $(x^4 + x^2 - 3x + 1) : (x - 2)$ 

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & & & 2 & 4 & 10 & 14 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 7 & \boxed{15} \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ Resto:  $R(x) = 15$ 36.2.  $(2x^3 - 5x + 1) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$ 

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -5 & 1 \\ \frac{1}{2} & & & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ \hline & 2 & 1 & -\frac{9}{2} & \boxed{-\frac{5}{4}} \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = 2x^2 + x - \frac{9}{2}$ Resto:  $R(x) = -\frac{5}{4}$ 36.3.  $\left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{4}x\right) : (x + 2)$ 

$$\begin{array}{r|rrrr} & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -2 & & & 1 & -6 & \frac{27}{2} \\ \hline & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{27}{4} & \boxed{\frac{27}{2}} \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{27}{4}$ Resto:  $R(x) = \frac{27}{2}$ 37.  $P(x) = x^3 - kx + 3, k \in \mathbb{R}$ 

$P(x)$  é divisível por  $x + 2$  se o resto da divisão inteira de  $P(x)$  por  $x + 2$  for igual a zero.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -k & 3 \\ -2 & & -2 & 4 & 2k - 8 \\ \hline & 1 & -2 & -k + 4 & \boxed{2k - 5} \end{array}$$

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow 2k - 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}$$

O polinômio da família que é divisível por  $x + 2$  é

$$P(x) = x^3 - \frac{5}{2}x + 3.$$

**Página 32 – Tarefa 6**1.  $P(x) : (x - \alpha)$ 1.1.  $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 3$  e  $\alpha = 2$ 

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 2 & 5 & -3 \\ 2 & & & -2 & 0 & 10 \\ \hline & -1 & 0 & 5 & \boxed{7} \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = -x^2 + 5$ Resto:  $R(x) = 7$ 1.2.  $P(x) = 2x^3 - 3x + 1$  e  $\alpha = -2$ 

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & & & -4 & 8 & -10 \\ \hline & 2 & -4 & 5 & \boxed{-9} \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = 2x^2 - 4x + 5$ Resto:  $R(x) = -9$



1.3.  $P(x) = x^3 - 27$  e  $\alpha = 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -27 \\ 3 & & 3 & 9 & 27 \\ \hline & 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = x^2 + 3x + 9$

Resto:  $R(x) = 0$

1.4.  $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = 2x^2$

Resto:  $R(x) = 1$

1.5.  $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x$  e  $\alpha = -1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & & -1 & -1 & 2 & -5 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 5 & -5 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = x^3 + x^2 - 2x + 5$

Resto:  $R(x) = -5$

2.1.

$$\begin{array}{r|rrrr} & a & b & c & d \\ \alpha & & 6 & e & f \\ \hline & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}$$

Sabe-se que:

- $a = 2$
- $\alpha \times 2 = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$
- $b + 6 = -1 \Leftrightarrow b = -7$
- $\alpha \times -1 = e \Leftrightarrow 3 \times (-1) = e \Leftrightarrow e = -3$
- $c + e = 1 \Leftrightarrow c + (-3) = 1 \Leftrightarrow c = 4$
- $\alpha \times 1 = f \Leftrightarrow 3 \times 1 = f \Leftrightarrow f = 3$
- $d + f = 2 \Leftrightarrow d + 3 = 2 \Leftrightarrow d = -1$

Dividendo:  $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$

Divisor:  $x - 3$

2.2.

$$\begin{array}{r|rrrr} & a & b & c & d \\ -1 & & 1 & -3 & 3 \\ \hline & a & e & f & -1 \end{array}$$

Sabe-se que:

- $-1 \times a = 1 \Leftrightarrow a = -1$
- $e = b + 1$
- $-1 \times e = -3 \Leftrightarrow e = 3 \Rightarrow b + 1 = 3 \Leftrightarrow b = 2$
- $f = c - 3$
- $-1 \times f = 3 \Leftrightarrow f = -3 \Rightarrow c - 3 = -3 \Leftrightarrow c = 0$
- $d + 3 = -1 \Leftrightarrow d = -4$

Dividendo:  $P(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$

Divisor:  $x + 1$

3.1.

```
v=0
for i in range(gra+1):
    v=v+P[i]*a**(gra-i)
print('valor de P em ',a, 'é igual a ', v)
```

3.2.

```
P=[]
for i in range(4):
    P.append(float(input('coeficiente do termo de grau '+str(i+1)+' : ')))
a=float(input('a = '))

def f(D,a):
    Q=[P[0]]
    r=P[0]
    for i in range(3):
        m=a**i*P[i+1]
        Q.append(m)
    return Q
Q=f(P,a)
P=Q[1:]
print('resto de P: ',P)
print('resto de Q: ',Q)
print('Resto: ',R)
```

**Página 33**

38.1. Seja  $-2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = P(x)$ .

Pretende-se determinar o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x - 1$ , ou seja,  $P(1)$ .

$$P(1) = -2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 - 4 \times 1 + 1 = -2 - 3 - 4 + 1 = -8$$

O resto da divisão de  $P(x)$  por  $x - 1$  é igual a  $-8$ .





43.2.  $A(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1$  e  $B(x) = x^2 + 2x$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x + 1 & x^2 + 2x \\ -x^4 - 2x^3 & \\ \hline & -x + 1 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = x^2$

Resto:  $R(x) = -x + 1$

44.1.  $(2x^3 - x^2 + 2x - 3) : (3x^2 + 1)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + 2x - 3 & 3x^2 + 1 \\ -2x^3 - \frac{2}{3}x & \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \\ \hline & -x^2 + \frac{4}{3}x - 3 \\ & x^2 + \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Resto:  $R(x) = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$

44.2.  $(x^4 - 2x^2 + 1) : \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1 & \frac{1}{2}x^2 - x \\ -x^4 + 2x^3 & 2x^2 + 4x + 4 \\ \hline & 2x^3 - 2x^2 + 0x + 1 \\ & -2x^3 + 4x^2 \\ \hline & 2x^2 + 0x + 1 \\ & -2x^2 + 4x \\ \hline & 4x + 1 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = 2x^2 + 4x + 4$

Resto:  $R(x) = 4x + 1$

### Página 35

45.1.  $(-2x^3 + x^2 + 3x - 5) : (x - 2) \rightarrow$  pela regra de

Ruffini.

$$\begin{array}{r|l} & -2 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & & -4 & -6 & -6 \\ \hline & -2 & -3 & -3 & -11 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = -2x^2 - 3x - 3$

Resto:  $R(x) = -11$

45.2.  $(x^4 - x^3 - x^2 + x) : (x + 1) \rightarrow$  pela regra de Ruffini

$$\begin{array}{r|l} & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$

Resto:  $R(x) = 0$

45.3.  $\left(x^3 + \frac{3}{4}x + 1\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow$  pela regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|l} & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

Resto:  $R(x) = \frac{3}{2}$

45.4.  $(-x^4 + 3x^2 - 2x + 5) : (x + 2) \rightarrow$  pela regra de

Ruffini.

$$\begin{array}{r|l} & -1 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & & 2 & -4 & 2 & 0 \\ \hline & -1 & 2 & -1 & 0 & 5 \end{array}$$

Quociente:  $Q(x) = -x^3 + 2x^2 - x$

Resto:  $R(x) = 5$

46.  $P(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$

46.1. Pelo Teorema do resto, sabe-se que o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x - 2$  é igual a  $P(2)$ .

$$P(2) = 2^4 - 3 \times 2^2 + 2 - 2 = 16 - 12 + 2 - 2 = 4$$

O resto da divisão de  $P(x)$  por  $x - 2$  é igual a 4.

46.2. Pelo Teorema do resto, sabe-se que o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x + 2$  é igual a  $P(-2)$ .

$$P(-2) = (-2)^4 - 3 \times (-2)^2 + (-2) - 2 = 16 - 12 - 2 - 2 = 0$$

Como o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x + 2$  é igual a zero, então conclui-se que  $P(x)$  é divisível por  $x + 2$ .



46.3. Pelo Teorema do resto, sabe-se que o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x+1$  é igual a  $P(-1)$ .

$$P(-1) = (-1)^4 - 3 \times (-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 3 \times 1 - 1 - 2 = -5$$

Então, o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x+1$  é igual a  $-5$ .

47.  $P(x) = x^3 - x^2 + kx + 2$ ,  $k \in \mathbb{R}$

47.1.  $P(x)$  dividido por  $x-3$  dá resto 5.

Pelo Teorema do resto, sabe-se que  $P(3) = 5$ .

$$P(3) = 5 \Leftrightarrow 3^3 - 3^2 + k \times 3 + 2 = 5 \Leftrightarrow 27 - 9 + 3k + 2 = 5 \\ \Leftrightarrow k = -5$$

O polinómio da família que satisfaz a condição dada é  $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ .

47.2.  $P(x)$  dividido por  $x - \frac{1}{2}$  dá resto 2.

Pelo Teorema do resto, sabe-se que  $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ .

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + k \times \frac{1}{2} + 2 = 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

O polinómio da família que satisfaz a condição dada é  $P(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x + 2$ .

47.3.  $P(x)$  é divisível por  $x-2$  se o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x-2$  for igual a zero.

Pelo Teorema do resto sabe-se que  $P(2) = 0$ .

$$P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - 2^2 + k \times 2 + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow 8 - 4 + 2k + 2 = 0 \Leftrightarrow 2k = -6 \Leftrightarrow k = -3$$

O polinómio da família que satisfaz a condição dada é  $P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$ .

47.4.  $P(x)$  é divisível por  $x+1$  se o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x+1$  for igual a zero.

Pelo Teorema do resto sabe-se que  $P(-1) = 0$ .

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^3 - (-1)^2 + k \times (-1) + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow -1 - 1 - k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

O polinómio da família que satisfaz a condição dada é  $P(x) = x^3 - x^2 + 2$ .

48.  $P(x) = -x^3 + ax^2 - x - b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

$P(x)$  dividido por  $x+1$  dá resto  $-2$  e dividido por  $x-2$  dá resto 1.

Aplicando o Teorema do resto, tem-se:

$$\begin{cases} P(-1) = -2 \\ P(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(-1)^3 + a \times (-1)^2 - (-1) + b = -2 \\ -2^3 + a \times 2^2 - 2 + b = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + 1 + b = -2 \\ -8 + 4a - 2 + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -4 \\ 4a + b = 11 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 - a \\ 4a - 4 - a = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 3a = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -9 \\ a = 5 \end{cases}$$

O polinómio da família que satisfaz as condições dadas é  $P(x) = -x^3 + 5x^2 - x - 9$ .

49. Divisor:  $x - \alpha$

Dividendo:  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

	$a$	$b$	$c$	$d$
$\alpha$		$-2$	$2$	$8$
	$-1$	$b-2$	$c+2$	$3$

Sabe-se que:

- $a = -1$
- $\alpha \times (-1) = -2 \Leftrightarrow \alpha = 2$
- $\alpha \times (b-2) = 2 \Leftrightarrow 2 \times (b-2) = 2 \\ \Leftrightarrow b-2 = 1 \Leftrightarrow b = 3$
- $\alpha \times (c+2) = 8 \Leftrightarrow 2 \times (c+2) = 8 \\ \Leftrightarrow c+2 = 4 \Leftrightarrow c = 2$
- $d + 8 = 3 \Leftrightarrow d = -5$

Divisor:  $x - 2$

Dividendo:  $P(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 5$

Quociente:  $Q(x) = -x^2 + x + 4$

Resto:  $R(x) = 3$

50.  $P(x) = x^{n+1} + 2x^n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$

50.1. Pelo Teorema do resto, sabe-se que o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x-1$  é igual a  $P(1)$ .

$$P(1) = 1^{n+1} + 2 \times 1^n - 1 = 1 + 2 \times 1 - 1 = 2$$

Então, o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x-1$  é 2.



50.2.  $P(x)$  é divisível por  $x+1$  se  $P(-1) = 0$ .

$$P(-1) = (-1)^{n+1} + 2 \times (-1)^n - 1$$

Se  $n$  é par, então  $n+1$  é ímpar.

Neste caso,  $P(-1) = -1 + 2 \times 1 - 1 = 0$ .

Logo, conclui-se que, se  $n$  é par, então  $P(x)$  é divisível por  $x+1$ .

### Página 36

51.1.  $x^2 - 2x - 3$

Determinar raízes:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

Fatorizar o polinómio (fatores de grau 1):

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

51.2.  $2x^2 + 3x - 5$

Determinar raízes:

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{5}{2}$$

Fatorizar o polinómio (fatores de grau 1):

$$2x^2 + 3x - 5 = 2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x-1)(2x+5)$$

51.3.  $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$

51.4.  $9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2 = (3x-1)(3x-1)$

51.5.  $3x^2 + 2x - 1$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -1$$

Fatorizar o polinómio (fatores de grau 1):

$$3x^2 + 2x - 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+1) = (3x-1)(x+1)$$

52.1.  $2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$$

$$2x^2 + x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1) = (2x-1)(x+1)$$

Fatorizar o polinómio (de grau 1):

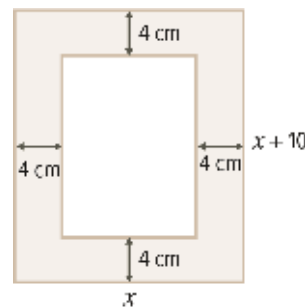
$$2x^3 + x^2 - x = x(2x-1)(x+1)$$

52.2.  $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$

$$x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 = 4}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}}$$

Não é possível decompor o polinómio  $x^3 + 4x$  em fatores de grau 1. Então,  $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ .

53.



$$P(x) = (x-4-4)(x+10-4-4) = (x-8)(x+2)$$

### Página 37

54.1.  $x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4)$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$$

$$x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

$$x^3 - 3x^2 - 4x = x(x-4)(x+1)$$

54.2.  $2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$$

$$2x^2 + x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1) = (2x-1)(x+1)$$

$$2x^3 + x^2 - x = x(2x-1)(x+1)$$

54.3.  $x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ , sabendo que 1 é uma raiz.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	3	-9	5
1		1	4	-5
	1	4	-5	0



Daqui resulta que:

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x-1) \underbrace{(x^2 + 4x - 5)}_{Q(x)}$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5$$

$$Q(x) = (x-1)(x+5)$$

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x-1)(x-1)(x+5)$$

**54.4.**  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ , sabendo que 2 é uma raiz.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

2	1	2	-5	-6
		2	8	6
	1	4	3	0

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2) \underbrace{(x^2 + 4x + 3)}_{Q(x)}$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$$

$$Q(x) = (x+1)(x+3)$$

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x+1)(x+3)$$

**54.5.**  $x^4 + x^3 - x^2 - x$ , sabendo que  $-1$  é uma raiz.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

-1	1	1	-1	-1	0
		-1	0	1	0
	1	0	-1	0	0

Daqui resulta que:

$$x^4 + x^3 - x^2 - x = (x+1) \underbrace{(x^3 - x)}_{Q(x)}$$

$$Q(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

$$x^4 + x^3 - x^2 - x = x(x-1)(x+1)(x+1)$$

**54.6.**  $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ , sabendo que é divisível por

$x^2 - 1$ . Aplicando o algoritmo da divisão de polinómio:

$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$	$\begin{array}{r} x^2 - 1 \\ \hline x^2 - x - 2 \end{array}$
$-x^4 + x^2$	
$-x^3 - 2x^2 + x + 2$	
$x^3 - x$	
$-2x^2 + 0x + 2$	
$2x^2 - 2$	
$0$	

Daqui resulta que:

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x^2 - 1) \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{Q(x)}$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

$$Q(x) = (x-2)(x+1)$$

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+1)$$

**55.**  $f(x) = x^3 + 1$

**55.1.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-1}$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

O gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Ox$  no ponto de coordenadas  $(-1, 0)$ .

**55.2.**  $-1$  é zero do polinómio  $x^3 + 1$ .

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

-1	1	0	0	1
		-1	1	-1
	1	-1	1	0

$$x^3 + 1 = (x+1) \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{Q(x)}$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \rightarrow$$

$\rightarrow$  Equação impossível.

O polinómio  $Q(x)$  não pode ser fatorizado em fatores de grau 1.

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

## Página 38

**56.**  $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

$$P(3) = 3^3 - 7 \times 3^2 + 16 \times 3 - 12 = 27 - 63 + 48 - 12 = 0$$

Logo, 3 é raiz de  $P(x)$ .

Aplicando a regra de Ruffini:

3	1	-7	16	-12
		3	-12	12
	1	-4	4	0



$$P(x) = (x-3) \underbrace{(x^2 - 4x + 4)}_{Q(x)}$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 2$$

$$Q(x) = (x-2)(x-2) = (x-2)^2$$

$$\text{Então, } P(x) = (x-3)(x-2)^2.$$

$P(x)$  é divisível por  $x-3$ , mas não é divisível

por  $(x-3)^2$ . Logo, 3 é uma raiz simples.

$P(x)$  é divisível por  $(x-2)^2$ , mas não por

$$(x-2)^3.$$

Conclui-se que 2 é uma raiz dupla (de multiplicidade 2).

**57.1.** O quociente de divisão de  $T(x)$  por  $(x+1)^2$  é  $2x^2 + x - 1$ .

**57.2.** Atendendo ao esquema apresentado, sabe-se que:

$$T(x) = (x+1)(x+1)(x+1)(2x-1), \text{ ou seja,}$$

$$T(x) = (x+1)^3(2x-1)$$

$$T(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3(2x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 = 0 \vee 2x-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$$

As raízes de  $T(x)$  são  $-1$  e  $\frac{1}{2}$ .

$-1$  é uma raiz de multiplicidade 3.

$\frac{1}{2}$  é uma raiz de multiplicidade 1.

**58.**  $P(x)$ : polinómio, na forma reduzida, de grau 3.

Por exemplo:

**58.1.**  $P(x) = (x-1)(x+2)(x-5)$

$$= (x^2 + 2x - x - 2)(x-5)$$

$$= (x^2 + x - 2)(x-5)$$

$$= x^3 - 5x^2 + x^2 - 5x - 2x + 10$$

$$= x^3 - 4x^2 - 7x + 10$$

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$$

**58.2.**  $P(x) = (x-3)^2(x+1)$

$$= (x^2 - 6x + 9)(x+1)$$

$$= x^3 + x^2 - 6x^2 - 6x + 9x + 9$$

$$= x^3 - 5x^2 + 3x + 9$$

### Página 39 – Tarefa 7

**1.1.**  $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 7$

1 é zero da função  $f$ , ou seja, 1 é raiz do polinómio  $f(x)$ .

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -7 & -2 & 7 \\ & & 2 & -5 & -7 \\ \hline & 2 & -5 & -7 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-1) \underbrace{(2x^2 - 5x - 7)}_{Q(x)}$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \vee x = -1$$

$$Q(x) = 2 \left( x - \frac{7}{2} \right) (x+1)$$

$$f(x) = 2 \left( x - \frac{7}{2} \right) (x+1)(x-1)$$

Raízes de  $f(x)$ :  $-1$ ,  $1$  e  $\frac{7}{2}$  (cada uma delas de multiplicidade 1)

**1.2.**  $g(x) = -x^3 + 3x + 2$

2 é zero da função  $g$ , ou seja, 2 é raiz do polinómio  $g(x)$

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ & & -2 & -4 & -2 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

Daqui resulta que:

$$g(x) = (x-2) \underbrace{(-x^2 - 2x - 1)}_{Q(x)}$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -1$$

Assim,  $Q(x) = -1(x+1)(x+1) = -1(x+1)^2$ .

Então,  $Q(x) = -1(x+1)^2(x-2)$ .

Conclui-se que a raiz de multiplicidade 2 é  $-1$ .



1.3.  $h(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Por observação gráfica, sabe-se que  $-1$  é zero da função  $h$ , ou seja,  $-1$  é raiz do polinómio  $h(x)$ .

Aplicando a regra de Ruffini sucessivamente:

-1	1	3	3	1	
	1	2	1	0	
-1		-1	-1		
	1	1	0		
-1		-1			
	1	0			

Daqui resulta que  $h(x) = 1(x+1)(x+1)(x+1)$ , ou seja,  $h(x) = (x+1)^3$ .

Então,  $-1$  é uma raiz de multiplicidade 3.

2.  $-2$  é um zero de  $j$  de multiplicidade 1.  
3 é um zero de  $j$  de multiplicidade 2.

Então,  $j(x) = a(x+2)(x-3)^2$ .

Como, quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $j(x) \rightarrow -\infty$ , e, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $j(x) \rightarrow +\infty$ , conclui-se que  $a > 0$ .

Considerando, por exemplo,  $a = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} j(x) &= 1(x+2)(x-3)^2 = (x+2)(x^2 - 6x + 9) = \\ &= x^3 - 6x^2 + 9x + 2x^2 - 12x + 18 = \\ &= x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \end{aligned}$$

3. Por observação gráfica, sabe-se que a função  $f$  tem dois zeros:  $-1$  e  $2$ .

Assim,  $-1$  e  $2$  são raízes do polinómio  $f(x)$ .

Como cada uma dessas raízes tem multiplicidade 2, conclui-se que:

$$f(x) = a(x+1)^2(x-2)^2, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Como o gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Oy$  no ponto de coordenadas  $(0, 2)$ , tem-se que  $f(0) = 2$ .

$$\begin{aligned} f(0) = 2 &\Leftrightarrow a(0+1)^2(0-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a \times 1 \times 4 = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Então,  $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2(x-2)^2$ .

Simplificando, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4x + 4) = \\ &= \frac{1}{2}(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x^3 - 8x^2 + 8x + x^2 - 4x + 4) \\ &= \frac{1}{2}(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4) \\ &= \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

### Página 40 – Prática

59.  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

- 59.1. Como  $P(-1) = 0$ , então  $-1$  é raiz de  $P(x)$ .

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

-1	2	-1	-5	-2	
		-2	3	2	
	2	-3	-2	0	

$$P(x) = (x+1)\underbrace{(2x^2 - 3x - 2)}_{Q(x)}$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Assim,  $Q(x) = 2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x+1)$ .

Então,  $P(x) = (x+1)(x-2)(2x+1)$ .

- 59.2. Como  $P(x) = (x+1)(x-2)(2x+1)$ , então, por exemplo,  $(x+1)(x-2)$  é divisor de  $P(x)$ .

$$(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$$

- 60.1.  $P(x) \rightarrow$  polinómio de grau 2 cujas raízes são 3 e 0,5.

Por exemplo:  $P(x) = 2(x-0,5)(x-3) =$   
 $= (2x-1)(x-3) = 2x^2 - 6x - x + 3 = 2x^2 - 7x + 3$

- 60.2.  $P(x) \rightarrow$  polinómio de grau 2 em que  $-4$  é raiz de multiplicidade 2.

Por exemplo:  $P(x) = (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$

- 60.3.  $P(x) \rightarrow$  polinómio de grau 3 cujas raízes são 1, 0 e  $-2$ .

Por exemplo:  $P(x) = -1(x-0)(x+2)(x-1) =$   
 $= -x(x^2 - x + 2x - 2) = -x(x^2 + x - 2) = -x^3 - x^2 + 2x$



60.4.  $P(x) \rightarrow$  polinómio de grau 3 que tem raiz

simples igual a 2. Por exemplo:

$$P(x) = (x-2) \underbrace{(x^2+1)}_{\text{não tem zeros reais}} =$$

$$= x^3 + x - 2x^2 - 2 = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

61.  $P(x) = (x+1)(x-2)(x-3)^2 Q(x)$

$Q(x)$  tem grau menor do que 2.

61.1.  $P(x)$  não pode ter grau 3, porque está

decomposto num produto de quatro fatores (dois de grau 1, um de grau 2 e outro de grau menor do que 2).

Então, no mínimo,  $P(x)$  tem grau 4 ( $1+1+2+0$ ).

61.2. Quando  $Q(x)$  tem grau 1,  $P(x)$  tem o maior

grau possível que é 5 ( $1+1+2+1$ ).

O maior grau possível de  $P(x)$  é grau 5.

62. Não é possível ter um polinómio de grau 3 com uma só raiz de multiplicidade 2.

Admitamos que essa raiz é  $\alpha$ , então sabe-se

que  $P(x) = (x-\alpha)^2 \times Q(x)$  e  $Q(\alpha) \neq 0$  (pois

$P(x)$  não é divisível por  $(x-\alpha)^3$ ).

Como  $P(x)$  é um polinómio de grau 3, então

$Q(x)$  é um polinómio de grau 1.

$Q(x)$  é um polinómio de grau 1 e  $Q(\alpha) \neq 0$ , logo

$Q(x)$  tem um zero diferente de  $\alpha$ .

Assim,  $P(x)$  teria duas raízes diferentes.

63.  $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

63.1. Termo independente: 2

Os divisores, positivos e negativos, do termo independente de  $P(x)$  são 1, 2, -1 e -2.

63.2.  $P(1) = 1^4 + 1^3 - 3 \times 1^2 - 1 + 2 = 1 + 1 - 3 - 1 + 2 = 0$

Como  $P(1) = 0$ , 1 é raiz de  $P(x)$ .

$$P(2) = 2^4 + 2^3 - 3 \times 2^2 - 2 + 2 = 12$$

Como  $P(2) \neq 0$ , 2 não é raiz de  $P(x)$ .

$$P(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - (-1) + 2 = \\ = 1 - 1 - 3 + 1 + 2 = 0$$

Como  $P(-1) = 0$ , -1 é raiz de  $P(x)$ .

$$P(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 - (-2) + 2 = \\ = 16 - 8 - 12 + 2 + 2 = 0$$

Como  $P(-2) = 0$ , -2 é raiz de  $P(x)$ .

1, -1 e -2 são os divisores do termo independente que são raízes de  $P(x)$ .

63.3. Vamos verificar qual é a multiplicidade da raiz 1.

Aplicando sucessivamente a regra de Ruffini, tem-se:

	1	1	-3	-1	2
1		1	2	-1	-2
	1	2	-1	-2	0
1		1	3	2	
	1	3	2		0
1		1	4		
	1	4	6		

Conclui-se que a raiz 1 tem multiplicidade 2, pois

$P(x)$  é divisível por  $(x-1)^2$ , mas não é divisível por  $(x-1)^3$ .

$P(x)$  tem três raízes: 1 (de multiplicidade 2),

-1 (de multiplicidade 1) e -2 (de multiplicidade 1).

Como o coeficiente do termo de maior grau é 1, tem-se:

$$P(x) = 1(x-1)^2(x+1)(x+2) = \\ = (x-1)(x-1)(x+1)(x+2)$$

64.  $T(x) = x^3 - 4x + 3$

64.1. Termo independente de  $T(x) = 3$

Conjunto dos divisores, positivos e negativos, do termo independente:  $\{1, 3, -1, -3\}$ .

$T(1) = 1^3 - 4 \times 1 + 3 = 0$ , logo 1 é raiz de  $T(x)$ .

$T(3) = 3^3 - 4 \times 3 + 3 = 18 \neq 0$ , logo 3 não é raiz de  $T(x)$ .



$T(-1) = (-1)^3 - 4 \times (-1) + 3 = 6 \neq 0$ , logo  $-1$  não é raiz de  $T(x)$ .

$T(-3) = (-3)^3 - 4 \times (-3) + 3 = -12 \neq 0$ , logo  $-3$  não é raiz de  $T(x)$ .

Como  $1$  é raiz de  $T(x)$ , aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & & 1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$T(x) = (x-1)(x^2+x-3)$$

Então, o polinómio  $x^2+x-3$  é divisor de  $T(x)$  e tem grau 2.

- 64.2.** Atendendo aos cálculos efetuados em **64.1.**, sabe-se que  $3$  é um divisor do termo independente de  $T(x)$  e  $3$  não é raiz de  $T(x)$  (pois  $T(3) \neq 0$ ).

### Página 41 – Prática

- 65.**  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  ( $a, b, c$  não inteiros)

Raízes inteiras:  $x_1$  e  $x_2$

- 65.1.** Atendendo à informação anterior, sabe-se que

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Simplificando, tem-se:

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) = \\ &= ax^2 - ax_2x - ax_1x + ax_1x_2 \\ &= ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2 \end{aligned}$$

Como  $Q(x) = ax^2 + bx + c$  e

$$P(x) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2, \text{ conclui-se que}$$

$$b = -a(x_1+x_2) \text{ e } c = ax_1x_2.$$

- 65.2.** Como  $c = ax_1x_2$ , então:

$$\frac{c}{x_1} = ax_2 \text{ e } \frac{c}{x_2} = ax_1$$

Assim,  $x_1$  e  $x_2$  são divisores de  $c$ .

- 66.**  $f \rightarrow$  função polinomial do 3.º grau

- $f(x)$  é divisível por  $2x+3$ .
- $\frac{1}{2}$  é uma raiz de multiplicidade 2 de  $f(x)$ .
- $f(0) = \frac{3}{4}$

**66.1.**  $2x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

$f(x)$  é divisível por  $2x+3$ , logo  $-\frac{3}{2}$  é raiz simples de  $f(x)$ .

Atendendo às raízes de  $f(x)$  e às respetivas multiplicidades, sabe-se que:

$$f(x) = a\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Como  $f(0) = \frac{3}{4}$ , tem-se:

$$a\left(0 + \frac{3}{2}\right)\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}a = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= (2x+3)\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + \frac{x}{2} + 3x^2 - 3x + \frac{3}{4}$$

$$= 2x^3 + x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{4}$$

- 66.2.**  $P(1, f(1))$

$$f(1) = 2 \times 1^3 + 1^2 - \frac{5}{2} \times 1 + \frac{3}{4} =$$

$$= 2 + 1 - \frac{5}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{5}{4}$$

As coordenadas do ponto do gráfico de  $f$  com

abscissa 1 são  $\left(1, \frac{5}{4}\right)$ .



67.  $A(a, 0)$  e  $B(2, 0)$ ;  $a \in \mathbb{R}^-$

$a$  e  $2$  são zeros de  $f$ .

$C(0, 4)$ , ou seja,  $f(0) = 4$

$$A_{[ABC]} = 6 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-a) \times 4}{2} = 6 \Leftrightarrow 2-a = 3 \Leftrightarrow a = -1$$

Então,  $A(-1, 0)$ .

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\overline{AC} = 2 - (-1) = 3$$

$$P_{[ABC]} = 3 + \sqrt{17} + \sqrt{20} \approx 11,595$$

Então,  $11,5 < P_{[ABC]} < 11,6$ , ou seja, o perímetro

do triângulo  $[ABC]$  está entre 11,5 e 11,6.

#### Página 42

68.1.  $x^3 - 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

68.2.  $8x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(8x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 8x^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{2}, 0 \right\}$$

68.3.  $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{0, 1, 2\}$$

68.4.  $(x-2)^3 - 2(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-2)^2 - 2(x-2)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)[(x-2)^2 - 2(x+2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \vee x^2 - 4x + 4 - 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x(x-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0 \vee x = 6$$

$$\text{C.S.} = \{0, 2, 6\}$$

68.5.  $x^4 + 2x^2 - (x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 2) - (x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 = 0 \vee x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -2}_{\substack{\text{Equação impossível} \\ \text{em } \mathbb{R}}} \vee x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-1, 1\}$$

69.  $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

69.1.  $P(3) = 3^3 - 3^2 - 5 \times 3 - 3 = 27 - 9 - 15 - 3 = 0$

Como  $P(3) = 0$ , então  $P(x)$  é divisível por

$x - 3$ .

69.2. Aplicando a regra de Ruffini:

3	1	-1	-5	-3
		3	6	3
	1	2	1	0

Assim,  $P(x) = (x-3)(x^2 + 2x + 1)$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-1, 3\}$$

70.  $2x^3 + 7x^2 + 2x = 3$

$$x = -1 \rightarrow 2 \times (-1)^3 + 7 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) = 3$$

$$\Leftrightarrow -2 + 7 - 2 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3 \text{ Proposição verdadeira}$$

Logo,  $-1$  é solução da equação dada.

$$2x^3 + 7x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 0$$



Como  $-1$  é solução da equação, aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & 2 & -3 \\ -1 & & -2 & -5 & 3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

$$2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x^2 + 5x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \vee 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -3$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -3, -1, \frac{1}{2} \right\}$$

71.  $P(x) = -x^3 - 4x^2 + 3x + 18$

71.1.  $P(2) = -2^3 - 4 \times 2^2 + 3 \times 2 + 18$   
 $= -8 - 16 + 6 + 18 = 0$

71.2. Como  $P(2) = 0$ , então 2 é raiz de  $P(x)$ .

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -4 & 3 & 18 \\ 2 & & -2 & -12 & -18 \\ \hline & -1 & -6 & -9 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x-2)(-x^2 - 6x - 9)$$

$$-x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 18x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(-x^3 - 4x^2 + 3x + 18) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \times P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee (x-2)(-x^2 - 6x - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \vee -x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -3 \vee x = -3$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 0, 2\}$$

### Página 43 – Tarefa 8

1.  $x^4 - 5x^2 + 4 = k, k \in \mathbb{R}$

O Vasco utilizou, na resolução da equação proposta na aula de Matemática, a função  $f$

definida por  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ . Então:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = k \Leftrightarrow f(x) = k$$

Atendendo a que  $f$  admite o mínimo  $-\frac{9}{4}$  e o

máximo 4 e à representação gráfica obtida na calculadora gráfica, é possível responder às questões colocadas.

1.1. A equação  $f(x) = k$  tem 0 raízes, ou seja, é

impossível, quando  $k < -\frac{9}{4}$ .

Então, uma equação da família em que o número de raízes seja 0 é, por exemplo,

$$x^4 - 5x^2 + 4 = -3.$$

1.2. A equação  $f(x) = k$  tem duas raízes quando

$$k = -\frac{9}{4} \text{ ou } k > 4.$$

Então, uma equação da família em que o número de raízes seja dois é, por exemplo,

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 5.$$

1.3. A equação  $f(x) = k$  tem três raízes quando

$$k = 4.$$

Então, a equação da família em que o número de raízes seja 3 é  $x^4 - 5x^2 + 4 = 4$ .

1.4. A equação  $f(x) = k$  tem quatro raízes quando

$$-\frac{9}{4} < k < 4.$$

Então, uma equação da família em que o número de raízes seja 4 é, por exemplo,  $x^4 - 5x^2 + 4 = 1$ .

2.1.  $x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{8+10}{2} \vee x^2 = \frac{8-10}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \vee \underbrace{x^2 = -1}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

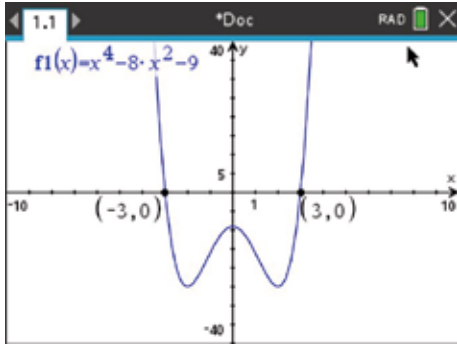
$$\text{C.S.} = \{-3, 3\}$$

**Confirmação:**

Seja  $f$  a função polinomial definida por:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9.$$

Recorrendo a uma calculadora gráfica, vamos determinar os zeros de  $f$ .



Zeros de  $f$ :  $-3$  e  $3$

Então, o conjunto-solução da equação

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \text{ é:}$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 3\}$$

2.2.  $x^4 - 10x^2 = -9 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{10+8}{2} \vee x^2 = \frac{10-8}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \vee x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-3, -1, 1, 3\}$$

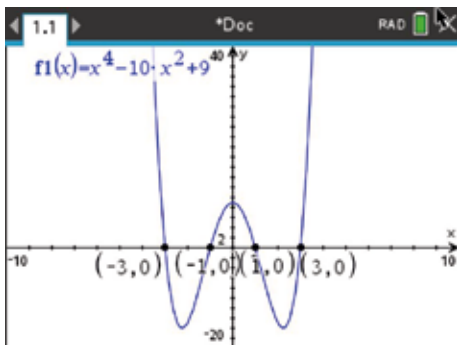
**Confirmação:**

$$x^4 - 10x^2 = -9 \Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Seja  $f$  a função polinomial definida por

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9.$$

Recorrendo a uma calculadora gráfica, vamos determinar os zeros de  $f$ .



Zeros de  $f$ :  $-3$ ,  $-1$ ,  $1$  e  $3$

Então, o conjunto-solução da equação

$$x^4 - 10x^2 = -9 \text{ é:}$$

$$\text{C.S.} = \{-3, -1, 1, 3\}$$

2.3.  $x^4 - 14x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 14x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 128}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{14+18}{2} \vee x^2 = \frac{14-18}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 \vee \underbrace{x^2 = -2}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$$

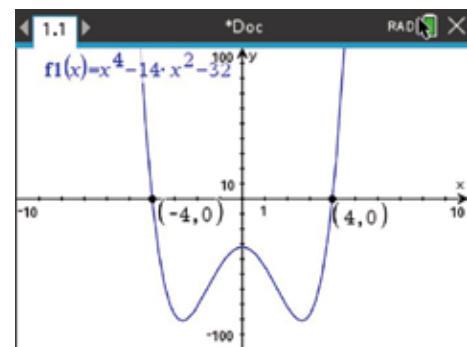
$$\text{C.S.} = \{-4, 4\}$$

**Confirmação:**

Seja  $f$  a função polinomial definida por:

$$f(x) = x^4 - 14x^2 - 32$$

Recorrendo a uma calculadora gráfica, vamos determinar os zeros de  $f$ .



Zeros de  $f$ :  $-4$  e  $4$

Então, o conjunto-solução da equação

$$x^4 - 14x^2 - 32 = 0 \text{ é:}$$

$$\text{C.S.} = \{-4, 4\}$$

2.4.  $4x^4 + 15x^2 = 4 \Leftrightarrow 4(x^2)^2 + 15x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-15+17}{8} \vee x^2 = \frac{-15-17}{8}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \vee \underbrace{x^2 = -4}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

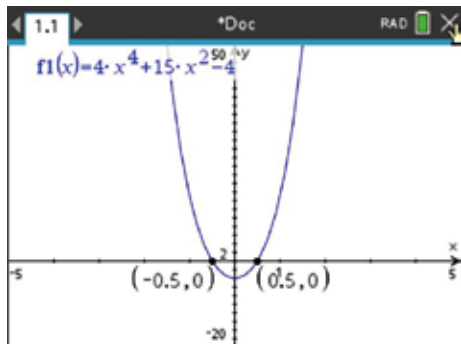
**Confirmação:**

$$4x^4 + 15x^2 = 4 \Leftrightarrow 4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$$

Seja  $f$  a função polinomial definida por:

$$f(x) = 4x^4 + 15x^2 - 4$$

Recorrendo a uma calculadora gráfica, vamos determinar os zeros de  $f$ .



Zeros de  $f$ :  $-0,5$  e  $0,5$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

**Página 44 – Tarefa 9**

**1.1.** A equação  $x^3 + 6x = 20$  é do tipo  $x^3 + px = q$ , sendo  $p = 6$  e  $q = 20$ .

**1.2.** Utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{10^2 + 2^3}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{10^2 + 2^3}}$$

Utilizando a calculadora, obtém-se  $x = 2$ .

**1.3.**  $x^3 + 6x = 20 \Leftrightarrow x^3 + 6x - 20 = 0$

Atendendo a **1.2.** sabe-se que 2 é raiz da equação.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

2	1	0	6	-20
	2	2	4	20
	1	2	10	0

$$x^3 + 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 10) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee x^2 + 2x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2}$$

Equação impossível em  $\mathbb{R}$

Então, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $x^3 + 6x = 20$  tem apenas a raiz igual a 2.

**Página 45**

**72.**  $P(x) = x^2 - 3x + 1$

**72.1.**  $P(x) \geq 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \geq 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \geq 0$

Zeros:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$$

Esquema de variação do sinal:



$$P(x) \geq 5 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$$

**72.2.**  $P(x) < -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 < -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$

Zeros:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

Esquema de variação do sinal:



$$P(x) < -1 \Leftrightarrow x \in ]1, 2[$$

**72.3.**  $P(x) > 11 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 > 11 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 > 0$

Zeros:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -2$$

Esquema de variação do sinal:



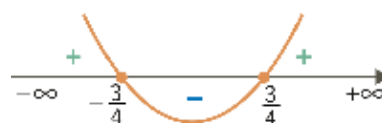
$$P(x) > 11 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup ]5, +\infty[$$

**73.1.**  $16x^2 - 9 > 0$

Zeros:

$$16x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \vee x = -\frac{3}{4}$$

Esquema de variação do sinal:



$$16x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -\frac{3}{4}[ \cup ]\frac{3}{4}, +\infty[$$

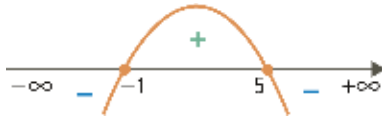


73.2.  $-x^2 + 4x > -5 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 > 0$

Zeros:

$$-x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$$

Esquema de variação do sinal:



$$-x^2 + 4x > -5 \Leftrightarrow x \in ]-1, 5[$$

73.3.  $(x-3)(x^2+3) > 0$

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$x-3$	$-$	$0$	$+$
$x^2+3$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)(x^2+3)$	$-$	$0$	$+$

Zeros:

$$\begin{aligned} (x-3)(x^2+3) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x-3 &= 0 \vee x^2+3=0 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \vee \underbrace{x^2=-3}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

Logo, conclui-se que:

$$(x-3)(x^2+3) > 0 \Leftrightarrow x \in ]3, +\infty[$$

73.4.  $(4-x)(x^2+2x+1) \leq 0 \Leftrightarrow (4-x)(x+1)^2 \leq 0$

$x$	$-\infty$	$-1$	$4$	$+\infty$
$4-x$	$+$	$+$	$0$	$-$
$(x+1)^2$	$+$	$0$	$+$	$+$
$(4-x)(x+1)^2$	$+$	$0$	$0$	$-$

Zeros:

$$\begin{aligned} (4-x)(x+1)^2 &= 0 \Leftrightarrow 4-x=0 \vee (x+1)^2=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= 4 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Logo, conclui-se que:

$$(4-x)(x^2+2x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [4, +\infty[$$

74.  $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$

74.1.  $P(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2)$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

Então,  $P(x) = x(x-1)(x+2)$ .

74.2.

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$1$	$+\infty$
$x$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x+2$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$

75.  $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

Como  $P(x)$  é divisível por  $x^2 + 1$ , vamos recorrer ao algoritmo da divisão inteira de polinómio.

$$\begin{array}{r} x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x - 4 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -x^4 \phantom{+ 0x^3} - \phantom{3}x^2 \phantom{+ 0x} - 4 \phantom{+ 0} \\ \hline -4x^2 + 0x - 4 \\ \phantom{-4x^2} + \phantom{0x} + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Assim,  $P(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$ .

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(x^2 - 4) &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -1}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \vee x^2 &= 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 4) \geq 0$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$x^2+1$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2-4$	$+$	$0$	$0$	$+$
$P(x)$	$+$	$0$	$0$	$+$

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

**Página 46**

76.  $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$ ; 1 é zero de  $f$

76.1. Como 1 é zero de  $f$ , aplicando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}$$

Logo, conclui-se que  $f(x) = (x-1)(x^3 - 4x)$ .



Como  $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$ , então

$$f(x) = (x-1)[x(x-2)(x+2)] = x(x-1)(x-2)(x+2)$$

76.2. Zeros de  $f$ :  $-2, 0, 1$  e  $2$

Quadro de sinais:

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$1$		$2$	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x^2-4$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$f$  é positiva em  $]-\infty, -2[ \cup ]0, 1[ \cup ]2, +\infty[$ .

$f$  é negativa em  $]-2, 0[ \cup ]1, 2[$ .

77.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ ;  $-1$  é zero de  $f$ .

77.1. Como  $-1$  é zero de  $f$ , aplicando a regra de Ruffini:

	1	-3	0	4
-1		-1	4	-4
	1	-4	4	0

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \vee x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

Quadro de sinais:

$x$	$-\infty$	$-1$		$2$	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+	+
$x^2 - 4x + 4$	+	+	+	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

A função  $f$  é positiva em  $]-1, 2[ \cup ]2, +\infty[$ .

A função  $f$  é negativa em  $]-\infty, -1[$ .

77.2. Recorrendo à calculadora gráfica, conseguimos determinar o valor dos extremos de  $f$ .

Máximo: 4 (quando  $x = 0$ )

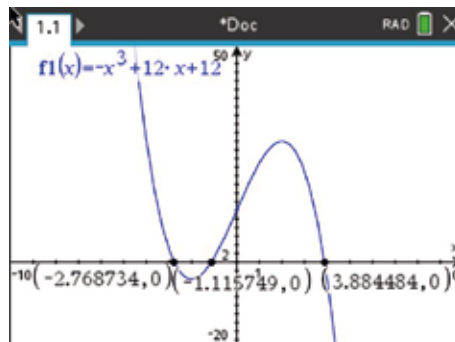
Mínimo: 0 (quando  $x = 2$ )

$x$	$-\infty$	$0$		$2$	$+\infty$
$f$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

Página 47 – Tarefa 10

1.1. a)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 12x + 12 = 0$

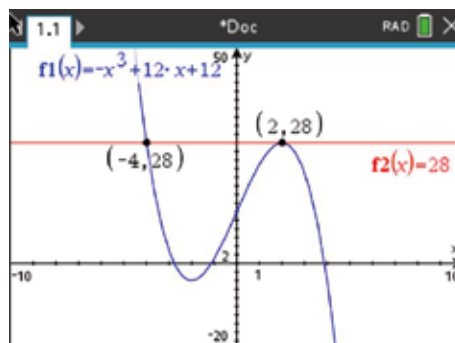
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, vamos determinar os zeros de  $f$ .



As soluções, arredondadas às centésimas, da equação  $f(x) = 0$  são:  $-2,77$ ;  $-1,12$  e  $3,88$ .

b)  $f(x) = 28 \Leftrightarrow -x^3 + 12x + 12 = 28$

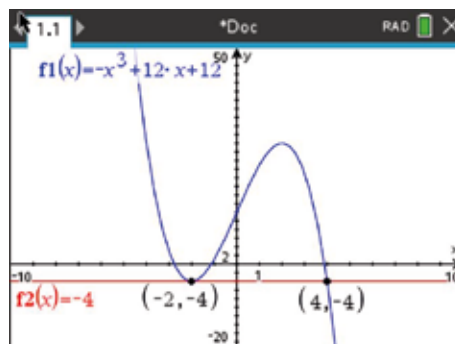
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



As soluções, arredondadas às centésimas, da equação  $f(x) = 28$  são  $-4,00$  e  $2,00$ .

c)  $f(x) = -4 \Leftrightarrow -x^3 + 12x + 12 = -4$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

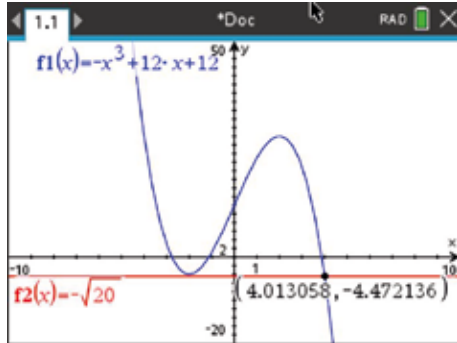




As soluções, arredondadas às centésimas, da equação  $f(x) = -4$  são:  $-2,00$  e  $4,00$

d)  $f(x) = -\sqrt{20} \Leftrightarrow -x^3 + 12x + 12 = -\sqrt{20}$

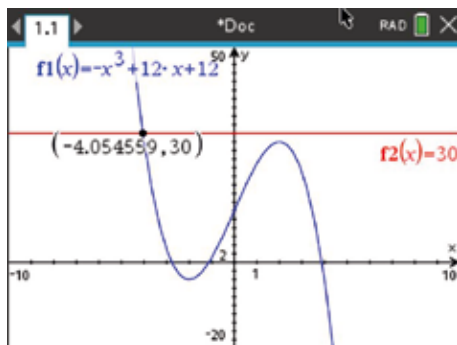
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



A solução, arredondada às centésimas, da equação  $f(x) = -\sqrt{20}$  é  $4,01$ .

1.2. a)  $f(x) \geq 30 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, a]$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

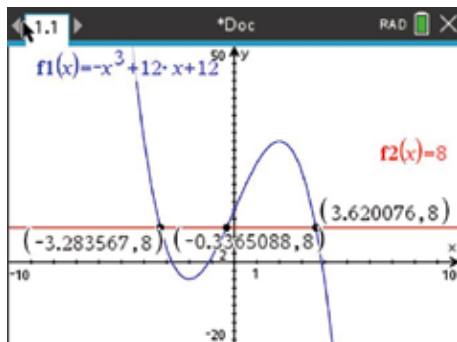


$a \approx -4,05$

Assim, o conjunto-solução da inequação  $f(x) \geq 30$  é C.S. =  $]-\infty; -4,05]$ .

b)  $f(x) < 8 \Leftrightarrow x \in ]a, b[ \cup ]c, +\infty[$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



$a \approx -3,3; b \approx -0,3$  e  $c \approx 3,6$

Assim, o conjunto-solução da inequação

$f(x) < 8$  é C.S. =  $]-3,3; -0,3[ \cup ]3,6; +\infty[$ .

2.1.  $V_{\text{cubo}} = x^3$

$V_{\text{paralelepipedo}} = A_{\text{base}} \times h = 12 \times (x+1) = 12x + 12$

$g(x) = 12x + 12 - x^3 = -x^3 + 12x + 12 = f(x), x \in ]0, 5[$

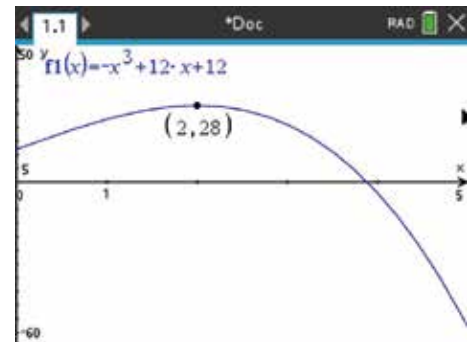
2.2.  $g(1) = -1^3 + 12 \times 1 + 12 = 23$

No contexto apresentado, significa que, quando a medida da aresta do cubo é 1, o paralelepípedo tem mais 23 unidades de volume do que o cubo.

$g(4) = -4^3 + 12 \times 4 + 12 = -4$

No contexto apresentado, significa que, quando a medida da aresta do cubo é 4, o paralelepípedo tem menos 4 unidades de volume do que o cubo.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Máximo de  $g$ : 28; maximizante de  $g$ : 2

$x$	0		$k = 2$		5
$g$		$\nearrow$	$g(k) = 28$	$\searrow$	

**Conclusões:**

$g$  é crescente em  $]0, 2]$ .

$g$  é decrescente em  $[2, 5[$ .

$g$  tem um máximo igual a 28.

**Página 48 – Prática**

78.1.  $-3x^3 + 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(-3x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee -3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{-6} \Leftrightarrow x = 0$   
Equação impossível em  $\mathbb{R}$

C.S. =  $\{0\}$



**78.2.**  $x^4 - 2x^3 = -x^2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^2(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - 2x + 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 1$   
 C.S. =  $\{0, 1\}$

**78.3.**  $x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$   
 C.S. =  $\{0, 2\}$

**78.4.**  $-x^3 + 3x^2 = 4 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 4 = 0$   
 Como  $-1$  é solução, aplicando a regra de Ruffini:

	-1	3	0	-4
-1		1	-4	4
	-1	4	-4	0

$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x+1)(-x^2 + 4x - 4) = 0$   
 $\Leftrightarrow x+1=0 \vee -x^2 + 4x - 4 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{-2}$   
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \vee x = 2$   
 C.S. =  $\{-1, 2\}$

**79.1.**  $2x^3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2(2x-1) > 0$

Zeros:

$x^2(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$

$x$	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x^2$	+	0	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	0	+
$x^2(2x-1)$	-	0	-	0	+

Logo, conclui-se que:

$2x^3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$

**79.2.**  $2x^4 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 2)(x^2 + 2) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^2 = 2 \vee \underbrace{x^2 = -2}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}}$   
 $\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2(x^2 - 2)$	+	0	-	0	+
$x^2 + 2$	+	+	+	+	+
$2(x^2 - 2)(x^2 + 2)$	+	0	-	0	+

Logo, conclui-se que:

$2x^4 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

**79.3.**  $(x+1)(9-x^2) < 0$

$(x+1)(9-x^2) = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \vee 9-x^2=0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3 \vee x = 3$

$x$	$-\infty$	-3		-1		3	$+\infty$
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$9-x^2$	-	0	+	+	+	0	-
$(x+1)(9-x^2)$	+	0	-	0	+	0	-

$(x+1)(9-x^2) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-3, -1[ \cup ]3, +\infty[$

**80.**  $P(x) = 5x^3 - 4x^2 - x$

**80.1.**  $P(x) < 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 4x^2 - x < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(5x^2 - 4x - 1) < 0$

Zeros de  $P(x)$ :

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 5x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{10} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -\frac{1}{5}$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$		0		1	$+\infty$
$x$	-	-	-	0	+	+	+
$5x^2 - 4x - 1$	+	0	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -\frac{1}{5}[ \cup ]0, 1[$

**80.2.**  $P(x) = 4x^3 - 4 \Leftrightarrow 5x^3 - 4x^2 - x = 4x^3 - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$

Como 1 é uma das soluções da equação, aplicando a regra de Ruffini:

	1	-4	-1	4
1		1	-3	-4
	1	-3	-4	0

$x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x-1)(x^2 - 3x - 4)$

ESPMAT1DPR © Petró Editora



$$\begin{aligned}
 x^3 - 4x^2 - x + 4 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 4) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x-1=0 \vee x^2 - 3x - 4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x=1 \vee x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \\
 \Leftrightarrow x=1 \vee x=4 \vee x &=-1 \\
 \text{C.S.} &= \{-1, 1, 4\}
 \end{aligned}$$

81.  $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

$B$  é o ponto de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Oy$ , logo  $B(0, f(0))$ .  
 Como  $f(0) = 0^4 - 3 \times 0^3 + 0^2 + 3 \times 0 - 2 = -2$ , então  $B(0, -2)$ .

1 é zero da função  $f$ , ou seja, 1 é raiz do polinómio  $f(x)$ .

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	-3	1	3	-2
1		1	-2	-1	2
	1	-2	-1	2	0
1		1	-1	-2	
	1	-1	-2	0	

Então,  $f(x) = (x-1)^2(x^2 - x - 2)$ .

Vamos determinar os outros zeros de  $f$ .

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= 2 \vee x = -1
 \end{aligned}$$

Como as abcissas dos pontos  $A$  e  $C$  são zeros de  $f$  e a abcissa de  $A$  é inferior à abcissa de  $C$ , então conclui-se que  $A(-1, 0)$  e  $C(2, 0)$

$$\begin{aligned}
 A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times \overline{OB}}{2} \\
 &= \frac{(2 - (-1)) \times |-2|}{2} \\
 &= \frac{3 \times 2}{2} = 3
 \end{aligned}$$

82.1.  $A(x) = (x-1)(x+2)^3$

Raízes de  $A(x)$ :  $-2$  e  $1$

$-2$  é uma raiz de multiplicidade 3 e  $1$  é uma raiz de multiplicidade 1.

82.2.  $A(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)^3 \leq 0$

$x$	$-\infty$	$-2$		$1$	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	$0$	+
$(x+2)^3$	-	$0$	+	+	+
$A(x)$	+	$0$	-	$0$	+

$A(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 1]$

A opção correta é a (D).

**Página 49 – Prática**

83.1.  $T(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

Sabe-se que 3 é uma raiz de multiplicidade 2 do polinómio  $T(x)$ . Aplicando a regra de Ruffini:

	1	-4	-3	18
3		3	-3	-18
	1	-1	-6	0
3		3	6	
	1	2	0	

$T(x) = (x-3)^2(x+2)$

Zeros de  $T(x)$ :  $-2$  e  $3$

$T(x) > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x+2) > 0$

$x$	$-\infty$	$-2$		$3$	$+\infty$
$(x-3)^2$	+	+	+	$0$	+
$x+2$	-	$0$	+	+	+
$T(x)$	-	$0$	+	$0$	+

$T(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-2, 3[ \cup ]3, +\infty[$

83.2.  $T(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 - 3 \times 2 + 18 = 8 - 16 - 6 + 18 = 4$

$$\begin{aligned}
 T(x) = T(2) &= x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 4 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 3x + 14 &= 0
 \end{aligned}$$

Sabe-se que 2 é solução da equação, logo aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	-4	-3	14
2		2	-4	-14
	1	-2	-7	0

$x^3 - 4x^2 - 3x + 14 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow x-2=0 \vee \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{4+28}}{2}$



$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{2+4\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{2-4\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1+2\sqrt{2} \vee x = 1-2\sqrt{2}$$

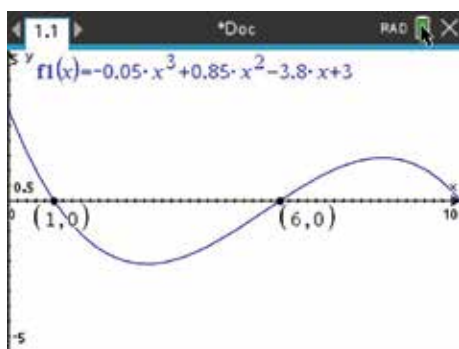
$$\text{C.S.} = \{1-2\sqrt{2}, 2, 1+2\sqrt{2}\}$$

84.  $d(x) = -0,05x^3 + 0,85x^2 - 3,8x + 3$

84.1. Quando a temperatura registada é igual à temperatura prevista, então  $d(x) = 0$ .

Por observação gráfica, sabe-se que tal ocorreu em três momentos.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



Esses momentos foram: à 1 hora, às 6 horas e às 10 horas.

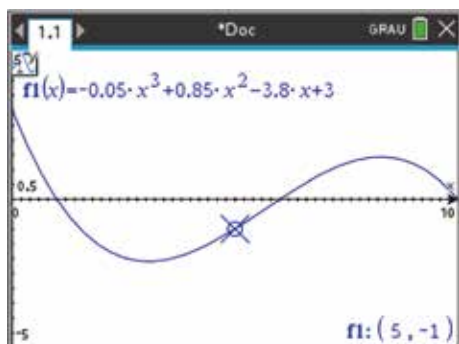
84.2. Pretende-se saber durante quanto tempo a temperatura registada foi superior à temperatura prevista, ou seja, pretende-se resolver a inequação  $d(x) < 0$ .

$$d(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]1, 6[$$

A temperatura registada foi superior à temperatura prevista durante 5 horas.

84.3.  $x = 5 \rightarrow$  Temperatura prevista:  $12^\circ\text{C}$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:

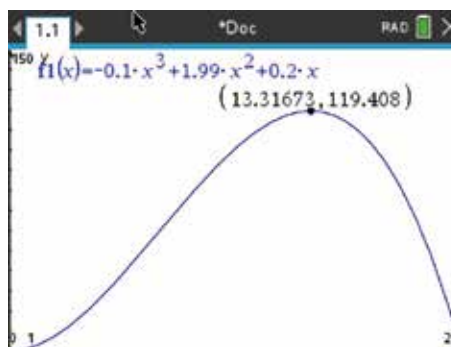


$$d(5) = -1$$

Temperatura real:  $(12 - (-1))^\circ\text{C} = 13^\circ\text{C}$

85.  $V(t) = -0,1t^3 + 1,99t^2 + 0,2t$ ,  $t \in [0, 20]$

85.1. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



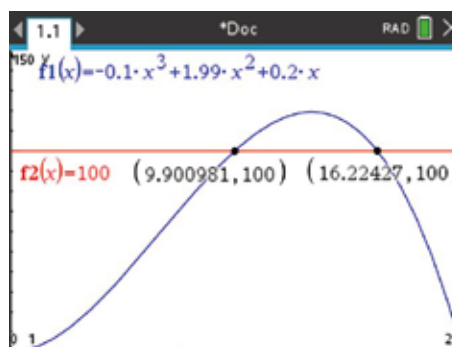
Estudo da monotonia da função  $v$ :

$x$	0		13,3		20
$v$	0	$\nearrow$	119,4	$\searrow$	0

A função é crescente em  $]0, 13,3[$  e decrescente em  $]13,3; 20[$ .

85.2. Pretende-se determinar, graficamente, durante quanto tempo foi cumprido o limite máximo de velocidade ( $100 \text{ km/h}$ ), ou seja, resolver graficamente a condição  $v(t) \leq 100 \wedge t \in [0, 20]$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



$$v(t) \leq 100 \wedge t \in [0, 20] \Leftrightarrow t \in [0, 9,9] \cup [16,2; 20]$$

$$(9,9 - 0) + (20 - 16,2) = 13,7 \text{ minutos}$$

$$0,7 \times 60 = 42$$

Logo, conclui-se que foi cumprido o limite máximo de velocidade durante, aproximadamente, 13 minutos e 42 segundos.



**Página 50 – Consolida**

1.1. Máximo: 1 (ordenada do ponto A)  
Mínimo: -2 (ordenada do ponto B)

1.2. Quadro de variação da função  $f$ :

$x$	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$

- 1.3. a)  $\forall x \in ]-2, 1[$ ,  $f(x) \geq -2 \rightarrow$  Verdadeira  
 b)  $\forall x \in ]1, +\infty[$ ,  $f(x) > 0 \rightarrow$  Falsa  
 c)  $\forall x \in \left]0, \frac{3}{4}\right]$ ,  $f(x) < 0 \rightarrow$  Verdadeira  
 b)  $\exists x \in ]-\infty, -2[$ :  $f(x) > 0 \rightarrow$  Verdadeira

2.  $f$  é uma função polinomial de grau 3.  
Seja  $a$  o coeficiente do termo do 3.º grau.  
Como, quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , e quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , conclui-se que  $a < 0$  (e exclui-se a opção (C)).

A função  $f$  tem dois zeros: um nulo (de multiplicidade 1) e outro positivo (de multiplicidade 2).

(A)  $f(x) = -x^3 + 2x^2 = x^2(-x + 2)$

Raízes: 0 (de multiplicidade 2) e 2 (de multiplicidade 1)

(B)  $f(x) = -x^3 - 4x^2 - 4x = -x(x^2 + 4x + 4) = -x(x + 2)^2$

Raízes: 0 (de multiplicidade 1) e -2 (de multiplicidade 2)

(D)  $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x = -x(x^2 - 4x + 4) = -x(x - 2)^2$

Raízes: 0 (de multiplicidade 1) e 2 (de multiplicidade 2).

Assim sendo, a opção correta é a (D).

3.  $f(x) = ax^3 + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 Como, quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , e quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , então sabe-se que  $a < 0$ .  
 O gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Oy$  num ponto de ordenada positiva, logo  $b > 0$  (pois  $b = f(0)$ ).  
 Como  $a < 0$  e  $b > 0$ , então a opção correta é a (B).

4.  $f(x) = ax^3 + bx^2$  e  $g(x) = cx^3 + dx^2 + ex$ ,  
 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4.1.  $f(x) = ax^3 + bx^2 = x^2(ax + b)$

$f$  tem dois zeros  $\left(0 \text{ e } -\frac{b}{a}\right)$ .

Logo, conclui-se que:  $f \rightarrow \mathbb{I}$ ;  $g \rightarrow \mathbb{I}$

- 4.2. a)  $a < 0$                       b)  $b > 0$                       c)  $c > 0$

**Página 51 – Consolida**

5.1. Sabe-se que  $f(a) \times g(a) > 0$ , logo  $a$  é solução da inequação  $f(x) \times g(x) > 0$ .

$x$	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	+	+	+	0	+	+	+
$f(x) \times g(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$f(x) \times g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-2, 0[ \cup ]2, +\infty[$

$a \in ]-2, 0[ \cup ]2, +\infty[$

A opção correta é a (B).

5.2. Os gráficos das funções  $f$  e  $g$  intersectam-se em três pontos (um de abcissa negativa, outro de abcissa nula e outro de abcissa positiva). Assim, a opção correta é a (C).

6.1. Por observação gráfica, sabe-se que

$D_f = [-5, +\infty[$ .

$g(x) = f(x) - 4$

$f \xrightarrow[\text{vetor } \vec{u}(0, -4)]{\text{translação de}} g$

a)  $D_g = [-5 - 4, +\infty[ = [-9, +\infty[$

b)  $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 4$

A equação  $f(x) = 4$  tem duas soluções, porque a reta de equação  $y = 4$  intersecta o gráfico de  $f$  duas vezes.  
 Então, a equação  $g(x) = 0$  tem duas soluções, ou seja, a função  $g$  tem dois zeros.



6.2.  $D_g' = [-5 + k, +\infty[$

$g$  não tem zeros se  $-5 + k > 0$ , ou seja,  $k > 5$ .

$k \in ]5, +\infty[$

7.  $a < 0$ , porque, quando  $x \rightarrow -\infty$  e, quando

$x \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) \rightarrow -\infty$ .

$g(x) = 0 \Leftrightarrow ax^4 + bx^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(ax + b) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$   
positivo  
(ver gráfico)

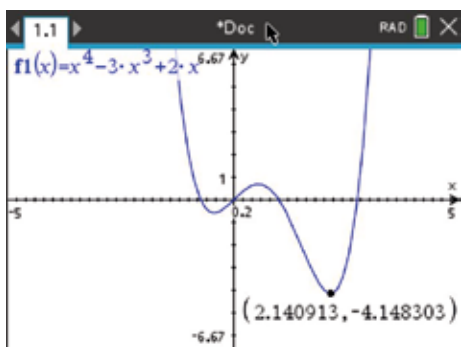
$-\frac{b}{a} > 0 \wedge a < 0$ , logo  $b > 0$ .

Assim, a opção correta é a (C).

8.  $g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$

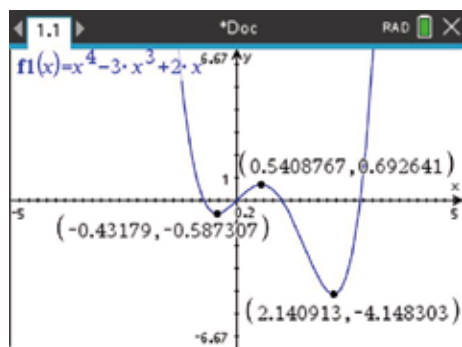
8.1. a)  $D_g' = [a, +\infty[$

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, tem-se:



Logo, conclui-se que  $a \approx -4,15$ .

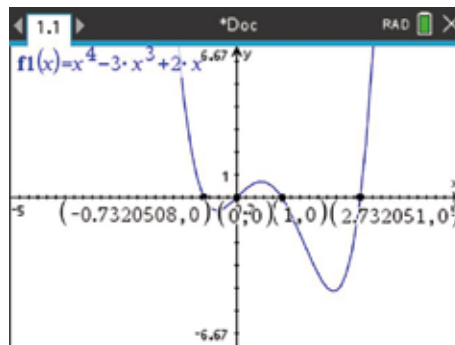
b) Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, tem-se:



Máximo: 0,69

Mínimos:  $-0,59$  e  $-4,15$

c) Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, tem-se:



Zeros da função  $g$ :  $-0,73$ ;  $0$ ;  $1$  e  $2,73$

8.2.  $h(x) = g(x) + k$

$D_h' = [a + k, +\infty[$ , sendo  $a \approx -4,15$

$h$  não tem zeros se  $a + k > 0 \Leftrightarrow k > -a$

Assim, o menor valor inteiro de  $k$  para o qual a função  $h$  não tem zeros é 5.

**Página 52 – Consolida**

9. A área da figura é dada por:

$$\begin{aligned} (3x + 2)^2 + (5x + 1)^2 &= \\ = 9x^2 + 12x + 4 + 25x^2 + 10x + 1 &= \\ = 34x^2 + 22x + 5 \end{aligned}$$

10.1.  $P(x) = (x^2 + 3x - 1) \times (3x - 2) + (5x + 4) =$

$$\begin{aligned} = 3x^3 - 2x^2 + 9x^2 - 6x - 3x + 2 + 5x + 4 &= \\ = 3x^3 + 7x^2 - 4x + 6 \end{aligned}$$

10.2.  $P(x) = (x^3 - 1) \times (x^2 - 1) + (x^2 - 1) =$

$$= x^5 - x^3 - x^2 + 1 + x^2 - 1 = x^5 - x^3$$

10.3.  $P(x) = (x - 1) \times (x^2 + x + 1) + 0 =$

$$\begin{aligned} = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 &= \\ = x^3 - 1 \end{aligned}$$

11.1.  $x^3 + 0x^2 - 2x + 3 \quad | \quad x^2 + x$

$$\begin{array}{r} -x^3 - \boxed{x^2} \qquad \qquad \qquad \boxed{x} - \boxed{1} \\ \hline -\boxed{x^2} - 2x + 3 \\ \boxed{x^2} + \boxed{x} \\ \hline -\boxed{x} + 3 \end{array}$$

Quociente:  $x - 1$

Resto:  $-x + 3$



$$11.2. \quad x^2 + 3x + 0 \quad | \quad 2x + 1$$

$$\begin{array}{r} -x^2 - \frac{1}{2}x \\ \hline \frac{5}{2}x + 0 \\ -\frac{5}{2}x - \frac{5}{4} \\ \hline -\frac{5}{4} \end{array}$$

$$\text{Quociente: } \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

$$\text{Resto: } -\frac{5}{4}$$

$$12.1. \quad (3x^4 - 2x^3 - 5x + 10) : (3x - 2)$$

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 2x^3 + 0x^2 - 5x + 10 \quad | \quad 3x - 2 \\ -3x^4 + 2x^3 \\ \hline -5x + 10 \\ 5x - \frac{10}{3} \\ \hline \frac{20}{3} \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = x^3 - \frac{5}{3}$$

$$\text{Resto: } R(x) = \frac{20}{3}$$

$$12.2. \quad (x^4 - 8) : (x^2 + 2)$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 8 \quad | \quad x^2 + 2 \\ -x^4 - 2x^2 \\ \hline -2x^2 + 0x - 8 \\ 2x^2 + 4 \\ \hline -4 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = x^2 - 2$$

$$\text{Resto: } R(x) = -4$$

$$12.3. \quad (-x^3 - 8x + 1) : (x^2 + x)$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + 0x^2 - 8x + 1 \quad | \quad x^2 + x \\ x^3 + x^2 \\ \hline -x^2 - 8x + 1 \\ -x^2 - x \\ \hline -9x + 1 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = -x + 1$$

$$\text{Resto: } R(x) = -9x + 1$$

$$12.4. \quad (3x^3 + 2x^2 - 7) : (2x - 1)$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 + 0x - 7 \quad | \quad 2x - 1 \\ -3x^3 + \frac{3}{2}x^2 \\ \hline \frac{7}{2}x^2 + 0x - 7 \\ -\frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}x \\ \hline \frac{7}{4}x - 7 \\ -\frac{7}{4}x + \frac{7}{8} \\ \hline -\frac{49}{8} \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{7}{8}$$

$$\text{Resto: } R(x) = -\frac{49}{8}$$

$$13. \quad A(x) = -6x^3 + 13x^2 - 21x + 10$$

$$B(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

$$C(x) = 2x - 5$$

$$13.1. \quad -6x^3 + 13x^2 - 21x + 10 \quad | \quad 2x^2 - 3x + 5$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 - 9x^2 + 15x \\ \hline 4x^2 - 6x + 10 \\ -4x^2 + 6x - 10 \\ \hline 0 \end{array}$$

Como o resto da divisão inteira de  $A(x)$  por  $B(x)$  é igual a zero, então conclui-se que  $A(x)$  é divisível por  $B(x)$ .

$$13.2. \quad -6x^3 + 13x^2 - 21x + 10 \quad | \quad 2x - 5$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 - 15x^2 \\ \hline -2x^2 - 21x + 10 \\ 2x^2 - 5x \\ \hline -26x + 10 \\ 26x - 65 \\ \hline -55 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q(x) = -3x^2 - x - 13$$

$$\text{Resto: } R(x) = -55$$



14.  $A(x) = -3x + 2$

$$A(x) \times B(x) = -3x^3 + 17x^2 - 13x + 2$$

14.1. grau  $A(x) = 2$  ; grau  $(A(x) \times B(x)) = 3$

Logo, grau  $B(x) = 3 - 1 = 2$

14.2.  $B(x) = (-3x^3 + 17x^2 - 13x + 2) : (-3x + 2)$

$$\begin{array}{r} -3x^3 + 17x^2 - 13x + 2 \quad | \quad -3x + 2 \\ \underline{3x^3 - 2x^2} \phantom{- 13x + 2} \phantom{|} \phantom{- 3x + 2} \\ 15x^2 - 13x + 2 \phantom{|} \phantom{- 3x + 2} \\ \underline{-15x^2 + 10x} \phantom{+ 2} \phantom{|} \phantom{- 3x + 2} \\ -3x + 2 \phantom{|} \phantom{- 3x + 2} \\ \underline{3x - 2} \\ 0 \end{array}$$

Então,  $B(x) = x^2 - 5x + 1$

15.  $A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC}$

$$\Leftrightarrow 3x^3 + x^2 - 2x = (x^2 + x) \times \overline{BC}$$

$$\Leftrightarrow (3x^3 + x^2 - 2x) : (x^2 + x) = \overline{BC}$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 + x^2 - 2x + 0 \quad | \quad x^2 + x \\ \underline{-3x^3 - 3x^2} \phantom{- 2x + 0} \phantom{|} \phantom{x^2 + x} \\ -2x^2 - 2x + 0 \phantom{|} \phantom{x^2 + x} \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ 0 \end{array}$$

$\overline{BC} = 3x - 2$

17.1.  $(2x^3 - x^2 - 12x - 7) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r} \phantom{2x^3} - x^2 - 12x - 7 \quad | \quad x - 3 \\ \phantom{2x^3} \underline{+ 3x^2} \phantom{- 12x - 7} \phantom{|} \phantom{x - 3} \\ 2x^3 - 6x^2 - 12x - 7 \phantom{|} \phantom{x - 3} \\ \underline{-2x^3 + 6x^2} \phantom{- 12x - 7} \phantom{|} \phantom{x - 3} \\ 12x - 7 \phantom{|} \phantom{x - 3} \\ \underline{-12x + 36} \\ 29 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 + 5x + 3$

$R(x) = 2$

17.2.  $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad | \quad x + 1 \\ \phantom{x^4} \underline{-x^3} \phantom{+ x^2 + x + 1} \phantom{|} \phantom{x + 1} \\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \phantom{|} \phantom{x + 1} \\ \underline{-x^4 - x^3} \phantom{+ x^2 + x + 1} \phantom{|} \phantom{x + 1} \\ x^2 + x + 1 \phantom{|} \phantom{x + 1} \\ \underline{-x^2 - x} \phantom{+ 1} \phantom{|} \phantom{x + 1} \\ 1 \phantom{|} \phantom{x + 1} \end{array}$$

$Q(x) = x^3 + x$

$R(x) = 1$

17.3.  $\left(3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r} 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \quad | \quad x + \frac{1}{2} \\ \phantom{3x^3} \underline{-3x^2} \phantom{+ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} \phantom{|} \phantom{x + \frac{1}{2}} \\ 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \phantom{|} \phantom{x + \frac{1}{2}} \\ \underline{-3x^3 - \frac{3}{2}x^2} \phantom{+ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} \phantom{|} \phantom{x + \frac{1}{2}} \\ x + \frac{1}{2} \phantom{|} \phantom{x + \frac{1}{2}} \\ \underline{-x - \frac{1}{2}} \\ 1 \end{array}$$

$Q(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$

$R(x) = \frac{1}{4}$

**Página 53 – Consolidada**

16.1.  $(3x^2 + 8x - 7) : (x + 4)$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 8x - 7 \quad | \quad x + 4 \\ \phantom{3x^2} \underline{-3x} \phantom{- 7} \phantom{|} \phantom{x + 4} \\ 3x^2 + 8x - 7 \phantom{|} \phantom{x + 4} \\ \underline{-3x - 12} \phantom{- 7} \phantom{|} \phantom{x + 4} \\ 16 \phantom{|} \phantom{x + 4} \\ \underline{-16} \\ 0 \end{array}$$

$Q(x) = 3x - 4$

$R(x) = 9$

16.2.  $(x^3 - 2x - 8) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x - 8 \quad | \quad x - 2 \\ \phantom{x^3} \underline{-x^2} \phantom{- 2x - 8} \phantom{|} \phantom{x - 2} \\ x^3 - 2x^2 - 2x - 8 \phantom{|} \phantom{x - 2} \\ \underline{+ 2x^2} \phantom{- 2x - 8} \phantom{|} \phantom{x - 2} \\ -2x - 8 \phantom{|} \phantom{x - 2} \\ \underline{+ 2x - 4} \phantom{- 8} \phantom{|} \phantom{x - 2} \\ -4 \phantom{|} \phantom{x - 2} \end{array}$$

$Q(x) = x^2 + 2x + 2$

$R(x) = -4$

18.1.

$$\begin{array}{r} \boxed{a} \quad -2 \quad \boxed{b} \quad -5 \\ \boxed{a} \quad \phantom{-2} \quad \boxed{d} \quad \boxed{e} \\ \hline 3 \quad \boxed{c} \quad 9 \quad \boxed{f} \end{array}$$

- $a = 3$
- $a \times 3 = 6 \Leftrightarrow a = 2$
- $c = -2 + 6 \Leftrightarrow c = 4$
- $d = a \times c \Leftrightarrow d = 8$
- $b + d = 9 \Leftrightarrow b = 9 - 8 \Leftrightarrow b = 1$
- $e = a \times 9 \Leftrightarrow e = 18$
- $f = -5 + e \Leftrightarrow f = 13$

Assim,  $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$  e  $B(x) = x - 2$ .



## 18.2.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & \boxed{a} & \boxed{b} & 2 & \boxed{c} & \boxed{d} \\
 -1 & & 1 & \boxed{e} & -1 & \boxed{g} \\
 \hline
 & \boxed{a} & 1 & \boxed{f} & -2 & \boxed{5}
 \end{array}$$

- $-1 \times a = 1 \Leftrightarrow a = -1$
- $b + 1 = 1 \Leftrightarrow b = 0$
- $e = -1 \times 1 \Leftrightarrow e = -1$
- $f = 2 + e \Leftrightarrow f = 2 + (-1) \Leftrightarrow f = 1$
- $c + (-1) = -2 \Leftrightarrow c = -1$
- $g = -1 \times (-2) \Leftrightarrow g = 2$
- $d + g = 5 \Leftrightarrow d = 5 - 2 \Leftrightarrow d = 3$

Assim,  $A(x) = -x^4 + 2x^2 - x + 3$  e  $B(x) = x + 1$ .

19.  $P(x) = ax^2 + bx + 3$

O resto da divisão de  $P(x)$  por  $x + 2$  é  $-3$ , ou seja,  $P(-2) = -3$ .

O resto da divisão de  $P(x)$  por  $x - 1$  é  $4$ , ou seja,

$$P(1) = 4.$$

$$\begin{cases} P(-2) = -3 \\ P(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times (-2)^2 + b \times (-2) + 3 = -3 \\ a \times 1^2 + b \times 1 + 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -6 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(1-b) - 2b = -6 \\ a = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4b - 2b = -6 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6b = -10 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{3} \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$a = -\frac{2}{3} \text{ e } b = \frac{5}{3}$$

## 19.2. Recorrendo à regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{r|rrr}
 & a & b & 3 \\
 3 & & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \\
 \hline
 & -4 & 1 & \boxed{\phantom{0}}
 \end{array}$$

Então, conclui-se que:

- $a = -4$
- $b + 3 \times (-4) = 1 \Leftrightarrow b - 12 = 1 \Leftrightarrow b = 13$

$$a = -4 \text{ e } b = 13$$

20.  $A(x) = 3x^3 - x^2 + 4x - 6$ ,  $B(x) = 2x - 4$  e

$$C(x) = x - 2$$

20.1.  $(3x^3 - x^2 + 4x - 6) : (2x - 4)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3x^3 & -x^2 & +4x & -6 \\
 & \underline{-3x^3 + 6x^2} & & & \\
 & & 5x^2 & +4x & -6 \\
 & & \underline{-5x^2 + 10x} & & \\
 & & & 14x & -6 \\
 & & & \underline{-14x + 28} & \\
 & & & & 22
 \end{array}$$

$$Q(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 7$$

$$R(x) = 22$$

20.2.  $(3x^3 - x^2 + 4x - 6) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -1 & 4 & -6 \\
 2 & & 6 & 10 & 28 \\
 \hline
 & 3 & 5 & 14 & 22
 \end{array}$$

$$\text{Quociente: } Q_1(x) = 3x^2 + 5x + 14$$

$$\text{Resto: } R_1(x) = 22$$

20.3.  $Q_1(x) = 2Q(x)$  e  $R_1(x) = R(x)$

21. Sejam  $Q(x)$  e  $R(x)$  o quociente e resto da divisão de  $A(x)$  por  $ax + b$

Então:

$$A(x) = (ax + b) \times Q(x) + R(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x) = a \left( x + \frac{b}{a} \right) \times Q(x) + R(x) \quad (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow A(x) = \left( x + \frac{b}{a} \right) \times aQ(x) + R(x)$$

Logo, conclui-se que o resto da divisão de  $A(x)$

por  $ax + b$  é igual ao resto da divisão de  $A(x)$

por  $x + \frac{b}{a}$ .

22.  $3x - 1 = 3 \left( x - \frac{1}{3} \right)$

$$P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 8$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & -4 & 0 & 8 \\
 \frac{1}{3} & & 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\
 \hline
 & 6 & -2 & -\frac{2}{3} & \frac{70}{9}
 \end{array}$$



Quociente da divisão de  $P(x)$  por  $x - \frac{1}{3}$ :

$$6x^2 - 2x - \frac{2}{3}$$

Resto da divisão de  $P(x)$  por  $x - \frac{1}{3}$ :  $\frac{70}{9}$

Atendendo às conclusões retiradas no exercício

**21.**, conclui-se que:

Quociente da divisão de  $P(x)$  por  $3x - 1$ :

$$\frac{6}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{\frac{2}{3}}{3} = 2x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$$

Resto da divisão de  $P(x)$  por  $3x - 1$ :  $\frac{70}{9}$

**23.**  $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$

**23.1.**  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

1	1	0	-3	2	-1	
1	1	1	-2	0	0	
-1	1	-2	0	-1	0	(a)
-1	1	0	2	0	0	
1	0	-2	2	0	0	(b)

De (a) sabe-se que:

$$x^4 - 3x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 - 2x) - 1$$

De (b) sabe-se que:

$$x^3 + x^2 - 2x = (x + 1)(x^2 - 2) + 2$$

Assim, conclui-se que:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 2x - 1 &= (x - 1)[(x + 1)(x^2 - 2) + 2] - 1 \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 - 2) + 2(x - 1) - 1 \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 2) + 2x - 2 - 1 \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 2) + 2x - 3 \end{aligned}$$

Quociente:  $Q(x) = x^2 - 2$

Resto:  $R(x) = 2x - 3$

**23.2.**  $P(x) : [(x - 2)(x + 1)]$

2	1	0	-3	2	-1	
2	2	4	2	8	0	
-1	1	-2	-4	-6	-1	(a)
-1	1	-1	0	0	0	
1	1	0	4	0	0	(b)

De (a) sabe-se que:

$$x^4 - 3x^2 + 2x - 1 = (x - 2)(x^3 + 2x^2 + x + 4) + 7$$

De (b) sabe-se que:

$$x^3 + 2x^2 + x + 4 = (x + 1)(x^2 + x) + 4$$

Assim, conclui-se que:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 2x - 1 &= (x - 2)[(x + 1)(x^2 + x) + 4] + 7 = \\ &= (x - 2)(x + 1)(x^2 + x) + 4(x - 2) + 7 \\ &= (x - 2)(x + 1)(x^2 + x) + 4x - 1 \end{aligned}$$

Quociente:  $Q(x) = (x^2 + x)$

Resto:  $R(x) = 4x - 1$

**24.1.**  $A(x) = -2x^3 + 5x - 3$  e  $B(x) = x - 1$

$$A(1) = -2 \times 1^3 + 5 \times 1 - 3 = -2 + 5 - 3 = 0$$

Como  $A(1) = 0$ , conclui-se que  $A(x)$  é divisível por  $B(x)$ .

**24.2.**  $A(x) = x^4 - 2x^2 + 8x + 7$  e  $B(x) = x + 2$

$$\begin{aligned} A(-2) &= (-2)^4 - 2 \times (-2)^2 + 8 \times (-2) + 7 \\ &= 16 - 8 - 16 + 7 = -1 \end{aligned}$$

Como  $A(-2) \neq 0$ , conclui-se que  $A(x)$  não é divisível por  $B(x)$ .

**24.3.**  $A(x) = -\frac{7}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 6$  e  $B(x) = x$

$$A(0) = -\frac{7}{2} \times 0^3 + \frac{3}{2} \times 0 + 6 = 6$$

Como  $A(0) \neq 0$ , conclui-se que  $A(x)$  não é divisível por  $B(x)$ .

**24.4.**  $A(x) = x^3 + 27$  e  $B(x) = x + 3$

$$A(-3) = (-3)^3 + 27 = -27 + 27 = 0$$

Como  $A(-3) = 0$ , conclui-se que  $A(x)$  é divisível por  $B(x)$ .

#### Página 54 – Consolida

**25.**  $(-x^3 - 5x^2 + kx + 1) : (x - 2)$

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

2	-1	-5	k	1	
2	-2	-14	2k - 28	0	
-1	-7	k - 14	2k - 27	0	



A divisão é exata se o resto for igual a zero, ou seja, se:

$$2k - 27 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{27}{2}$$

26.  $P(x) = x^3 - ax^2 - 2x + b + 1$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

26.1.  $P(x)$  é divisível por  $x - 2$  se  $P(2) = 0$ .

$P(x)$  dividido por  $x + 1$  dá resto 9 se  $P(-1) = 9$ .

Então, tem-se:

$$\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^3 - a \times 2^2 - 2 \times 2 + b + 1 = 0 \\ (-1)^3 - a \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + b + 1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 4a - 4 + b + 1 = 0 \\ -1 - a + 2 + b + 1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + b = -5 \\ -a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 + 4a \\ -a - 5 + 4a = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 + 4a \\ 3a = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 + 4 \times 4 \\ a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 11 \\ a = 4 \end{cases}$$

$a = 4$  e  $b = 11$

26.2.  $P(x)$  é divisível por  $x - 1$  se  $P(1) = 0$ .

$P(x)$  dividido por  $x + 2$  dá resto 1 se  $P(-2) = 1$ .

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^3 - a \times 1^2 - 2 \times 1 + b + 1 = 0 \\ (-2)^3 - a \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + b + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a - 2 + b + 1 = 0 \\ -8 - 4a + 4 + b + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ -4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ -4b + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ -3b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$a = -\frac{4}{3}$  e  $b = -\frac{4}{3}$

27.  $A(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$

27.1.  $A(2) = 3 \times 2^3 + 2^2 - 12 \times 2 - 4 = 24 + 4 - 24 - 4 = 0$

Como  $A(2) = 0$ , conclui-se que 2 é uma raiz do polinómio  $A(x)$ .

27.2. Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	3	1	-12	-4
2		6	14	4
	3	7	2	0

Quociente:  $Q(x) = 3x^2 + 7x + 2$

Resto:  $R(x) = 0$

27.3. Atendendo a 27.2., sabe-se que:

$$A(x) = (x - 2)(3x^2 + 7x + 2)$$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(3x^2 + 7x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee 3x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-7 + 5}{6} \vee x = \frac{-7 - 5}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{3} \vee x = -2$$

C.S. =  $\left\{-2, -\frac{1}{3}, 2\right\}$

28.  $P(x) = x^{n+1} + 2x^n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$

28.1.  $P(x)$  é divisível por  $x + 1$  se  $P(-1) = 0$ .

Ora  $P(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^{n+1} + 2(-1)^n - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-1)^n \times (-1) + 2(-1)^n - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(-1)^n + 2(-1)^n - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1)^n = 1$$

$(-1)^n = 1$  se  $n$  é par.

Então,  $P(x)$  é divisível por  $x + 1$  se  $n$  é par.

28.2.  $P(x)$  dividido por  $x + 1$  dá resto -2 se

$$P(-1) = -2.$$

$$P(-1) = -2 \Leftrightarrow (-1)^{n+1} + 2(-1)^n - 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow (-1)^n \times (-1) + 2(-1)^n - 1 = -2 \Leftrightarrow (-1)^n = -1 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^n = -1 \text{ se } n \text{ é ímpar.}$$

Então,  $P(x)$  dividido por  $x + 1$  dá resto -2 se  $n$  é ímpar.

29.1.  $A(x) = x^3 - 1$  e  $A(1) = 0$

Como  $A(1) = 0$ , sabe-se que  $A(x)$  é divisível por  $x - 1$ .

Assim sendo, aplicando a regra de Ruffini:

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

Logo,  $A(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ .



$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \rightarrow \text{Equação}$$

impossível

O polinómio  $x^2 + x + 1$  não pode ser decomposto em fatores do 1.º grau.

Então,  $A(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$ .

**29.2.**  $B(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Como  $B(x)$  é divisível por  $x+2$ , aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

-2	1	3	-4	-12
	-2	-2	12	
	1	1	-6	0

$$B(x) = (x+2)(x^2 + x - 6)$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+5}{2} \vee x = \frac{-1-5}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

Como  $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ , então conclui-se que  $B(x) = (x+2)(x-2)(x+3)$ .

**29.3.**  $C(x) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 - x$

Como  $C(-1) = 0$ , sabe-se que  $C(x)$  é divisível por  $x+1$ .

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

-1	3	1	-3	-1	0
	-3	-2	2	1	0
	3	-2	-1	0	0

$$C(x) = (x+1)(3x^3 - 2x^2 - x)$$

$$3x^3 - 2x^2 - x = x(3x^2 - 2x - 1)$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2+4}{6} \vee x = \frac{2-4}{6} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 3(x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x-1)(3x+1)$$

Logo, conclui-se que:

$$C(x) = (x+1) \times x \times (x-1)(3x+1) = x(x+1)(x-1)(3x+1)$$

**29.4.**  $D(x) = x^4 - x^2 - 2$

$$D(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1+3}{2} \vee y = \frac{1-3}{2} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 \vee \underbrace{x^2 = -1}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

Logo, conclui-se que:

$$D(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1)$$

**30.** Área da superfície do prisma quadrangular regular:  $A(x) = 6x^2 + 4x - 10$

**30.1.**  $A(1) = 6 \times 1^2 + 4 \times 1 - 10 = 6 + 4 - 10 = 0$

Como  $A(1) = 0$ , conclui-se que 1 é uma das raízes do polinómio  $A(x)$ .

**30.2.**  $A_{\text{lateral}} = A_{\text{total superfície}} - 2 \times A_{\text{base}}$

Assim, a área da superfície lateral do prisma é dada por:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 4x - 10 - 2 \times (x-1)^2 &= \\ = 6x^2 + 4x - 10 - 2(x^2 - 2x + 1) &= \\ = 6x^2 + 4x - 10 - 2x^2 + 4x - 2 &= \\ = 4x^2 + 8x - 12 & \end{aligned}$$

Logo, como o prisma é quadrangular regular, a área de cada face lateral é dada por:

$$\frac{A_{\text{lateral}}}{4} = \frac{4x^2 + 8x - 12}{4} = x^2 + 2x - 3$$

**30.3.** Designando por  $h(x)$  a altura do prisma, tem-se:

$$A_{\text{face lateral}} = (x-1) \times h(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = (x-1) \times h(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} = h(x)$$

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	2	-3
1	-1	3	
	1	3	0

Donde se conclui que  $h(x) = x + 3$ .



30.4.  $A(x) = 22 \Leftrightarrow 6x^2 + 4x - 10 = 22$

$\Leftrightarrow 6x^2 + 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 + 14}{6} \vee x = \frac{-2 - 14}{6}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{8}{3}$

Como  $x > 1$ , conclui-se que  $x = 2$ .

Se  $x = 2$ , então:

- $x - 1 = 2 - 1 = 1$
- $x + 3 = 2 + 3 = 5$

Logo, conclui-se que o prisma tem 1 cm de aresta da base e 5 cm de altura.

31.  $P(x) = x^3 + 2x^2 - x$

31.1.  $P(-1) = (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 - (-1) = -1 + 2 + 1 = 2$

31.2.  $P(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

Como  $P(-1) = 2$ , sabe-se que  $-1$  é raiz da equação  $P(x) = 2$ , ou seja,  $-1$  é raiz da equação  $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ .

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	2	-1	-2
-1		-1	-1	2
	1	1	-2	0

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee x^2 + x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = -2$

Assim, o conjunto-solução da equação  $P(x) = 2$

é C.S. =  $\{-2, -1, 1\}$ .

32.  $A(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

32.1.  $A(1) = 1^5 - 4 \times 1^4 + 4 \times 1^3 + 2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 2$

$= 1 - 4 + 4 + 2 - 5 + 2 = 0$

Como  $A(1) = 0$ , conclui-se que 1 é uma das raízes de  $A(x)$ .

Para determinar a multiplicidade dessa raiz, vamos aplicar, sucessivamente, a regra de Ruffini.

	1	-4	4	2	-5	2
1		1	-3	1	3	-2
1		1	-2	-1	2	0
1		1	-1	2	0	
1		1	-1	-2	0	
1		1	0	-2	0	

$A(x)$  é divisível por  $(x - 1)^3$ , mas não é divisível por  $(x - 1)^4$ .

Logo, conclui-se que 1 é raiz de multiplicidade 3 do polinómio  $A(x)$ .

32.2. Atendendo a 32.1. sabe-se que:

$A(x) = (x - 1)^3 (x^2 - x - 2)$

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 8}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 + 3}{2} \vee x = \frac{1 - 3}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

Então,  $A(x) = (x - 1)^3 (x - 2)(x + 1)$ .

**Página 55 – Consolida**

33.  $f \rightarrow$  função polinomial de grau 3

- Zeros de  $f$ :  $-1$  e  $2$
- O gráfico de  $f$  interseja o eixo  $Oy$  no ponto de coordenadas  $(0, -3)$ .

33.1. Por observação gráfica, sabe-se que:

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1] \cup \{2\}$

Assim sendo, o conjunto-solução da inequação

$f(x) \geq 0$  é C.S. =  $]-\infty, -1] \cup \{2\}$ .

33.2. Por observação gráfica, sabe-se que  $-1$  é uma raiz de multiplicidade 1 e que 2 é uma raiz de multiplicidade 2.



Assim, tem-se que  $f(x) = a(x+1)(x-2)^2$ ,

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

O gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Oy$  no ponto de coordenadas  $(0, -3)$ , ou seja,  $f(0) = -3$ .

$$f(0) = -3 \Leftrightarrow a(0+1)(0-2)^2 = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \times 1 \times 4 = -3 \Leftrightarrow 4a = -3 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}(x+1)(x-2)^2$$

$$= -\frac{3}{4}(x+1)(x^2 - 4x + 4)$$

$$= -\frac{3}{4}(x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 4x + 4)$$

$$= -\frac{3}{4}(x^3 - 3x^2 + 4)$$

$$= -\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 3$$

**33.3.**  $f(x) = -3 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 3 = -3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \left( -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

C.S. =  $\{0, 3\}$

**34.1.**  $P(x) < 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x^2-1) < 0$

Zeros de  $P(x) < 0$ :

$$(2x+1)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \vee x^2-1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$		$-\frac{1}{2}$		$2$	$+\infty$
$2x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2-1$	+	0	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-\frac{1}{2}, 1[$$

**34.2.**  $P(x) < 0 \Leftrightarrow x^2(x+3)(x-2)^3 < 0$

Zeros de  $P(x)$ :

$$x^2(x+3)(x-2)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x+3 = 0 \vee (x-2)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 2$$

$x$	$-\infty$	$-3$		$0$		$2$	$+\infty$
$x^2$	+	+	+	0	+	+	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+
$(x-2)^3$	-	-	-	-	-	0	+
$P(x)$	+	0	-	0	-	0	+

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-3, 0[ \cup ]0, 2[$$

**34.3.**  $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x^2-5x)(2x^2+3x-2) < 0$

Zeros de  $P(x)$ :  $(x^2-5x)(2x^2+3x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2-5x = 0 \vee 2x^2+3x-2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-5) = 0 \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -2$$

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$\frac{1}{2}$		$5$	$+\infty$
$x^2-5x$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$2x^2+3x-2$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-2, 0[ \cup ]\frac{1}{2}, 5[$$

**34.4.**  $P(x) = 2x^3 - 5x - 6$

Como 2 é uma raiz de  $P(x)$ , aplicando a regra de Ruffini:

	2	0	-5	-6
2		4	8	6
	2	4	3	0

Logo, conclui-se que:  $P(x) = (x-2)(2x^2+4x+3)$

Zeros de  $P(x)$ :

$$(x-2)(2x^2+4x+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \vee 2x^2+4x+3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-24}}{4} \Leftrightarrow x = 2$$

Equação impossível em  $\mathbb{R}$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
$2x^2+4x+3$	+	+	+
$P(x)$	-	0	+

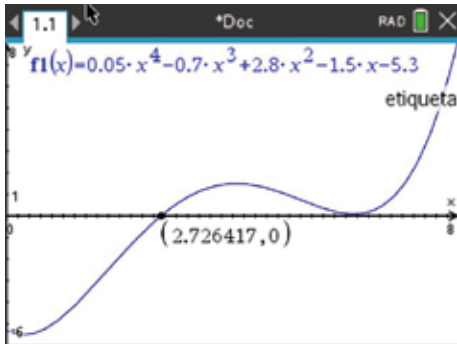
$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 2[$$



35.  $V(t) = 0,05t^4 - 0,7t^3 + 2,8t^2 - 1,5t - 5,3$ ,  $0 \leq t \leq 8$   
 $t$ : tempo, em horas, decorrido a partir das 0 horas.  
 $V(t)$ : Variação do nível de água em relação ao nível médio.

- 35.1. Pretende-se determinar o(s) instante(s) em que o nível da água esteve ao nível médio, ou seja, em que  $V(t) = 0$ ,  $0 \leq t \leq 8$ .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



$V(t) = 0 \Leftrightarrow t \approx 2,73$  h

- 35.2. Pretende-se determinar o(s) intervalo(s) de tempo em que o nível da água esteve acima do nível médio, ou seja, em que  $V(t) > 0$ ,  $0 \leq t \leq 8$ .

Atendendo à representação gráfica e aos resultados obtidos em 35.1., conclui-se que  $V(t) > 0 \Leftrightarrow t \in ]2,7; 8]$ .

36.  $f \rightarrow$  função polinomial de grau 3  
 $g \rightarrow$  função polinomial de grau 2

Vértice da parábola que representa  $g$ :  $V\left(1, -\frac{9}{5}\right)$ .

Ponto de interseção dos gráficos de  $f$  e  $g$  com o eixo  $Oy$ :  $A\left(0, -\frac{8}{5}\right)$ .

Os zeros de  $g$  também são zeros de  $f$ .

Determinação da expressão analítica de  $g$ :

$g(x) = a(x-2)^2 - \frac{9}{5}$ ;  $a \in \mathbb{R}^+$

Como  $A\left(0, -\frac{8}{5}\right)$  pertence ao gráfico de  $g$ , então

sabe-se que  $g(0) = -\frac{8}{5}$ .

$g(0) = -\frac{8}{5} \Leftrightarrow a(0-1)^2 - \frac{9}{5} = -\frac{8}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \times 1 = -\frac{8}{5} + \frac{9}{5} \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$

$g(x) = \frac{1}{5}(x-1)^2 - \frac{9}{5}$

Determinação dos zeros da função  $g$ :

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(x-1)^2 - \frac{9}{5} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(x-1)^2 = \frac{9}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x-1 = 3 \vee x-1 = -3 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$

Como  $-2$  e  $4$  são os zeros de  $g$  e  $a = \frac{1}{5}$ , então

$g(x) = \frac{1}{5}(x+2)(x-4)$ .

Determinação da expressão analítica da função  $f$ :

Zeros de  $f$ :  $-2$ ,  $1$  e  $4$

$f(x) = a_1(x+2)(x-1)(x-4)$

Como o ponto  $A\left(0, -\frac{8}{5}\right)$  pertence ao gráfico de  $f$ ,

sabe-se que  $f(0) = -\frac{8}{5}$ .

$f(0) = -\frac{8}{5} \Leftrightarrow a_1(0+2)(0-1)(0-4) = -\frac{8}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 \times 2 \times (-1) \times (-4) = -\frac{8}{5} \Leftrightarrow 8a_1 = -\frac{8}{5} \Leftrightarrow a_1 = -\frac{1}{5}$

$f(x) = -\frac{1}{5}(x+2)(x-1)(x-4)$

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{5}(x+2)(x-1)(x-4) > \frac{1}{5}(x+2)(x-4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}(x+2)(x-1)(x-4) - \frac{1}{5}(x+2)(x-4) > 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}(x+2)(x-4)[(x-1)+1] > 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}(x+2)(x-4) \times x > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}x(x+2)(x-4) > 0$

$-\frac{1}{5}x(x+2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}x = 0 \vee x+2 = 0 \vee x-4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 4$

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$4$	$+\infty$
$-\frac{1}{5}x$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$
$x+2$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$-\frac{1}{5}x(x+2)(x-4)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, 4[$

**Página 56 – Avalia 1 – Parte 1**

1.  $f(x) = ax^3 + bx^2$ ,  $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

Como, quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  e, quando

$x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , então  $a < 0$ .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

Por observação gráfica, sabe-se que a função  $f$  tem dois zeros: um nulo e outro positivo.

Então,  $-\frac{b}{a} > 0$ .

$$-\frac{b}{a} > 0 \wedge a < 0, \text{ logo } b > 0.$$

Como  $a < 0 \wedge b > 0$ , a opção correta é a **(B)**.

2.  $g$  é uma função da família  $y = ax^3 + d$ ,  $a \neq 0$  e  $d \neq 0$ .

$$g(x) = ax^3 + d, a \neq 0 \text{ e } d \neq 0$$

- Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $g(x) \rightarrow -\infty$ , logo, conclui-se conclui que  $a > 0$ . Assim, a função  $g$ , sendo do tipo  $y = ax^3 + d$ , é crescente. Logo, a afirmação I é falsa.
- Como  $(2, 0)$  pertence ao gráfico de  $g$ ,  $g(2) = 0$ .

$$g(2) = 0 \Leftrightarrow a \times 2^3 + d = 0 \Leftrightarrow$$

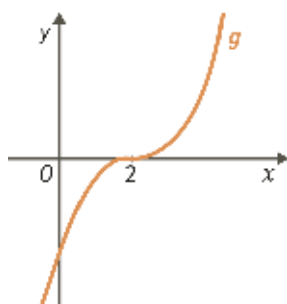
$$\Leftrightarrow 8a + d = 0 \Leftrightarrow d = -8a$$

Sendo  $a > 0$ , então  $d < 0$ .

Logo, a afirmação III é falsa.

- 2 é o único zero da função  $g$ .

A representação gráfica da função  $g$  é do tipo:



$$\forall x \in ]-\infty, 2[, g(x) < 0 \text{ e}$$

$$\forall x \in ]2, +\infty[, g(x) > 0$$

A afirmação II é verdadeira.

A opção correta é a **(A)**.

3. Em qualquer função quártica, o comportamento quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$  é o mesmo. Assim sendo, a representação gráfica correspondente a uma função quártica é a  $f$ . A opção correta é a **(C)**.

$$4. \quad \begin{array}{r} 2x^3 - 4x^2 + 0x - 1 \quad | \quad 2x^2 - 1 \\ \hline -2x^3 + \quad x \quad x - 2 \\ \hline -4x^2 + \quad x - 1 \\ \hline 4x^2 - \quad 2 \\ \hline \quad \quad \quad x - 3 \end{array}$$

O quociente da divisão inteira do polinómio

$2x^3 - 4x^2 - 1$  pelo polinómio  $2x^2 - 1$  é o polinómio  $x - 2$ .

A opção correta é a **(B)**.

5.  $P(x) = 2x(x+1)^2(x-1)(x^2-4)$

$$\text{Ora, } x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

$$\text{Logo, } P(x) = 2x(x+1)^2(x-1)(x-2)(x+2).$$

Zeros de  $P(x)$ : 0 (de multiplicidade 1), -1 (de multiplicidade 2), 1 (de multiplicidade 1), 2 (de multiplicidade 1) e -2 (de multiplicidade 1).

Raízes simples: 0, 1 e 2

Raiz dupla: -1

A opção correta é a **(C)**.

6.  $P(x) = x^4 + 2kx^3 + 5$ ,  $k \in \mathbb{R}$

Se  $P(x)$  é divisível por  $x+1$ , então  $P(-1) = 0$ .

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^4 + 2k \times (-1)^3 + 5 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2k + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow -2k = -6 \Leftrightarrow k = 3$$

A opção correta é a **(D)**.

**Página 57 – Avalia 1 – Parte 2**

1.  $y = ax^4 + cx^2$ ,  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$

1.1.  $ax^4 + cx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(ax^2 + c) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = -\frac{c}{a}$$

Uma função da família de  $y = ax^4 + cx^2$  tem

exatamente um zero se  $-\frac{c}{a} < 0$ , ou seja,  $\frac{c}{a} > 0$ .



1.2. Relativamente à representação gráfica de  $f$ :

- $-2, 0$  e  $2$  são os zeros;
- $f(-1) = 6$ .

$$f(x) = ax^4 + cx^2, \quad a \neq 0 \text{ e } c \neq 0$$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(-1) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 2^4 + c \times 2^2 = 0 \\ 2 \times (-1)^4 + c \times (-1)^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a + 4c = 0 \\ a + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a + 4(6 - a) = 0 \\ c = 6 - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a + 24 - 4a = 0 \\ c = 6 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a = -24 \\ c = 6 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = 8 \end{cases}$$

Então,  $f(x) = -2x^4 + 8x^2$ .

2.  $P(x) = x^3 + 7x^2 + 8x - 16$

2.1.  $P(x) : (x - 2)$

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	7	8	-16
2		2	18	52
	1	9	26	36

Quociente:  $Q(x) = x^2 + 9x + 26$

Resto:  $R(x) = 36$

2.2.  $P(-4) = (-4)^3 + 7 \times (-4)^2 + 8 \times (-4) - 16 =$   
 $= -64 + 112 - 32 - 16 = 0$

$$P(x) = P(-4) \Leftrightarrow x^3 + 7x^2 + 8x - 16 = 0$$

$-4$  é solução da equação, então aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	7	8	-16
-4		-4	-12	16
	1	3	-4	0

Logo, conclui-se que:

$$x^3 + 7x^2 + 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x^2 + 3x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 4 = 0 \vee x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = -4$$

C.S. =  $\{-4, 1\}$

3.  $P(x) = -2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x + 1$

Como  $-1$  é raiz de  $P(x)$  de multiplicidade 3,

aplicando sucessivamente a regra de Ruffini:

	-2	-5	-3	1	1
-1		2	3	0	-1
	-2	-3	0	1	0
-1		2	1	-1	
	-2	-1	1	0	
-1		2	-1		
	-2	1	0		

Logo, conclui-se que  $P(x) = (x + 1)^3(-2x + 1)$ .

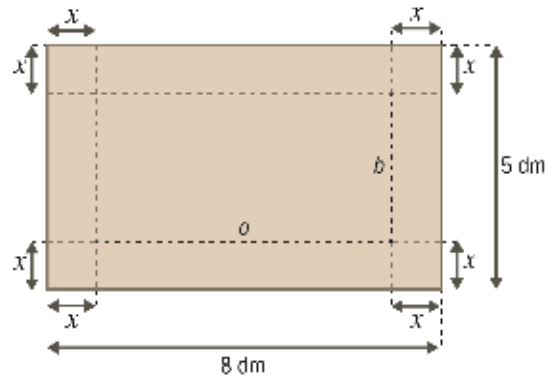
$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^3(-2x + 1) \geq 0$$

$$x + 1 = 0 \vee -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$$

$x$	$-\infty$	$-1$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$(x + 1)^3$	-	0	+	+	+
$-2x + 1$	+	+	+	0	-
$P(x)$	-	0	+	0	-

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

4.



4.1.  $a = 8 - 2x$  e  $b = 5 - 2x$

Altura da caixa:  $x$

$$x > 0 \wedge 8 - 2x > 0 \wedge 5 - 2x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \wedge -2x > -8 \wedge -2x > -5$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 4 \wedge x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < \frac{5}{2}$$

$$x \in \left] 0, \frac{5}{2} \right[$$

Volume da caixa:

$$V(x) = (8 - 2x) \times (5 - 2x) \times x$$

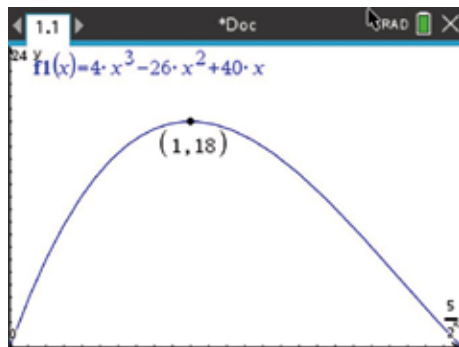
$$= (8 - 2x) \times (5x - 2x^2)$$

$$= 40x - 16x^2 - 10x^2 + 4x^3$$

$$= 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

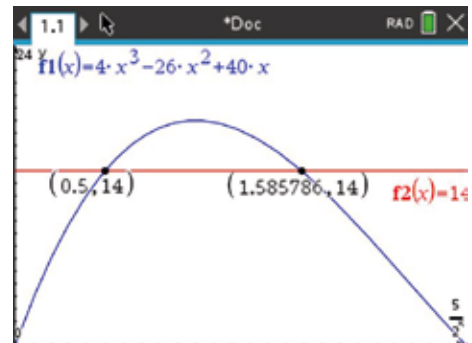


- 4.2. a) Pretende-se determinar o volume máximo da caixa. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



O volume da caixa é máximo quando  $x = 1$  dm e o volume máximo da caixa é  $18 \text{ dm}^3$ .

- b) Pretende-se determinar  $x$ , tal que  $V(x) = 14$ . Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



$$V(x) = 14 \Leftrightarrow x = 0,5 \vee x \approx 1,6$$

$$0,5 \text{ dm} = 5 \text{ cm} \text{ e } 1,6 \text{ dm} = 16 \text{ cm}$$

O volume da caixa é igual a  $14 \text{ dm}^3$  quando  $x = 5 \text{ cm}$  ou quando  $x \approx 16 \text{ cm}$ .



## Tema 2: Operações com funções

### Página 58 – Tarefa inicial

Produção máxima diária: 1500 L

Despesas fixas diárias: 770 €

Custo de produção de cada litro de tinta: 1,80 €

Preço de venda de cada litro de tinta: 4,00 €

1.  $x$  : número de litros de tinta produzidos por dia

1.1. a)  $C$  : custo total, em euros

$$C(x) = 770 + 1,80x, \text{ com } x \in [0, 1500].$$

b)  $R$  : receita, em euros

$$R(x) = 4,00x, \text{ com } x \in [0, 1500].$$

c)  $L$  : lucro, em euros

$$L(x) = R(x) - C(x) = 2,20x - 770, \text{ com } x \in [0, 1500].$$

1.2. a)  $L(810) = 2,20 \times 810 - 770 = 1012$

No contexto apresentado, significa que, se a empresa produzir 810 litros de tinta num dia, então terá um lucro de 1012 euros.

b)  $L(330) = 2,20 \times 330 - 770 = -44$

No contexto apresentado, significa que, se a empresa produzir 330 litros de tinta num dia, então terá um prejuízo de 44 euros.

c)  $L(350) = 2,20 \times 350 - 770 = 0$

No contexto apresentado, significa que, se a empresa produzir 350 litros de tinta num dia, então não terá lucro nem prejuízo.

2.1.  $R(x) = C(x)$

$$4,00x = 770 + 1,80x \Leftrightarrow 2,20x = 770 \Leftrightarrow x = 350$$

$$P(350, R(350))$$

$$R(350) = 4,00 \times 350 = 1400$$

$$P(350, 1400)$$

No contexto apresentado, significa que, se forem produzidos 350 litros de tinta num dia, então o custo total e a receita serão de 1400 euros.

2.2.  $L(x) = R(x) - C(x)$

$x$	0		350		1500
$L(x)$	-770	-	0	+	2530

### Página 59

$$86. \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \qquad g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^3 + 1 \qquad x \rightarrow x^2 - 1$$

$$86.1. \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Como  $D_g = \mathbb{R}^+$ , então  $x = 1$ .

Zero de  $f$  : -1

Zero de  $g$  : 1

$$86.2. \quad a) \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 1 + x^2 - 1 = x^3 + x^2$$

$$f+g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^3 + x^2$$

$$b) \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 1 - (x^2 - 1) = x^3 - x^2 + 2$$

$$f-g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^3 - x^2 + 2$$

$$86.3. \quad (f+g)(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 0 \vee x+1 = 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -1) \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

**Conclusão:** A função  $f+g$  não tem zeros.

$$86.4. \quad -1 \text{ não é zero da função } f-g, \text{ pois } -1 \notin D_{f-g}.$$

$$87.1. \quad \text{Por observação gráfica, sabe-se que } D_f = [-2, 5]$$

$$\text{e } D_g = [-2, 4]$$

$$D_{f+g} = D_{g-f} = D_f \cap D_g = [-2, 5] \cap [-2, 4] = [-2, 4]$$

$$87.2. \quad a) \quad (f+g)(0) = f(0) + g(0) = 2 + 2 = 4$$

$$b) \quad (g-f)(-2) = g(-2) - f(-2) = -6 - (-3) = -3$$

$$87.3. \quad (g-f)(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = f(x)$$

$$x = -1 \vee x = 0 \vee x = 4$$

Zeros de  $g-f$  : -1, 0 e 4



$$87.4. (g-f)(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > f(x)$$

$$x \in ]-1, 0[$$

$$(g-f)(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) - f(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < f(x)$$

$$x \in [-2, -1[ \cup ]0, 4[$$

Quadro de sinais de  $g-f$ :

$x$	-2		-1		0		4
$(g-f)(x)$	-	-	0	+	0	-	0

### Página 60 – Tarefa 11

Início da produção: 7:00

$x$ : número de horas passadas após o início da produção.

$$x \in [0, 10]$$

$f$ : produção de tecido da máquina A, passadas  $x$  horas (em metros).

$$f(x) = 2x$$

$g$ : produção de tecido da máquina B, passadas  $x$  horas (em metros).

$$g(x) = \frac{x^2}{4}$$

$h$ : função soma  $f+g$

1. Às 9:00, o valor de  $x$  é 2 (passaram duas horas após as 7:00).

$$2.1. f(2) = 2 \times 2 = 4$$

Às 9:00 horas, a máquina A tinha produzido 4 m de tecido.

$$2.2. g(2) = \frac{2^2}{4} = 1$$

Às 9:00 horas, a máquina B tinha produzido 1 m de tecido.

$$3. h(5) = (f+g)(5) = f(5) + g(5) = 2 \times 5 + \frac{5^2}{4} =$$

$$= 10 + 6,25 = 16,25$$

No contexto apresentado, significa que cinco horas após o início da produção, ou seja, às 12:00, as duas máquinas, A e B, tinham produzido, no total, 16,25 metros de tecido.

$$4.1. a = f(10) = 2 \times 10 = 20$$

$$b = g(10) = \frac{10^2}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

$$c = h(10) = f(10) + g(10) = 20 + 25 = 45$$

$$a = 20, b = 25 \text{ e } c = 45$$

$$4.2. f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow 8x = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(-x+8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee -x+8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

As duas máquinas tinham igual produção oito horas após o início da produção, ou seja, às 15:00.

$$4.3. h(x) = 12 \Leftrightarrow (f+g)(x) = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) + g(x) = 12 \Leftrightarrow 2x + \frac{x^2}{4} = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x + x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 192}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-8 + 16}{2} \vee x = \frac{-8 - 16}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -12$$

Como  $x \in [0, 10]$ , conclui-se que  $x = 4$ .

$$f(4) = 2 \times 4 = 8 \text{ e } g(4) = \frac{4^2}{4} = 4$$

No total, as duas máquinas tinham produzido 12 metros de tecido às 11:00. Neste momento, a máquina A produziu 8 metros de tecido e a máquina B produziu 4 metros de tecido.

### Página 61

$$88. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \qquad g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^2 + x \qquad x \rightarrow x - 1$$

$$88.1. D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^2 + x)(x - 1) =$$

$$= x^3 - x^2 + x^2 - x = x^3 - x$$

$$f \times g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^3 - x$$

$$88.2. a) f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

Zeros de  $f$ : -1 e 0



b)  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = 1$

Zero de  $g$  : 1

c)  $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x^2 - 1 = 0) \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1) \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow x = 1$

Zero de  $f \times g$  : 1

88.3.

$x$	0		1	$+\infty$
$f(x)$	0	+	+	+
$g(x)$	n.d.	-	0	+
$f(x) \times g(x)$	n.d.	-	0	+

89. Vamos começar por construir um quadro de sinais.

$x$	$-\infty$	$a$		$b$	$+\infty$
$f(x)$	+	+	+	0	-
$g(x)$	-	0	+	+	+
$f(x) \times g(x)$	-	0	+	0	-

$(f \times g)(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [a, b]$

A opção correta é a (B).

Página 62

Tarefa 12

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow x^2 + 3x$   $x \rightarrow 2 - x$

1.1.  $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^2 + 3x)(2 - x) =$   
 $= 2x^2 - x^3 + 6x - 3x^2 = -x^3 - x^2 + 6x$

$f \times g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow -x^3 - x^2 + 6x$

1.2.  $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x)(2 - x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \vee 2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \vee x = 2$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 2$

Como  $D_{f \times g} = \mathbb{R}$ , zeros de  $f \times g$  são: -3, 0 e 2

1.3. Etapa I

$x$	$-\infty$	-3		0		2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+	+	+
$g(x)$	+	+	+	+	+	0	-
$f(x) \times g(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Etapa II

A função  $f \times g$  é positiva em

$x \in ]-\infty, -3[ \cup ]0, 2[$ .

A função  $f \times g$  é negativa em

$x \in ]-3, 0[ \cup ]2, +\infty[$ .

A função  $f \times g$  é nula quando  $x \in \{-3, 0, 2\}$ .

1.4.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $h: [-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow x^2 + 3x$   $x \rightarrow x^2 - 1$

$x$	-3		-1		0		1
$f(x)$	0	-	-	-	0	+	+
$h(x)$	+	+	0	-	-	-	0
$f(x) \times h(x)$	0	-	0	+	0	-	0

2.1.  $f$  é uma função polinomial de grau 3, cujos zeros são -1 (de multiplicidade 1) e 2 (de multiplicidade 2).

$f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$ ;  $a \in \mathbb{R}$

$f(0) = 2 \Leftrightarrow a(0 + 1)(0 - 2)^2 = 2 \Leftrightarrow a \times 1 \times 4 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Então,  $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)^2$  e  $D_f = \mathbb{R}$ .

$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \left[ \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)^2 \right] \times (x - 3)^2 =$   
 $= \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)^2(x - 3)^2$

$f \times g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)^2(x - 3)^2$

2.2.  $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)^2(x - 3)^2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3) \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

Zeros de  $f \times g$  : 2 e 3



## 2.3.

$x$	0		2		3	$+\infty$
$f(x)$	+	+	0	+	+	+
$g(x)$	n.d.	+	+	+	0	+
$f(x) \times g(x)$	n.d.	+	0	+	0	+

A função  $f \times g$  é positiva em

$$x \in ]0, 2[ \cup ]2, 3[ \cup ]3, +\infty[.$$

A função  $f \times g$  é nula quando  $x \in \{2, 3\}$ .

A função  $f \times g$  nunca é negativa.

3.  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

3.1.  $-2$  é zero de  $f$ , então  $f(x)$  é divisível por  $x + 2$ .

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	-4	-7	10
-2		-2	12	-10
	1	-6	5	0

$$f(x) = (x+2)(x^2 - 6x + 5)$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6+4}{2} \vee x = \frac{6-4}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$$

Logo, conclui-se que  $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$  e,

consequentemente,  $f(x) = (x+2)(x-1)(x-5)$ .

3.2. Zeros de  $f$ :  $-2$ ,  $1$  e  $5$

$x$	$-\infty$	$-2$		$1$		$5$	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-5$	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

A função  $f$  é positiva em  $x \in ]-2, 1[ \cup ]5, +\infty[$ .

A função  $f$  é negativa em  $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]1, 5[$ .

A função  $f$  é nula quando  $x \in \{-2, 1, 5\}$ .

## Página 63

90.  $f(x) = x^2 - 4$  e  $g(x) = x^3 + 1$

90.1.  $D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \{-1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 1}$$

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^3 + 1}$$

90.2.  $D_{\frac{g}{f}} = (D_g \cap D_f) \setminus \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

$$D_{\frac{g}{f}} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \{-2, 2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}$$

$$\frac{g}{f} : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}$$

91.1. a)  $D_{\frac{g}{f}} = (D_g \cap D_f) \setminus \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$

$$D_g = D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{Então, } D_{\frac{g}{f}} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \{-3\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

b)  $D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

$$\text{Então, } D_{\frac{f}{g}} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \{-2, 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

91.2.  $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$  e  $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ , logo  $\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{g\left(\frac{1}{2}\right)} > 0$ , ou seja,

$$\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$

$$g(1) = 0 \text{ e } f(1) > 0, \text{ logo } \frac{g(1)}{f(1)} = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(1) = 0.$$

$$g(-3) < 0 \text{ e } f(-3) = 0, \text{ logo não existe } \left(\frac{g}{f}\right)(-3).$$

$$\text{Repara que } -3 \notin D_{\frac{g}{f}}.$$



Conclusão:

	V	F
$\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{1}{2}\right) < 0$		X
$\left(\frac{g}{f}\right)(1) = 0$	X	
$\left(\frac{g}{f}\right)(-3) = 0$		X

**Página 64**

**92.1.** Zeros de  $f$  : -2 e 0 (por observação gráfica)

Zeros de  $g$  : 2 (por observação gráfica)

$x$	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+	+	+
$g(x)$	+	+	+	+	+	0	-
$\frac{f(x)}{g(x)}$	+	0	-	0	+	n.d.	-

A função  $\frac{f}{g}$  é positiva em  $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, 2[$ .

A função  $\frac{f}{g}$  é negativa em  $x \in ]-2, 0[ \cup ]2, +\infty[$ .

A função  $\frac{f}{g}$  é nula quando  $x \in \{-2, 0\}$ .

**92.2.**

$x$	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$g(x)$	+	+	+	+	+	0	-
$f(x)$	+	0	-	0	+	+	+
$\frac{g(x)}{f(x)}$	+	n.d.	-	n.d.	+	0	-

A função  $\frac{g}{f}$  é positiva quando

$$x \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, 2[.$$

A função  $\frac{g}{f}$  é negativa quando

$$x \in ]-2, 0[ \cup ]2, +\infty[.$$

A função  $\frac{g}{f}$  é nula quando  $x = 2$ .

**93.**  $f$  é uma função polinomial de grau 3.

$$D_f = \mathbb{R}$$

Zeros de  $f$ : -2,  $\frac{1}{2}$  e 3 (por observação gráfica)

$$g(x) = x^2 + 1$$

**93.1.**  $D_g = \mathbb{R}^+$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$$

Equação impossível em  $\mathbb{R}$

Assim, a função  $g$  não tem zeros.

$x$	0		$\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$f(x)$	+	+	0	-	0	+
$g(x)$	n.d.	+	+	+	+	+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	n.d.	+	0	-	0	+

A função  $\frac{f}{g}$  é positiva quando

$$x \in ]0, \frac{1}{2}[ \cup ]3, +\infty[.$$

A função  $\frac{f}{g}$  é negativa quando  $x \in ]\frac{1}{2}, 3[$ .

A função  $\frac{f}{g}$  é nula quando  $x \in \{\frac{1}{2}, 3\}$ .

**93.2.**  $D_g = \mathbb{R}^-$

A função  $g$  não tem zeros (provado em 93.1.).

$$g(x) = x^2 + 1$$

$x$	$-\infty$	-2	
$f(x)$	-	0	+
$g(x)$	+	+	+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-	0	+

A função  $\frac{f}{g}$  é positiva em  $x \in ]-2, 0[$ .

A função  $\frac{f}{g}$  é negativa em  $x \in ]-\infty, -2[$ .

A função  $\frac{f}{g}$  é nula quando  $x = -2$ .

**Página 65 – Tarefa 13**

**1.1.**  $D_f = D_g = \mathbb{R}$

Zeros de  $f$  : -2, 1 e 2 (por observação gráfica)

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_g \cap D_f) \setminus \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \{-2, 1, 2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$$



1.2.  $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \wedge x \in D_{\frac{g}{f}}$

Como  $g$  é uma função polinomial de grau 2, então  $g$  tem, no máximo, dois zeros.

Assim, a função  $\frac{g}{f}$  tem no máximo dois zeros.

1.3. a) Pretende-se que as funções  $g$  e  $\frac{g}{f}$  não

tenham zeros.

Por exemplo,  $g(x) = x^2 + 2$ .

b) Pretende-se que as funções  $g$  e  $\frac{g}{f}$  tenham

dois zeros.

Por exemplo,  $g(x) = x^2 - 9$ .

Neste caso, os zeros de  $g$  e de  $\frac{g}{f}$  são  $-3$  e  $3$ .

c) Pretende-se que as funções  $g$  e  $\frac{g}{f}$  tenham

um só zero.

Por exemplo,  $g(x) = (x-4)^2$ . Neste caso, o

zero de  $g$  e  $\frac{g}{f}$  é  $4$ .

d) Pretende-se que a função  $g$  tenha dois zeros

e que a função  $\frac{g}{f}$  tenha um só zero.

Por exemplo,  $g(x) = x^2 - 1$ . Neste caso, os

zeros de  $g$  são  $-1$  e  $1$  e a função  $\frac{g}{f}$  só

tem um zero ( $-1$ ).

e) Pretende-se que a função  $g$  tenha dois

zeros e que a função  $\frac{g}{f}$  não tenha zeros.

Por exemplo,  $g(x) = x^2 - 3x + 2$ . Neste caso,

os zeros de  $g$  são  $1$  e  $2$  e a função  $\frac{g}{f}$  não

tem zeros, pois  $1$  e  $2$  não pertencem ao

domínio de  $\frac{g}{f}$ .

1.4. a)  $g(x) = -x^2 + 2x + 3 \quad D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-2+4}{-2} \vee x = \frac{-2-4}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

$x$	$-\infty$	$-2$		$-1$		$1$
$g(x)$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$	$0$
$\frac{g(x)}{f(x)}$	$+$	n.d.	$-$	$0$	$+$	n.d.

ESPM11 DPE © Porto Editora

	$2$		$3$	$+\infty$
$+$	$+$	$+$	$0$	$-$
$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$-$	n.d.	$+$	$0$	$-$

A função  $\frac{g}{f}$  é positiva em

$$x \in ]-\infty, -2[ \cup ]-1, 1[ \cup ]2, 3[.$$

A função  $\frac{g}{f}$  é negativa em

$$x \in ]-2, -1[ \cup ]1, 2[ \cup ]3, +\infty[.$$

A função  $\frac{g}{f}$  é nula quando  $x \in \{-1, 3\}$ .

b)  $g(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \quad D_g = \mathbb{R}$

Zero de  $g$ :  $-3$

$x$	$-\infty$	$-3$		$-2$		$1$
$g(x)$	$+$	$0$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$0$
$\frac{g(x)}{f(x)}$	$-$	$0$	$-$	n.d.	$+$	n.d.

	$2$	$+\infty$
$+$	$+$	$+$
$-$	$0$	$+$
$-$	n.d.	$+$

A função  $\frac{g}{f}$  é positiva em

$$x \in ]-2, 1[ \cup ]2, +\infty[.$$

A função  $\frac{g}{f}$  é negativa em

$$x \in ]-\infty, -3[ \cup ]-3, -2[ \cup ]1, 2[.$$

A função  $\frac{g}{f}$  é nula quando  $x = -3$ .

c)  $g(x) = -x^2 + x - 1 \quad D_g = \mathbb{R}$



$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{-2}$$

Equação impossível

A função  $g$  não tem zeros.

$x$	$-\infty$	$-2$		$1$		$2$	$+\infty$
$g(x)$	-	-	-	-	-	-	-
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$\frac{g(x)}{f(x)}$	+	n.d.	-	n.d.	+	n.d.	-

A função  $\frac{g}{f}$  é positiva em  
 $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]1, 2[$ .

A função  $\frac{g}{f}$  é negativa em  
 $x \in ]-2, 1[ \cup ]2, +\infty[$ .

A função  $\frac{g}{f}$  não tem zeros.

**2.**  $f$ : função polinomial de grau 3

Zeros de  $f$ :  $-2, 1$  e  $2$  (por observação gráfica)

$h$ : função polinomial de grau 4

Zeros de  $h$ :  $-2, 0, 1$  e  $2$  (por observação gráfica)

Sabe-se, ainda, que os coeficientes dos termos de maior grau das funções  $f$  e  $h$  são iguais e que  $h(3) = 15$ .

$$h(x) = a(x+2)x(x-1)(x-2); a \in \mathbb{R}^+$$

$$h(3) = 15 \Leftrightarrow a(3+2) \times 3 \times (3-1) \times (3-2) = 15 \Leftrightarrow a \times 5 \times 3 \times 2 \times 1 = 15 \Leftrightarrow 30a = 15 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}(x+2)x(x-1)(x-2) = \\ &= \frac{1}{2}(x^2-4)(x^2-x) = \frac{1}{2}(x^4-x^3-4x^2+4x) = \\ &= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x \end{aligned}$$

Como os coeficientes dos termos de maior grau das funções  $f$  e  $h$  são iguais e os zeros da função polinomial  $f$  são  $-2, 1$  e  $2$ , então:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2-4)(x-1) \\ &= \frac{1}{2}(x^3-x^2-4x+4) \\ &= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

**Página 66 – Consolida**

**1.**  $D_f = \mathbb{R}^+$  e  $f(x) = x^2 - 2$

$D_g = ]-\infty, 5]$  e  $g(x) = 3x + 2$

**1.1. a)**  $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^+ \cap ]-\infty, 5] = ]0, 5]$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 2 + 3x + 2 = x^2 + 3x$$

$f+g: ]0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^2 + 3x$$

**b)**  $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^+ \cap ]-\infty, 5] = ]0, 5]$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2 - (3x + 2) =$$

$$= x^2 - 2 - 3x - 2 = x^2 - 3x - 4$$

$f-g: ]0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^2 - 3x - 4$$

**1.2.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x^2 = 2 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \wedge x \in ]-\infty, 5] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \wedge x \in ]-\infty, 5] \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Assim, as funções  $f$  e  $g$  têm zeros.

$$(f+g)(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \wedge x \in ]0, 5] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+3) = 0 \wedge x \in ]0, 5]$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -3) \wedge x \in ]0, 5] \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

A função  $f+g$  não tem zeros.

A afirmação é verdadeira.

**1.3.**  $(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \wedge x \in ]0, 5] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \wedge x \in ]0, 5]$$

$$\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = -1) \wedge x \in ]0, 5] \Leftrightarrow x = 4$$

Logo, conclui-se que a função  $f-g$  só tem um zero (igual a 4).

**2.**  $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = 3x$

**2.1.**  $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 3x = x(x^2 + 3)$$



$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3 > 0$ , logo, conclui-se que:

A função  $f + g$  é positiva em  $x \in ]0, +\infty[$ .

A função  $f + g$  é negativa em  $x \in ]-\infty, 0[$ .

A função  $f + g$  é nula quando  $x = 0$ .

2.2.  $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

Zeros de  $f - g$ :  $-\sqrt{3}$ ,  $0$  e  $\sqrt{3}$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		$0$		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x$	-	-	-	$0$	+	+	+
$x^2 - 3$	+	$0$	-	-	-	$0$	+
$f(x) - g(x)$	-	$0$	+	$0$	-	$0$	+

A função  $f - g$  é positiva em

$$x \in ]-\sqrt{3}, 0[ \cup ]\sqrt{3}, +\infty[.$$

A função  $f - g$  é negativa em

$$x \in ]-\infty, -\sqrt{3}[ \cup ]0, \sqrt{3}[.$$

A função  $f - g$  é nula quando  $x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ .

3.  $f(x)$ : capacidade, em litros, do recipiente A

$$f(x) = x \times x \times x = x^3, x \in [1, 4]$$

$g(x)$ : capacidade, em litros, do recipiente B

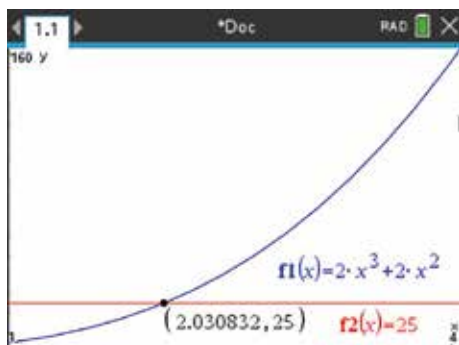
$$g(x) = x \times x \times (x + 2) = x^2(x + 2) = x^3 + 2x^2, x \in [1, 4]$$

3.1.  $(f + g)(x) = 25 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) + g(x) = 25 \Leftrightarrow x^3 + x^3 + 2x^2 = 25 \wedge x \in [1, 4]$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 = 25 \wedge x \in [1, 4]$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



Então,  $x \approx 2,03$ .

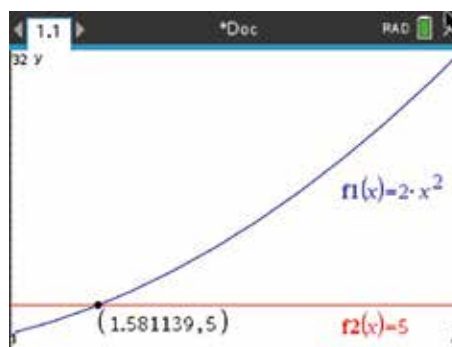
A capacidade total dos dois recipientes é igual a 25 litros quando  $x$  é, aproximadamente, igual a 2,03 dm.

3.2.  $(g - f)(x) < 5 \Leftrightarrow g(x) - f(x) < 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x^3 < 5 \wedge x \in [1, 4]$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 < 5 \wedge x \in [1, 4]$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



Então,  $x \in [1; 1,58]$ .

4.  $x$ : tempo, em horas, gasto a construir a peça.

$$C(x) = 5x + 30 \rightarrow \text{custo de produção, em euros.}$$

$$V(x) = 12x \rightarrow \text{preço de venda, em euros.}$$

O artesão não tem prejuízo se o preço de venda não foi inferior ao preço do custo, ou seja, se:

$$V(x) \geq C(x) \Leftrightarrow 12x \geq 5x + 30 \Leftrightarrow 7x \geq 30 \Leftrightarrow x \geq \frac{30}{7}$$

$$\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$$

Para que o artesão não tenha prejuízo, a construção da uma peça deve ter, no mínimo, cinco horas.

5.  $f(t) = 2t$ ;  $g(t) = 1,4t$  e  $h(t)$  representam, respetivamente, a distância, em metros, da Ana, do Bernardo e da Catarina ao ponto de partida,  $t$  segundos após a partida.

5.1.  $h(t) = f(t) - g(t) \Leftrightarrow h(t) = 2t - 1,4t \Leftrightarrow h(t) = 0,6t$

5.2.  $f(t) = 210 \Leftrightarrow 2t = 210 \Leftrightarrow t = 105$

A Ana demorou 105 segundos a chegar ao fim do tapete.



$$g(t) = 210 \Leftrightarrow 1,4t = 210 \Leftrightarrow t = 150$$

O Bernardo demorou 150 segundos a chegar ao fim do tapete, ou seja, mais 45 segundos do que a Ana.

$$h(t) = 210 \Leftrightarrow 0,6t = 210 \Leftrightarrow t = \frac{210}{0,6} \Leftrightarrow t = 350$$

A Catarina demorou 350 segundos a chegar ao fim do tapete, ou seja, mais 245 segundos do que a Ana.

O Bernardo chegou passados 45 segundos da Ana e a Catarina chegou passados 200 segundos do Bernardo.

**Página 67 – Consolida**

**6.1.**  $(g - f)(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = f(x)$

Os zeros de  $g - f$  correspondem às abcissas dos pontos de interseção dos gráficos de  $f$  e  $g$ .

Zeros de  $g - f$ : 0 e 3

**6.2.** Por observação gráfica das representações das funções  $f$  e  $g$ , conclui-se que:

$x$	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$(f - g)(x)$	+	0	-	0	+

**7.**  $f(x) = 2x + 1$ ;  $g$  é uma função afim.

**7.1.** A função  $f + g$  é crescente e tem um zero positivo.

Por exemplo,  $g(x) = x - 4$ . Neste caso,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x - 3.$$

$f + g$  é crescente (pois o declive é positivo) e tem um zero positivo (1).

**7.2.** A função  $f + g$  é decrescente e tem um zero positivo.

Por exemplo,  $g(x) = -3x + 2$ . Neste caso,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -x + 3.$$

$f + g$  é decrescente (pois o declive é negativo) e tem um zero positivo (3).

**7.3.** A função  $f + g$  é decrescente e tem um zero negativo.

Por exemplo,  $g(x) = -4x - 3$ . Neste caso,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -2x - 2.$$

$f + g$  é decrescente (pois o declive é negativo) e tem um zero negativo (-1).

**7.4.** A função  $f - g$  é crescente e tem um zero negativo.

Por exemplo,  $g(x) = -3x - 5$ . Neste caso:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2x + 1 - (-3x - 5) = 5x + 6$$

$f - g$  é crescente (pois o declive é positivo) e tem um zero negativo  $\left(-\frac{6}{5}\right)$ .

**7.5.** A  $g - f$  é decrescente e tem um zero igual a 0.

Por exemplo,  $g(x) = x + 1$ . Neste caso:

$$(g - f)(x) = g(x) - f(x) = x + 1 - (2x + 1) = -x$$

$g - f$  é decrescente (pois o declive é negativo) e tem um zero igual a 0 ( $(g - f)(0) = 0$ ).

**8.**  $D_f = [-2, 7]$  e  $f(x) = x^2 - 9$

$$D_g = [-5, 5] \text{ e } g(x) = 2 - x$$

**8.1.**  $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [-2, 7] \cap [-5, 5] = [-2, 5]$

**8.2.**  $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \vee 2 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \vee x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3 \vee x = 2$$

Como  $D_{f \times g} = [-2, 5]$ , então os zeros de  $f \times g$  são 2 e 3.

**8.3.**

$x$	-2		2		3		5
$f(x)$	-	-	-	-	0	+	+
$g(x)$	+	+	0	-	-	-	-
$f(x) \times g(x)$	-	-	0	+	0	-	-

A função  $f \times g$  é positiva em  $x \in ]2, 3[$ .

A função  $f \times g$  é negativa em  $x \in [-2, 2[ \cup ]3, 5]$ .

A função  $f \times g$  é nula quando  $x \in \{2, 3\}$ .



- 9.1.  $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$   
 Zeros da função  $f \times g$ :  $-2, 0$  e  $2$

9.2.

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$2$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x) \times g(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

A função  $f \times g$  é positiva em

$$x \in ]-2, 0[ \cup ]2, +\infty[.$$

A função  $f \times g$  é negativa em

$$x \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, 2[.$$

A função  $f \times g$  é nula quando  $x \in \{-2, 0, 2\}$ .

- 9.3. Atendendo às conclusões obtidas em 9.2., sabe-se

$$\text{que } (f \times g)(-1) > 0; (f \times g)(\sqrt{2}) < 0;$$

$$(f \times g)(-\pi) < 0; (f \times g)(-2) = 0 \text{ e } (f \times g)(2) = 0.$$

Assim, tem-se:

	V	F
$(f \times g)(-1) < 0$		X
$(f \times g)(\sqrt{2}) < 0$	X	
$(f \times g)(-\pi) > 0$		X
$(f \times g)(-2) = (f \times g)(2)$	X	

- 10.1.  $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [-2, 4] \cap [-2, 1] = [-2, 1]$
- 10.2. A afirmação é verdadeira, pois  $\forall x \in D_f, f(x) > 0$  e  
 $\forall x \in D_g, g(x) > 0$ , logo  $\forall x \in D_{f \times g}, f(x) \times g(x) > 0$ ,  
 ou seja,  $\forall x \in D_{f \times g}, (f \times g)(x) > 0$ .

- 10.3. a)
- $f(x) = ax + b$

Como  $f(0) = 2$ , então  $b = 2$ .Logo,  $f(x) = ax + 2$ .

$$f(4) = 4 \Leftrightarrow a \times 4 + 2 = 4 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } f(x) = \frac{1}{2}x + 2.$$

$$\text{b) } g(x) = a(x-h)^2 + k \quad V\left(\frac{0}{h}, \frac{5}{k}\right)$$

Então,  $g(x) = ax^2 + 5$ .

$$g(1) = 4 \Leftrightarrow a \times 1^2 + 5 = 4 \Leftrightarrow a = -1$$

Logo,  $g(x) = -x^2 + 5$ .

$$\text{c) } (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \left(\frac{1}{2}x + 2\right) \times (-x^2 + 5) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - 2x^2 + 10 = -\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{5}{2}x + 10$$

## Página 68 – Consolidada

- 11.1.
- $f$
- : função polinomial de grau 3

Zeros de  $f$ :  $-1$  (de multiplicidade 2) e  $2,5$  (de multiplicidade 1)

$$f(x) = a(x+1)^2(x-2,5)$$

$$f(0) = 2,5 \Leftrightarrow a(0+1)^2(0-2,5) = 2,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2,5a = 2,5 \Leftrightarrow a = -1$$

Então,  $f(x) = -(x+1)^2(x-2,5)$ .

$$\text{Assim, } f(1) = -(1+1)^2(1-2,5) = -4 \times (-1,5) = 6.$$

- 11.2.
- $g(x) = \frac{5}{2} - x$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2,5$$

Estudo do sinal da função  $f \times g$ :

$x$	$-\infty$	$-1$		$2,5$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$0$	$+$	$0$	$-$
$g(x)$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$
$f(x) \times g(x)$	$+$	$0$	$+$	$0$	$+$

A função  $f \times g$  é positiva em  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2,5\}$ .A função  $f \times g$  é nula quando  $x \in \{-1; 2,5\}$ .

- 12.1.
- $f(x) = ax^3; a \neq 0; D_f = \mathbb{R}$

$$f(-x) = a(-x)^3 = a(-x^3) = -ax^3 = -f(x)$$

 $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$ , logo  $f$  é ímpar.

- 12.2.
- $f(x) = ax^2 + 1; a \neq 0; D_f = [-5, 5]$

$$f(-x) = a(-x)^2 + 1 = ax^2 + 1 = f(x)$$

 $\forall x \in [-5, 5], f(-x) = f(x)$ , logo  $f$  é par.



12.3.  $f(x) = x^2 + x$ ;  $D_f = \mathbb{R}$

Por exemplo,  $f(2) = 2^2 + 2 = 6$  e

$f(-2) = (-2)^2 + (-2) = 2$

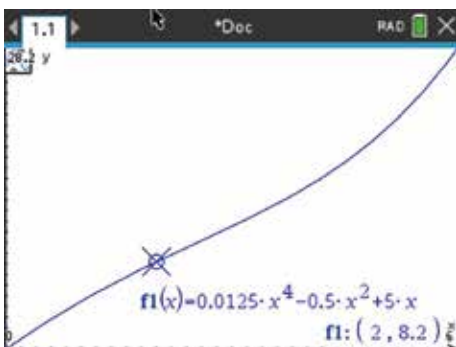
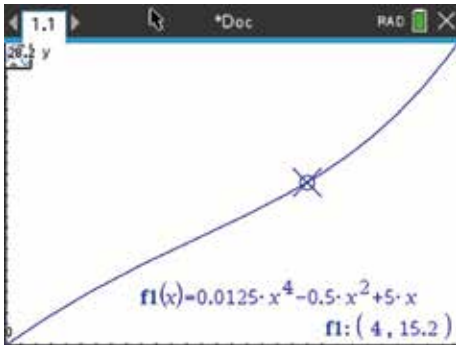
$f(2) \neq f(-2)$  e  $f(-2) \neq -f(2)$ , logo  $f$  não é par nem é ímpar.

13.  $f(x) = 0,05x^3 - x + 5$  e  $D_f = [0, 6]$

$P(x, f(x)); x \in [0, 6]$

$g(x) = 0,0125x^4 - 0,5x^2 + 5x$ ,  $D_g = [0, 6]$

13.1. Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



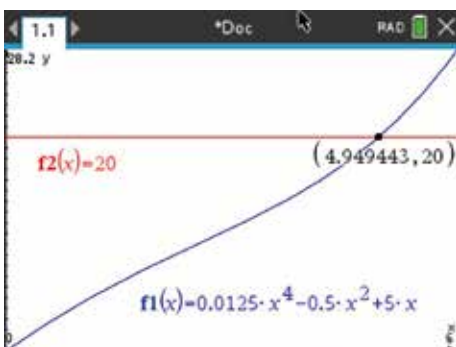
$g(4) - g(2) = 15,2 - 8,2 = 7$

No contexto descrito, significa que a medida da área colorida da figura quando  $x \in [2, 4]$  é 7.

13.2. Pretende-se determinar  $x$ , tal que  $g(x) \geq 20$ .

$g(x) \geq 20 \wedge x \in [0, 6] \Leftrightarrow 0,0125x^4 - 0,5x^2 + 5x \geq 20$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



$a \approx 4,95$  e  $b = 6$

$g(x) \geq 20 \Leftrightarrow x \in [4,95; 6]$

A abscissa do ponto  $P$  pertence ao intervalo  $[4,95; 6]$ .

**Página 69 – Consolida**

14.  $D_f = D_g$ ,  $f(x) = 2x^2 + x - 1$  e  $g(x) = x - 3$

14.1. a)  $D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$D_{\frac{f}{g}} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \{3\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 3}$

$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow \frac{2x^2 + x - 1}{x - 3}$

b)  $D_{\frac{g}{f}} = (D_g \cap D_f) \setminus \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1+3}{4} \vee x = \frac{-1-3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$

$D_{\frac{g}{f}} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x - 3}{2x^2 + x - 1}$

$\frac{g}{f} : \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow \frac{x - 3}{2x^2 + x - 1}$

14.2.  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - 1}{x - 3} = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\Leftrightarrow \left(x = -1 \vee x = \frac{1}{2}\right) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$

Zeros da função  $\frac{f}{g}$ :  $-1$  e  $\frac{1}{2}$



14.3.

$x$	$-\infty$	$-1$		$\frac{1}{2}$		$3$	$+\infty$
$g(x)$	-	-	-	-	-	$0$	$+$
$f(x)$	$+$	$0$	-	$0$	$+$	$+$	$+$
$\frac{g(x)}{f(x)}$	-	n.d.	$+$	n.d.	-	$0$	$+$

A função  $\frac{g}{f}$  é positiva em  $x \in ]-1, \frac{1}{2}[ \cup ]3, +\infty[$ .

A função  $\frac{g}{f}$  é negativa em

$$x \in ]-\infty, -1[ \cup ]\frac{1}{2}, 3[.$$

A função  $\frac{g}{f}$  é nula quando  $x = 3$ .

15.  $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$f$  é uma função quadrática cujos zeros são 2 e 6.

$f$  admite um máximo no ponto  $M(4, 2)$ .

$g$  é uma função afim cujo gráfico intersesta os eixos coordenados nos pontos  $(3, 0)$  e  $(0, 3)$ .

15.1.  $f(x) = a(x-2)(x-6); a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(4) = 2 \Leftrightarrow a \times (4-2) \times (4-6) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \times 2 \times (-2) = 2 \Leftrightarrow -4a = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x-6) = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x - 2x + 12) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 3x + x - 6 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$$

$$g(x) = ax + b$$

$$\begin{cases} g(3) = 0 \\ g(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 3 + b = 0 \\ a \times 0 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 3 = 0 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Então,  $g(x) = -x + 3$ .

15.2.  $D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} =$

$$= (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \{3\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

C.A.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6}{-x + 3} \quad \begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Assim,  $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6}{-x + 3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge x \in D_{\frac{f}{g}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6$$

Zeros de  $\frac{f}{g}$ : 2 e 6

15.3.

$x$	$-\infty$	$2$		$3$		$6$	$+\infty$
$f(x)$	-	$0$	$+$	$+$	$+$	$0$	-
$g(x)$	$+$	$+$	$+$	$0$	-	-	-
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-	$0$	$+$	n.d.	-	$0$	$+$

Logo, conclui-se que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 2[ \cup ]3, 6[.$$

O conjunto-solução da inequação  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) < 0$  é

$$]-\infty, 2[ \cup ]3, 6[.$$

16.  $f$ : função polinomial de grau 3 representada na figura.

$$g(x) = x^3 + x - 2$$

16.1.  $\left(\frac{g}{f}\right)(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{1^3 + 1 - 2}{-3} = \frac{0}{-3} = 0$

16.2.  $g(x) = x^3 + x - 2$

1 é raiz de  $g(x)$ , pois  $g(1) = 0$ .

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	0	1	-2
1		1	1	2
	1	1	2	0



$$g(x) = (x-1)(x^2+x+2)$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x^2+x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \Leftrightarrow x=1$$

Equação impossível

$$D_{\frac{g}{f}} = (D_g \cap D_f) \setminus \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} =$$

$$= (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \{-3, 0, 4\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 4\}$$

Por observação gráfica, sabe-se que os zeros da função  $f$  são  $-3, 0$  e  $4$ .

$$f(x) = a(x+3)x(x-4), a \in \mathbb{R}^+$$

$$f(1) = -3 \Leftrightarrow a(1+3) \times 1 \times (1-4) = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \times 4 \times 1 \times (-3) = -3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

Então,  $f(x) = \frac{1}{4}(x+3)x(x-4)$ .

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{\frac{1}{4}(x+3)x(x-4)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{0,25x(x+3)(x-4)}$$

Caracterização da função  $\frac{g}{f}$ :

$$\frac{g}{f} : \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{0,25x(x+3)(x-4)}$$

Sinal de  $\frac{g}{f}$ :

$x$	$-\infty$	$-3$		$0$		$1$		$4$	$+\infty$	(1)
$g(x)$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	
$f(x)$	-	0	+	0	-	-	-	0	+	
$\frac{g(x)}{f(x)}$	+	n.d.	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+	

(1)  $x^2+x+2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

A função  $\frac{g}{f}$  é positiva em

$$x \in ]-\infty, -3[ \cup ]0, 1[ \cup ]4, +\infty[.$$

A função  $\frac{g}{f}$  é negativa em  $x \in ]-3, 0[ \cup ]1, 4[.$

A função  $\frac{g}{f}$  é nula quando  $x = 1$ .

17.  $p$ : preço, em euros, de cada bilhete

$N(p)$ : número de espectadores

$$N(p) = 2500 - 75p$$

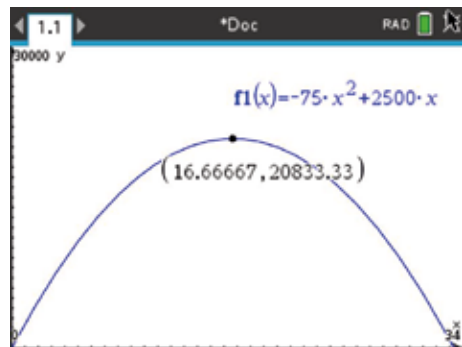
$R(p)$ : receita, em euros, na venda dos bilhetes

17.1.  $R(p) = p \times N(p) = p \times (2500 - 75p) =$   
 $= 2500p - 75p^2 = -75p^2 + 2500p$

17.2. Pretende-se determinar  $p$  de modo que a receita,  $R(p)$ , seja máxima.

$$R(p) = -75p^2 + 2500p$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



A receita é máxima quando  $x \approx 16,67$ .

Para que a receita seja máxima, o preço de cada bilhete deve ser, aproximadamente, 16,67 euros.

**Página 70 – Avalia 2 – Parte 1**

1.  $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) =$$

$$x^3 + 2x + (-2x + 1)$$

$$= x^3 + 1$$

$$(f+g)(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 = -1 \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = -1 \wedge x \in \mathbb{R}^+}_{\text{Condição impossível}}$$

A opção correta é a (A).

2.  $D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} =$

$$= (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \{2\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{2\}$$



$$(g-f)(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) - f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) > f(x)$$

$$\Leftrightarrow x \in ]0, 1[ \cup ]2, +\infty[$$

$$(f-g)(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow -g(x) < -f(x)$$

$$\Leftrightarrow g(x) > f(x)$$

$$\Leftrightarrow x \in ]0, 1[ \cup ]2, +\infty[$$

A opção correta é a (C).

3.  $g$  : função afim tal que  $h = f \times g$

$-1$  é zero de  $h$  e  $-1$  não é zero de  $f$ , logo  $-1$  terá de ser zero de  $g$ .

Sendo assim, excluem-se as opções (A) e (B).

Por observação gráfica, sabe-se que, por exemplo,  $h(0) < 0$  e  $f(0) < 0$ . Como  $h = f \times g$ ,

então  $h(0) = f(0) \times g(0)$ . Logo,  $g(0) > 0$ .

Assim, a opção correta é a (D).

4.  $f(x) = x^2 - 8x$  e  $g(x) = x^4 - 8x$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{8}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \{0, 2\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge x \in D_{\frac{f}{g}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$\Leftrightarrow x(x-8) = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=8) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$\Leftrightarrow x = 8$$

Zero da função  $\frac{f}{g}$ : 8

A opção correta é a (B).

5.  $f$  e  $g \rightarrow$  funções polinomiais do 3.º grau

Conjunto dos zeros de  $f$ :  $\{-1, 0, 4\}$

Conjunto dos zeros de  $g$ :  $\{-4, -1, 1\}$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0 \wedge f(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-4, -1, 1\} \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 4\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-4, 1\}$$

A função  $\frac{g}{f}$  tem dois zeros.

A opção correta é a (C).

### Página 71 – Avaliação 2 – Parte 2

1.  $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$  e  $g(x) = 4x - 2$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+5}{4} \vee x = \frac{-3-5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -2$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$(f \times g)(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) \geq 0$$

$x$	$-\infty$	$-2$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	-	-	-	0	+
$(f \times g)(x)$	-	0	+	0	+

$$(f \times g)(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, +\infty[$$

$$\text{C.S.} = [-2, +\infty[.$$

2.  $f$  é uma função afim cujo zero é  $a$ .

$g$  é uma função quadrática cujos zeros são  $0$  e  $b$ .

Recorrendo a um quadro de sinais, tem-se:

$x$	$-\infty$	$a$		$0$		$b$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	+	+	+	+
$g(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$(f \times g)(x)$	-	0	+	0	-	0	+

A função  $f \times g$  tem três zeros,  $a$ ,  $0$  e  $b$ , é negativa em  $]-\infty, a[ \cup ]0, b[$  e positiva em  $]a, 0[ \cup ]b, +\infty[$ .

Assim, a representação que pode corresponder à representação gráfica da função  $f \times g$  é a III.



3.  $f(x) = 2x - 3$  e  $g(x) = 9 - 4x^2$

3.1.  $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow -4x^2 = -9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{3}{2}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} =$$

$$= (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-3}{9-4x^2} = \frac{2x-3}{(3-2x)(3+2x)} =$$

$$= \frac{-(3-2x)}{(3-2x)(3+2x)} = \frac{-1}{3+2x}$$

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{-1}{3+2x}$$

3.2. a)  $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 - (9 - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 - 9 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+7}{4} \vee x = \frac{-1-7}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -2$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -2, \frac{3}{2} \right\}$$

b)  $(f \times g) > 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(9-4x^2) > 0$$

Recorrendo a um quadro de sinais, tem-se:

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	-	-	-	0	+
$g(x)$	-	0	+	0	-
$(f \times g)(x)$	+	0	-	0	-

$$(f \times g)(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right[$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right[.$$

4.  $x$  : número de vedantes produzido numa semana

$f$  : custo de produção de  $x$  vedantes, em euros

$g$  : receita na venda de  $x$  vedantes, em euros

4.1.  $g(x) = ax$

O preço de venda de cada vedante é 2,50€.

Então,  $g(1000) = 1000 \times 2,50$ , ou seja,

$$a \times 1000 = 1000 \times 2,50 \Leftrightarrow a = 2,50.$$

Logo,  $g(x) = 2,50x$ .  $f(x) = a_1x + b$

Como  $f(0) = 2000$ , então  $b = 2000$ .

Assim,  $f(x) = a_1x + 2000$ .

Os gráficos de  $f$  e  $g$  interseitam-se no ponto de abcissa 1000, cuja ordenada é 2500.

$$f(1000) = 2500 \Leftrightarrow a_1 \times 1000 + 2000 = 2500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1000a_1 = 500 \Leftrightarrow a_1 = \frac{500}{1000} \Leftrightarrow a_1 = 0,50$$

Logo,  $f(x) = 0,50x + 2000$ , ou seja,

$$f(x) = 2000 + 0,50x.$$

4.2.  $(g - f)(800) = g(800) - f(800) =$

$$= 2,50 \times 800 - (2000 + 0,5 \times 800) = 2000 - 2400 = -400$$

No contexto apresentado, significa que, se forem produzidos 800 vedantes a empresa terá um prejuízo de 400 euros.

4.3.  $(g - f)(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2,50x = 2000 + 0,50x \Leftrightarrow 2,00x = 2000 \Leftrightarrow x = 1000$$

$$\text{C.S.} = \{1000\}$$

No contexto apresentado, significa que, o valor da receita obtida na venda é igual ao valor do custo de produção, ou seja, a empresa não terá prejuízo nem lucro se forem produzidos 1000 vedantes.

4.4.  $h(x) = 2,50 - \frac{f(x)}{x}$ , com  $x > 0$

2,50  $\rightarrow$  representa o preço de venda de cada vedante, em euros

$f(x) \rightarrow$  representa o custo de produção de  $x$  vedantes, em euros

$\frac{f(x)}{x} \rightarrow$  representa o custo de produção de cada vedante, em euros

Logo, no contexto apresentado, a função  $h$ ,

definida por  $h(x) = 2,50 - \frac{f(x)}{x}$ ;  $x > 0$ , representa o

lucro, em euros, obtido pela empresa na venda de cada vedante.

**Tema 3: Funções racionais****Página 72 – Tarefa inicial**

$$1. \quad E(d) = \frac{11500}{d^2}$$

$d$ : distância, em metros, da lâmpada à planta.

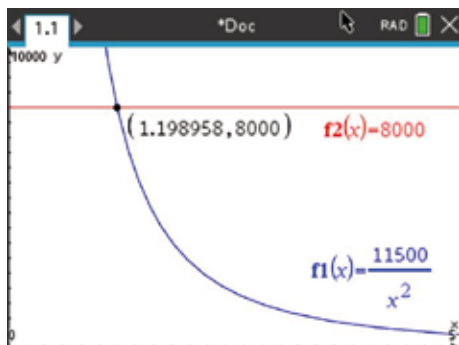
$E(d)$ : iluminância, em lux.

1.1. A função  $E$  é estritamente decrescente.

No contexto apresentado, significa que, quanto maior é a distância da lâmpada à planta, menor será a iluminância.

2.1  $A(d, 8000)$ , tal que  $E(d) = 8000$ .

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica:



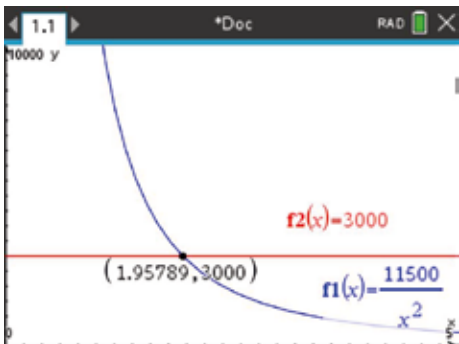
Então,  $a \approx 1,20$ .

A abscissa do ponto  $A$  é, aproximadamente, igual a 1,20.

No contexto apresentado, significa que, na fase da floração, a lâmpada deverá estar, no máximo, a 1,20 m de distância da planta.

2.2.  $B(b, 3000)$ , tal que  $E(d) = 3000$ .

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica:



Então,  $b \approx 1,96$ .

A abscissa do ponto  $B$  é, aproximadamente, igual a 1,96.

No contexto apresentado, significa que, na fase da mudança de folha, a lâmpada deverá estar, no máximo, a 1,96 m de distância da planta.

**Página 73**

$$94.1. \quad f(x) = \frac{3}{x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$94.2. \quad f(x) = \frac{7}{x-1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$94.3. \quad f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$94.4. \quad f(x) = \frac{7}{x^2-3x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2-3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

$$94.5. \quad f(x) = \frac{x^2-2x}{x+1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$94.6. \quad f(x) = \frac{x^3-x+1}{x^2-5x+4}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2-5x+4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=4 \vee x=1$$

$$95.1. \quad f(x) = \frac{3x-2}{x+2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x+2}=0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Zero de } f : \frac{2}{3}$$



$$95.2. f(x) = \frac{2x+1}{4x^2-1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

Cálculo auxiliar:

$$4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{4x^2-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

A função  $f$  não tem zeros.

$$95.3. f(x) = \frac{-x^2+3x}{x^2-4x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+3x}{x^2-4x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2+3x=0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$

$$\Leftrightarrow x(-x+3)=0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=3) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Zero de  $f$ : 3

$$95.4. f(x) = \frac{2x+6}{x^2+3x-4}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+6}{x^2+3x-4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+6=0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Zero de  $f$ : -3

$$96.1. f(x) = \frac{9-x^2}{x+3}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$f(x) = \frac{9-x^2}{x+3} = \frac{(3-x)(3+x)}{x+3} = 3-x$$

$$96.2. f(x) = \frac{3x}{x^2+x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2+x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$$

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+x} = \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)} = \frac{3}{x+1}$$

$$96.3. f(x) = \frac{2x+2}{x^2-x-2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2-x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

$$f(x) = \frac{2x+2}{x^2-x-2} = \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{x-2}$$

## Página 74

$$97. f(x) = \frac{1}{x} \text{ e } g(x) = \frac{1}{x-7}$$

O gráfico de  $g$  pode ser obtido a partir do gráfico de  $f$  através de uma translação associada ao  $\vec{u}(7, 0)$ .

A opção correta é a (C).

$$98. f(x) = \frac{1}{x}$$

O gráfico de  $g$  obtém-se a partir do gráfico de  $f$  aplicando-lhe uma translação associada ao vetor

$$\vec{v}\left(-\frac{5}{2}, 0\right). \text{ Logo, } g(x) = \frac{1}{x+\frac{5}{2}}.$$

$$A(-2, g(-2)) \text{ e } B(-2, f(-2))$$



$$\text{Como } g(-2) = \frac{1}{-2 + \frac{5}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ e } f(-2) = -\frac{1}{2},$$

$$\text{então } A(-2, 2) \text{ e } B\left(-2, -\frac{1}{2}\right).$$

O ponto C tem a mesma ordenada do ponto A (2) e pertence ao gráfico de  $f$ , logo tem-se:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$C\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

**Conclusão:**  $A(-2, 2)$ ,  $B\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$  e  $C\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

### Página 75

$$99. f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{x-2}, h(x) = 5 + \frac{1}{x} \text{ e}$$

$$j(x) = -1 + \frac{1}{x-2}$$

99.1. O gráfico de  $g$  obtém-se a partir do gráfico de  $f$ , aplicando-lhe uma translação associada ao vetor  $\vec{u}(2, 0)$ .

O gráfico de  $h$  obtém-se a partir do gráfico de  $f$ , aplicando-lhe uma translação associada ao vetor  $\vec{v}(0, 5)$ .

O gráfico de  $j$  obtém-se a partir do gráfico de  $f$ , aplicando-lhe uma translação associada ao vetor  $\vec{w}(-2, -1)$ .

$$99.2. a) D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 5 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x+1}{x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x+1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$$

$$\text{Zero de } h: -\frac{1}{5}$$

$$b) D_j = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x-2+1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-x-1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow -x-1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{Zero de } j: -1$$

$$99.3. f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

As funções  $f$  e  $g$  não têm zeros.

$$100. f(x) = -3 + \frac{1}{x+5}$$

$$100.1. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

$$100.2. f(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + \frac{1}{x+5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x-15+1}{x+5} = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-14}{x+5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-3x-14 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} \Leftrightarrow x = -\frac{14}{3}$$

$$\text{Zero de } f : -\frac{14}{3}$$

100.3.

$x$	$-\infty$	$-5$		$-\frac{14}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	-	n.d.	+	0	-

### Página 76 – Tarefa 14

$$1. f(x) = \frac{b}{x}; b \neq 0$$

$$1.1. D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

1.2. Se  $f$  é uma função da família,  $f(1) = b$ .

1.3. Não. Os gráficos das funções da família não interseam os eixos coordenados.

1.4. As funções da família não têm zeros, porque os gráficos não interseam o eixo  $Ox$ .

1.5. a)

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = \frac{b}{x}$	-	n.d.	+

b)

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = \frac{b}{x}$	+	n.d.	-



$$2. \quad y = \frac{b}{x-c}, \quad b \neq 0 \text{ e } c \neq 0$$

$$2.1. \quad D = \mathbb{R} \setminus \{c\}$$

2.2. As funções da família não têm zeros, porque os gráficos não interseam o eixo  $Ox$ .

2.3. Sim, os gráficos das funções da família interseam o eixo  $Oy$ , porque 0 pertence ao domínio das funções.

2.4. a) Função  $f: b > 0$  e  $c < 0$

b) Função  $g: b < 0$  e  $c > 0$

c) Função  $h: b > 0$  e  $c > 0$

d) Função  $i: b < 0$  e  $c < 0$

$$3. \quad y = a + \frac{b}{x}; \quad b \neq 0 \text{ e } a \neq 0$$

$$3.1. \quad a + \frac{b}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{ax+b}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax+b=0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

As funções da família têm um zero:  $-\frac{b}{a}$ .

3.2. Por observação gráfica da representação da função da família, sabe-se que  $b > 0$  e  $a > 0$ . Assim, a opção correta é a **(B)**.

### Página 77 – Tarefa 15

1.  $x$ : idade de uma criança, em anos

$D$ : dose recomendada para adultos, em miligramas

$d$ : dose recomendada para uma criança, em miligramas

$$d(x) = \frac{Dx}{x+12}, \quad 0 < x < 12$$

Considera-se que  $D = 40$ .

1.1.  $x = 5$  e  $D = 40$

$$d(5) = \frac{40 \times 5}{5+12} = \frac{200}{17} \approx 12$$

A dose recomendada para o Gil é, aproximadamente, 12 mg.

1.2.  $d = 16$  e  $D = 40$

$$16 = \frac{40x}{x+12} \Leftrightarrow \frac{40x}{x+12} - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{40x - 16x - 192}{x+12} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{24x - 192}{x+12} = 0$$

$$\Leftrightarrow 24x - 192 = 0 \wedge 0 < x < 12$$

$$\Leftrightarrow x = 8$$

O Gil tem 8 anos.

1.3. 45% da dose de adulto:  $0,45 \times 40 = 18$

$$d(x) > 18 \Leftrightarrow \frac{40x}{x+12} > 18 \Leftrightarrow \frac{40x}{x+12} > 18(x+12) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40x > 18x + 216$$

$$\Leftrightarrow 22x > 216$$

$$\Leftrightarrow x > 9,81$$

A idade mínima do Gil é 10 anos.

$$1.4. \quad d(x) = \frac{40x}{x+12}$$

Recorrendo ao algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{r} 40x + 0 \quad | \quad x+12 \\ -40x - 480 \quad 40 \\ \hline -480 \end{array}$$

$$d(x) = 40 - \frac{480}{x+12}$$

2. Na mistura são utilizados:

- $x$  kg de farinha de centeio integral, com um custo de 1,50 € por quilograma, com  $2 \leq x \leq 8$ ;
- 10 kg de farinha de trigo, com um custo de 0,60 € por quilograma.

2.1. Quantidade de mistura (em kg):  $x + 10$

$$x + 10 = 12,5 \Leftrightarrow x = 2,5$$

Custo, em euros, de cada quilograma de mistura:

$$\frac{2,5 \times 1,50 + 10 \times 0,60}{12,5} = \frac{9,75}{12,5} = 0,78$$

O custo de cada quilograma de mistura é 0,78 €.

$$2.2. \quad C(x) = \frac{x \times 1,50 + 10 \times 0,60}{x+10} = \frac{1,5x+6}{x+10}, \text{ sendo}$$

$$2 \leq x \leq 8.$$



$$2.3. C(x) \leq 0,95 \Leftrightarrow \frac{1,5x+6}{x+10} \leq 0,95 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1,5x+6}{x+10} \leq 0,95 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,5x+6 \leq 0,95(x+10)$$

$$\Leftrightarrow 1,5x+6 \leq 0,95x+9,5$$

$$\Leftrightarrow 0,55x \leq 3,5$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{3,5}{0,55}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 6,364$$

A mistura deve ter, no máximo, 6,364 kg de farinha de centeio integral.

$$3. f(x) = \frac{8}{x+2}$$

$$P(x, f(x)), x > 0$$

$$A(x, 0), x > 0$$

$$3.1. A_{[OAP]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AP}}{2}$$

$$g(x) = \frac{x \times f(x)}{2} = \frac{x \times \frac{8}{x+2}}{2} = \frac{8x}{2(x+2)} = \frac{8x}{2(x+2)}$$

$$= \frac{4x}{x+2} = 4 - \frac{8}{x+2}, \text{ sendo } x > 0.$$

$$(1) \begin{array}{r} 4x+0 \quad |x+2 \\ -4x-8 \quad 4 \\ \hline -8 \end{array}$$

$$3.2. g(x) = 3,5 \Leftrightarrow 4 - \frac{8}{x+2} = 3,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,5 - \frac{8}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,5x+1-8}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,5x-7}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,5x-7 = 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 14$$

$$\text{Ordenada do ponto } P: f(14) = \frac{8}{14+2} = \frac{8}{16} = 0,5$$

A medida da área do triângulo  $[OAP]$  é 3,5 quando  $P(14; 0,5)$ .

$$101.1. f(x) = -1 + \frac{3}{x+2}$$

$$f(0) = -1 + \frac{3}{0+2} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

O gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Ox$  no ponto de coordenadas  $(0, \frac{1}{2})$ .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{3}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x-2+3}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow -x+1=0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \Leftrightarrow x=1$$

O gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Ox$  no ponto de coordenadas  $(1, 0)$ .

Ponto de interseção com o eixo  $Ox$ :  $(1, 0)$

Ponto de interseção com o eixo  $Oy$ :  $(0, \frac{1}{2})$

$$f(x) = -1 + \frac{3}{x+2} = \frac{-x+1}{x+2}$$

$x$	$-\infty$	$-2$		$1$	$+\infty$
$-x+1$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$
$x+2$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	n.d.	$+$	$0$	$-$

$f$  é positiva em  $x \in ]-2, 1[$ .

$f$  é negativa em  $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]1, +\infty[$ .

$$101.2. f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x-1}$$

$$f(0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{0-1} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

O gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Oy$  no ponto de coordenadas  $(0, -\frac{3}{2})$ .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1+4}{2(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{2x-2} = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Leftrightarrow x=-3$$

O gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Ox$  no ponto de coordenadas  $(-3, 0)$ .

Ponto de interseção com o eixo  $Ox$ :  $(-3, 0)$

Ponto de interseção com o eixo  $Oy$ :  $(0, -\frac{3}{2})$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x-1} = \frac{x+3}{2x-2}$$

### Página 78 – Prática

$$101. f(x) = a + \frac{b}{x-c}, b \neq 0$$



$x$	$-\infty$	$-3$		$1$	$+\infty$
$x+3$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$2x-2$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	n.d.	$+$

$f$  é positiva em  $x \in ]-\infty, -3[ \cup ]1, +\infty[$ .

$f$  é negativa em  $x \in ]-3, 1[$ .

101.3.  $f(x) = -3 + \frac{1}{x+2}$

$$f(0) = -3 + \frac{1}{0+2} = -3 + \frac{1}{2} = -\frac{11}{2}$$

O gráfico de  $f$  intersesta o eixo  $Oy$  no ponto de coordenadas  $(0, -\frac{11}{2})$ .

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow -3 + \frac{1}{x+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3x-6+1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-5}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3x-5 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

O gráfico de  $f$  intersesta o eixo  $Ox$  no ponto de coordenadas  $(-\frac{5}{3}, 0)$ .

Ponto de interseção com o eixo  $Ox$ :  $(-\frac{5}{3}, 0)$

Ponto de interseção com o eixo  $Oy$ :  $(0, -\frac{11}{2})$

$$f(x) = -3 + \frac{1}{x+2} = \frac{-3x-5}{x+2}$$

$x$	$-\infty$	$-2$		$-\frac{5}{3}$	$+\infty$
$-3x-\frac{5}{2}$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$
$x+2$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	n.d.	$+$	$0$	$-$

$f$  é positiva em  $x \in ]-2, -\frac{5}{3}[$ .

$f$  é negativa em  $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]-\frac{5}{3}, +\infty[$ .

102.1.  $f(x) = \frac{-4x+3}{2x+1}$

$$\frac{-4x+3}{2x+1} = \frac{-4x+2}{2x+1} + \frac{1}{2x+1} = \frac{-4x+2}{2(x+\frac{1}{2})} + \frac{1}{2(x+\frac{1}{2})} = \frac{-4x+3}{2(x+\frac{1}{2})}$$

$$f(x) = -2 + \frac{5}{2(x+\frac{1}{2})} = -2 + \frac{5}{2x+1}$$

102.2.  $f(x) = \frac{-6}{2x+4} = \frac{-6}{2(x+2)} = \frac{-3}{x+2}$

102.3.  $f(x) = \frac{3}{3x-1} = \frac{3}{3(x-\frac{1}{3})} = \frac{1}{x-\frac{1}{3}}$

**Página 79 – Prática**

103.  $h(t) = \frac{4,5t+2}{t+4}; t \geq 0$

$t$  (em meses)  
 $h$  (em metros)

103.1.  $h(0) = \frac{4,5 \times 0 + 2}{0 + 4} = \frac{2}{4} = 0,5$

A altura da árvore quando foi plantada era 0,5 m.

103.2. meio ano  $\rightarrow$  6 meses

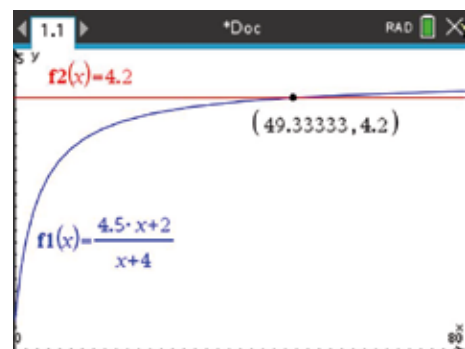
$$h(6) = \frac{4,5 \times 6 + 2}{6 + 4} = \frac{29}{10} = 2,9$$

$$h(6) - h(0) = 2,9 - 0,5 = 2,4$$

Meio ano após a plantação da árvore, a sua altura aumentou 2,4 m.

103.3.  $h(t) = 4,2$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



$$h(t) = 4,2 \Leftrightarrow t = 49,3$$



$$\frac{49,3}{12} \approx 4,1$$

Para que a árvore atinja 4,2 m de altura são necessários, no mínimo, 50 meses completos, ou seja, 5 anos completos.

103.4.  $h(t) = \frac{4,5t + 2}{t + 4}$

$$\begin{array}{r} 4,5t + 2 \quad | \quad t + 4 \\ -4,5t - 18 \quad | \quad 4,5 \\ \hline -16 \end{array}$$

$$h(t) = 4,5 + \frac{-16}{t + 4} = 4,5 + \frac{-16}{t - (-4)}$$

**Conclusão:**  $a = 4,5$ ;  $b = -16$  e  $c = -4$ .

104.

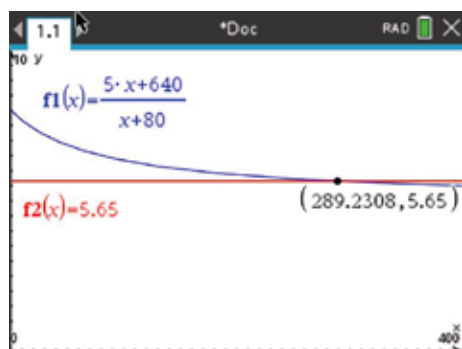
Bilhetes	Preço	N.º de bilhetes vendidos
Tipo A (menores de 12 anos)	5	$x$
Tipo B (maiores ou iguais a 12 anos)	8	80

104.1.  $m(x) = \frac{5 \times x + 8 \times 80}{x + 80} = \frac{5x + 640}{x + 80}$  e  $0 < x \leq 400$ ,

pois o recinto tem capacidade para 400 pessoas.

104.2. a) Pretende-se saber qual é a solução da condição  $m(x) = 5,65$ .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

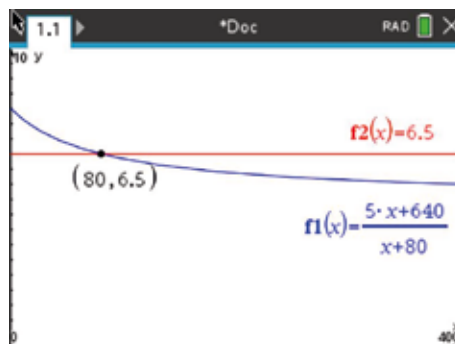


$$m(x) = 5,65 \Leftrightarrow x \approx 289$$

Se o preço médio de cada bilhete tiver sido 5,65€, então foram vendidos 289 bilhetes do tipo A.

b) Pretende-se saber qual é o valor máximo de  $x$ , para o qual  $m(x) \geq 6,50$ .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



$$m(x) \geq 6,50 \Leftrightarrow x \leq 80$$

Para que o preço médio por bilhete não seja inferior a 6,50€, no máximo, é possível vender 80 bilhetes do tipo A.

105.  $f(x) = \frac{3x - 1}{-2x + 1}$

$$\begin{array}{r} 3x - 1 \quad | \quad -2x + 1 \\ -3x + \frac{3}{2} \quad | \quad -\frac{3}{2} \\ \hline \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{-2x + 1} = -\frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = -1,5 + \frac{-0,25}{x - 0,5} \end{aligned}$$

Então,  $a = -1,5$ ;  $b = -0,25$  e  $c = 0,5$ .

A opção correta é a (B).

106.  $y = a + \frac{1}{x}$ ,  $a \in \mathbb{R}^-$ ;  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow a + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{ax + 1}{x} > 0$$

$$f(x) = \frac{ax + 1}{x}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{ax + 1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax + 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{a}$$

Como  $a \in \mathbb{R}^-$ , então  $-\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$ .



$x$	$-\infty$	$0$		$-\frac{1}{a}$	$+\infty$
$ax+1$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$
$x$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	n.d.	$+$	$0$	$-$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] 0, -\frac{1}{a} \right[$$

7 é o maior número inteiro que é solução da inequação  $f(x) > 0$  se  $7 < -\frac{1}{a} < 8$ .

$$\begin{aligned} 7 < -\frac{1}{a} < 8 &\Leftrightarrow -\frac{1}{a} > 7 \wedge -\frac{1}{a} < 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -1 < 7a \wedge -1 > 8a \\ &\Leftrightarrow a > -\frac{1}{7} \wedge a < -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$a \in \left] -\frac{1}{7}, -\frac{1}{8} \right[$$

$$-\frac{1}{7} \approx 0,142857 \text{ e } -\frac{1}{8} = -0,125$$

Assim, a expressão analítica de uma função da família dada que satisfaça as condições do enunciado é, por exemplo,  $f(x) = -0,13 + \frac{1}{x}$ .

## Página 80

107.  $f(x) = -\frac{1}{x}$

107.1. a)  $f(0,5) = -\frac{1}{0,5} = -2$

$$f(0,01) = -\frac{1}{0,01} = -100$$

Assim,  $f(0,5) > f(0,01)$ .

A imagem maior é  $f(0,5)$ .

b)  $f(-0,03) = -\frac{1}{-0,03} = \frac{100}{3}$

$$f(-0,01) = -\frac{1}{-0,01} = 100$$

Assim,  $f(-0,01) > f(-0,03)$ .

A imagem maior é  $f(-0,01)$ .

107.2. a) Se  $x \rightarrow 0^+$ , então  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

b) Se  $x \rightarrow 0^-$ , então  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

## Página 81

108.1.  $f(x) = -\frac{2}{x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Quando  $x \rightarrow 0^-$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Quando  $x \rightarrow 0^+$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

A reta de equação  $x = 0$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

108.2.  $f(x) = \frac{3}{x-2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Quando  $x \rightarrow 2^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Quando  $x \rightarrow 2^+$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

A reta de equação  $x = 2$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

108.3.  $f(x) = \frac{5}{x+3}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Quando  $x \rightarrow -3^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Quando  $x \rightarrow -3^+$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

A reta de equação  $x = -3$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

108.4.  $f(x) = 4 - \frac{1}{x+5}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

Quando  $x \rightarrow -5^-$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Quando  $x \rightarrow -5^+$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

A reta de equação  $x = -5$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

109.  $f(x) = \frac{b}{x-c}$ ,  $b \neq 0$

O gráfico de qualquer função da família

$y = \frac{b}{x-c}$ ,  $b \neq 0$ , admite uma assíntota vertical de

equação  $x = c$ .



Como se sabe que  $x = -1$  é a equação da assíntota vertical ao gráfico de  $f$ , então conclui-se que  $c = -1$ .

Assim,  $f(x) = \frac{b}{x+1}$ ;  $b \neq 0$ .

O gráfico de  $f$  intersesta o eixo  $Oy$  no ponto de coordenadas  $(0, -2)$ , ou seja  $f(0) = -2$ .

$$f(0) = -2 \Leftrightarrow \frac{b}{0+1} = -2 \Leftrightarrow b = -2$$

Então,  $f(x) = \frac{-2}{x+1}$ .

**Página 82**

**110.1.**  $f(x) = 3 + \frac{2}{x}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}; D'_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 3^-$ .

Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 3^+$ .

A reta de equação  $y = 3$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

**110.2.**  $f(x) = -1 - \frac{5}{x}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -1^+$ .

Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -1^-$ .

A reta de equação  $y = -1$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

**110.3.**  $f(x) = -\frac{1}{x+2}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 0^+$ .

Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 0^-$ .

A reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

**110.4.**  $f(x) = -2 + \frac{6}{x-1}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -2^-$ .

Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -2^+$ .

A reta de equação  $y = -2$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

**111.1.**  $f(x) = -2 + \frac{3}{x}$

Equação da assíntota vertical:  $x = 0$

Equação da assíntota horizontal:  $y = -2$

As coordenadas do ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de  $f$  são  $(0, -2)$ .

**111.2.**  $f(x) = 1 + \frac{2}{x+4}$

Equação da assíntota vertical:  $x = -4$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 1$

As coordenadas do ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de  $f$  são  $(-4, 1)$ .

**111.3.**  $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-3}$

Equação da assíntota vertical:  $x = 3$

Equação da assíntota horizontal:  $y = -\frac{1}{2}$

As coordenadas do ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de  $f$  são  $(3, -\frac{1}{2})$ .

**112.**  $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ ;  $b \neq 0$

Se  $x = -1$  e  $y = 3$  as equações das assíntotas ao gráfico de  $f$ , então  $c = -1$  e  $a = 3$ .

Como o ponto de coordenadas  $(0, 1)$  pertence ao gráfico de  $f$ , então  $f(0) = 1$ .

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow 3 + \frac{b}{0+1} = 1 \Leftrightarrow 3 + b = 1 \Leftrightarrow b = -2$$

Então,  $f(x) = 3 + \frac{-2}{x+1}$ .



### Página 83 – Tarefa 16

1.1. Por observação gráfica, sabe-se que  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$\text{e } D_f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

1.2. Se as retas definidas pelas equações  $x = 3$  e  $y = -1$  são assíntotas ao gráfico de  $f$ , então  $c = 3$  e  $a = -1$ .

$$\text{Assim, } f(x) = -1 + \frac{b}{x-3}.$$

O gráfico de  $f$  interseca  $Oy$  no ponto de

$$\text{coordenadas } \left(0, -\frac{5}{3}\right), \text{ ou seja, } f(0) = -\frac{5}{3}.$$

$$\begin{aligned} f(0) = -\frac{5}{3} &\Leftrightarrow -1 + \frac{b}{0-3} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -1 - \frac{b}{3} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{b}{3} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow b = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } f(x) = -1 + \frac{2}{x-3}.$$

1.3.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{2}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3+2}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{-x+5}{x-3} = 0 \Leftrightarrow -x+5 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \Leftrightarrow x = 5$

Zero de  $f$ : 5

2.1.  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  e  $D_g' = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$g(x) = a + \frac{b}{x-c}; \quad b \neq 0$$

Equação da assíntota vertical:  $x = -2$

$$\text{Equação da assíntota horizontal: } y = \frac{1}{2}$$

2.2. Sabe-se que  $c = -2$  e  $a = \frac{1}{2}$ , então

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{b}{x+2}, \quad b \neq 0.$$

Como o ponto de coordenadas  $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$  pertence

ao gráfico de  $g$ , então  $g(-1) = \frac{5}{2}$ .

$$g(-1) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{b}{-1+2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + b = \frac{5}{2} \Leftrightarrow b = 2$$

$$\text{Então, } g(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x+2}.$$

3. As retas de equações  $x = -1$  e  $y = 2$  são as assíntotas vertical e horizontal ao gráfico das funções  $f$  e  $g$ .

Então,  $f$  e  $g$  são definidas por expressões do

$$\text{tipo } y = 2 + \frac{b}{x+1}, \quad b \neq 0.$$

Atendendo às representações gráficas, sabe-se que, no caso da função  $f$ , o valor de  $b$  é positivo e, no caso da função  $g$ , o valor de  $b$  é negativo.

As funções  $f$  e  $g$  podem ser definidas, por

$$\text{exemplo, por } f(x) = 2 + \frac{2}{x+1} \text{ e } g(x) = 2 - \frac{3}{x+1}.$$

### Página 84 – Tarefa 17

1.1.  $f(x) = \frac{5x-2}{x+3}$

$$\begin{array}{r} 5x-2 \quad |x+3 \\ -5x-15 \quad 5 \\ \hline -17 \end{array}$$

$$f(x) = 5 + \frac{-17}{x+3}, \text{ ou seja, } f(x) = 5 - \frac{17}{x+3}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = -3$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 5$

1.2.  $f(x) = \frac{-4x+3}{2x-1}$

$$\begin{array}{r} -4x+3 \quad |2x-1 \\ 4x-2 \quad -2 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$f(x) = -2 + \frac{1}{2x-1} = -2 + \frac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = -2 + \frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = \frac{1}{2}$

Equação da assíntota horizontal:  $y = -2$

2.3.  $f(x) = \frac{x-2}{3x}$

$$\begin{array}{r} x-2 \quad |3x \\ -x \quad \frac{1}{3} \\ \hline -2 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{-2}{3x} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3x}$$



Equação da assíntota vertical:  $x = 0$

Equação da assíntota horizontal:  $y = \frac{1}{3}$

2.  $T(t) = \frac{7t+24}{t+2}$

$T$ : temperatura, em graus Celsius

$t$ : tempo após o início do espetáculo, em horas

2.1.  $T(0) = \frac{7 \times 0 + 24}{0 + 2} = \frac{24}{2} = 12$

No início do espetáculo, a temperatura era  $12^\circ\text{C}$ .

2.2. 
$$\begin{array}{r} 7t + 24 \quad |t + 2 \\ -7t - 14 \quad 7 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$T(t) = 7 + \frac{10}{t+2}$$

A reta de equação  $y = 7$  é assíntota horizontal

ao gráfico de  $T$ , isto é, quando  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$T(t) \rightarrow 7.$$

Com o passar do tempo, a temperatura aproxima-se cada vez mais de  $7^\circ\text{C}$ .

### Página 85 – Tarefa 18

1.  $f(x) = \frac{3x-10}{x-4}$

1.1. 
$$\begin{array}{r} 3x - 10 \quad |x - 4 \\ -3x + 12 \quad 3 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$f(x) = 3 + \frac{2}{x-4}$$

Equação da assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ :

$$y = 3$$

1.2. a)  $P(x, f(x))$ ,  $x > 4$ , ou seja,

$$P\left(x, \frac{3x-10}{x-4}\right),$$

$$x > 4$$

$$S\left(4, \frac{3x-10}{x-4}\right) \text{ e } R(4, 0)$$

$$A_{\{ORS\}} = \frac{\overline{OR} \times \overline{RS}}{2}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4 \times \frac{3x-10}{x-4}}{2} = \\ &= 2 \times \frac{3x-10}{x-4} \\ &= 2 \times \left(3 + \frac{2}{x-4}\right) \\ &= 6 + \frac{4}{x-4} \end{aligned}$$

b)  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > 4\} = ]4, +\infty[$

c)  $g(x) = 6 + \frac{4}{x-4}$

Equação da assíntota horizontal ao gráfico

de  $g$ :  $y = 6$ .

No contexto apresentado, significa que

quando a abcissa do ponto  $P$  é muito grande

( $x \rightarrow +\infty$ ), então a medida da área do

triângulo  $[ORS]$  aproxima-se de 6.

2.  $P(x) = \frac{0,35x+10}{x}$ ,  $x > 0$

$x$ : n.º de autocolantes

$P$ : preço de cada autocolante, em euros

2.1.  $P(800) = \frac{0,35 \times 800 + 10}{800} = \frac{290}{800}$

Preço total da encomenda (em euros):

$$\frac{290}{800} \times 800 = 290$$

Para concluir o pedido, o cliente paga 10% do valor da encomenda, ou seja, 29€.

2.2. Valor total da encomenda: 570€

$$P(x) \times x = 570 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,35x+10}{x} \times x = 570$$

$$\Leftrightarrow 0,35x + 10 = 570$$

$$\Leftrightarrow 0,35x = 560$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{560}{0,35}$$

$$\Leftrightarrow x = 1600$$

O cliente encomendou 1600 autocolantes.

2.3.  $P(x) = \frac{0,35x+10}{x} = \frac{0,35x}{x} + \frac{10}{x} = 0,35 + \frac{10}{x}$

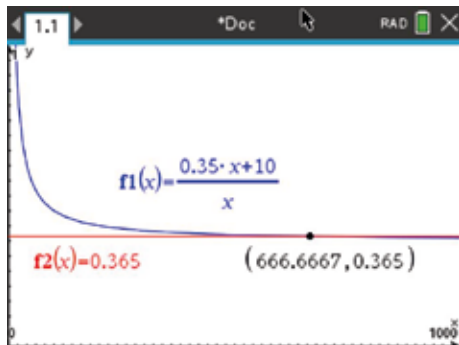
Equação da assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ :

$y = 0,35$ .

Podemos concluir que quando o número de autocolantes encomendado é muito, muito grande, o preço de cada um deles aproxima-se de 0,35€.

#### 2.4. $P(x) < 0,365$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



$$x \approx 667$$

Para que o preço unitário, em euros, seja inferior a 0,365€, a encomenda deve ter, no mínimo, 667 autocolantes.

### Página 86 – Consolidada

$$1.1. f(x) = \frac{6}{6x-1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 6x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{6} \right\}$$

$$1.2. f(x) = \frac{8x^3 - x + 5}{2x^2 - 5x - 12}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 5x - 12 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, 4 \right\}$$

Cálculo auxiliar:

$$2x^2 - 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5+11}{4} \vee x = \frac{5-11}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -\frac{3}{2}$$

$$1.3. f(x) = \frac{5}{4x^3 - 4x^2 + x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^3 - 4x^2 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$$

Cálculo auxiliar:

$$4x^3 - 4x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

$$1.4. f(x) = \frac{x-10}{x^4-9x^2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 9x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$$

Cálculo auxiliar:

$$x^4 - 9x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3$$

$$1.5. f(x) = \frac{x^2-1}{2x^3-8x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x^3 - 8x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$$

Cálculo auxiliar:

$$2x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$$

$$2. f(x) = 3 + \frac{1}{x} \text{ e } g(x) = \frac{2}{x-3}$$

$$2.1. D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$2.2. f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+1=0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Zero de } f: -\frac{1}{3}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-3} = 0 \Leftrightarrow 2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

A função  $g$  não tem zeros.

$$3. f(x) = \frac{4x}{7x^2-x}$$

$$3.1. D_f = \{x \in \mathbb{R} : 7x^2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{1}{7} \right\}$$

Cálculo auxiliar:

$$7x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(7x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{7}$$



$$3.2. f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{7x^2 - x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{7}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{7}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Então, a função  $f$  não tem zeros.

$$3.3. f(x) = \frac{4x}{7x^2 - x} = \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}(7x - 1)} = \frac{4}{7x - 1}$$

$$4. f(x) = \frac{1}{x} \text{ e } g(x) = -5 + \frac{1}{x - 2}$$

O gráfico de  $g$  pode ser obtido a partir do gráfico de  $f$  através de uma translação associada ao vetor  $\vec{u}(2, -5)$ .

A opção correta é a (D).

$$5. f(x) = \frac{1}{x}$$

O gráfico de  $g$  é obtido a partir do gráfico de  $f$  por uma translação associada ao vetor  $\vec{u}\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ .

$$g(x) = \frac{1}{x - \left(-\frac{5}{3}\right)} = \frac{1}{x + \frac{5}{3}} = \frac{3}{3x + 5}$$

A opção correta é a (A).

$$6. f(x) = a + \frac{b}{x}; b \neq 0$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$$

Por observação gráfica, sabe-se que  $a > 0$ .

Sabe-se, ainda, que, quando  $x < 0$ , então

$$f(x) > 0.$$

Logo, conclui-se que  $b < 0$ .

A opção correta é a (B).

$$7. f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{x + 1}$$

$$7.1. D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ e } D_f' = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

7.2. Interseção com o eixo  $Ox$ :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x + 3 + 2}{2(x + 1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x + 5}{2x + 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 5 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

O gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Ox$  no ponto de coordenadas  $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ .

Interseção com o eixo  $Oy$ :

$$f(0) = \frac{3}{2} + \frac{1}{0 + 1} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

O gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Oy$  no ponto de coordenadas  $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ .

Resposta:  $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$  e  $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

#### Página 87 – Consolida

$$8. f(x) = \frac{1}{x}$$

8.1. Como o gráfico de  $h$  se obteve a partir do gráfico de  $f$  através de uma translação associada ao vetor  $\vec{u}(2, -4)$ , então:

$$h(x) = -4 + \frac{1}{x - 2}$$

A opção correta é a (C).

$$8.2. h(x) = -4 + \frac{1}{x - 2}$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow -4 + \frac{1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x + 8 + 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x + 9}{x - 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 9 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$A\left(\frac{9}{4}, 0\right)$$



$$h(0) = -4 + \frac{1}{0-2} = -4 - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$B\left(0, -\frac{9}{2}\right)$$

9.  $f(x) = \frac{5x+3}{x} = \frac{5x}{x} + \frac{3}{x} = 5 + \frac{3}{x}$

Então,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

A opção correta é a (A).

10.  $f(x) = \frac{1}{x}$  e  $g(x) = 2 - \frac{1}{x}$

Por observação das representações gráficas das funções  $f$  e  $g$ , sabe-se que  $]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$  é o conjunto-solução da condição  $g(x) > f(x)$ .

$$g(x) > f(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0$$

A opção correta é a (A).

11.  $f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$

11.1.  $3x - 4 \quad |x+2$

$$\frac{-3x - 6 \quad 3}{-10}$$

$$f(x) = 3 + \frac{-10}{x+2} \Leftrightarrow f(x) = 3 - \frac{10}{x+2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

11.2.

x	$-\infty$	-2		$\frac{4}{3}$	$+\infty$
f(x)	+	n.d.	-	0	+

Cálculo auxiliar:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$f$  é positiva em  $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]\frac{4}{3}, +\infty[$ .

**Página 88 – Consolida**

12.  $f(x) = a + \frac{b}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x-c}$  e  $h(x) = \frac{b}{x}$ ;  $a \neq 0$ ,  
 $b \neq 0$  e  $c \neq 0$

12.1. As funções  $g$  e  $h$  não têm zeros, pois o seu contradomínio é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

12.2.  $D_f = D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{c\}$$

Como uma das funções tem domínio  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ , então  $c = 4$ .

$$D_g = D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$$

Como uma das funções tem contradomínio  $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ , então  $a = -5$ .

O gráfico que não interseja os eixos coordenados é o da função  $h$ . Como passa no ponto de coordenadas  $(-1, 2)$ , então sabe-se que

$$h(-1) = 2.$$

$$h(-1) = 2 \Leftrightarrow \frac{b}{-1} = 2 \Leftrightarrow b = -2$$

Assim,  $a = -5$ ,  $b = -2$  e  $c = 4$ .

13.  $f(x) = 2 + \frac{8}{x+2}$

$$Q(0, f(0))$$

$$f(0) = 2 + \frac{8}{0+2} = 2 + 4 = 6, \text{ logo } Q(0, 6).$$

$$P(x, f(x)), x > 0$$

$$A_{\{OPQ\}} = 24 \Leftrightarrow \frac{\overline{OQ} \times x_P}{2} = 24 \Leftrightarrow \frac{6 \times x}{2} = 24 \Leftrightarrow x = 8$$

$$\text{Então } P(8, f(8)).$$

$$\text{Como } f(8) = 2 + \frac{8}{8+2} = 2 + \frac{8}{10} = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5},$$

$$\text{então } P\left(8, \frac{14}{5}\right).$$

14.  $h(t) = \frac{6t+1}{t+2}$

$h$ : altura da árvore, em metros

$t$ : tempo após a plantação, em anos



$$14.1. h(0) = \frac{6 \times 0 + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

A altura da árvore, quando foi plantada, era 0,5 m.

$$14.2. 12 \text{ meses} \text{ — } 1 \text{ ano}$$

$$9 \text{ meses} \text{ — } x$$

$$x = \frac{9 \times 1}{12} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$h(0,75) - h(0) = \frac{6 \times 0,75 + 1}{0,75 + 2} - 0,5 =$$

$$= 2 - 0,5 = 1,5$$

A variação da altura da árvore nos primeiros nove meses após ter sido plantada foi de 1,5 m.

$$14.3. h(t) = 4 \Leftrightarrow \frac{6t+1}{t+2} = 4 \Leftrightarrow 6t+1 = 4t+8 \Leftrightarrow$$

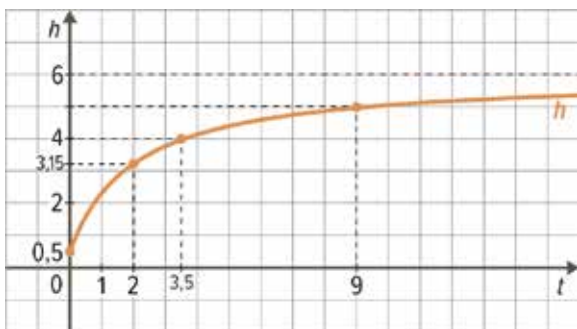
$$\Leftrightarrow 2t = 7 \Leftrightarrow t = 3,5$$

A árvore atingiu 4 metros de altura três anos e meio após a sua plantação.

$$14.4. h(t) = \frac{6t+1}{t+2}, t \geq 0$$

$$\frac{6t+1}{t+2} \quad \frac{-6t-12}{6} \\ \hline -11$$

$$h(t) = 6 - \frac{11}{t+2}, t \geq 0$$



14.5. A equação da assíntota horizontal ao gráfico da função  $h$  é  $y = 6$ .

Quando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $h(t) \rightarrow 6^-$ .

Logo, conclui-se que, com o decorrer dos anos, a altura da árvore tende para 6 metros.

$$15. f(x) = \frac{4x-11}{x-3}$$

$$15.1. \frac{4x-11}{x-3} \quad \frac{-4x+12}{4} \\ \hline 1$$

$$f(x) = 4 + \frac{1}{x-3}$$

$$15.2. D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{ e } D'_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

15.3. Equação da assíntota vertical ao gráfico de  $f$ :

$$x = 3$$

Equação da assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ :

$$y = 4$$

15.4. Interseção com o eixo  $Ox$ :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x-11}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-11=0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11}{4}$$

O gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Ox$  no ponto de coordenadas  $(\frac{11}{4}, 0)$ .

Ponto de interseção com o eixo  $Oy$ :

$$f(0) = \frac{4 \times 0 - 11}{0 - 3} = \frac{11}{3}$$

O gráfico de  $f$  interseca o eixo  $Oy$  no ponto de coordenadas  $(0, \frac{11}{3})$ .

**Resposta:**  $(\frac{11}{4}, 0)$  e  $(0, \frac{11}{3})$

$$16.1. f(x) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{x}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = 0$

Equação da assíntota horizontal:  $y = -\frac{3}{2}$

$$16.2. f(x) = 3 - \frac{5}{x-1}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = 1$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 3$



$$16.3. f(x) = -1 + \frac{3}{2x-4} = -1 + \frac{3}{2(x-2)} = -1 + \frac{\frac{3}{2}}{x-2}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = 2$

Equação da assíntota horizontal:  $y = -1$

$$16.4. f(x) = 0,2 + \frac{2}{5x-1} = 0,2 + \frac{2}{5\left(x-\frac{1}{5}\right)} = 0,2 + \frac{\frac{2}{5}}{x-\frac{1}{5}}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = \frac{1}{5}$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 0,2$

### Página 89 – Consolida

17. Classe conforto: 48 lugares e preço do bilhete é 100 € .  
Classe económica: 138 lugares e preço do bilhete é 65 € .  
 $x$  : n.º de bilhetes vendidos da classe conforto  
 $f(x)$  : preço médio por bilhete, em euros

17.1.

- N.º total de bilhetes vendidos:  $138 + x$ , em que  $0 \leq x \leq 48$  ;
- Valor, em euros, obtido com os lugares da classe económica:  $65 \times 138 = 8970$  ;
- Valor, em euros, obtido com os lugares de classe conforto:  $100 \times x = 100x$  ;
- Valor, em euros, obtido com todos os lugares vendidos:  $8970 + 100x$  .

Então, sendo  $f(x)$  o preço médio por bilhete,

em euros, tem-se que  $f(x) = \frac{8970 + 100x}{138 + x}$ , em que  $0 \leq x \leq 48$  .

$$17.2. f(x) = 70 \Leftrightarrow \frac{8970 + 100x}{138 + x} = 70 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8970 + 100x = 70(x + 138)$$

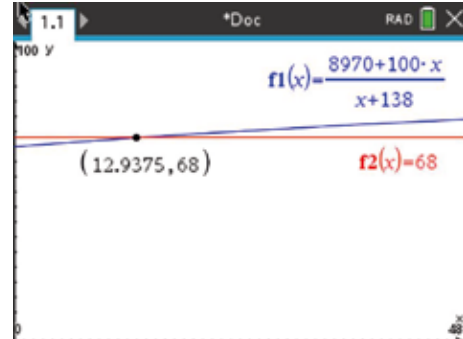
$$\Leftrightarrow 8970 + 100x = 70x + 9660$$

$$\Leftrightarrow 30x = 690 \Leftrightarrow x = 23$$

Se o preço médio por bilhete foi 70€, então 23 pessoas compraram bilhete para a classe conforto.

- 17.3. Pretende-se saber o valor máximo de  $x$ , tal que  $f(x) < 68$  .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



Então,  $x < 12,9375$  .

Logo, conclui-se que, para que o preço médio por bilhete seja inferior a 68€, devem ser vendidos, no máximo, 12 bilhetes da classe conforto.

$$18. f(x) = a + \frac{b}{x-c}; b \neq 0$$

$A(-1, -2)$  é o ponto de interseção das assíntotas.

$B(-2, -6)$  pertence ao gráfico de  $f$ .

- 18.1. Se  $A(-1, -2)$  é o ponto de interseção das assíntotas, então as assíntotas ao gráfico de  $f$  são as retas de equações  $x = -1$  e  $y = -2$  .  
Assim,  $c = -1$  e  $a = -2$  .

$$\text{Logo, } f(x) = -2 + \frac{b}{x+1}, b \neq 0.$$

Como  $B(-2, -6)$  pertence ao gráfico de  $f$ , sabe-se que  $f(-2) = -6$  .

$$f(-2) = -6 \Leftrightarrow -2 + \frac{b}{-2+1} = -6 \Leftrightarrow \frac{b}{-1} = -4 \Leftrightarrow b = 4$$

$$\text{Logo, conclui-se que } f(x) = -2 + \frac{4}{x+1}.$$

- 18.2. Interseção com o eixo  $Ox$  :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + \frac{4}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-2+4}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x+2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$



$$I_1(1, 0)$$

Ponto de interseção com o eixo  $Oy$  :

$$f(0) = -2 + \frac{4}{0-1} = -2 + 4 = 2$$

$$I_2(0, 2)$$

O gráfico de  $f$  interseca os eixos coordenados nos pontos de coordenadas  $(1, 0)$  e  $(0, 2)$ .

19. Torneira A  $\rightarrow$  tempo de enchimento do tanque: 5 horas  
 Torneira B  $\rightarrow$  tempo de enchimento do tanque:  $t$  horas

- 19.1. Seja  $V$  o volume do tanque.

$\frac{V}{5} \rightarrow$  Volume do tanque que a torneira A enche em uma hora

$\frac{V}{t} \rightarrow$  Volume do tanque que a torneira B enche em uma hora

$\frac{V}{5} + \frac{V}{t} \rightarrow$  Volume do tanque que as torneiras A e B enchem em uma hora.

$$\frac{V}{5} + \frac{V}{t} = \frac{Vt + 5V}{5t} = \frac{V(t+5)}{5t} = \frac{V}{\frac{5t}{t+5}}$$

Assim, o tempo de enchimento do tanque, em horas, se forem utilizadas simultaneamente as duas torneiras, A e B, é dado por  $T(t) = \frac{5t}{t+5}$ ,  $t > 0$ .

- 19.2.  $T(t) = \frac{5t}{t+5}$ ,  $t > 0$

$$\frac{5t + 0}{-5t - 25} \quad \frac{t+5}{5}$$

$$T(t) = 5 - \frac{25}{t+5}$$

Equação da assíntota horizontal ao gráfico de  $T$ :  $y = 5$

No contexto apresentado, significa que à medida que  $t \rightarrow +\infty$  (ou seja, o tempo de enchimento só com a torneira B aumenta muito),  $T \rightarrow 5$ , ou seja, o tempo de enchimento com as duas

torneiras aproxima-se de 5 horas (que é o tempo de enchimento só com a torneira A).

**Página 90 – Avalia 3 – Parte 1**

1.  $f(x) = \frac{4-x^2}{x+2}$   $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4-x^2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ &\Leftrightarrow (x=2 \vee x=-2) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ &\Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

A opção correta é a (B).

2.  $f(x) = \frac{1}{x}$

Como o gráfico de  $g$  é obtido a partir do gráfico de  $f$  pela translação de vetor  $\vec{u}(-1, 0)$ , então

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

A opção correta é a (C).

3.  $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ ;  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$

Equação da assíntota vertical:  $x = c$

Equação da assíntota horizontal:  $y = a$

Atendendo à representação gráfica da função  $f$ , conclui-se que  $c > 0$  e  $a < 0$ .

Sabe-se, ainda, que, quando  $x \rightarrow c^+$ , então  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Logo, conclui-se que  $b < 0$ .

A opção correta é a (A).

4.  $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ ;  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$

$x = -2$  e  $y = 1$  são as equações das assíntotas ao gráfico de  $f$ .

Por observação gráfica, sabe-se que:

Quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 1^-$ .

Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 1^+$ .

Quando  $x \rightarrow -2^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Quando  $x \rightarrow -2^+$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

A opção correta é a (D).



5.  $f(x) = 1 + \frac{3}{2x-4} = 1 - \frac{3}{2(x-2)} = 1 - \frac{\frac{3}{2}}{x-2}$

Equação da assíntota vertical:  $x = 2$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 1$

A opção correta é a (C).

**Página 91 – Avalia 3 – Parte 2**

1.  $f(x) = \frac{2-3x}{x-2}$

1.1. 
$$\begin{array}{r} -3x+2 \quad |x-2 \\ 3x-6 \quad -3 \\ \hline -4 \end{array}$$

$f(x) = -3 + \frac{-4}{x-2} = -3 - \frac{4}{x-2}$

1.2. Equação da assíntota vertical:  $x = 2$

Equação da assíntota horizontal:  $y = -3$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-3x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-3x = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Zero de  $f$ :  $\frac{2}{3}$

1.3.  $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-3x}{x-2} \geq 0$

$x$	$-\infty$	$\frac{2}{3}$		$2$	$+\infty$
$2-3x$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-$	$0$	$+$	n.d.	$-$

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$

O conjunto-solução de condição  $f(x) \geq 0$  é:

C.S. =  $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ .

2.

Telas	Área de pintura	Preço
Tipo A	Não ultrapassa $1 \text{ m}^2$	$180 \text{ €}$
Tipo B	Entre $1 \text{ m}^2$ e $2 \text{ m}^2$	$350 \text{ €}$

15: n.º de telas do tipo A encomendadas

$x$ : n.º de telas do tipo B encomendadas

$f(x)$ : preço médio de cada tela encomendada, em euros

2.1.  $x+15$ : n.º total de telas, do tipo A e B, encomendadas

$180 \times 15$ : preço das telas do tipo A encomendadas

$350 \times x$ : preço das telas do tipo B encomendadas

$\frac{180 \times 15 + 350 \times x}{2700 + 350x}$ : preço de todas as telas encomendadas

$f(x) = \frac{2700 + 350x}{x + 15}, x > 0$

2.2.  $350x + 2700 \quad |x + 15$

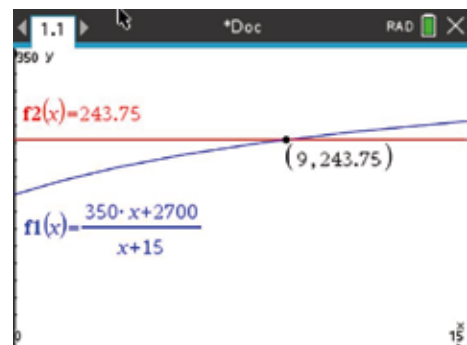
$$\begin{array}{r} -350x - 5250 \quad 350 \\ \hline -2550 \end{array}$$

$f(x) = 350 + \frac{-2550}{x + 15} = 350 - \frac{2550}{x + 15}$

Equação da assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ :  $y = 350$

No contexto apresentado, significa que, se for encomendado um número muito grande de telas do tipo B, então o preço médio por tela encomendada aproxima-se de  $350 \text{ €}$ .

2.3. a) Pretende-se saber o valor de  $x$  para o qual  $f(x) = 243,75$ . Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:

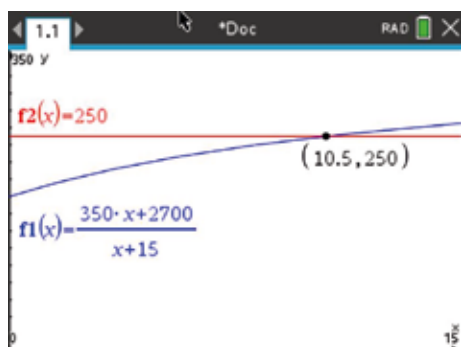


Então,  $x = 9$ .

Conclui-se que, se o preço médio, por tela encomendada, for  $243,75 \text{ €}$ , então foram encomendadas nove telas do tipo B.



- b) Pretende-se saber qual é o maior valor de  $x$  para o qual  $f(x) \leq 250$ . Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



Então,  $x \leq 10,5$ .

Assim, conclui-se que, para que o preço médio, por tela encomendada, não ultrapasse 250€, então no máximo terão de ser encomendadas 10 telas do tipo B.

3.  $f(x) = 5 + \frac{2}{-x+1}$

- 3.1. Ponto de interseção com o eixo  $Ox$  :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 5 + \frac{2}{-x+1} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-5x+5+2}{-x+1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{-5x+7}{-x+1} = 0 \\ \Leftrightarrow -5x+7 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} & \\ \Leftrightarrow x = \frac{7}{5} & \\ I_1\left(\frac{7}{5}, 0\right) & \end{aligned}$$

Ponto de interseção com o eixo  $Oy$  :

$$f(0) = 5 + \frac{2}{-0+1} = 5+2 = 7; I_2(0, 7)$$

O gráfico de  $f$  interseja os eixos coordenados nos pontos de coordenadas  $\left(\frac{7}{5}, 0\right)$  e  $(0, 7)$ .

3.2.  $f(x) < 4 \Leftrightarrow 5 + \frac{2}{-x+1} < 4 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{-x+1} < 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-x+1+2}{-x+1} < 0 & \\ \Leftrightarrow \frac{-x+3}{-x+1} < 0 & \end{aligned}$$

$$\text{C.A.: } \frac{-x+3}{-x+1} = 0 \Leftrightarrow -x+3 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Leftrightarrow x = 3$$

$x$	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$-x+3$	+	+	+	0	-
$-x+1$	+	0	-	-	-
$\frac{-x+3}{-x+1}$	+	n.d.	-	-	-

Assim,  $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]1, 3[$ .

O conjunto-solução da inequação  $f(x) < 4$  é:

$$\text{C.S.} = ]1, 3[$$

3.3.  $g(x) = a + \frac{2}{x+1}, a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 5 + \frac{2}{-x+1} = 5 + \frac{2}{-(x-1)} = 5 - \frac{2}{x-1}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = 1$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 5$

O ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de  $f$  é o ponto de coordenadas  $(1, 5)$ .

Se este ponto pertence ao gráfico de  $g$ , então:

$$g(1) = 5 \Leftrightarrow a + \frac{2}{1+1} = 5 \Leftrightarrow a + 1 = 5 \Leftrightarrow a = 4$$

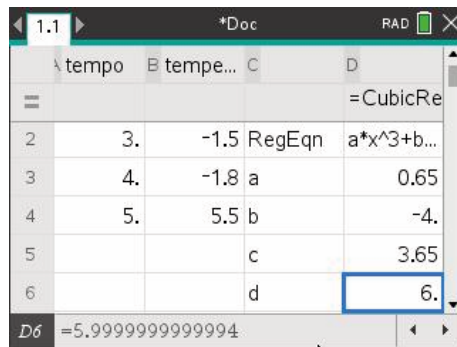
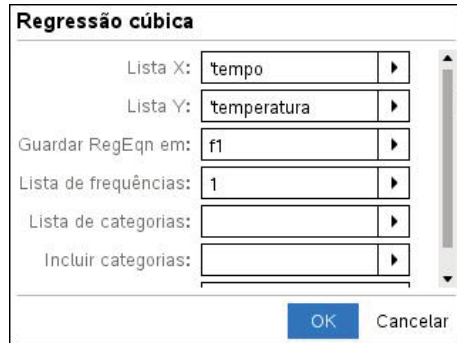
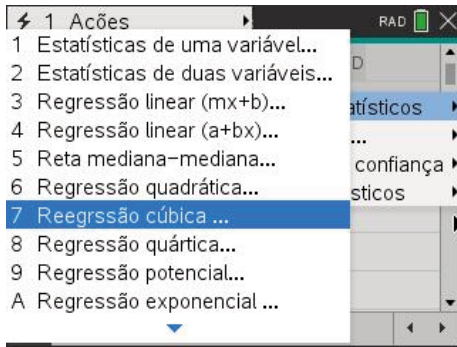
$$g(x) = 4 + \frac{2}{x+1}$$

$$g(2) = 4 + \frac{2}{2+1} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

**Página 95 – Para Saber +**

- Inserindo os dados numa folha de cálculo (listas) da calculadora, e uma vez que se têm exatamente quatro pares de valores, podemos obter o polinómio interpolador recorrendo à ferramenta **Regressão cúbica** da calculadora.



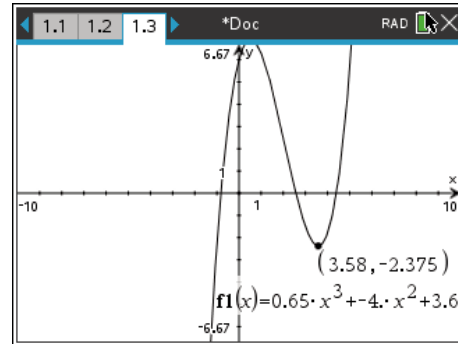
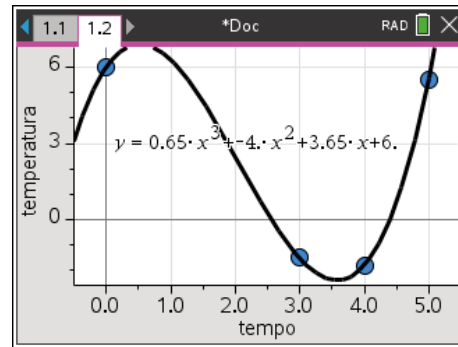


$t$  : tempo

O polinómio interpolador é:

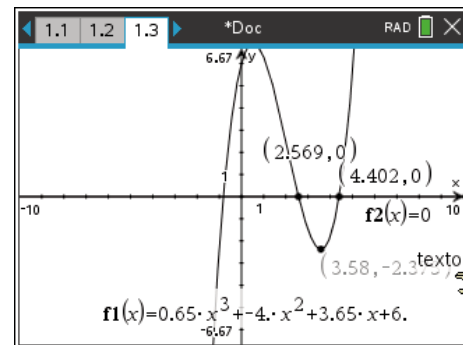
$$P(t) = 0,65t^3 - 4t^2 + 3,65t + 6$$

2. Podemos visualizar uma representação gráfica do modelo obtido.  
Seja  $T(t) = 0,65t^3 - 4t^2 + 3,65t + 6$  em que  $T(t)$  representa a temperatura, em  $^{\circ}\text{C}$ , ao fim de  $t$  horas.
  - 2.1.  $T(2) = 2,5$ . Estima-se que, ao fim de 2 horas, a temperatura seja  $2,5^{\circ}\text{C}$ .
  - 2.2. Identificando o mínimo da função em  $[0, 5]$ , obtém-se  $-2,4$ , aproximadamente.



A temperatura mínima estimada é  $-2,4^{\circ}\text{C}$ , aproximadamente.

3. Em  $[0, 5]$ , estimam-se temperaturas negativas entre os instantes em que tinham decorrido 2,569 h e 4,402 h.



$$1 \text{ h } 45 \text{ min} = 1,75 \text{ h}$$

$$4,402 - 2,569 > 1,75$$

De acordo com o modelo, estima-se que a substância esteve sujeita a temperaturas negativas mais de 1 h e 45 min.