Propostas de resolução da unidade 6 do manual

Recorda e Aplica

Página 99 – Aplica

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

1.1. $A(2, f(2))$ e $B(-1, f(-1))$

$f(2) = -2^2 + 2 \times 2 + 3 = 3$

$f(-1) = -(-1)^2 + 2 \times (-1) + 3 = 0$

Então, $A(2, 3)$ e $B(-1, 0)$

AB: $y = mx + b$

$m = \frac{0-3}{-1-2} = \frac{-3}{-3} = 1$

$y = x + b$

Como $A(2, 3)$ pertence à reta *AB*, tem-se:

$3 = 2 + b \Leftrightarrow 1 + b$

A equação reduzida da reta *AB* é $y = x + 1$.

1.2. Como *C* é o ponto de interseção do gráfico de *f* com o eixo das ordenadas, então $C(0, f(0))$.

$f(0) = -0^2 + 2 \times 0 + 3 = 3$

Logo, $C(0, 3)$.

1.3. Seja *r* a reta paralela a *AB* e que passa em *C*.

$r \mathbin{/\!/} AB \Leftrightarrow m_r = m_{AB} \Leftrightarrow m_r = 1$

Como $C(0, 3) \in r_1$, então $b_r = 3$.

Logo, a equação reduzida da reta *r* é $y = x + 3$.

2. Quadro de variação da função *f*:

x	2		5		8
$h(x)$	0	↗	9	↘	0

Intervalos de monotonia:

h é crescente em $[2, 5]$.

h é decrescente em $[5, 8]$.

Tema 1: Taxa de variação. Derivada

Página 100 – Tarefa inicial

1.1. $f_A(60) = 150$

No contexto apresentado, significa que, uma hora após a ingestão da solução de glicose, a concentração de glicose no sangue do indivíduo A era 150 mg/dl.

1.2. $f_B(120) = 382$

No contexto apresentado, significa que, duas horas após a ingestão da solução de glicose, a concentração de glicose no sangue do indivíduo B era 382 mg/dl.

1.3. $f_A(60) - f_A(0) = 150 - 90 = 60$

No contexto apresentado, significa que, na primeira hora após a ingestão da solução de glicose, a concentração de glicose no sangue do indivíduo A aumentou 60 mg/dl.

1.4. $f_B(60) - f_B(0) = 300 - 160 = 140$

No contexto apresentado, significa que, na primeira hora após a ingestão da solução de glicose, a concentração de glicose no sangue do indivíduo B aumentou 140 mg/dl.

2. Indivíduo A:

$$\frac{f_A(30) - f_A(0)}{30 - 0} = \frac{124 - 90}{30} = \frac{34}{30} \approx 1{,}1$$

Na primeira meia hora após a primeira medicação, o aumento médio, por minuto, da concentração de glicose no sangue do indivíduo A foi de, aproximadamente, $1{,}1$ mg/dl.

Indivíduo B:

$$\frac{f_B(30) - f_B(0)}{30 - 0} = \frac{250 - 160}{30} = \frac{90}{30} = 3$$

Na primeira meia hora após a primeira medicação, o aumento médio, por minuto, da concentração de glicose no sangue do indivíduo B foi 3 mg/dl.

3. $f_A(120) - f_A(60) < 0$, porque $f_A(120) < f_A(60)$.

No contexto apresentado, significa que, entre a primeira e a segunda horas após a ingestão da solução de glicose, a concentração de glicose no sangue do indivíduo A diminuiu.

4. $f_A(120) = 120$ e $f_B(120) = 382$

Como $f_B(120) > 200$, conclui-se que foi confirmado o diagnóstico de diabetes ao indivíduo B.

Página 101

1. $C(x) = -0{,}02x^2 + 4x$

1.1. 400 caixas $\rightarrow$ $x = 40$

800 caixas $\rightarrow$ $x = 80$

$C(80) - C(40) =$

$= -0{,}02 \times 80^2 + 4 \times 80 - \left(-0{,}02 \times 40^2 + 4 \times 40\right)$

$= 192 - 128 = 64$

Quando a produção passa de 400 caixas para 800 caixas de chocolate, o custo aumenta 64 € .

1.2. $C(75) - C(50) =$

$= -0{,}02 \times 75^2 + 4 \times 75 - \left(-0{,}02 \times 50^2 + 4 \times 50\right)$

$= 187{,}5 - 150 = 37{,}5$

No contexto do problema, significa que, quando a produção passa de 500 para 750 caixas de chocolate, o custo de produção aumenta $37{,}50$ € .

2.1. **a)** Variação da função *f* no intervalo $[-2, 5]$:

$f(5) - f(-2) = 2 - 4 = -2$

b) Variação da função *f* no intervalo $[0, 8]$:

$f(8) - f(0) = 5 - 2 = 3$

2.2. **a)** A variação é -7 no intervalo $[8, 9]$.

Confirmação: $f(9) - f(8) = -2 - 5 = -7$

b) Há variação positiva, por exemplo, no intervalo $[1, 5]$.

Confirmação: $f(5) - f(1) = 2 - 0 = 2 > 0$

c) A variação é nula no intervalo $[0, 5]$.

Confirmação: $f(5) - f(1) = 2 - 2 = 0$

Página 102

3.1. Variação da função *g* no intervalo $[1, 3]$:

$$g(3) - g(1) = \frac{7}{2} - 5 = \frac{7}{2} - \frac{10}{2} = -\frac{3}{2}$$

3.2. $g(0) - g(10) = 6$

$\Leftrightarrow 2 - g(-10) = 6 \Leftrightarrow g(-10) = -4$

3.3. **a)** Taxa média de variação em $[0, 3]$:

$$\frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \frac{\frac{7}{2} - 2}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

b) Taxa média de variação em $\left[-\frac{3}{2}, 1\right]$:

$$\frac{g(1) - g\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{5 - 5}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{0}{\frac{5}{2}} = 0$$

c) Taxa média de variação em $[1, 3]$:

$$\frac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \frac{\frac{7}{2} - 5}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$$

3.4. $\text{t.m.v.}_{[3,\,5]} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{g(5) - g(3)}{5 - 3} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{g(5) - \frac{7}{2}}{2} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow g(5) - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(5) = -\frac{5}{2} + \frac{7}{2} \Leftrightarrow g(5) = 1$$

A variação da função *g* no intervalo $[0, 5]$ é :

$g(5) - g(0) = 1 - 2 = -1$

Página 103 – Tarefa 1

1.1. $d(10) = 0{,}2 \times 10^2 + 10 = 30$

No contexto apresentado, significa que, 10 segundos após o início do movimento, o Vasco encontrava-se a 30 metros do ponto *O*.

1.2. $d(20) = 0{,}2 \times 20^2 + 20 = 100$

No contexto apresentado significa que, 20 segundos após o início do movimento, o Vasco encontrava-se a 100 metros do ponto *O*.

1.3. $d(15) - d(5) = 0{,}2 \times 15^2 + 15 - \left(0{,}2 \times 5^2 + 5\right) =$

$= 60 - 10 = 50$

No contexto apresentado, significa que, 15 segundos após o início do movimento, o Vasco estava 50 metros mais distante do ponto *O* do que estava aos 5 segundos.

1.4. $d(25) - d(18) = 0{,}2 \times 25^2 + 25 - \left(0{,}2 \times 18^2 + 18\right) =$

$= 150 - 82{,}8 = 67{,}2$

No contexto apresentado, significa que, 25 segundos após o início do movimento, o Vasco estava 67,2 metros mais distante do ponto *O* do que estava aos 18 segundos.

1.5. $d(40)-d(30)=0,2\times 40^2+40-\left(0,2\times 30^2+30\right)=$

$=360-210=150$

Significa que, 40 segundos após o início do movimento, o Vasco estava 150 metros mais distante do ponto *O* do que estava aos 30 segundos.

1.6. $d(60)-d(45)=0,2\times 60^2+60-\left(0,2\times 45^2+45\right)=$

$=780-450=330$

Significa que, 60 segundos após o início do movimento, o Vasco estava 330 metros mais distante do ponto *O* do que estava aos 45 segundos.

2.1. $\text{t.m.v.}_{[10,\,30]}=\dfrac{d(30)-d(10)}{30-10}=\dfrac{210-30}{20}=\dfrac{180}{20}=9$

A velocidade média do Vasco entre os instantes 10 e 30 segundos foi 9 m/s.

2.2. $\text{t.m.v.}_{[0,\,20]}=\dfrac{d(20)-d(0)}{0-0}=\dfrac{100-0}{20}=5$

A velocidade média do Vasco entre os instantes 0 e 20 segundos foi 5 m/s.

3.1. $\dfrac{d(15)-d(0)}{15-0}=\dfrac{60-0}{15-0}=4$

Significa que a velocidade média do Vasco nos primeiros 15 segundos foi 4 m/s.

3.2. $\dfrac{d(40)-d(20)}{40-20}=\dfrac{360-100}{20}=\dfrac{260}{20}=13$

Cálculo auxiliar: $d(40)=0,2\times 40^2+40=360$ e

$d(20)=0,2\times 20^2+20=100$

Significa que a velocidade média do Vasco entre os instantes 20 e 40 segundos foi 13 m/s.

3.3. $\dfrac{d(65)-d(55)}{65-55}=\dfrac{0,2\times 65^2+65-\left(0,2\times 55^2+55\right)}{10}$

$=\dfrac{910-660}{10}=\dfrac{250}{10}=25$

Significa que a velocidade média do Vasco entre os instantes 55 e 65 segundos foi 25 m/s.

3.4. $\dfrac{d(50)-d(45)}{50-45}=\dfrac{550-450}{5}=\dfrac{100}{5}=20$

Cálculo auxiliar: $d(50)=0,2\times 50^2+50=550$ e

$d(45)=0,2\times 45^2+45=450$

Significa que a velocidade média do Vasco entre os instantes 45 e 50 segundos foi 20 m/s.

4.1. $\dfrac{d(b)-d(a)}{b-a}=\dfrac{0,2b^2+b-\left(0,2a^2+a\right)}{b-a}=$

$=\dfrac{0,2b^2+b-0,2a^2-a}{b-a}$

4.2. $\dfrac{d(b)-d(a)}{b-a}$ representa a velocidade média do Vasco, em metros por segundo, entre os instantes *a* e *b*, em segundos.

Página 104 – Tarefa 2

1.1. $1600\text{ m}=1,6\text{ km}$

1.2. O automóvel A demorou 1 minuto e 7 segundos a percorrer a distância entre os dois radares de controlo.

1 minuto e 7 segundos corresponde a 67 segundos.

1 hora corresponde a 3600 segundos.

Tempo (em h)	Tempo (em s)
1	3600
x	67

$x=\dfrac{67\times 1}{3600}=\dfrac{67}{3600}\approx 0,0186$

O automóvel A demorou, aproximadamente, 0,0186 hora a percorrer a distância entre os dois radares de controlo.

1.3. Velocidade média: $v_m=\dfrac{1,6}{0,0186}\approx 86$

O condutor do automóvel A ultrapassou a velocidade média permitida (80 km/h), pois atingiu a velocidade de, aproximadamente, 86 km/h

Sim, pois o condutor do automóvel A atingiu a velocidade média de 86 km/h, aproximadamente.

2. $d(t)=0,002t^3-0,038t^2+20,483t$

2.1. $\text{t.m.v.}_{[0,\,10]}=\dfrac{d(10)-d(0)}{10-0}=\dfrac{203,03-0}{10}=$

$=20,303\approx 20,30$

$d(10)=0,002\times 10^3-0,038\times 10^2+20,483\times 10=$

$=20,30$

Significa que a velocidade média do condutor do automóvel B, nos dez primeiros segundos, foi, aproximadamente, 20,30 m/s.

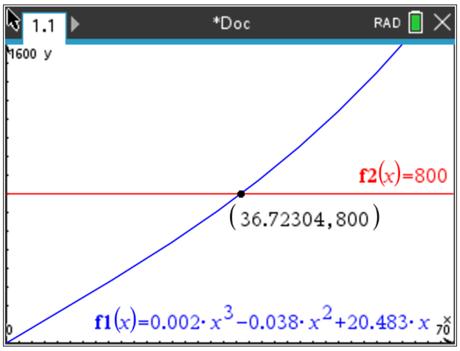
$$\text{t.m.v.}_{[50,\ 60]} = \frac{d(60)-d(50)}{60-50} = \frac{1524{,}18-1179{,}15}{10} =$$
$$= 34{,}503 \approx 34{,}50$$

$d(60) = 0{,}002\times 60^3 - 0{,}038\times 60^2 + 20{,}483\times 60 =$
$= 1524{,}18$

$d(50) = 0{,}002\times 50^3 - 0{,}038\times 50^2 + 20{,}483\times 50 =$
$= 1179{,}15$

Significa que a velocidade média do condutor do automóvel B, entre os instantes 50 e 60 segundos foi, aproximadamente, $34{,}50$ m/s.

2.2. **a)** Como a distância entre os dois pontos de Controlo é 1600 m, na primeira metade do percurso foram percorridos 800 m.
Precisamos de saber quanto tempo demorou o automobilista B a percorrer esses 800 m.
Para tal, vamos resolver a condição $d(t) = 800$ recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.

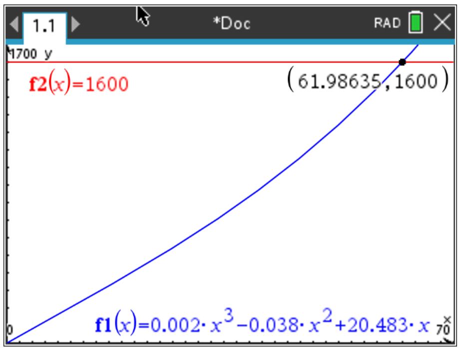


$t \approx 36{,}72$

$$d = 800 \text{ m} = 0{,}8 \text{ km} \ \text{ e } \ t \approx 36{,}72 \text{ s} \approx \frac{36{,}72}{3600} \text{ h}$$

$$\text{Velocidade média} = \frac{0{,}8}{\frac{36{,}72}{3600}} \approx 78{,}4 \text{ km/h}$$

b) Entre os dois radares de controlo, ou seja, na totalidade do percurso entre radares, foram percorridos 1600 m.
Pretende-se saber quanto tempo demorou o condutor do automóvel B a percorrer essa distância. Para tal, vamos recorrer às capacidades da calculadora gráfica para resolver a condição $d(t) = 1600$.



$t \approx 62$

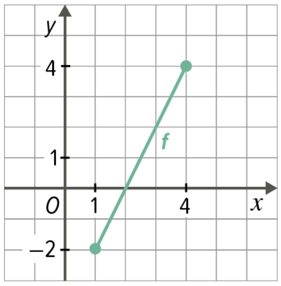
$$d = 1600 \text{ m} = 1{,}6 \text{ km} \ \text{ e } \ t \approx 62 \text{ s} \approx \frac{62}{3600} \text{ h}$$

$$\text{Velocidade média} = \frac{1{,}6}{\frac{62}{3600}} \approx 92{,}9 \text{ km/h}$$

Página 105

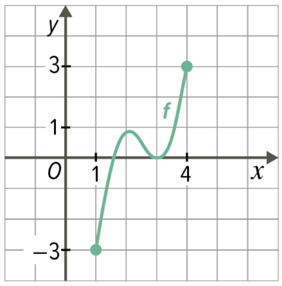
4.1. $D_f = [1,\ 4]$, f é monótona e tem $\text{t.m.v.}_{[1,\ 4]} = 2$.

Uma representação gráfica de f é, por exemplo:



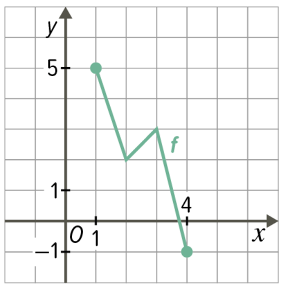
4.2. $D_f = [1,\ 4]$, f é não monótona e $\text{t.m.v.}_{[1,\ 4]} = 2$.

Uma representação gráfica de f é, por exemplo:



4.3. $D_f = [1,\ 4]$, f é não monótona e $\text{t.m.v.}_{[1,\ 4]} = -2$.

Uma representação gráfica de f é, por exemplo:



5. **Afirmação I**

$$\text{t.m.v.}_{[a,\,b]} > 0 \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0 \underset{b-a>0}{\Leftrightarrow}$$
$$\underset{b-a>0}{\Leftrightarrow} f(b)-f(a) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(b) > f(a)$$

A afirmação I é verdadeira.

Afirmação II

O facto de sabermos que $f(b) > f(a)$ só garante que $f(b)-f(a) > 0$ e, consequentemente, que $\text{t.m.v.}_{[a,\,b]} > 0$.

A função pode não ser crescente em $[a,\,b]$.

A afirmação II é falsa.

6.1. r: $y = mx + b$

Como a reta r passa nos pontos de coordenadas $(-1,\,4)$ e $(7,\,0)$, sabe-se que:

$$m = \frac{0-4}{7-(-1)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Uma equação da reta r é do tipo $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(7,\,0)$ pertence a r:

$$0 = -\frac{1}{2}\times 7 + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{2}$$

Equação reduzida da reta r: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

O ponto de coordenadas $(2,\,f(2))$ pertence à reta r, logo:

$$f(2) = -\frac{1}{2}\times 2 + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$$

6.2. $\text{t.m.v.}_{[-1,\,2]} = m_r = -\frac{1}{2}$

6.3. $\text{t.m.v.}_{[2,\,k]} = m_r = -\frac{1}{2}$

Página 106

7. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$; $A(0,\,f(0))$ e $B(2,\,f(2))$

7.1. **a)** $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} =$

$$= \frac{-(2+h)^2 + 3(2+h) + 1 - (-2^2 + 3\times 2 + 1)}{h}$$
$$= \frac{-(4+4h+h^2) + 6 + 3h + 1 - 3}{h} =$$
$$= \frac{\cancel{-4} - 4h - h^2 + \cancel{4} + 3h}{h} =$$
$$= \frac{-h^2 - h}{h} = \frac{h(-h-1)}{h} = -h-1$$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}(-h-1) = -0-1 = -1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = ?$$
$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{-x^2+3x+1-3}{x-2} = \frac{-x^2+3x-2}{x-2}$$
$$= \frac{-(x-1)(x-2)}{(x-2)} = -(x-1) = -x+1$$

Cálculo auxiliar:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{-2} \vee x = \frac{-3-1}{-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Quando $x \to 2$, $(-x+1) \to (-2+1)$, ou seja, $(-x+1) \to -1$.

Donde se conclui que $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1$

7.2. **a)** $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-x^2+3x+1-1}{x} = \frac{-x^2+3x}{x} =$

$$= \frac{\cancel{x}(-x+3)}{\cancel{x}} = -x+3$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}(-x+3) = -0+3 = 3$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-(0+h)^2 + 3(0+h) + 1 - 1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-h+3)}{\cancel{h}} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(-h+3) = -0+3 = 3$$

Página 107

8. $f(x)=0{,}4x^2$

8.1.

$h \to 0$	$\dfrac{f(10+h)-f(10)}{h}$
1	8,4
0,5	8,2
0,25	8,1
0,125	8,05
0,1	8,04
0,05	8,02
0,01	8,004
0,0001	8,000 04
0,00001	8,000 004
1×10^{-8}	8,000 000 004

8.2. Por observação da informação registada na tabela, conclui-se que quando $h\to 0$,

$\dfrac{f(10+h)-f(10)}{h}\to 8$.

Logo, a taxa de variação instantânea de *f* para $x=10$ é igual a 8.

9. $f(x)=x^3$

Sabe-se que $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=h^2+3h+3$.

Quando $h\to 0$, $(h^2+3h+3)\to 3$.

Logo, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=3$.

A taxa de variação de *f* em $x=1$ é 3.

10. $f(x)=2x^2$

10.1. $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\dfrac{2(3+h)^2-2\times 3^2}{h}=$

$=\dfrac{2(9+6h+h^2)-18}{h}=\dfrac{\cancel{18}+12h+2h^2-\cancel{18}}{h}=$

$=\dfrac{12h+2h^2}{h}=\dfrac{\cancel{h}(12+2h)}{\cancel{h}}=12+2h$

Quando $h\to 0$, $(12+2h)\to 12$.

Logo, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=12$.

A taxa de variação instantânea da função *f* para $x=3$ é 12.

10.2. $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\dfrac{2(-1+h)^2-2\times(-1)^2}{h}=$

$=\dfrac{2(1-2h+h^2)-2}{h}=\dfrac{\cancel{2}-4h+2h^2-\cancel{2}}{h}=\dfrac{2h^2-4h}{h}$

$=\dfrac{\cancel{h}(2h-4)}{\cancel{h}}=2h-4$

Quando $h\to 0$, $(2h-4)\to -4$.

Logo, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=-4$.

A taxa de variação instantânea da função *f* para $x=-1$ é -4.

Página 108

11.1. O ponto de tangência pertence à reta *r* e ao gráfico de *f*.

Logo, as suas coordenadas são $(1, f(1))$.

$f(1)=1^2-1=0$

Assim, as coordenadas do ponto de tangência são $(1, 0)$.

11.2. $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{(1+h)^2-1-(1^2-1)}{h}=$

$=\dfrac{1+2h+h^2-1-0}{h}=\dfrac{h^2+2h}{h}=$

$=\dfrac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}}=h+2$

Quando $h\to 0$, $(h+2)\to 2$.

Logo, $f'(1)=2$.

11.3. *r*: $y=mx+b$; $m=f'(1)=2$

Logo, uma equação da reta *r* é do tipo $y=2x+b$.

Como o ponto de coordenadas $(1, 0)$ pertence a *r*:

$0=2\times 1+b \Leftrightarrow 0=2+b \Leftrightarrow b=-2$

A equação, na forma reduzida, da reta *r* é $y=2x-2$.

11.4. Seja *t* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa -2.

$f(-2)=(-2)^2-1=3$

Coordenadas do ponto de tangência: $(-2, 3)$

t: $y = mx + b$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{(-2+h)^2 - 1 - 3}{h} = \frac{\cancel{4} - 4h + h^2 \cancel{-4}}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{h}(-4+h)}{\cancel{h}} = -4 + h$$

Quando $h \to 0$, $(-4+h) \to -4$. Logo, $m = -4$.

Uma equação da reta *t* é do tipo $y = -4x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(-2, 3)$ pertence à reta *t*, tem-se:

$$3 = -4 \times (-2) + b \Leftrightarrow 3 = 8 + b \Leftrightarrow b = -5$$

A equação, na forma reduzida, da reta *t* é $y = -4x - 5$.

12. $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = h + 6$ e $f(3) = 1$

12.1. $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+6) = 0 + 6 = 6$

12.2. Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 3.

r: $y = mx + b$; $m = f'(3) = 6$

Uma equação da reta *r* é do tipo $y = 6x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(3, 1)$ pertence à reta *r*, tem-se:

$$1 = 6 \times 3 + b \Leftrightarrow 1 = 18 + b \Leftrightarrow b = -17$$

Uma equação da reta *r* é: $y = 6x - 17$

Página 109 – Tarefa 3

1. $d(t) = 0{,}1t^2 + t$; $0 \le t \le 30$

$t \to$ segundos $d \to$ metros

1.1. $\frac{d(10+h)-d(10)}{h}$

$$= \frac{0{,}1(10+h)^2 + 10 + h - (0{,}1 \times 10^2 + 10)}{h}$$

$$= \frac{0{,}1(100 + 20h + h^2) + 10 + h - 20}{h}$$

$$= \frac{\cancel{10} + 2h + 0{,}1h^2 + \cancel{10} + h \cancel{-20}}{h} = \frac{0{,}1h^2 + 3h}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(0{,}1h + 3)}{\cancel{h}} = 0{,}1h + 3$$

1.2.

h	$0{,}1h + 3$
0,5	3,05
0,25	3,025
0,125	3,0125
0,0625	3,006 25
0,031 25	3,003 125
0,015 625	3,001 562 5
0,007 813	3,000 781 3
0,003 906	3,000 390 6
0,001 953	3,000 195 3
0,000 977	3,000 097 7
0,000 488 8	3,000 048 8
0,000 244	3,000 024 4
…	…

A estimativa é 3 m/s.

1.3. a) $\frac{d(10+h)-d(10)}{h} = 0{,}1h + 3$

Quando $h \to 0$, $(0{,}1h + 3) \to 3$.

b) $\lim_{h \to 0} \frac{d(10+h)-d(10)}{h} = \lim_{h \to 0} (0{,}1h + 3) = 3$

No contexto apresentado, significa que a velocidade da câmara aos 10 segundos era 3 m/s.

2. $A\left(2, -\frac{16}{3}\right)$ e $B(-3, 3)$

$t \,//\, Ox$

A taxa de variação instantânea para $x = -3$ é 5.

2.1. A taxa de variação instantânea para $x = 2$ é igual ao declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 2, ou seja, da reta *t*.

Como a reta *t* é paralela ao eixo Ox, sabe-se que $m_t = 0$.

Então, a taxa de variação instantânea para $x = 2$ é igual a 0 (zero).

2.2. Sabe-se que a taxa de variação instantânea para $x = -3$ é igual a 5, ou seja, o declive da reta *r* é 5.

Então, a equação, na forma reduzida, da reta *r* é $y = 5x + b$.

Ponto de tangência: $B(-3, 3)$

Como o ponto *B* pertence à reta *r*, tem-se:

$$3 = 5 \times (-3) + b \Leftrightarrow 3 = -15 + b \Leftrightarrow b = 18$$

Equação, na forma reduzida, da reta *r*:

$y = 5x + 18$

Página 110 – Pratica

13. A afirmação I é falsa, porque, por exemplo, $\text{t.m.v.}_{[-4,\,7]} = 0$ e a função *f* não é constante em $[-4, 7]$.

A afirmação II é falsa, porque, por exemplo, $\text{t.m.v.}_{[2,\,7]} > 0$ e a função *f* não é crescente em $[2, 7]$.

A afirmação III é falsa, porque, por exemplo, $\text{t.m.v.}_{[-4,\,5]} < 0$ e a função *f* não é decrescente em $[-4, 5]$.

14. $\text{t.m.v.}_{[0,\,5]} = 0{,}3 \Leftrightarrow \dfrac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 0{,}3 \Leftrightarrow$

$\underset{\substack{B(5,\,4)\in f,\\ \text{logo } f(5)=4}}{\Leftrightarrow} \dfrac{4 - f(0)}{5} = 0{,}3 \Leftrightarrow 4 - f(0) = 1{,}5 \Leftrightarrow f(0) = 2{,}5$

Então, $A(0;\, 2{,}5)$

$b = 2{,}5$, porque a reta *AB* interseta o eixo Oy no ponto *A*.

Uma equação da reta *AB* é $y = 0{,}3x + 2{,}5$, ou seja, $y = \dfrac{3}{10}x + \dfrac{5}{2}$.

A opção correta é a **(A)**.

Página 111 – Pratica

15.1. A reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa 1 tem declive positivo.

Logo, a taxa de variação instantânea para $x = 1$ é positiva.

15.2. $f'(3) = m_r = 0$ (a reta *r* é tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 3 e é paralela ao eixo Ox).

15.3. A reta *s*, definida pela equação $y = -2x + 10$, é tangente ao gráfico de *f* no ponto *C*, de abcissa 4.

Como o ponto *C* pertence à reta *s*, tem-se:

$y = -2 \times 4 + 10 \Leftrightarrow y = -8 + 10 \Leftrightarrow y = 2$

Então, $C(4, 2)$.

16. $H(t) = 0{,}5t^2 + t;\ 0 \le t \le 12$

Pretende-se determinar a velocidade de subida do nível da água, no instante em que a altura do nível da água é 40 cm .

$H(t) = 40 \Leftrightarrow 0{,}5t^2 + t = 40 \Leftrightarrow 0{,}5t^2 + t - 40 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 0{,}5 \times (-40)}}{2 \times 0{,}5} \Leftrightarrow t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = -1 + 9 \lor t = -1 - 9 \Leftrightarrow t = 8 \lor t = -10$

Como $0 \le t \le 12$, conclui-se que $t = 8$.

Assim, pretende-se determinar $H'(8)$.

$$H'(8) = \lim_{t \to 8} \frac{H(t) - H(8)}{t - 8}$$

$$\frac{H(t) - H(8)}{t - 8} = \frac{0{,}5t^2 + t - (0{,}5 \times 8^2 + 8)}{t - 8} = \frac{0{,}5t^2 + t - 40}{t - 8} =$$

$$= \frac{0{,}5\cancel{(t-8)}(t + 10)}{\cancel{(t-8)}} = 0{,}5(t + 10) = 0{,}5t + 5$$

Se $t \to 8$, então $(0{,}5t + 5)$ tende para $0{,}5 \times 8 + 5$, ou seja, 9.

Donde se conclui que: $H'(8) = \lim\limits_{t \to 8} (0{,}5t + 5) = 9$

Logo, a velocidade de subida do nível da água, no instante em que a altura do nível da água é 4 cm, é igual a 9 cm/min.

Página 112

17.1. $D_f = \mathbb{R}$ e $f(x) = -3x$

Seja x_0 um elemento qualquer do domínio de *f*.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = ?$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{-3(x_0 + h) - (-3x_0)}{h}$$

$$= \frac{\cancel{-3x_0} - 3h + \cancel{3x_0}}{h} = \frac{-3h}{h} \underset{h \neq 0}{=} -3$$

Assim:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} (-3) = -3$$

Então, $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f'(x_0) = -3$.

Função derivada:

$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\quad x \to -3$

17.2. $D_f = \mathbb{R}$ e $f(x) = -7x^2$

Seja x_0 um elemento qualquer do domínio de *f*.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = ?$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{-7(x_0+h)^2-(7x_0^2)}{h} =$$

$$= \frac{-7(x_0^2+2x_0h+h^2)+7x_0^2}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{-7x_0^2}-14x_0h-7h^2+\cancel{7x_0^2}}{h} =$$

$$= \frac{-7h^2+14x_0h}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{h}(-7h-14x_0)}{\cancel{h}} \underset{h\neq 0}{=} -7h-14x_0$$

Quando $h \to 0$, $(-7h-14x_0)$ tende para

$-7\times 0 - 14x_0$, ou seja, $-14x_0$.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}(-7h-14x_0) = -14x_0$$

Então, $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f'(x_0) = -14x_0$.

Função derivada:

$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\quad x \to -14x$

17.3. $D_f = \mathbb{R}$ e $f(x) = (2x)^2$

Seja x_0 um elemento qualquer do domínio de *f*.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = ?$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{(2x)^2-(2x_0)^2}{x-x_0} = \frac{(2x-2x_0)(2x+2x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{2\cancel{(x-x_0)}(2x+2x_0)}{\cancel{x-x_0}} \underset{x\neq x_0}{=} 2(2x+2x_0)$$

Quando $x \to x_0$, $\left[2(2x+2x_0)\right]$ tende para

$2(2x_0+2x_0)$, ou seja, $8x_0$.

Então, $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f'(x_0) = 8x_0$.

Função derivada:

$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\quad x \to 8x$

18. $D_g = \mathbb{R}$ e $g'(x) = -3x^2$

18.1. $\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = -3\times 1^2 = -3$

A afirmação é verdadeira.

18.2. $\lim_{x\to -2} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = g'(-2) = -3\times(-2)^2 = -12$

A afirmação é falsa.

18.3. $\lim_{h\to 0} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h} = g'(-1) = -3\times(-1)^2 = -3$

A afirmação é verdadeira.

19. $f(x) = -0{,}5x^3$ e $A(2, -4)$ pertence ao gráfico de *f*.

$f'(x) = -1{,}5x^2$

Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*.

Sabe-se que $m_r = f'(2)$.

Como $f'(2) = -1{,}5\times 2^2 = -6$, então $m_r = -6$.

Página 113 – Tarefa 4

1. $A(-1, f(-1))$

$f(-1) = -2\times(-1)^3 = 2$

1.º: Coordenadas do ponto *A*: $A(-1, 2)$

2.º: Declive da reta tangente:

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{-2x^3-2}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-2(x^3-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{-2\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}} =$$

$$\underset{(x\neq -1)}{=} \lim_{x\to -1}(-2x^2+2x-2) = -6$$

O declive da reta tangente no ponto *A* é -6.

3.º: A equação reduzida da reta tangente no ponto *A* é: $y = -6x+b$

Resposta: $y = -6x + (-4)$, ou seja, $y = -6x-4$.

Cálculo auxiliar: $y = -6x+b$

Como o ponto de coordenadas $(-1, 2)$ pertence à reta: $2 = -6\times(-1)+b \Leftrightarrow 2 = 6+b \Leftrightarrow b = -4$

2.1. $B(2, f(2))$

$f(2) = -2\times 2^3 = -16$

1.º: Coordenadas do ponto *B*: $B(2, -16)$

2.º: Declive da reta tangente

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-2x^3+16}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(-2x^2-4x-8)}{\cancel{x-2}} \underset{x\neq 2}{=} \lim_{x\to 2}(-2x^2-4x-8) = -24$$

	−2	0	0	16
2		−4	−8	−16
	−2	−4	−8	0

O declive da reta tangente no ponto *B* é -24.

3.º: A equação reduzida da reta tangente no ponto *B* é: $y=-24x+b$.

Como o ponto $B(2,-16)$ pertence à reta:

$-16=-24\times 2+b \Leftrightarrow b=32$

$y=-24x+32$

2.2. $C(-2, f(-2))$

$f(-2)=-2\times(-2)^3=16$

1.º: Coordenadas do ponto *C*: $C(-2, 16)$

2.º: Declive da reta tangente:

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{-2x^3-16}{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(-2x^2+4x-8)}{\cancel{x+2}}\underset{x\neq -2}{=}\lim_{x\to -2}(-2x^2+4x-8)=-24$$

	−2	0	0	−16
−2		4	−8	16
	−2	4	−8	0

O declive da reta tangente no ponto *C* é -24.

3.º: A equação reduzida da reta tangente no ponto *C* é: $y=-24x+b$

Como o ponto $C(-2,16)$ pertence à reta, tem-se:

$16=-24\times(-2)+b \Leftrightarrow 16=48+b \Leftrightarrow b=-32$

$y=-24x-32$

3.1. Seja $x_0\in\mathbb{R}$.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{-2(x_0+h)^3-2x_0^3}{h}=$$

$$=\frac{-2(x_0+h)^2(x_0+h)-2x_0^3}{h}=$$

$$=\frac{-2(x_0^2+2x_0h+h^2)(x_0+h)-2x_0^3}{h}=$$

$$=\frac{-2\left[(x_0^2+2x_0h+h^2)(x_0+h)-x_0^3\right]}{h}=$$

$$=\frac{-2\left(\cancel{x_0^3}+x_0^2h+2x_0^2h+2x_0h^2+x_0h^2+h^3-\cancel{x_0^3}\right)}{h}=$$

$$=\frac{-2(h^3+3x_0h^2+3x_0^2h)}{h}=\frac{-2\cancel{h}(h^2+3x_0h+3x_0^2)}{\cancel{h}}=$$

$$\underset{h\neq 0}{=}-2(h^2+3x_0h+3x_0^2)$$

3.2. $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\left(-2(h^2+3x_0h+3x_0^2)\right)=-6x_0^2$

3.3. $f':\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\to -6x^2$

3.4. $f'(-1)=-6\times(-1)^2=-6$

O declive da reta tangente no ponto *A*:

$f'(-1)=-6$

Equação da reta tangente: $y=-6x+b$

Como $A(-1, 2)$ pertence à reta, tem-se:

$2=-6\times(-1)-b \Leftrightarrow b=-4$

A equação reduzida da reta tangente no ponto *A* é $y=-6x-4$.

4.1. O ponto *B* tem coordenadas $(2,-16)$.

Declive da reta tangente no ponto *B*:

$f'(2)=-6\times 2^2=-24$

Equação da reta tangente: $y=-24x+b$

Como $B(2,-16)$ pertence à reta, tem-se:

$-16=-24\times 2+b \Leftrightarrow -16=-48+b \Leftrightarrow b=32$

Uma equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *B* é $y=-24x+32$.

4.2. O ponto *C* tem coordenadas $(-2,16)$.

Declive da reta tangente no ponto *C*:

$f'(-2)=-6\times(-2)^2=-24$

Equação da reta tangente: $y=-24x+b$

Como $C(-2,16)$ pertence à reta, tem-se:

$16=-24\times(-2)+b \Leftrightarrow 16=48+b \Leftrightarrow b=-32$

Uma equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *C* é $y=-24x-32$.

Página 114 – Pratica

20. *a*: elemento qualquer de $\mathbb{R}$, domínio de *f*.

20.1. $f(x)=-3x$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-3x-(-3a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-3\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}\underset{x\neq a}{=}-3$$

Assim, $f'(a)=\lim_{x\to a}(-3)=-3$.

Como $\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=-3$, então $f'(x)=-3$.

20.2. $f(x)=3x^2$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{3x^2-3a^2}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{3(x-a)(x+a)}{x-a}\underset{x\neq a}{=}\lim_{x\to a}\left(3(x+a)\right)$$

Assim, $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\left[3(x+a)\right]=6a$.

Como $\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=6a$, então $f'(x)=6x$.

20.3. $f(x)=-x^3$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-x^3-\left(-a^3\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-x^3+a^3}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}\left(-x^2-ax-a^2\right)}{\cancel{x-a}}\underset{x\neq a}{=}\lim_{x\to a}\left(-x^2-ax-a^2\right)$$

$$=-a^2-a^2-a^2=-3a^2$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 0 & 0 & a^3\\
a & & -a & -a^2 & -a^3\\
\hline
 & -1 & -a & -a^2 & \boxed{0}
\end{array}$$

Assim, $f'(a)=-3a^2$

Como $\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=-3a^2$, então $f'(x)=-3x^2$.

20.4. $f(x)=0{,}5x^2$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0{,}5x^2-0{,}5a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0{,}5\left(x^2-a^2\right)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{0{,}5\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}}\underset{x\neq a}{=}\lim_{x\to a}\left(0{,}5(x+a)\right)=0{,}5(2a)=a$$

Assim, $f'(a)=a$.

Como $\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=a$, então $f'(x)=x$.

21. A reta *t* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*, de abcissa *a*, e passa nos pontos $B\left(-\frac{4}{3},0\right)$ e $C\left(0,\frac{16}{3}\right)$. $m_t=\dfrac{\frac{16}{3}-0}{0-\left(-\frac{4}{3}\right)}=\dfrac{\frac{16}{3}}{\frac{4}{3}}=4$

$f'(a)=m_t=4$

A opção correta é a **(A)**.

Página 115 – Pratica

22.1. $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{0{,}4x^3-0{,}4}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(0{,}4x^2+0{,}4x+0{,}4\right)}{\cancel{x-1}}=$$

$$\underset{x\neq 1}{=}\lim_{x\to 1}\left(0{,}4x^2+0{,}4x+0{,}4\right)=1{,}2=\frac{6}{5}$$

22.2. Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1.

$m_r=f'(1)=\frac{6}{5}$; r: $y=\frac{6}{5}x+b$

Como o ponto de coordenadas $(1;\,0{,}4)$ pertence à reta 1, tem-se:

$$0{,}4=\frac{6}{5}\times 1+b\Leftrightarrow\frac{2}{5}=\frac{6}{5}+b\Leftrightarrow b=-\frac{4}{5}$$

r: $y=\frac{6}{5}x-\frac{4}{5}$

23. $f(x)=0{,}03x^2$

23.1. $P_1(x;\,0{,}12),\ x\in\mathbb{R}^-$

$$f(x)=0{,}12\Leftrightarrow 0{,}03x^2=0{,}12\Leftrightarrow x^2=\frac{0{,}12}{0{,}03}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2\vee x=-2$$

Como $x_{p_1}<0$, conclui-se que $x_{p_1}=-2$ e $P_1(-2;\,0{,}12)$.

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{0{,}03x^2-0{,}12}{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{0{,}03\left(x^2-4\right)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{0{,}03\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}=$$

$$\underset{x\neq -2}{=}\lim_{x\to -2}\left(0{,}03(x-2)\right)=0{,}03(-4)=-0{,}12$$

Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto pedido.

$m_r=f'(-2)=-0{,}12$

r: $y=-0{,}12x+b$

Como o ponto $P_1(-2;\,0{,}12)$ pertence à reta *r*:

$$0{,}12=-0{,}12\times(-2)+b\Leftrightarrow 0{,}12=0{,}24+b\Leftrightarrow b=-0{,}12$$

r: $y=-0{,}12x-0{,}12$

23.2. $P_2(x;\,0{,}27),\ x\in\mathbb{R}^+$

$$f(x)=0{,}27\Leftrightarrow 0{,}03x^2=0{,}27\Leftrightarrow x^2=\frac{0{,}27}{0{,}03}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=3\vee x=-3$$

Como $x_{p_2}>0$, conclui-se que $x_{p_2}=3$ e $P_2(3;\,0{,}27)$.

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{0{,}03x^2-0{,}27}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{0{,}03\left(x^2-9\right)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{0{,}03\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=$$

$$\underset{x\neq 3}{=}\lim_{x\to 3}\left(0{,}03(x+3)\right)=0{,}18$$

Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto pedido.

$m_r = f'(3) = 0,18$

r: $y = 0,18x + b$

Como o ponto de $P_2(3; 0,27)$ pertence à reta *r*:

$0,27 = 0,18 \times 3 + b \Leftrightarrow 0,27 = 0,54 + b \Leftrightarrow b = -0,27$

r: $y = 0,18x - 0,27$

24. $g(x) = \dfrac{x^2}{6}$

- *A* e *B* pertencem ao gráfico de *g*.
- A reta *t* tangente ao gráfico de *g* no ponto de *A* tem declive 1.
- A reta *r* tangente ao gráfico de *g* no ponto *B* é paralela à reta definida por $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

24.1. Seja *a* a abcissa do ponto *A*.

Então, $A(a, f(a))$, ou seja, $A\left(a, \dfrac{a^2}{6}\right)$.

Sabe-se que $m_t = 1$, ou seja, $f'(a) = 1$.

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{x^2}{6}-\frac{a^2}{6}}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{6(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{6\cancel{(x-a)}} = \lim_{\substack{x\neq a\\x\to a}}\frac{x+a}{6} =$$

$$= \frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$$

Donde se conclui que: $\dfrac{a}{3} = 1 \Leftrightarrow a = 3$

Logo, $A\left(3, \dfrac{3^2}{6}\right)$, ou seja, $A\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$.

24.2. Como retas paralelas têm o mesmo declive, conclui-se que $m_r = -\dfrac{1}{2}$.

Seja $B(b, f(b))$. $m_r = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f'(b) = -\dfrac{1}{2}$

$$f'(b) = \lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b}\frac{\frac{x^2}{6}-\frac{b^2}{6}}{x-b} =$$

$$= \lim_{x\to b}\frac{x^2-b^2}{6(x-b)} = \lim_{x\to b}\frac{(x-b)(x+b)}{6(x-b)} = \lim_{\substack{x\neq b\\x\to b}}\frac{x+b}{6} =$$

$$= \frac{2b}{6} = \frac{b}{3}$$

Donde se conclui que: $\dfrac{b}{3} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow b = -\dfrac{3}{2}$

Então, $B\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{6}\right)$, ou seja $B\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{8}\right)$.

r: $y = -\dfrac{1}{2}x + b_r$

Como o ponto $B\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{8}\right)$ pertence à reta *r*:

$\dfrac{3}{8} = -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) + b_r \Leftrightarrow \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{4} + b_r \Leftrightarrow b_r = -\dfrac{3}{8}$

Equação da reta *r*, na forma reduzida:

$y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{8}$

25. $f(x) = -0,5x^2$

$P(x, -2)$; $x \in \mathbb{R}^+$ pertence ao gráfico de *f*, logo:

$f(x) = -2 \Leftrightarrow -0,5x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-2}{-0,5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

Como a abcissa do ponto *P* é positiva, conclui-se que $P(2, -2)$.

Como a reta *t* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *P*, sabe-se que $m_t = f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-0,5x^2-\left(-0,5\times 2^2\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-0,5x^2+2}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-0,5\left(x^2-4\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-0,5\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\neq 2\\x\to 2}}\left(-0,5(x+2)\right) = -0,5\times 4 = -2$$

Então, $m_t = f'(2) = -2$ e *t*: $y = -2x + b$

Como $P \in t$, tem-se:

$-2 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow -2 = -4 + b \Leftrightarrow b = 2$

t: $y = -2x + 2$

A: ponto de interseção da reta *t* com Oy

Logo, $A(0, 2)$.

B: ponto de interseção da reta *t* com Ox

$B(x, 0);\ x \in \mathbb{R}$

$0 = -2x + 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \therefore B(1, 0)$

$\overline{AB} = \sqrt{(0-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$A_{[ABCD]} = \left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

26. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3;\ r \in [1, 10]$

26.1. $V(2{,}5) = \frac{4}{3}\pi \times 2{,}5^3 \approx 65{,}45$

26.2. Seja *a* um elemento qualquer que pertence ao intervalo $[1, 10]$.

$$V'(a) = \lim_{r\to a} \frac{V(r)-V(a)}{r-a} = \lim_{r\to a} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3}{r-a} =$$

$$= \lim_{r\to a} \frac{\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - a^3\right)}{r-a} = \lim_{r\to a} \frac{\frac{4}{3}\pi\cancel{(r-a)}\left(r^2 + ar + a^2\right)}{\cancel{r-a}} =$$

$$= \lim_{\substack{r\neq a\\ r\to a}} \left(\frac{4}{3}\pi\left(r^2 + ar + a^2\right)\right) = \frac{4}{3}\pi\left(3a^2\right) = \frac{12}{3}\pi a^2 = 4\pi a^2$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\ a & & a & a^2 & a^3 \\ \hline & 1 & a & a^2 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

$\forall a \in [1, 10],\ V'(a) = 4\pi a^2$

Donde se conclui que $V'(r) = 4\pi r^2$.

Página 116

27.1. $f(x) = -2x^2;\ f'(x) = \left(-2x^2\right)' = -4x$

27.2. $f(x) = \frac{1}{2}x;\ f'(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)' = \frac{1}{2}$

27.3. $f(x) = x^3;\ f'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2$

27.4. $f(x) = 7;\ f'(x) = (7)' = 0$

27.5. $f(x) = 0{,}2x^3;\ f'(x) = \left(0{,}2x^3\right)' = 0{,}6x^2$

27.6. $f(x) = -\sqrt{3}x;\ f'(x) = \left(-\sqrt{3}x\right)' = -\sqrt{3}$

27.7. $f(x) = \pi x^2;\ f'(x) = \left(\pi x^2\right) = 2\pi x$

27.8. $f(x) = -\frac{5}{3}x^2;\ f'(x) = \left(-\frac{5}{3}x^2\right) = -\frac{10}{3}x$

28. $f(x) = -4x;\ f'(x) = (-4x)' = -4$

28.1. $m = f'(3) = -4$

28.2. $m = f'(-1) = -4$

28.3. $m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$

28.4. $m = f'(0) = -4$

29. $f(x) = 0{,}25x^3\ ;\ \ f'(x) = \left(0{,}25x^3\right)' = 0{,}75x^2$

Sabe-se que as retas tangentes ao gráfico de *f* nos pontos *A* e *B* são paralelas à reta $y = 3x$, então têm declive 3. Assim, tem-se:

$f'(x) = 3 \Leftrightarrow 0{,}75x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{0{,}75} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

Como a abcissa do ponto *A* é menor do que a abcissa do ponto *B*, então $x_A = -2$ e $x_B = 2$.

$A(-2, f(-2))$ e $B(2, f(2))$

$f(-2) = 0{,}25 \times (-2)^3 = 0{,}25 \times (-8) = -2$ e

$f(2) = 0{,}25 \times 2^3 = 0{,}25 \times 8 = 2$

Donde se conclui que $A(-2, -2)$ e $B(2, 2)$.

Página 117

30.1. $f(x) = -x^2 + 3x$

$f'(x) = \left(-x^2 + 3x\right)' = \left(-x^2\right)' + (3x)' = -2x + 3$

30.2. $f(x) = 2x^3 + 3x + 5$

$f'(x) = \left(2x^3 + 3x + 5\right)' = \left(2x^3\right)' + (3x)' + (5)' = 6x^2 + 3$

30.3. $f(x) = \frac{3x}{2} + x^2$

$f'(x) = \left(\frac{3x}{2} + x^2\right)' = \left(\frac{3x}{2}\right)' + \left(x^2\right)' = \frac{3}{2} + 2x$

30.4. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{3}$

$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{3}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' - \left(\frac{2x}{3}\right)' = x - \frac{2}{3}$

30.5. $f(x) = -x^3 + \frac{x^2}{4} - 4x$

$f'(x) = \left(-x^3 + \frac{x^2}{4} - 4x\right)' = \left(-x^3\right)' + \left(\frac{x^2}{4}\right)' - (4x)' =$

$= -3x^2 + \frac{x}{2} - 4$

30.6. $f(x)=3x^2(2-5x)$

$f'(x)=\left(3x^2(2-5x)\right)'=$

$=\left(3x^2\right)'\times(2-5x)+(2-5x)'\times\left(3x^2\right)=$

$=6x\times(2-5x)+(0-5)\times\left(3x^2\right)=12x-30x^2-15x^2=$

$=-45x^2+12x$

30.7. $f(x)=\frac{x}{4}\left(2x+x^2\right)$

$f'(x)=\left(\frac{x}{4}\left(2x+x^2\right)\right)'=\left(\frac{x}{4}\right)'\times\left(2x+x^2\right)+\left(2x+x^2\right)'\times\frac{x}{4}$

$=\frac{1}{4}\times\left(2x+x^2\right)+(2+2x)\times\frac{x}{4}=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}=\frac{3}{4}x^2+x$

30.8. $f(x)=-2x\left(x^2-7x\right)$

$f'(x)=\left(-2x\left(x^2-7x\right)\right)'=$

$=(-2x)'\times\left(x^2-7x\right)+\left(x^2-7x\right)'\times(-2x)=$

$=-2\times\left(x^2-7x\right)+(2x-7)\times-2x=$

$=-2x^2+14x-4x^2+14x=-6x^2+28x$

30.9. $f(x)=\frac{2x}{3}\left(x^3-2x^2\right)$

$f'(x)=\left(\frac{2x}{3}\left(x^3-2x^2\right)\right)'=$

$=\left(\frac{2x}{3}\right)'\times\left(x^3-2x^2\right)+\left(x^3-2x^2\right)'\times\frac{2x}{3}=$

$=\frac{2}{3}\times\left(x^3-2x^2\right)+\left(3x^2-4x\right)\times\frac{2x}{3}=$

$=\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{6x^3}{3}-\frac{8x^2}{3}=\frac{8}{3}x^3-4x^2$

31. *r*: reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A* de abcissa 3

r: $y=2x-8$

31.1. O ponto *A*, de abcissa 3, pertence à reta *r*, logo:

$y=2\times3-8\Leftrightarrow y=-2$

Assim, $f(3)=-2$. Sabe-se que $f'(3)=m_r$.

Como $m_r=2$, então $f'(3)=2$.

31.2. a) $g(x)=-2x$

$(f\times g)'(3)=f'(3)\times g(3)+g'(3)\times f(3)$

$g(3)=-2\times3=-6$

$g'(x)=(-2x)'=-2$, logo $g'(3)=-2$

$(f\times g)'(3)=2\times(-6)+(-2)\times(-2)=$

$=-12+4=-8$

b) $g(x)=x^2-5x$

$(f\times g)'(3)=f'(3)\times g(3)+g'(3)\times f(3)$

$g(3)=3^2-5\times3=9-15=-6$

$g'(x)=\left(x^2-5x\right)'=2x-5$, logo:

$g'(3)=2\times3-5=1$

$(f\times g)'(3)=2\times(-6)+1\times(-2)=-12-2=-14$

c) $g(x)=2x^2-x^3$

$(f\times g)'(3)=f'(3)\times g(3)+g'(3)\times f(3)$

$g(3)=2\times3^2-3^3=18-27=-9$

$g'(x)=\left(2x^2-x^3\right)=4x-3x^2$, logo:

$g'(3)=4\times3-3\times3^2=-15$

$(f\times g)'(3)=2\times(-9)+(-15)\times(-2)=12$

Página 118

32.1. $f(x)=\frac{-2}{x}$

$f'(x)=\left(\frac{-2}{x}\right)'=\frac{(-2)'\times x-(x)'\times(-2)}{x^2}=$

$=\frac{0\times x-1\times(-2)}{x^2}=\frac{2}{x^2}$

32.2. $f(x)=\frac{x+3}{x}$

$f'(x)=\left(\frac{x+3}{x}\right)'=\frac{(x+3)'\times x-(x)'\times(x+3)}{x^2}=$

$=\frac{1\times x-1\times(x+3)}{x^2}=\frac{x-x-3}{x^2}=\frac{-3}{x^2}$

32.3. $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$

$f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{(x+1)'\times(x-2)-(x-2)'\times(x+1)}{(x-2)^2}=$

$=\frac{1\times(x-2)-1\times(x+1)}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x-1}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$

32.4. $f(x)=\frac{-2x}{x+3}$

$f'(x)=\left(\frac{-2x}{x+3}\right)'=\frac{(-2x)'\times(x+3)-(x+3)'\times(-2x)}{(x+3)^2}=$

$=\frac{-2x(x+3)-1\times(-2x)}{(x+3)^2}=\frac{-2x-6+2x}{(x+3)^2}=\frac{-6}{(x+3)^2}$

32.5. $f(x)=\dfrac{5x}{1-x}$

$f'(x)=\left(\dfrac{5x}{1-x}\right)'=\dfrac{(5x)'\times(1-2x)-(1-2x)'\times(5x)}{(1-x)^2}=$

$=\dfrac{5\times(1-x)-(-1)\times(5x)}{(1-x)^2}=\dfrac{5-5x+5x}{(1-x)^2}=\dfrac{5}{(1-x)^2}$

32.6. $f(x)=-3+\dfrac{1}{x-2}$

$f'(x)=\left(-3+\dfrac{1}{x-2}\right)=(-3)'+\left(\dfrac{1}{x-2}\right)'=$

$=0+\dfrac{(1)'\times(x-2)-(x-2)'\times 1}{(x-2)^2}=\dfrac{0\times(x-2)-1\times 1}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$

33.1. $f(x)=x^4-2x^3$

$f'(x)=\left(x^4-2x^3\right)'=4x^3-6x^2$

33.2. $f(x)=(x+2)^3$

$f'(x)=\left((x+2)^3\right)'=3(x+2)^{3-1}\times(x+2)'=$

$=3(x+2)^2\times 1=3(x+2)^2$

33.3. $f(x)=3(x+1)^2$

$f'(x)=\left(3(x+1)^2\right)'=(3)'\times(x+1)^2+\left((x+1)^2\right)'\times 3=$

$=0\times(x+1)^2+2(x+1)^2\times(x+1)'\times 3=$

$=2(x+1)\times 1\times 3=6x+6$

33.4. $f(x)=(2x-1)^3$

$f'(x)=\left((2x-1)^3\right)'=3\times(2x-1)^{3-1}\times(2x-1)'=$

$=3(2x-1)^2\times 2=6(2x-1)^2$

33.5. $f'(x)=-2x^4+(2x)^3$

$f'(x)=\left(-2x^4+(2x)^3\right)'=\left(-2x^4\right)'+\left((2x)^3\right)'=$

$=-8x^3+3\times(2x)^{3-1}\times(2x)'=-8x^3+3(2x)^2\times 2=$

$=-8x^3+6(2x)^2=-8x^3+6\left(4x^2\right)=-8x^3+24x^2$

34. $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$; $A(1, f(1))$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto A, de abcissa 1.

Sabe-se que $m_r=f'(1)$.

$f'(x)=\left(\dfrac{3}{x^2}\right)'=\dfrac{(3)'\times x^2-\left(x^2\right)'\times 3}{\left(x^2\right)^2}=\dfrac{0\times x^2-(2x)\times 3}{x^4}=$

$=\dfrac{-6x}{x^4}=\dfrac{-6}{x^3}$

Então, $m_r=\dfrac{-6}{1^3}=-6$

A opção correta é a **(C)**.

Página 119 – Tarefa 5

1.1. $f'(x)=(-2x+5)'=-2$; $g'(x)=\left(3x^2+2x\right)'=6x+2$

$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)=-2+6x+2=6x$

1.2. $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=-2-(6x+2)=$

$=-2-6x-2=-6x-4$

2.1. $h(x)=(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=$

$=(-2x+5)\times\left(3x^2+2x\right)=-6x^3-4x^2+15x^2+10x=$

$=-6x^3+11x^2+10x$

2.2. $h'(x)=\left(-6x^3+11x^2+10x\right)'=-18x^2+22x+10$

2.3. $h'(x)=(f\times g)'(x)=f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)=$

$=-2\times\left(3x^2+2x\right)+(6x+2)\times(-2x+5)=$

$=-6x^2-4x-12x^2+30x-4x+10=$

$=-18x^2+22x+10$

3.1. $j(x)=(f(x))^3=(-2x+5)^3=(-2x+5)^2\times(-2x+5)$

$=\left(4x^2-20x+20\right)\times(-2x+5)=$

$=-8x^3+20x^2+40x^2-100x-50x+125=$

$=-8x^3+60x^2-150x+125$

3.2. $j'(x)=\left(-8x^3+60x^2-150x+125\right)'=$

$=-24x^2+120x-150$

3.3. $j'(x)=\left((-2x+5)^3\right)'=3\times(-2x+5)^{3-1}\times(-2x+5)'=$

$=3\times(-2x+5)^2\times(-2)=-6(-2x+5)^2=$

$=-6\left(4x^2-20x+25\right)=-24x^2+120x-150$

4.1. $i'(x)=\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x)=\left(\dfrac{1}{-2x+5}\right)'$

$=\dfrac{(1)'\times(-2x+5)-(-2x+5)'\times 1}{(-2x+5)^2}=$

$=\dfrac{0\times(-2x+5)-(-2)\times 1}{(-2x+5)^2}=\dfrac{2}{(-2x+5)^2}$

4.2. A reta r é tangente ao gráfico da função i no ponto A de coordenadas $(3, -1)$.

Então, sabe-se que $m_r = i'(3)$.

$$i'(3) = \frac{2}{(-2\times3-5)^2} = \frac{2}{(-1)^2} = 2$$

Logo, $m_r = 2$ e r: $y = 2x + b$.

Como $A \in r$, tem-se:

$-1 = 2\times3 + b \Leftrightarrow -1 = 6 + b \Leftrightarrow b = -7$

Donde se conclui que a reta r é definida pela equação $y = 2x - 7$.

5.1. a) $D_{\frac{g}{f}} = (D_g \cap D_f) \setminus \{x \in \mathbb{R}:\ f(x) = 0\}$

$D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Então, $D_{\frac{g}{f}} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

b) $D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R}:\ g(x) = 0\}$

$D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}$

Então, $D_{\frac{f}{g}} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) \setminus \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}$.

5.2. a) $$\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x)\times f(x) - f'(x)\times g(x)}{(f(x))^2} =$$

$$= \frac{(6x+2)\times(-2x+5) - (-2)\times(3x^2+2x)}{(-2x+5)^2} =$$

$$= \frac{-12x^2 + 30x - 4x + 10 + 6x^2 + 4x}{(-2x+5)^2} = \frac{-6x^2 + 30x + 10}{(-2x+5)^2}$$

b) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\times g(x) - g'(x)\times f(x)}{(g(x))^2} =$$

$$= \frac{(-2)\times(3x^2+2x) - (6x+2)\times(-2x+5)}{(3x^2+2x)^2} =$$

$$= \frac{-6x^2 - 4x + 12x^2 - 30x + 4x - 10}{(3x^2+2x)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 - 30x - 10}{(3x^2+2x)^2}$$

Página 120 – Pratica

35.1. $f'(x) = (-3x^2 + 4x)' = -6x + 4$

$f'(1) = -6\times1 + 4 = -2$

A afirmação é verdadeira.

35.2. $g'(x) = \left(0{,}4x^3 - \frac{x}{2} + 1\right)' = 1{,}2x^2 - \frac{1}{2} = 1{,}2x^2 - 0{,}5$

$g'(-1) = 1{,}2\times(-1)^2 - 0{,}5 = 1{,}2 - 0{,}5 = 0{,}7$

$g'(1) = 1{,}2\times1^2 - 0{,}5 = 1{,}2 - 0{,}5 = 0{,}7$

$g'(-1) = g'(1)$

A afirmação é verdadeira.

35.3. $h'(x) = \left(\frac{3}{4}x^2 + 2x - 2\right)' = \frac{3}{2}x + 2$

$h'(2) = \frac{3}{2}\times2 + 2 = 3 + 2 = 5$

A afirmação é falsa.

35.4. $g'(x) = 1{,}2x^2 - 0{,}5$

$g'(0) = 1{,}2\times0^2 - 0{,}5 = -0{,}5$

A afirmação é verdadeira.

35.5. $f'(x) = -6x + 4$

$f'(-1) = -6\times1 + 4 = -2$

A afirmação é falsa.

35.6. $h'(x) = \frac{3}{2}x + 2$ e $f'(x) = -6x + 4$

$h'(0) = \frac{3}{2}\times0 + 2 = 2$

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = -6\times\frac{1}{3} + 4 = -2 + 4 = 2$

Assim, $h'(0) = f'\left(\frac{1}{3}\right)$.

A afirmação é verdadeira.

36. $D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 1$; $g(x) = x + 2$ e $h(x) = -2x^3$

36.1. $(f\times g)'(x) = f'(x)\times g(x) + g'(x)\times f(x)$

$= (2x+1)'\times(x+2) + (x+2)'\times(2x+1)$

$= 2(x+2) + 1(2x+1) = 2x + 4 + 2x + 1 = 4x + 5$

$$(f\times g)':\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to 4x + 5$$

36.2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\times g(x) - g'(x)\times f(x)}{(g(x))^2} =$

$= \frac{(2x+1)'\times(x+2) - (x+2)'\times(2x+1)}{(x+2)^2} =$

$= \frac{2(x+2) - 1(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)': \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{3}{(x+2)^2}$

36.3. $(h\times g)'(x) = h'(x)\times g(x) + g'(x)\times h(x) =$

$= \left(-2x^3\right)'\times(x+2) + (x+2)'\times\left(-2x^3\right) =$

$= \left(-6x^2\right)\times(x+2) + 1\times\left(-2x^3\right) = -6x^3 - 12x^2 - 2x^3 =$

$= -8x^3 - 12x^2$

$(h\times g)': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to -8x^3 - 12x^2$

36.4. $\left(g^3\right)'(x) = \left((x+2)^3\right)' = 3\times(x+2)^{3-1}\times(x+2)' =$

$= 3\times(x+2)^2\times 1 = 3(x+2)^2$

$\left(g^3\right)': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 3(x+2)^2$

36.5. $\left(h^2\right)'(x) = \left(\left(-2x^3\right)^2\right)' = 2\times\left(-2x^3\right)^{2-1}\times\left(-2x^3\right)' =$

$= 2\times\left(-2x^3\times\left(-6x^2\right)\right) = -4x^3\times\left(-6x^2\right) = 24x^5$

$\left(h^2\right)': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 24x^5$

36.6. $\left(\frac{h}{f}\right)'(x) = \frac{h'(x)\times f(x) - f'(x)\times h(x)}{(f(x))^2} =$

$= \frac{\left(-2x^3\right)'\times(2x+1) - (2x+1)'\times\left(-2x^3\right)}{(2x+1)^2} =$

$= \frac{-12x^3 - 6x^2 + 4x^3}{(2x+1)^2} = \frac{-8x^3 - 6x^2}{(2x+1)^2}$

$\left(\frac{h}{f}\right)': \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{-8x^3 - 6x^2}{(2x+1)^2}$

Página 121 – Pratica

37.1. a) Seja *a* um elemento qualquer do domínio de *f* $(\mathbb{R})$.

$f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{-0,25x^2 - \left(-0,25a^2\right)}{x-a} =$

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{-0,25\left(x^2-a^2\right)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{-0,25\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} =$

$\underset{x\neq a}{=} \lim\limits_{x\to a} \left(-0,25(x+a)\right) = -0,25(2a) = -0,5a$

$\forall a \in \mathbb{R},\ f'(a) = -0,5a$

$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to -0,5x$

b) Seja *a* um elemento qualquer do domínio de *g* $(\mathbb{R})$.

$g'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{x-a} =$

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{2(x-a)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{2\cancel{(x-a)}} \underset{x\neq a}{=} \lim\limits_{x\to a} \frac{x+a}{2} =$

$= \frac{2a}{2} = a$

$\forall a \in \mathbb{R},\ f'(a) = a$

$g': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x$

37.2. r: $y = x - 3$; $m_r = 1$

Sejam $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.

$-0,5a = 1$ e $b = 1$, ou seja, $a = -2$ e $b = 1$

$f(-2) = -0,25\times 2^2 = -1$

$g(1) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$

Donde se conclui que $A(-2, -1)$ e $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

38. t: $y = 2x - 1$ é a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*.

38.1. $f'(2) = m_t = 2$

A taxa de variação instantânea de *f* em $x = 2$ é 2.

38.2. Como o ponto *A* pertence à reta *t*, tem-se:

$y_A = 2\times 2 - 1 = 3$. Logo, $A(2, 3)$.

38.3. a) $g(x) = -\frac{2}{x}$

$(f\times g)'(2) = f'(2)\times g(2) + g'(2)\times f(2)$

Sabe-se que $f'(2)=2$ e $f(2)=3$.

$g(2)=-\frac{2}{2}=-1$

$g'(x)=\left(-\frac{2}{x}\right)'=\frac{(-2)'\times x-(x)'\times(-2)}{x^2}=\frac{2}{x^2}$

Logo $g'(2)=\frac{2}{2^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

$(f\times g)^2(2)=2\times(-1)+\frac{1}{2}\times 3=-\frac{1}{2}$

b) $g(x)=(3-x)^3$

$(f\times g)'(2)=f'(2)\times g(2)+g'(2)+f(2)$

Sabe-se que $f'(2)=2$ e $f(2)=3$.

$g(2)=(3-2)^3=1$

$g'(x)=\left((3-x)^3\right)'=3\times(3-x)^{3-1}\times(3-x)'=$

$=3\times(3-x)^2\times(-1)=-3(3-x)^2$

Logo, $g'(2)=-3(3-2)^2=-3$.

$(f\times g)'(2)=2\times 1+(-3)\times 3=2-9=-7$

c) $g(x)=x+\frac{1}{x}$

$(f\times g)'(2)=f'(2)\times g(2)+g'(2)\times f(2)$

Sabe-se que $f'(2)=2$ e $f(2)=3$.

$g(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$g'(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)'=(x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=1+\frac{(1)'\times x-(x)'\times 1}{x^2}=$

$=1+\frac{0\times x-1\times 1}{x^2}=1-\frac{1}{x^2}$

Logo, $g(2)=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$.

$(f\times g)'(2)=2\times\frac{5}{2}+\frac{3}{4}\times 3=5+\frac{9}{4}=\frac{29}{4}$

d) $g(x)=-\frac{x^3}{6}+x$

$(f\times g)'(2)=f'(2)\times g(2)+g'(2)\times f(2)$

Sabe-se que $f'(2)=2$ e $f(2)=3$.

$g(2)=-\frac{2^3}{6}+2=-\frac{8}{6}+2=-\frac{4}{3}+2=\frac{2}{3}$

$g'(x)=\left(-\frac{x^3}{6}+x\right)'=\left(-\frac{x^3}{6}\right)'+(x)'=$

$=-\frac{3x^2}{6}+1=-\frac{x^2}{2}+1$

$g'(2)=-\frac{2^2}{2}+1=-\frac{4}{2}+1=-2+1=-1$

$(f\times g)'(2)=2\times\frac{2}{3}+(1)\times 3=\frac{4}{3}-3=-\frac{5}{3}$

39. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\};\ f(x)=4x^2-\frac{1}{x}$

39.1. Seja x_0 um elemento qualquer do domínio de f $(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{4x^2-\frac{1}{x}-\left(4x_0^2-\frac{1}{x_0}\right)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{4x^2-\frac{1}{x}-4x_0^2+\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{4x^2-4x_0^2}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{4(x^2-x_0^2)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{\cancel{x-x_0}}{x_0x}}{\cancel{x-x_0}}=$$

$$\underset{x\neq x_0}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{4\cancel{(x-x_0)}(x+x_0)}{\cancel{x-x_0}}+\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x_0x}=$$

$$\underset{x\neq x_0}{=}\lim_{x\to x_0}\left(4(x+x_0)\right)+\frac{1}{x_0^2}=4(2x_0)+\frac{1}{x_0^2}=8x_0+\frac{1}{x_0^2}$$

$\forall x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f'(x_0)=8x_0+\frac{1}{x_0^2}$

$f':\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

$x\to 8x+\frac{1}{x^2}$

39.2. $A\in Ox$, logo $A(x,0);\ x\in\mathbb{R}$

Como A pertence ao gráfico de f', tem-se:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 8x+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow\frac{8x^3+1}{x^2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x^3+1=0\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Leftrightarrow x^3=-\frac{1}{8}\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

$A\left(-\frac{1}{2},0\right)$

40. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ e $f(x)=\frac{kx}{x-2},\ k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f'(x)=\left(\frac{kx}{x-2}\right)'=\frac{(kx)'\times(x-2)-(x-2)'\times(kx)}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{k\times(x-2)-1\times(kx)}{(x-2)^2}=\frac{\cancel{kx}-2k-\cancel{kx}}{(x-2)^2}=\frac{-2k}{(x-2)^2}$$

$f'(4) = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-2k}{(4-2)^2} = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-2k}{4} = -3 \Leftrightarrow k = 6$

Então, $f(x) = \dfrac{6x}{x-2}$.

$$\begin{array}{r|l} 6x + \ 0 & x-2 \\ \cline{2-2} -6x+12 & 6 \\ \hline 12 & \end{array}$$

Como $f(x) = 6 + \dfrac{12}{x-2}$, conclui-se que as equações das assíntotas ao gráfico da função são $x = 2$ e $y = 6$.

41. f e g $\rightarrow$ funções polinomiais do grau 2

$f'(x) = g'(x)$ e $f(1) - g(1) = 3$

Por exemplo, $f(x) = x^2 - 2x + 5$ e

$g(x) = x^2 - 2x + 2$.

Confirmação:

$f'(x) = (x^2 - 2x + 5)' = 2x - 2$

$g'(x) = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2$

$f'(x) = g'(x)$

$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 5 = 4$

$g(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 2 = 1$

$f(1) - g(1) = 4 - 1 = 3$

Página 122 – Consolida

1.1. Variação da função f no intervalo $[-2, -1]$:

$f(-1) - f(-2) = 4 - 2 = 2$

1.2. $f(0) - f(2,8) = -6,8 \Leftrightarrow 2 - f(2,8) = -6,8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(2,8) = 8,8$

1.3. **a)** $\text{t.m.v.}_{[-1,\,0]} = \dfrac{f(0) - f(-1)}{0-(-1)} = \dfrac{2-4}{1} = -2$

b) $\text{t.m.v.}_{[-2,\,1]} = \dfrac{f(1) - f(-2)}{1-(-2)} = \dfrac{2-2}{3} = 0$

c) $\text{t.m.v.}_{[-1,\,1]} = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{2-4}{2} = -1$

1.4. $\text{t.m.v.}_{[-3,\,-1]} = -5 \Leftrightarrow \dfrac{f(-1) - f(-3)}{-1-(-3)} = -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4 - f(-3)}{2} = -5 \Leftrightarrow 4 - f(-3) = -10 \Leftrightarrow f(-3) = 14$

Variação da função f no intervalo $[-3, 0]$:

$f(-3) - f(0) = 14 - 2 = 12$

2. A reta AB interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 3, logo a reta AB é definida por $y = mx + 3$.

$A(a, ma+3)$ e $B(b, mb+3)$

$\text{t.m.v.}_{[a,\,b]} = -2 \Leftrightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{mb + 3 - (ma+3)}{b-a} = -2 \Leftrightarrow \dfrac{mb - ma}{b-a} = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{m(b-a)}{b-a} = -2 \Leftrightarrow m = -2$

Assim, a equação reduzida da reta AB é $y = -2x + 3$.

3. A, B e C são colineares

$A \in Oy$; $B(1, 2)$; $C(2, 0)$

$\text{t.m.v.}_{[0,\,1]} = m_{AB}$

Como A, B e C são colineares, $m_{AB} = m_{BC}$.

Sabe-se que $m_{BC} = \dfrac{0-2}{2-1} = -2$.

Então, conclui-se que $m_{AB} = -2$ e $\text{t.m.v.}_{[0,\,1]} = -2$.

4.1. A afirmação é falsa.

Se $\text{t.m.v.}_{[a,\,b]} < 0$, então apenas se pode concluir que $f(b) - f(a) < 0$, ou seja, $f(b) < f(a)$.

4.2. A afirmação é verdadeira.

Se f é crescente no intervalo $[a, b]$, sabe-se que $f(b) > f(a)$. Logo, $f(b) - f(a) > 0$ e, consequentemente, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} > 0$, ou seja, $\text{t.m.v.}_{[a,\,b]} > 0$.

4.3. A afirmação é verdadeira.

$\text{t.m.v.}_{[a,\,b]} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \underset{b-a\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\underset{b-a\neq 0}{\Leftrightarrow} f(b) - f(a) = 0 \Leftrightarrow f(b) = f(a)$

4.4. A afirmação é falsa.

$\text{t.m.v.}_{[a,\,b]} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} > 0 \underset{b-a>0}{\Leftrightarrow}$

$\underset{b-a>0}{\Leftrightarrow} f(b) - f(a) > 0 \Leftrightarrow f(b) > f(a)$

4.5. A afirmação é falsa.

Se $\text{t.m.v.}_{[a,\,b]} = 0$, então apenas se pode concluir que $f(b) - f(a) = 0$, ou seja, $f(a) = f(b)$.

Não se pode concluir que *f* é constante em $[a,\,b]$.

Página 123 – Consolida

5. $f(t) = -\frac{t^2}{4} + 9,\; t \in [0,\,6]$

t: tempo após o início da queda (em segundos)

$f(t)$: distância do telemóvel ao solo (em metros)

5.1. $f(2) - f(0) = -\frac{2^2}{4} + 9 - \left(-\frac{0^2}{4} + 9\right) = 8 - 9 = -1$

5.2. **a)** $\text{t.m.v.}_{[0,\,4]} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-\frac{4^2}{4} + 9 - 9}{4} = -1$

b) $\text{t.m.v.}_{[2,\,6]} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{0 - 8}{4} = -2$

6. $f(x) = 3x^2$

6.1. $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{3(1+h)^2 - 3\times 1^2}{h} =$

$= \frac{3(1 + 2h + h^2) - 3}{h} = \frac{\cancel{3} + 6h + 3h^2 \cancel{-3}}{h} =$

$= \frac{6h + 3h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(6 + 3h)}{\cancel{h}} = 6 + 3h$

6.2. Taxa de variação instantânea de *f* para $x = 1$:

$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} (6 + 3h) \underset{(a)}{=} 6$

(a) Quando $h \to 0$, $(6 + 3h)$ tende para $6 + 3\times 0$, ou seja, 6.

6.3. $f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$

$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{3(-2+h)^2 - 3\times(-2)^2}{h} =$

$= \frac{3(4 - 4h + h^2) - 12}{h} = \frac{\cancel{12} - 12h + 3h^2 \cancel{-12}}{h} =$

$= \frac{\cancel{h}(-12 + 3h)}{\cancel{h}} = -12 + 3h$

Quando $h \to 0$, então $(-12 + 3h)$ tende para $-12 + 3\times 0$, ou seja, -12.

Então, $f'(2) = \lim_{x\to 0} (-12 + 3h) = -12$.

7.1. **a)** $\text{t.m.v.}_{[-2,\,2]} = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{14 - (-2)}{4} = \frac{16}{4} = 4$

Cálculo auxiliar:

$f(2) = 2^2 + 4\times 2 + 2 = 4 + 8 + 2 = 14$

$f(-2) = (-2)^2 + 4\times(-2) + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$

b) $\text{t.m.v.}_{[-6,\,-4]} = \frac{f(-4) - f(-6)}{-4 - (-6)} = \frac{2 - 14}{2} = -6$

Cálculo auxiliar:

$f(-4) = (-4)^2 + 4\times(-4) + 2 = 16 - 16 + 2 = 2$

$f(-6) = (-6)^2 + 4\times(-6) + 2 = 36 - 24 + 2 = 14$

7.2. $\text{t.m.v.}_{[1,\,1+h]} = \frac{f(1+h) - f(1)}{1 + h - 1} =$

$= \frac{(1+h)^2 + 4(1+h) + 2 - (1^2 + 4\times 1 + 2)}{h} =$

$= \frac{1 + 2h + h^2 + 4 + 4h + 2 - 7}{h} = \frac{h^2 + 6h}{h} = h + 6$

7.3. Taxa de variação instantânea de *f* em $x = 1$:

$f'(1) = \lim_{h\to 0} \text{t.m.v.}_{[1,\,1+h]} = \lim_{h\to 0} (h + 6) = 0 + 6 = 6$

7.4. Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1.

Sabe-se que $m_r = f'(1)$ e $f'(1) = 6$, logo $m_r = 6$.

r: $y = 6x + b$

Como o ponto de coordenadas $(1,\,7)$ pertence à reta *t*, tem-se:

$7 = 6\times 1 + b \Leftrightarrow 7 = 6 + b \Leftrightarrow b = 1$

Uma equação da reta *r* é $y = 6x + 1$.

8. $f(x) = x^2 - x$

8.1. $T(-1,\,f(-1))$ e $P(2,\,f(2))$

Como $f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 2$ e $f(2) = 2^2 - 2 = 2$, conclui-se que $T(-1,\,2)$ e $P(2,\,2)$.

8.2. $f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} =$

$= \lim_{x\to -1} \frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} \underset{x\neq -1}{=} \lim_{x\to -1} (x - 2) = -1 - 2 = -3$

Cálculo auxiliar:

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x+1}\underset{x\neq 2}{=}\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=2+1=3$

Conclusão: $f'(-1)=-3$ e $f'(2)=3$

8.3. **a)** A reta *t* é tangente ao gráfico de *f* no ponto $T(-1,2)$.

$m_t=f'(-1)=-3$

Logo, *t*: $y=-3x+b$

Como o ponto $T(-1,2)$ pertence à reta *t*:

$2=-3\times(-1)+b\Leftrightarrow 2=3+b\Leftrightarrow b=-1$

Equação reduzida da reta *t*: $y=-3x-1$

b) A reta *p* é tangente ao gráfico de *f* no ponto $P(2,2)$.

$m_p=f'(2)=3$, logo *p*: $y=3x+b$

Como o ponto $P(2,2)$ pertence à reta *p*:

$2=3\times 2+b\Leftrightarrow 2=6+b\Leftrightarrow b=-4$

Equação reduzida da reta *p*: $y=3x-4$

8.4. $\begin{cases}y=3x-4\\y=-3x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{———}\\3x-4=-3x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{———}\\6x=3\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\times\frac{1}{2}-4\\x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\frac{5}{2}\\x=\frac{1}{2}\end{cases}$

As coordenadas do ponto de interseção das retas *t* e *p* são $\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$.

Página 124 – Consolida

9.

- *A*, *B* e *C* pertencem ao gráfico de *g* e têm abcissas -3, -2 e $\frac{1}{2}$, respetivamente;
- *r* é tangente ao gráfico de *g* no ponto $B(-2,6)$ e é paralela ao eixo Ox;
- *t* é tangente ao gráfico de *g* no ponto $A(-3,2)$;
- $g'(-3)=9$.

9.1. Como *r* é paralela ao eixo Ox, sabe-se que $m_r=0$.

$g'(-2)=m_r=0$

9.2. $g'\left(\frac{1}{2}\right)>0$, porque a reta tangente ao gráfico de *g* no ponto *C* tem declive positivo.

9.3. $m_t=g'(-3)=9$

t: $y=9x+b$

Como $A(-3,2)$ pertence à reta *t*:

$2=9\times(-3)+b\Leftrightarrow 2=-27+b\Leftrightarrow b=29$

Equação reduzida da reta *t*: $y=9x+29$

9.4. Como retas paralelas têm o mesmo declive e $m_t=9$, então o declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 1 é igual a 9, ou seja: $g'(1)=9\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=9$

10.1. $f'(b)=m_{AC}=\frac{0-4}{\frac{4}{3}-0}=\frac{-4}{\frac{4}{3}}=-3$

$A(0,4)$ e $C\left(\frac{4}{3},0\right)$

10.2. $B(b,1)$ e *t*: $y=-3x+4$

Como *B* pertence à reta *t*, tem-se:

$1=-3b+4\Leftrightarrow 3b=3\Leftrightarrow b=1$

11. $D_f=\mathbb{R}$ e $a\in D_f$

11.1. $f(x)=2x$ $\quad f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2x-2a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}\underset{x\neq a}{=}2$

$\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=2$

$f':\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\quad x\to 2$

11.2. $f(x)=-\frac{5}{2}x$; $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{-\frac{5}{2}x-\left(-\frac{5}{2}a\right)}{x-a}=$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{-\frac{5}{2}\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}\underset{x\neq a}{=}\lim\limits_{x\to a}\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{5}{2}$

$\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=-\frac{5}{2}$

$f':\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\quad x\to -\frac{5}{2}$

11.3. $f(x)=-x^2$; $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-x^2-(-a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-x^2+a^2}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-(x^2-a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)\cancel{(x+a)}}{\cancel{x+a}}\underset{x\neq a}{=}$$

$$=\lim_{x\to a}(-(x+a))=-(a+a)=-2a$$

$\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=-2a$

$f':\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\quad x\to -2x$

11.4. $f(x)=\pi x^2$; $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\pi x^2-\pi a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\pi(x^2-a^2)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\pi\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}}\underset{x\neq a}{=}\lim_{x\to a}(\pi(x+a))=$$

$$=\pi(a+a)=2\pi a$$

$\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=2\pi a$

$f':\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\quad x\to 2\pi x$

11.5. $f(x)=-0{,}2x^2$; $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-0{,}2x^2-(-0{,}2a^2)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-0{,}2(x^2-a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-0{,}2\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}}\underset{x\neq a}{=}$$

$$\underset{x\neq a}{=}\lim_{x\to a}(-0{,}2(x+a))=-0{,}2(a+a)=-0{,}4a$$

$\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=-0{,}4a$

$f':\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\quad x\to -0{,}4x$

11.6. $f(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^2$; $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x^2}{4}-\frac{a^2}{4}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{4(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{4\cancel{(x-a)}}\underset{x\neq a}{=}\lim_{x\to a}\frac{x+a}{4}=$$

$$=\frac{a+a}{4}=\frac{a}{2}$$

$\forall a\in\mathbb{R},\ f'(a)=\frac{a}{2}$

$f':\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\quad x\to \frac{x}{2}$

Página 125 – Consolida

12. $V(x)=(0{,}8x)^3=0{,}512x^3,\ x\in\,]0,4]$

Seja a um ponto qualquer pertencente ao domínio de V, ou seja, $a\in\,]0,4]$.

$$V'(a)=\lim_{x\to a}\frac{V(x)-V(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0{,}512(x^3-a^3)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{0{,}512\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}{\cancel{x-a}}\underset{x\neq a}{=}$$

$$\underset{x\neq a}{=}\lim_{x\to a}\left(0{,}512(x^2+ax+a^2)\right)=0{,}512(a^2+a^2+a^2)=$$

$$=0{,}512\times(3a^2)=1{,}536a^2$$

$\forall a\in\,]0,4],\ V'(a)=1{,}536a^2$

$V'(x)=1{,}536x^2$

13.1. $f(x)=-2x^3+3x^2-5$

$$f'(x)=(-2x^3+3x^2-5)'=-6x^2+6x-0=-6x^2+6x$$

13.2. $f(x)=-2x(3x^2-4x)$

$$f'(x)=(-2x(3x^2-4x))'=$$
$$=(-2x)'\times(3x^2-4x)+(3x^2-4x)'\times(-2x)=$$
$$=-2(3x^2-4x)+(6x-4)\times(-2x)=$$
$$=-6x^2+8x-12x^2+8x=$$
$$=-18x^2+16x$$

13.3. $f(x)=\frac{x}{x-2}$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x-2}\right)'=\frac{(x)'\times(x-2)-(x-2)'\times x}{(x-2)^2}=$$
$$=\frac{1\times(x-2)-1\times x}{(x-2)^2}=\frac{-2}{(x-2)^2}$$

13.4. $f(x)=(x-2)(x^3+2x-1)$

$$f'(x)=((x-2)(x^3+2x-1))'=$$
$$=(x-2)'\times(x^3+2x-1)+(x^3+2x-1)'\times(x-2)=$$
$$=1\times(x^3+2x-1)+(3x^2+2)\times(x-2)=$$
$$=x^3+2x-1+3x^3-6x^2+2x-4=$$
$$=4x^3-6x^2+4x-5$$

13.5. $f(x)=-\frac{1}{x+3}+5$

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x+3}+5\right)'=\left(\frac{-1}{x+3}\right)'+(5)'$$
$$=\frac{(-1)'\times(x+3)-(x+3)'\times(-1)}{(x+3)^2}+0=$$
$$=\frac{0\times(x+3)-1\times(-1)}{(x+3)^2}=\frac{1}{(x+3)^2}$$

13.6. $f(x)=(3x+2)^3$

$$f'(x)=\left((3x+2)^3\right)'=3\times(3x+2)^{3-1}\times(3x+2)'=$$
$$=3\times(3x+2)^{3-1}\times 3=9(3x+2)^2$$

14. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$; $A(1{,}2;f(1{,}2))$ e $B(6;f(6))$

$P(x;f(x))$, sendo $x\in\left]\dfrac{6}{5},6\right[$

$$f(1{,}2)=\frac{2\times1{,}2-1}{1{,}2-1}=\frac{1{,}4}{0{,}2}=7\quad\therefore A\left(\frac{6}{5},7\right)$$
$$1{,}2=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$
$$f(6)=\frac{2\times6-1}{6-1}=\frac{11}{5}\quad\therefore B\left(6,\frac{11}{5}\right)$$
$$m_{AB}=\frac{\frac{11}{5}-7}{6-\frac{6}{5}}=\frac{-\frac{24}{5}}{\frac{24}{5}}=-1$$

Seja *t* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *P*.

Como $t\,//\,AB$, então $m_t=m_{AB}$, ou seja, $m_{AB}=-1$.

$f'(x)=-1$, sendo x a abcissa do ponto *P*

$\left(x\in\left]\dfrac{6}{5},6\right[\right)$.

$$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)'=\frac{(2x-1)'(x-1)-(x-1)'\times(2x-1)}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{2\times(x-1)-1\times(2x-1)}{(x-1)^2}=\frac{2x-2-2x+1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=-1\Leftrightarrow\frac{-1}{(x-1)^2}=-1\Leftrightarrow(x-1)^2=1\wedge x\neq1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-1=1\vee x-1=-1)\wedge x\neq1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=2\vee x=0)\wedge x\neq1\Leftrightarrow x=2\vee x=0$$

Como $x\in\left]\dfrac{6}{5},6\right[$, conclui-se que $x=2$.

Logo: $P(2,3)$

$$f(2)=\frac{2\times2-1}{2-1}=3$$

15. $f(x)=-2x^2+x+1$

t: $y=-x+\dfrac{3}{2}\rightarrow$ tangente ao gráfico de *f* no ponto *T*

15.1. Seja $T(a,f(a))$.

Sabe-se que $f'(a)=m_t$, ou seja, $f'(a)=-1$.

$$f'(x)=\left(-2x^2+x+1\right)'=-4x+1$$

$$f'(a)=-1\Leftrightarrow-4a+1=-1\Leftrightarrow-4a=-2\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1=-2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=1$$

Assim, $T\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

15.2. Sendo $g(x)=-4x^2+x$, então:

$$g'(x)=\left(-4x^2+x\right)'=-8x+1$$

a) $(f-g)'(-2)=f'(-2)-g'(-2)=$
$$=-4\times(-2)+1-(-8\times(-2)+1)=9-17=-8$$

b) $(f\times g)'\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\times g\left(\frac{1}{2}\right)+g'\left(\frac{1}{2}\right)\times f\left(\frac{1}{2}\right)=$
$$=\left(-4\times\frac{1}{2}+1\right)\times\left(-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\left(-8\times\frac{1}{2}+1\right)\times\left(-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1\right)=$$
$$=-1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(-3)\times1=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(1)=\dfrac{f'(1)\times g(1)-g'(1)\times f(1)}{(g(1))^2}=$
$$=\frac{-3\times(-3)-(-7)\times0}{(-3)^2}=\frac{9}{9}=1$$
$$\left(\frac{g}{f}\right)'(0)=\frac{g'(0)\times f(0)-f'(0)\times g(0)}{(f(0))^2}=1$$

Cálculos auxiliares:

$f(1)=-2\times1^2+1+1=0$; $f'(1)=-4\times1+1=-3$
$g(1)=-4\times1^2+1=-3$; $g'(1)=-8\times1+1=-7$
$f(0)=-2\times0^2+0+1=1$; $f'(0)=-4\times0+1=1$
$g(0)=-4\times0^2+0=0$; $g'(0)-8\times0+1=1$

16. $D_f=D_g=\mathbb{R}$; $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$, $x\neq0$

$f(-1)=3$ e $f'(-1)=-4$

Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa -1.
Ordenada do ponto de tangência:

$$g(-1)=\frac{f(-1)}{(-1)^2}=\frac{3}{1}=3$$

Sabe-se que $m_r=g'(-1)$.

$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = \frac{(f(x))' \times x^2 - (x^2)' \times f(x)}{(x^2)^2} =$

$= \frac{f(x)' \times x^2 - 2x \times f(x)}{x^4}$

$m_r = g'(-1) = \frac{f'(-1) \times (-1)^2 - 2 \times (-1) \times f(-1)}{(-1)^4} = 2$

r: $y = 2x + b$

Como o ponto de coordenadas $(-1, 3)$ pertence

à reta r: $3 = 2 \times (-1) + b \Leftrightarrow 3 = -2 + b \Leftrightarrow b = 5$

Equação reduzida da reta r: $y = 2x + 5$

17. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$

17.1. P e T são os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox $(y_P = y_T = 0)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} \Leftrightarrow x^2 = 9 \vee \underbrace{x^2 = -1}_{\text{Equação impossível}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

Como a abcissa de T é positiva, conclui-se que $P(-3, 0)$ e $T(3, 0)$.

17.2. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(-3, 0)$.

Sabe-se que $m_r = f'(-3)$.

$f'(x) = (x^4 - 8x^2 - 9) = 4x^3 - 16x$

$f'(-3) = 4 \times (-3)^3 - 16 \times (-3) = -60$

$m_r = -60$

Uma equação da reta r é do tipo $y = -60x + b$.

Como $P(-3, 0)$ pertence à reta r, tem-se:

$0 = -60 \times (-3) + b \Leftrightarrow 0 = 180 + b \Leftrightarrow b = -180$

A equação reduzida da reta r é $y = -60x - 180$.

Página 126 – Avalia 1 – Parte 1

1.1. $\text{t.m.v.}_{[-1,1]} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow \frac{f(1) - f(-1)}{2} = 0{,}5 \Leftrightarrow \underbrace{f(1) - f(-1)}_{\text{Variação de } f \text{ em } [-1,1]} = 1$

A opção correta é a **(B)**.

1.2. $\text{t.m.v.}_{[-1,4]} = \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{8 - 3}{5} = 1$

A opção correta é a **(D)**.

1.3. Em **1.1.** conclui-se que $f(1) - f(-1) = 1$, então:

$f(1) = 1 + f(-1) \Leftrightarrow f(1) = 1 + 3 \Leftrightarrow f(1) = 4$

$\text{t.m.v.}_{[1,4]} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{8 - 4}{3} = \frac{4}{3}$

A opção correta é a **(A)**.

2. $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow f'(1) = 1 \Leftrightarrow m_r = 1$

r: $y = x + b$

Como $A\left(1, \frac{3}{2}\right) \in r$, tem-se:

$\frac{3}{2} = 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

Uma equação da reta r é: $y = x + \frac{1}{2}$ ou

$y = x + 0{,}5$

A opção correta é a **(C)**.

3. f é uma das funções da família $y = kx^3$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$f(x) = kx^3$, $k \neq 0$

$f'(x) = (kx^3)' = 3kx^2$

$f'(2) = 6 \Leftrightarrow 3k \times 2^2 = 6 \Leftrightarrow 12k = 6 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Assim, $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

Logo, $f(-2) = \frac{1}{2} \times (-2)^3 = \frac{1}{2} \times (-8) = -4$.

A opção correta é a **(C)**.

4. $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = -x^2 + 3x$

$f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$

$g'(x) = (-x^2 + 3x)' = -2x + 3$

$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x) =$

$= 2x \times (-x^2 + 3x) + (-2x + 3) \times (x^2 + 1) =$

$= -2x^3 + 6x^2 - 2x^3 - 2x + 3x^2 + 3 =$

$= -4x^3 + 9x^2 - 2x + 3$

A opção correta é a **(A)**.

5. $D_h = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ e $h(x) = -x^4 + \dfrac{2}{x+1}$

$$h'(x) = \left(-x^4 + \frac{2}{x+1}\right)' = \left(-x^4\right)' + \left(\frac{2}{x+1}\right)'$$
$$= -4x^3 + \frac{(2)' \times (x+1) - (x+1)' \times 2}{(x+1)^2}$$
$$= -4x^3 + \frac{0 \times (x+1) - 1 \times 2}{(x+1)^2} = -4x^3 + \frac{-2}{(x+1)^2}$$

O declive da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1 é dado por $h'(1)$.

Ora,

$$h'(1) = -4 \times 1^3 + \frac{-2}{(1+1)^2} = -4 + \frac{-2}{4} = -4 - \frac{1}{2} = -4{,}5$$

A opção correta é a **(B)**.

Página 127 – Avalia 1 – Parte 2

1. $f(t) = -5t^2 + 6t + 2{,}05$

f: altura ao solo, em metros

t: tempo após tocar com as mãos na mesa, em segundos

1.1. $f(0) = -5 \times 0^2 + 6 \times 0 + 2{,}05 = 2{,}05$

No contexto apresentado, significa que, quando o atleta toca com as mãos na mesa, a distância do centro de massa do atleta era $2{,}05$ m.

1.2. $80 \text{ cm} = 0{,}8 \text{ m}$

$$f(t) = 0{,}8 \Leftrightarrow -5t^2 + 6t + 2{,}05 = 0{,}8$$
$$\Leftrightarrow -5t^2 + 6t + 1{,}25 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times (-5) \times 1{,}25}}{-10}$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{-6 + \sqrt{61}}{-10} \vee t = \frac{-6 - \sqrt{61}}{-10} \Leftrightarrow t \approx -0{,}18 \vee t \approx 1{,}38$$

Como $t > 0$, conclui-se que $t \approx 1{,}38$ segundos.

1.3. $$\frac{f(0{,}6) - f(0)}{0{,}6} = \frac{-5 \times 0{,}6^2 + 6 \times 0{,}6 + 2{,}05 - 2{,}05}{0{,}6} =$$
$$= \frac{1{,}8}{0{,}6} = 3$$

No contexto apresentado, significa que, nos primeiros 0,6 segundo após tocar com as mãos na mesa, o centro de massa do atleta subiu a uma média de 3 metros por segundo.

1.4. $$\frac{f(0{,}2+h) - f(0{,}2)}{h} = -5h + 4$$

$$f'(0{,}2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0{,}2+h) - f(0{,}2)}{h} = \lim_{h \to 0} (-5h + 4)$$
$$= -5 \times 0 + 4 = 4$$

2.1. Sejam A e B os pontos de interseção da reta t com os eixos das abcissas e o eixo das ordenadas, respetivamente.

Sabe-se que $A\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$ e $B(0, -7)$.

Ora, $m_{AB} = \dfrac{-7 - 0}{0 - \dfrac{7}{2}} = \dfrac{-7}{-\dfrac{7}{2}} = 2$.

Como $m_{AB} = f'(4)$, conclui-se que $f'(4) = 2$.

r: $y = 2x - 7$

$T(4, y) \in r$, logo $y = 2 \times 4 - 7 \Leftrightarrow y = 1$

Então, $f(4) = 1$.

2.2. $g(x) = -x^2 - x + 12 \to g(4) = -4^2 - 4 + 12 = -8$

$$g'(x) = \left(-x^2 - x + 12\right)' = -2x - 1 \to$$
$$\to g'(4) = -2 \times 4 - 1 = -9$$

a) $$(f \times g)'(4) = f'(4) \times g(4) + g'(4) \times f(4)$$
$$= 2 \times (-8) + (-9) \times 1 = -16 - 9 = -25$$

b) $$\left(\frac{g}{f}\right)'(4) = \frac{g'(4) \times f(4) - f'(4) \times g(4)}{\left(f(4)\right)^2}$$
$$= \frac{-9 \times 1 - 2 \times (-8)}{1^2} = \frac{-9 + 16}{1} = 7$$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$; $P(0, 0)$; $T(x, f(x))$

Sejam r e s as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos P e T, respetivamente.

Como as retas r e s são paralelas, têm o mesmo declive.

Vamos começar por determinar o declive da reta r.

$m_r = f'(0)$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{(x)' \times (x-1) - (x-1)' \times x}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{1 \times (x-1) - 1 \times x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Então, $m_r = f'(0) = \dfrac{-1}{(0-1)^2} = -1$.

$$m_s = m_r \Leftrightarrow m_s = -1 \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1=1 \vee x-1=-1) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=2 \vee x=0) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Leftrightarrow x=2 \vee x=0$$

$x=0$ corresponde à abcissa do ponto *P*.

$x=2$ corresponde à abcissa do ponto *T*.

$T(2, f(2))$

Como $f(2) = \frac{2}{2-1} = 2$, conclui-se que $T(2, 2)$.

Tema 2: Otimização

Página 128 – Tarefa inicial

$C(p) = p^2 + 20p + 5000$

C: custo total, em euros

p: n.º de drones produzidos diariamente

1.1. $\frac{C(40)}{40} = \frac{40^2 + 20 \times 40 + 5000}{40} = \frac{7400}{40} = 185$

No contexto apresentado, significa que o custo de cada *drone*, quando são produzidos, diariamente, 40 *drones*, é 185 €.

1.2. $C(41) - C(40) = 41^2 + 20 \times 41 + 5000 - 7400 =$

$= 7400 - 7501 - 7400 = 101$

No contexto apresentado, significa que, quando são produzidos 40 *drones*, diariamente, o custo marginal é 101€.

2.1. $C(49) - C(48) =$

$= 49^2 + 20 \times 49 + 5000 - (48^2 + 20 \times 48 + 5000) =$

$= 8381 - 8264 = 117$

Se a produção diária for de 48 *drones*, o custo marginal é 117€.

2.2. $C(56) - C(55) =$

$= 56^2 + 20 \times 56 + 5000 - (55^2 + 20 \times 55 + 5000) =$

$= 9256 - 9125 = 131$

Se a produção diária for de 55 *drones*, o custo marginal é 131€.

3. $C(p+1) - C(p)$ representa o custo marginal quando são produzidos, diariamente, *p drones*.

$C(p+1) - C(p) =$

$= (p+1)^2 + 20(p+1) + 5000 - (p^2 + 20p + 5000) =$

$= \cancel{p^2} + 2p + 1 + \cancel{20p} + 20 + \cancel{5000} - \cancel{p^2} - \cancel{20p} - \cancel{5000} =$

$= 2p + 21$

4.1. $C'(p) = (p^2 + 20p + 5000)' =$

$= (p^2)' + (20p)' + (5000)' = 2p + 20$

4.2. $p = 60$

a) $C'(60) = 2 \times 60 + 20 = 140$

Uma estimativa do custo marginal é 140 €.

b) $C(61) - C(60) = 2 \times 60 + 21 = 141$

O custo marginal real é 141 €.

5. C': estimativa do custo marginal

$C'(p) = 2p + 20$

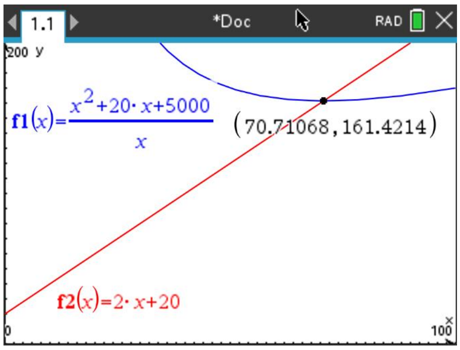
C_m: custo médio

$C_m(p) = \frac{C(p)}{p} = \frac{p^2 + 20p + 5000}{p}$

P: ponto de interseção dos gráficos de C' e C_m.

Pretende-se resolver, graficamente, a equação $C'(p) = C_m(p)$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



Coordenadas do ponto *P*: (71; 161)

Para a empresa cumprir o objetivo devem ser produzidos diariamente 71 *drones*.

Página 129

42. $f(x) = x^2 - 2x$

42.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Abcissa do vértice da parábola: $x_V = \frac{0+2}{2} = 1$

Ordenada do vértice da parábola:

$y_V = f(1) = 1^2 - 2\times 1 = 1$

$V(1, -1)$

Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *V*.

$m_r = f'(1)$

$f'(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$

$m_r = 2\times 1 - 2 = 0$

r: $y = 0x + b$

Como $V \in r$, tem-se: $-1 = b$

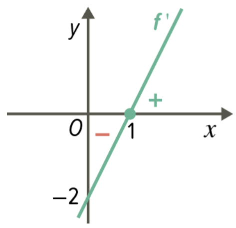
r: $y = -1$

42.2. Por observação gráfica:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↘	-1	↗

42.3. $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$



Quadro de sinais para a função derivada:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

43.

- $f'(a)$ é igual ao declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*. Logo, $f'(a) > 0$.
- $f'(b)$ é igual ao declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *B*. Como essa reta é paralela ao eixo Ox, então $f'(b) = 0$.
- $f'(c)$ é igual ao declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *C*. Logo, $f'(c) < 0$.

Assim, $f'(a) > 0$, $f'(b) = 0$ e $f'(c) < 0$.

Página 130

44.1. $f'(x) = (-x^2 + 2x - 3)' = -2x + 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Cálculo auxiliar:

$f(1) = -1^2 + 2\times 1 - 3 = -2$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	↗	-2	↘

44.2. $f'(x) = (x^2 - x + 1)' = 2x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Cálculo auxiliar: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	↘	$\frac{3}{4}$	↗

45.1. $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x + 2\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - (x)' + (2)' =$

$= \frac{3x^2}{3} - 1 + 0 = x^2 - 1$

45.2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	$\frac{8}{3}$	↘	$\frac{4}{3}$	↗

Cálculos auxiliares:

$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1) + 2 = -\frac{1}{3} + 1 + 2 = -\frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3}$

$f(1) = \frac{1^3}{3} - 1 + 2 = \frac{1}{3} - 1 + 2 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

Conclusões:

f é crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e decrescente em $[-1, 1]$.

f tem um máximo relativo igual a $\frac{8}{3}$ e um mínimo relativo igual a $\frac{4}{3}$.

45.3. *A* e *B* são os pontos onde a função *f* atinge extremos .

Atendendo aos cálculos efetuados em **45.2.**, sabe-se que $A\left(-1, \frac{8}{3}\right)$ e $B\left(1, \frac{4}{3}\right)$.

Página 131

46.1. $f(x)=\dfrac{3}{2-x}$

- $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ 2-x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$
- $f'(x)=\left(\dfrac{3}{2-x}\right)'=\dfrac{(3)'\times(2-x)-(2-x)'\times 3}{(2-x)^2}=$

$=\dfrac{0\times(2-x)-(-1)\times 3}{(2-x)^2}=\dfrac{3}{(2-x)^2}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
3	+	+	+
$(2-x)^2$	+	0	+
$f'(x)$	+	n.d.	+
f	↗	n.d.	↗

A função f' é positiva em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$.

A função f é crescente em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$.

Não existem extremos.

46.2. $f(x)=\dfrac{x+1}{3x-2}$

- $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ 3x-2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$
- $f'(x)=\left(\dfrac{x+1}{3x-2}\right)'=$

$=\dfrac{(x+1)'\times(3x-2)-(3x-2)'\times(x+1)}{(3x-2)^2}=$

$=\dfrac{1\times(3x-2)-3\times(x+1)}{(3x-2)^2}=\dfrac{-5}{(3x-2)^2}$

x	$-\infty$	$\dfrac{2}{3}$	$+\infty$
−5	−	−	−
$(3x-2)^2$	+	0	+
$f'(x)$	−	n.d.	−
f	↘	n.d.	↘

A função f' é negativa em $\left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right[$ e em $\left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

A função f é decrescente em $\left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right[$ e em $\left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

Não existem extremos.

46.3. $f(x)=4x-\dfrac{1}{x}$

- $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $f'(x)=\left(4x-\dfrac{1}{x}\right)'=(4x)'-\left(\dfrac{1}{x}\right)'=$

$=4-\dfrac{(1)'\times x-(x)'\times 1}{x^2}=4-\dfrac{0\times x-1\times 1}{x^2}=$

$=4-\dfrac{-1}{x^2}=4+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4x^2+1}{x^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$4x^2+1$	+	+	+
x^2	+	0	+
$f'(x)$	+	n.d.	+
f	↗	n.d.	↗

A função f' é positiva em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$.

A função f é crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$.

Não existem extremos.

46.4. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$

- $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x+2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$
- $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)'=\dfrac{(x^2)'\times(x+2)-(x+2)'\times x^2}{(x+2)^2}=$

$\dfrac{2x\times(x+2)-1\times x^2}{(x+2)^2}=\dfrac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+4x=0\wedge(x+2)^2\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+4)=0\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x=0\vee x=-4)\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=-4$

x	$-\infty$	−4		−2		0	$+\infty$
x^2+4x	+	0	−	−	−	0	+
$(x+2)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	n.d.	−	0	+
f	↗	−8	↘	n.d.	↘	0	↗

$f(-4)=\frac{(-4)^2}{-4+2}=\frac{16}{-2}=-8$

A função $f\,'$ é positiva em $]-\infty,-4[$ e em $]0,+\infty[$ e é negativa em $]-4,-2[$ e em $]-2,0[$.

A função *f* é crescente em $]-\infty,-4]$ e em $[0,+\infty[$ e é decrescente em $[-4,-2[$ e em $]-2,0]$.

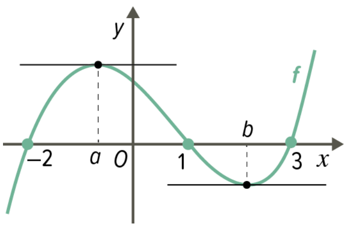
f tem um máximo relativo igual a -8 e um mínimo relativo igual a 0.

47.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Página 132 – Pratica

48.



$f\,'(x)=0 \Leftrightarrow x=a \vee x=b$

48.1. No intervalo $]-\infty,0]$, a equação $f\,'(x)=0$ tem uma solução.

48.2. No intervalo $\left]-\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right[$, a equação $f\,'(x)=0$ tem duas soluções.

48.3. No intervalo $[1,+\infty[$, a equação $f\,'(x)=0$ tem uma solução.

49. $f(x)=x^3+6x^2+12x-7$

$f\,'(x)=\left(x^3-6x^2+12x-7\right)'=3x^2-12x+12$

$f\,'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+12=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$

$f(2)=2^3-6\times 2^2+12\times 2-7=1$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f\,'(x)$	$+$	0	$+$
f	↗	1	↗

A função *f* não tem extremos.

50.1. $f(x)=2(x+3)^2-5x$

$f\,'(x)=\left(2(x+3)^2-5x\right)'=2\times 2(x+3)^{2-1}\times(x+3)'-5=$

$=4(x+3)\times 1-5=4x+12-5=4x+7$

$f\,'(x)=0 \Leftrightarrow 4x+7=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{4}$

$f\left(-\frac{7}{4}\right)=2\left(-\frac{7}{4}+3\right)^2-5\times\left(-\frac{7}{4}\right)=2\times\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{35}{4}=$

$=2\times\frac{25}{16}+\frac{35}{4}=\frac{25}{8}+\frac{70}{8}=\frac{95}{8}$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{4}$	$+\infty$
$f\,'(x)$	$-$	0	$+$
f	↘	$\frac{95}{8}$	↗

f é crescente em $\left[-\frac{7}{4},+\infty\right[$ e decrescente em $\left]-\infty,-\frac{7}{4}\right]$.

f tem um mínimo igual a $\frac{95}{8}$.

50.2. $f(x)=x^3-\frac{3x}{4}+1$

$f\,'(x)=\left(x^3-\frac{3x}{4}+1\right)'=3x^2-\frac{3}{4}$

$f\,'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f\,'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	$\frac{5}{4}$	↘	$\frac{3}{4}$	↗

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+1=\frac{2}{8}+1=\frac{5}{4}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+1=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}+1=-\frac{2}{8}+1=\frac{3}{4}$

f é crescente em $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ e é decrescente em $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

f tem um máximo relativo igual a $\frac{5}{4}$ e um mínimo relativo igual a $\frac{3}{4}$.

50.3. $f(x)=\frac{2x-1}{3x+1}$

- $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ 3x+1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

- $f'(x)=\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)'=$

$=\frac{(2x-1)'\times(3x+1)-(3x+1)'\times(2x-1)}{(3x+1)^2}=$

$=\frac{2\times(3x+1)-3\times(2x-1)}{(3x+1)^2}=\frac{\cancel{6x}+2\cancel{-6x}+3}{(3x+1)^2}=$

$=\frac{5}{(3x+1)^2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
5	+	+	+
$(3x+1)^2$	+	0	+
$f'(x)$	+	n.d.	+
f	↗	n.d.	↗

f é crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ e em $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

f não tem extremos.

50.4. $f(x)=x+\frac{9}{x}$

- $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $f'(x)=\left(x+\frac{9}{x}\right)'=(x)'+\left(\frac{9}{x}\right)'=1+\frac{(9)'\times x-(x)'\times 9}{x^2}=$

$=1+\frac{0\times x-1\times 9}{x^2}=1+\frac{-9}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2}$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-9}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2-9=0\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=9\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Leftrightarrow x=-3\vee x=3$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
x^2-9	+	0	−	−	−	0	+
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	n.d	−	0	+
f	↗	−6	↘	n.d	↘	6	↗

$f(-3)=-3+\frac{9}{-3}=-3-3=-6$

$f(3)=3+\frac{9}{3}=3+3=6$

f é crescente em $]-\infty,-3]$ e em $[3,+\infty[$ e é decrescente em $[-3,0[$ e em $]0,3]$.

f tem um máximo relativo igual a -6 e um mínimo relativo igual a 6.

51. $f(x)=(2x+1)^4$

51.1. $f'(x)=\left((2x+1)^4\right)'=4\times(2x+1)^{4-1}\times(2x+1)'$

$=4\times(2x+1)^3\times 2=8(2x+1)^3$

51.2. $f'(x)=0\Leftrightarrow 8(2x+1)^3=0\Leftrightarrow(2x+1)^3=0$

$\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
8	+	+	+
$(2x+1)^2$	−	0	+
$f'(x)$	−	0	+
f	↘	0	↗

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)^4=(-1+1)^4=0$

f é decrescente em $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ e crescente em $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

f tem um mínimo igual a 0.

51.3. $g(x)=f'(x);\ D_g=\mathbb{R}$

$g(x)=8(2x+1)^3$

$g'(x)=\left(8(2x+1)^3\right)'=8\times 3(2x+1)^{3-1}\times(2x+1)'=$

$=24(2x+1)^2\times 2=48(2x+1)^2$

$g'(x)=0\Leftrightarrow 48(2x+1)^2=0\Leftrightarrow(2x+1)^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
g	↗	0	↗

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=8\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)^3=8\times(-1+1)^3=8\times 0=0$

g é crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos.

Página 133 – Pratica

52. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ e $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

52.1. $f'(x)=\left(\frac{x^2}{x+1}\right)'=\frac{(x^2)'\times(x+1)-(x+1)'\times x^2}{(x+1)^2}=$

$=\frac{2x\times(x+1)-1\times x^2}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+2)=0\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\Leftrightarrow(x=0\vee x=-2)\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\Leftrightarrow x=0\vee x=-2$

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
x^2+2x	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	-4	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(0)=\frac{0^2}{0+1}=0$ e $f(-2)=\frac{(-2)^2}{-2+1}=\frac{4}{-1}=-4$

f é decrescente em $[-2,-1[$ e $]-1,0]$.

Os intervalos $[-2,-1[$ e $]-1,0]$ têm igual amplitude, pois $-1-(-2)=-1+2=1$ e $0-(-1)=0+1=1$.

52.2. Como *A* e *B* são pontos do gráfico de *f* e as suas ordenadas correspondem, respetivamente, ao máximo e ao mínimo relativos, então sabe-se que $A(-2,-4)$ e $B(0,0)$.

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=$
$=\sqrt{2^2\times 5}=2\sqrt{5}$

53. $f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$

$f'(x)=(ax^2+bx+c)'=2ax+b$

$f'(x)=-x+1\Leftrightarrow 2ax+b=-x+1\Leftrightarrow 2a=-1\wedge b=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}\wedge b=1$

Então, $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+c$.

Como $f(1)=1{,}5$, tem-se:

$-\frac{1}{2}\times 1^2+1+c=1{,}5\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+1+c=\frac{3}{2}\Leftrightarrow c=1$

Donde se conclui que $f(x)=-\frac{x^2}{2}+x+1$.

A opção correta é a **(B)**.

54. $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{(1)'\times f(x)-(f(x))'\times 1}{(f(x))^2}=$

$=\frac{0\times f(x)-f'(x)\times 1}{(f(x))^2}=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$

$f'(x)<0$, porque *f* é uma função afim de declive negativo.

Designando por *a* o zero de *f*, sabe-se que

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{a\},\ -f'(x)>0$ e $(f'(x))^2>0$.

Donde se conclui que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{a\},\ \left(\frac{1}{f(x)}\right)'>0$.

A função *g* terá de ser positiva em $\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

A opção correta é a **(A)**.

Na outra opção, *g* é negativa no seu domínio.

Página 134

55.1. $\overline{BR}=6-x$

A pirâmide só existe se:

$x>0\wedge 6-x>0\Leftrightarrow x>0\wedge x<6\Leftrightarrow x\in]0,6[$

55.2. *V*: volume da pirâmide

$V(x)=\frac{1}{3}\times x^2\times(8-x)=\frac{8x^2-x^3}{3}$

55.3. $V'(x)=\left(\frac{8x^2-x^3}{3}\right)'=\left(\frac{8}{3}x^2\right)'-\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=\frac{16}{3}x-x^2$

$V'(x)=0\Leftrightarrow \frac{16}{3}x-x^2=0\Leftrightarrow x\left(\frac{16}{3}-x\right)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{16}{3}$

Como $x\in]0,6[$, conclui-se que $x=\frac{16}{3}$.

x	0		$\frac{16}{3}$		6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$V\left(\frac{16}{3}\right)$	$\searrow$	

O volume da pirâmide é máximo quando $x=\frac{16}{3}$.

Nesse caso, a altura da pirâmide é $8-\frac{16}{3}$, ou seja, $\frac{8}{3}$.

Página 135 – Tarefa 6

$f(x)=\frac{12}{x};\ g(x)=-0{,}02x^2+2;\ D_f=D_g=]0,10[$

1. Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:

$f(5)=2{,}4$ e $g(5)=1{,}5$

Então, $f(5)-g(5)=2{,}4-1{,}5=0{,}9$

Conclui-se que, quando $x=5$, $\overline{AB}=0{,}9$.

2. Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:

$f(4)=3$ e $g(4)=1{,}68$

Então, $f(4)-g(4)=3-1{,}68=1{,}32$

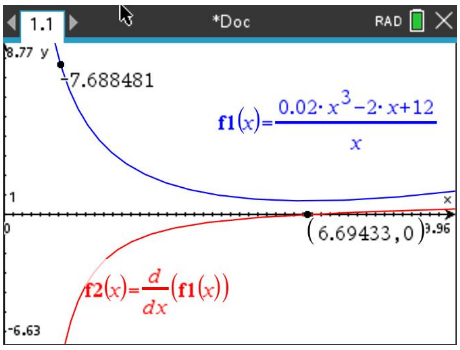
$\overline{AB}=1{,}32\text{ km}=1320\text{ m}$

3. No contexto apresentado, $(f-g)(x)$, sendo x a abcissa dos pontos *A* e *B*, representa a distância entre *A* e *B*.

4. $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{12}{x}-\left(-0{,}02x^2+2\right)=$

$=\frac{12}{x}+0{,}02x^2-2=\frac{12+0{,}02x^3-2x}{x}=\frac{0{,}02x^3-2x+12}{x}$

5.1. Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$x_0\approx 6{,}694$

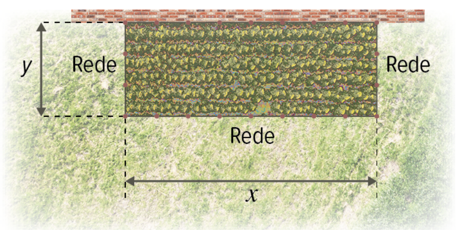
5.2. Sendo $x\approx 6{,}694$, então

$(f-g)(x_0)=(f-g)(6{,}694)\approx 0{,}689$

No contexto apresentado, o valor 0,689 representa a distância mínima entre os pontos *A* e *B*.

Página 136 – Pratica

56.



$A=40\text{m}^2$

Custo do metro linear da vedação: $2{,}50$ €

x : comprimento do canteiro

y: largura do canteiro

$x\times y=40\Leftrightarrow y=\frac{40}{x}$

O custo da vedação é mínimo quando o perímetro do canteiro for mínimo.

$P(x)=x+2\times\frac{40}{x}=x+\frac{80}{x};\ x>0$

$P'(x)=\left(x+\frac{80}{x}\right)'=1+\frac{(80)'\times x-(x)'\times 80}{x^2}=$

$=1+\frac{0\times x-1\times 80}{x^2}=1+\frac{-80}{x^2}=\frac{x^2-80}{x^2}$

$P'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-80}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2-80=0\wedge x^2\neq 0\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=80\wedge x>0\Leftrightarrow x=\sqrt{80}\Leftrightarrow x=4\sqrt{5}$

x	0		$4\sqrt{5}$	$+\infty$
x^2-80		$-$	0	$+$
x^2		$+$	$+$	$+$
$P'(x)$		$-$	0	$+$
P		$\searrow$	$P(4\sqrt{5})$	$\nearrow$

O perímetro da vedação é mínimo quando $x=4\sqrt{5}$ m .

Custo mínimo da vedação:

$\left(4\sqrt{5}+\frac{80}{4\sqrt{5}}\right)\times 2{,}50\text{ €}\approx 44{,}72\text{ €}$

O custo mínimo da vedação é $44{,}72$ € .

57. $C(x)=0{,}05(x+1)^2+2{,}95$

C: custo, em euros, da produção diária de x litros de sumo

57.1. $C(10)=0{,}05(10+1)^2+2{,}95=9$

$\frac{C(10)}{10}=\frac{9}{10}=0{,}90$

Se forem produzidos 10 litros de sumo diariamente, o custo médio, por litro de produção diária, é $0{,}90$ € .

57.2. Custo médio por litro: $P(x)=\frac{C(x)}{x}$

$P(x)=\frac{0{,}05(x+1)^2+2{,}95}{x}=\frac{0{,}05\left(x^2+2x+1\right)+2{,}95}{x}$

$=\frac{0{,}05x^2+0{,}1x+0{,}05+2{,}95}{x}=\frac{0{,}05x^2+0{,}1x+3}{x}$

$P'(x)=\frac{\left(0{,}05x^2+0{,}1x+3\right)'\times x-(x)'\times\left(0{,}05x^2+0{,}1x+3\right)}{x^2}$

$=\frac{(0{,}1x+0{,}1)\times x-1\times\left(0{,}05x^2+0{,}1x+3\right)}{x^2}$

$=\frac{0{,}1x^2+\cancel{0{,}1x}-0{,}05x^2-\cancel{0{,}1x}-3}{x^2}=\frac{0{,}05x^2-3}{x^2}$

$P'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{0{,}05x^2-3}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow 0{,}05x^2-3=0 \wedge x^2 \neq 0 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow x^2=60 \wedge x>0 \Leftrightarrow x=\sqrt{60}$

x	0		$\sqrt{60}$	$+\infty$
$0{,}05x^2-3$		$-$	0	$+$
x^2		$+$	$+$	$+$
$P'(x)$		$-$	0	$+$
P		$\searrow$	$P(\sqrt{60})$	$\nearrow$

$\sqrt{60} \approx 7{,}7$

Para que o custo médio por litro de sumo seja mínimo, a produção diária deve ser, aproximadamente, 7,7 litros.

58. $f(x)=0{,}00005x^3-0{,}011x^2-0{,}079x+100$

58.1. a) $f(0)=$

$=0{,}00005\times 0^3-0{,}011\times 0^2-0{,}079\times 0+100=100$

No início da rampa, o esquiador está a 100 m de altura do solo.

b) $f(160)=$

$=0{,}00005\times 160^3-0{,}011\times 160^2-0{,}079\times 160+100$
$=10{,}56$

No fim da rampa, quando salta, o esquiador encontrou-se a $10{,}56\text{ m}$ do solo.

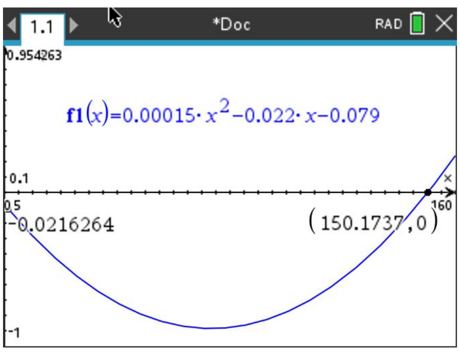
58.2. $f'(x)=\left(0{,}00005x^3-0{,}011x^2-0{,}079x+100\right)'=$

$=3\times 0{,}00005x^2-2\times 0{,}011x-0{,}079+0$
$=0{,}00015x^2-0{,}022x-0{,}079$

58.3. a) $f'(x)=0 \wedge x\in[0,160] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}00015x^2-0{,}022x-0{,}079=0 \wedge x\in[0,160]$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



A solução da equação é $x_0 \approx 150{,}174$.

b)

x	0		x_0		60
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

$f(x_0)$ é mínimo.

$f(150{,}174)=0{,}00005\times 150{,}174^3-0{,}011\times 150{,}174^2-$
$-0{,}079\times 150{,}174+100\approx 9{,}40$

$f(x_0)\approx 9{,}40$

A distância mínima do esquiador ao solo, quando desce a rampa, é, aproximadamente, é $9{,}40\text{ m}$.

Página 137 – Pratica

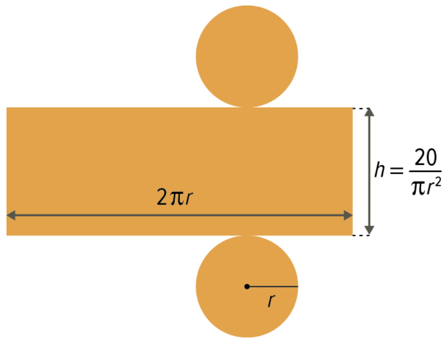
59. $V=50\text{ l}=50\text{ dm}^3$

r: raio da base do cilindro

h: altura do cilindro

59.1. a) $V=50 \Leftrightarrow A_b\times h=50 \Leftrightarrow \pi r^2 h=50 \Leftrightarrow h=\frac{50}{\pi r^2}$

b) A: área da superfície total do cilindro



$A(r)=2\pi r\times\frac{50}{\pi r^2}+2\left(\pi r^2\right)=\frac{100\cancel{\pi}\cancel{r}}{\cancel{\pi}r^{\cancel{2}}}+2\pi r^2=$

$=\frac{100}{r}+2\pi r^2=2\pi r^2+\frac{100}{r}$

59.2. $A'(r)=\left(2\pi r^2+\frac{100}{r}\right)'=\left(2\pi r^2\right)'+\left(\frac{100}{r}\right)'=$

$=4\pi r+\frac{(100)'\times r-(r)'\times 100}{r^2}=4\pi r+\frac{0\times r-1\times 100}{r^2}=$

$=4\pi r-\frac{100}{r^2}=\frac{4\pi r^3-100}{r^2}=$

$A'(r)=0 \Leftrightarrow \frac{4\pi r^3-100}{r^2}=0 \Leftrightarrow 4\pi r^3-100=0 \wedge r^2\neq 0 \Leftrightarrow$

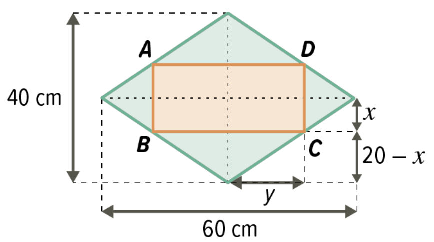
$\Leftrightarrow r^3=\frac{100}{4\pi} \wedge r\neq 0 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$	$+\infty$
$4\pi r^3 - 100$		$-$	0	$+$
r^2		$+$	$+$	$+$
$A'(r)$		$-$	0	$+$
A		$\searrow$	$A\left(\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}\right)$	$\nearrow$

A área da superfície total do recipiente é mínima quando $r = \sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$ e $h = \dfrac{50}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^2}$.

Assim, $r \approx 2{,}00$ dm e $h \approx 4{,}00$ dm.

60.



Atendendo à semelhança de triângulos, sabe-se que: $\dfrac{x}{30} = \dfrac{20-x}{20}$

$\dfrac{x}{30} = \dfrac{20-x}{20} \Leftrightarrow y = \dfrac{600-30x}{20} \Leftrightarrow y = 30 - \dfrac{3}{2}x$

Seja A a área do retângulo $[ABCD]$.

$A(x) = 2x \times 2\left(30 - \dfrac{3}{2}x\right) = 2x \times (60 - 3x) =$

$= 120x - 6x^2 = -6x^2 + 120x$

Valores que x pode tomar:

$x > 0 \wedge x < 20 \Leftrightarrow x \in]0, 20[$

$A'(x) = \left(-6x^2 + 120x\right)' = -12x + 120$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -12x + 120 \Leftrightarrow x = 10$

x	0		10		20
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
A		$\nearrow$	$A(x_0)$	$\searrow$	

A área do retângulo é máxima quando $x = 10$.

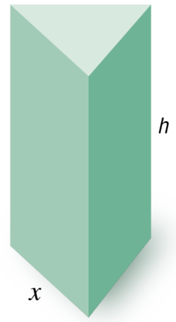
Dimensões do retângulo se área máxima:

$\overline{AB} = 2 \times 10 = 20$ cm e

$\overline{BC} = 2 \times \left(30 - \dfrac{3}{2} \times 10\right) = 30$ cm

Para que a área do retângulo seja máxima, este deve ter 30 cm por 20 cm.

61. Peças com a forma de prismas triangulares regulares.

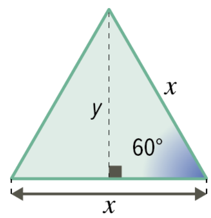


h: altura da peça

x : aresta da base da peça

$V_{peças} = 100 \Leftrightarrow A_b \times h = 100 \Leftrightarrow \dfrac{x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} \times h = 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 h = 100 \Leftrightarrow h = \dfrac{400}{\sqrt{3}x^2}$



$\sin 60° = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

$A_b = \dfrac{x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$

Seja A a área da superfície total da peça.

$A(x) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2\right) + 3x \times \dfrac{400}{\sqrt{3}x^2} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \dfrac{1200x}{\sqrt{3}x^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \dfrac{400\sqrt{3}}{x}$

$A'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \dfrac{400\sqrt{3}}{x}\right)' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2\right)' + \left(\dfrac{400\sqrt{3}}{x}\right)' =$

$= \sqrt{3}x + \dfrac{\left(400\sqrt{3}\right)' \times x - (x)' \times 400\sqrt{3}}{x^2} =$

$= \sqrt{3}x + \dfrac{0 \times x - 1 \times 400\sqrt{3}}{x^2} = \sqrt{3}x - \dfrac{400\sqrt{3}}{x^2} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}x^3 - 400\sqrt{3}}{x^2}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}x^3 - 400\sqrt{3}}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}x^3 - 400\sqrt{3} = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 = 400 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{400}$

x	0		$\sqrt[3]{400}$	$+\infty$
$\sqrt{3}x^3-4000\sqrt{3}$		$-$	0	$+$
x^2		$+$	$+$	$+$
$A'(x)$		$-$	0	$+$
A		$\searrow$	$A\left(\sqrt[3]{400}\right)$	$\nearrow$

A área da superfície total da peça é mínima quando $x=\sqrt[3]{400}$, ou seja, $x\approx 7{,}4$.

Nesse caso, $h=\dfrac{400}{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{400}\right)^2}\approx 4{,}3$.

A peça deve ter $4{,}3$ cm de aresta da base e $7{,}4$ cm de altura de modo que a sua superfície total tenha área mínima.

62. $f(x)=-0{,}15x^2+2{,}4$

Os pontos *A* e *B* pertencem ao eixo Ox.

Os pontos *C* e *D* pertencem ao gráfico de *f*

Pontos de interseção da parábola com o eixo Ox (I_1 e I_2):

$f(x)=0 \Leftrightarrow -0{,}15x^2+2{,}4 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{-2{,}4}{-0{,}15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=4 \vee x=-4$

$I_1(-4,0)$ e $I_2(4,0)$

$B(x,0)$, sendo $0<x<4$. $\overline{AB}=2x$

$C(x,f(x))$, sendo $0<x<4$. $\overline{BC}=f(x)$

Área da superfície do cartaz:

$A(x)=2x\times f(x)=2x\times\left(-0{,}15x^2+2{,}4\right)=-0{,}3x^3+4{,}8x$

$A'(x)=\left(-0{,}3x^3+4{,}8x\right)'=-0{,}9x^2+4{,}8$

$A'(x)=0 \Leftrightarrow -0{,}9x^2+4{,}8=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{48}{9}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{48}}{3} \vee x=-\dfrac{\sqrt{48}}{3}$

Como $0<x<4$, conclui-se que $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

x	0		$\frac{4\sqrt{3}}{3}$		4
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
A		$\nearrow$	$A\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$	$\searrow$	

A área da superfície é máxima quando $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, ou seja, quando a abcissa de *B* é, aproximadamente, 2,31.

Página 138 – Consolida

1. $f(x)=-x^2+2x+8$

1.1. *B* e *C* são os pontos de interseção de gráfico de *f* com o eixo Ox.

$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x+8=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+32}}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=4$

Como a abcissa de *B* é inferior à abcissa de *C* (por observação gráfica), conclui-se que $B(-2,0)$ e $C(4,0)$.

1.2. $f'(x)=\left(-x^2+2x+8\right)'=-2x+2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+2=0 \Leftrightarrow x=1$

$f(1)=-1^2+2\times1+8=9$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	9	$\searrow$

2.1. A função g' é negativa em $]-\infty,-2[$ e positiva em $]-2,+\infty[$. Então, a função *g* é decrescente em $]-\infty,-2]$ e crescente em $[-2,+\infty[$.

2.2. *g* é uma função quadrática.

$g(x)=a(x-h)^2+k;\ a\neq 0$

Atendendo à monotonia de *f* e *g*, $a>0$.

Sabe-se que o vértice da parábola que representa a função graficamente tem ordenada 8, ou seja, $k=8$.

Então, $g(x)=a(x-h)^2+8;\ a>0$.

Assim, $D'_g=[8,+\infty[$.

3.1.

Intervalo de tempo	Sinal da derivada	Sentido de variação da função
$]0,a[$	Positivo	Crescente
$]a,b[$	Negativo	Decrescente
$]b,8[$	Positivo	Crescente

3.2. O valor da derivada em *a* e em *b* é 0 (zero), porque as retas tangentes ao gráfico da função *T* nos pontos de abcissas *a* e *b* são paralelas ao eixo Ox.

4. $f(x)=-2x^2+4x$; $g(x)=x^2-3x+1$;

$h(x)=x^3-3x$

$D_f=D_g=D_h=\mathbb{R}$

4.1. $f'(x)=\left(-2x^2+4x\right)'=-4x+4$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -4x+4=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$

Por observação da tabela anterior, conclui-se que *f* é estritamente crescente em $]-\infty, 1[$.

4.2. $g'(x)=\left(x^2-3x+1\right)'=2x-3$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	$g\left(\frac{3}{2}\right)$	$\nearrow$

Por observação da tabela anterior, conclui-se que *g* é estritamente decrescente em $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$.

$\mathbb{R}^-=]-\infty, 0[$ e $]-\infty, 0[\subset\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$.

Então, como *g* é estritamente decrescente em $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ e $\mathbb{R}^-\subset\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$, conclui-se que *g* é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^-$.

4.3. $h'(x)=\left(x^3-3x\right)'=3x^2-3$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$

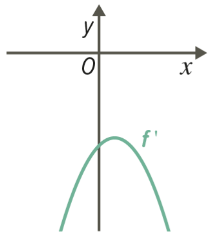
x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	$h(-1)$	$\searrow$	$h(1)$	$\nearrow$

Por observação da tabela anterior, conclui-se que *h* é estritamente decrescente em $]-1, 1[$.

5. $f(x)=-x^3+\frac{x^2}{2}-x+5$

5.1. $f'(x)=\left(-x^3+\frac{x^2}{2}-x+5\right)'=-3x^2+x-1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \underbrace{x=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{-6}}_{\text{Equação impossível}}$



A função f' é negativa em $\mathbb{R}$.

5.2. Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)<0$, então conclui-se que a função *f* é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.

A afirmação verdadeira é a **(B)**, porque a função derivada de *f* é negativa em $\mathbb{R}$.

Página 139 – Consolida

6.1. $f(x)=x^3-27x$

- $D_f=\mathbb{R}$
- $f'(x)=\left(x^3-27x\right)'=3x^2-27$
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-27=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-3$

x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	54	$\searrow$	-54	$\nearrow$

$f(-3)=(-3)^3-27\times(-3)=54$
$f(3)=3^3-27\times3=-54$

f é crescente em $]-\infty, -3]$ e em $[3, +\infty[$ e decrescente em $[-3, 3]$.

f tem um máximo relativo igual a 54 e um mínimo relativo igual a -54 .

6.2. $f(x)=\left(x^3-4x^2\right)(3x+12)$

- $D_f=\mathbb{R}$
- $f'(x)=\left(\left(x^3-4x^2\right)(3x+12)\right)'$

$=\left(x^3-4x^2\right)'\times(3x+12)+(3x+12)'\times\left(x^3-4x^2\right)$
$=\left(3x^2-8x\right)\times(3x+12)+3\times\left(x^3-4x^2\right)$
$=9x^3+36x^2-24x^2-96x+3x^3-12x^2=12x^3-96x$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^3-96x=0 \Leftrightarrow 12x\left(x^2-8\right)=0$

$\Leftrightarrow 12x=0 \vee x^2-8=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=8$
$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\sqrt{8} \vee x=-\sqrt{8}$
$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2\sqrt{2} \vee x=-2\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$-2\sqrt{2}$		0		$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$12x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-8	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↘	-192	↗	0	↘	-192	↗

$$f\left(-2\sqrt{2}\right)=\left(\left(-2\sqrt{2}\right)^3-4\left(-2\sqrt{2}\right)^2\right)\left(3\left(-2\sqrt{2}\right)+12\right)=$$

$$=\left(-16\sqrt{2}-32\right)\left(-6\sqrt{2}+12\right)=$$

$$=192-192\sqrt{2}+192\sqrt{2}-384=$$

$$=-192$$

$$f(0)=\left(0^3-4\times 0^2\right)(3\times 0+12)=0\times 12=0$$

$$f\left(2\sqrt{2}\right)=\left(\left(2\sqrt{2}\right)^3-4\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)\left(3\left(2\sqrt{2}\right)+12\right)=$$

$$=\left(16\sqrt{2}-32\right)\left(6\sqrt{2}+12\right)=$$

$$=192+192\sqrt{2}-192\sqrt{2}-384=-192$$

f é decrescente em $\left]-\infty,-2\sqrt{2}\right]$ e em $\left[0,2\sqrt{2}\right]$

e é crescente em $\left[-2\sqrt{2},0\right]$ e em $\left[2\sqrt{2},+\infty\right[$.

f tem um máximo relativo igual a 0 e dois mínimos relativos iguais a -192.

6.3. $f(x)=\dfrac{5}{x}$

- $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $f'(x)=\left(\dfrac{5}{x}\right)'=\dfrac{(5)'\times x-(x)'\times 5}{x^2}=\dfrac{0\times x-1\times 5}{x^2}=-\dfrac{5}{x^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
-5	$-$	$-$	$-$
x^2	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	n.d.	$-$
f	↘	n.d.	↘

f é decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$.

f não tem extremos relativos.

6.4. $f(x)=2x-\dfrac{2}{x}$

- $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $f'(x)=\left(2x-\dfrac{2}{x}\right)'=(2x)'-\left(\dfrac{2}{x}\right)'=$

$$=2-\frac{(2)'\times x-(x)'\times 2}{x^2}=2-\frac{-2}{x^2}=2+\frac{2}{x^2}=\frac{2x^2+2}{x^2}$$

- A função *f* não tem zeros.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x^2+2$	$+$	$+$	$+$
x^2	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	n.d.	$+$
f	↗	n.d.	↗

A função *f* é crescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$.

A função *f* não tem extremos relativos.

6.5. $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$

- $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $f'(x)=\left(\dfrac{1-x}{x}\right)'=\dfrac{(1-x)'\times x-(x)'\times(1-x)}{x^2}=$

$$=\frac{-1\times x-1\times(1-x)}{x^2}=\frac{\cancel{-x}-1+\cancel{x}}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$$

- A função *f* não tem zeros.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
-1	$-$	$-$	$-$
x^2	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	n.d.	$-$
f	↘	n.d.	↘

A função *f* é decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$.

A função *f* não tem extremos relativos.

7.1. Partindo da representação gráfica da função derivada da função *f*, vamos elaborar o quadro de sinais da função f'.

x	$-\infty$	-2		2		5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

A análise do quadro anterior permite concluir que: *f* é crescente em $[-2,2]$ e em $[5,+\infty[$ e é decrescente em $]-\infty,-2]$ e em $[2,5]$.

7.2. A afirmação verdadeira é a **(B)**.

f é decrescente no intervalo $]2,5[$.

Como $3\in\,]2,5[$, $4\in\,]2,5[$ e $3<4$, então $f(3)>f(4)$.

8. $f(x)=-3x^2+4x-5$

8.1. $y-2x+5=0\Leftrightarrow y=2x-5$; $m=2$

Retas paralelas têm o mesmo declive.

$f'(x)=2 \Leftrightarrow \left(-3x^2+4x-5\right)'=2 \Leftrightarrow -6x+4=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\times\frac{1}{3}-5=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-5=-4$

As coordenadas do ponto do gráfico de *f* em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta de equação $y-2x+5=0$ são $\left(\frac{1}{3},-4\right)$.

8.2. $y=6$; $m=0$

Retas paralelas têm o mesmo declive.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -6x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+4\times\frac{2}{3}-5=-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}-5=-\frac{11}{3}$

As coordenadas do ponto do gráfico de *f* em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta de equação $y=6$ são $\left(\frac{2}{3},-\frac{11}{3}\right)$.

A ordenada deste ponto representa o máximo da função *f*.

9.1. Por observação do gráfico de *f*, sabe-se que:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=2$ (abcissas dos pontos *A* e *B*, onde a reta tangente ao gráfico tem declive 0).

$\text{C.S.}=\{-3, 2\}$

9.2. Por observação do gráfico de *f*, sabe-se que:

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<-3 \vee x>2$

$\text{C.S.}=]-\infty,-3[\,\cup\,]2,+\infty[$

10. $f'(x)=2-x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$

A função *f* é estritamente crescente em $]-\infty, 2[$ e estritamente decrescente em $]2,+\infty[$.

A função *f* tem um máximo quando $x=2$.

Assim, a opção correta é a **(C)**.

11. $f(x)=\frac{2}{x}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Pretende-se saber se existe alguma reta de declive positivo que seja tangente ao gráfico de *f*.

$f'(x)=\left(\frac{2}{x}\right)'=\frac{(2)'\times x-(x)'\times 2}{x^2}=\frac{0\times x-1\times 2}{x^2}=\frac{-2}{x^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f'(x)<0$

Logo, qualquer reta tangente ao gráfico de *f* tem declive negativo.

Donde se conclui que não existe nenhuma rota de declive positivo que seja tangente ao gráfico de *f*.

Página 140 – Consolida

12.1. $f'(x)=(x-2)\left(3x^2+2x-1\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(3x^2+2x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0 \vee 3x^2+2x-1=0$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} \Leftrightarrow x=2 \vee x=\frac{1}{3} \vee x=-1$

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{3}$		2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3x^2+2x-1$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$

A função *f* é decrescente em $]-\infty,-1]$ e em $\left[\frac{1}{3}, 2\right]$ e é crescente em $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$ e em $[2,+\infty[$.

12.2. f tem um máximo quando $x=\frac{1}{3}$ e tem mínimos quando $x=-1$ e quando $x=2$.

13. Por observação da representação gráfica da função *f* sabe-se que *f* é decrescente em $]-\infty, b[$ e em $]d,+\infty[$ e é crescente em $]b, d[$.

Assim, conclui-se que f' é negativa em $]-\infty, b[$ e em $]d,+\infty[$ e é positiva em $]b, d[$.

A opção correta é a **(C)**.

14. $f(x)=x^4-8x^3+18x^2+7$

$f'(x) = (x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 7)' = 4x^3 - 24x^2 + 36x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 24x^2 + 36x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \vee (x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$4x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 6x + 9$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$

Sabe-se que $f'(3) = 0$ e $f(3)$ não é um extremo da função *f*.

15. *AB*: $y = -\frac{3}{2}x + 6$

15.1. $A \in Ox$, logo $A(x, 0)$

Como $A \in AB$, tem-se:

$0 = -\frac{3}{2}x + 6 \Leftrightarrow x = 4 \therefore A(4, 0)$

$B \in Oy$ e $B \in AB$, logo $B(0, 6)$.

Sendo *P* o ponto médio de $[AB]$, então

$P\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$, ou seja, $P(2, 3)$.

Como *R* é a projeção ortogonal de *P* sobre o eixo Ox, então $R(2, 0)$.

$A_{[ORP]} = \frac{\overline{OR} \times \overline{RP}}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$ u.a.

15.2. $P\left(x, -\frac{3}{2}x + 6\right)$, sendo $0 < x < 4$.

Sendo *R* a projeção ortogonal de *P* sobre Ox, então $R(x, 0)$.

A área do triângulo $[ORP]$ é dada por:

$A(x) = \frac{x \times \left(-\frac{3}{2}x + 6\right)}{2} = \frac{-\frac{3}{2}x^2 + 6x}{2} = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$

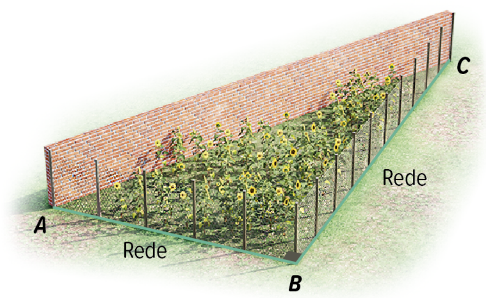
$A'(x) = \left(-\frac{3}{4}x^2 + 3x\right)' = -\frac{6}{4}x + 3 = -\frac{3}{2}x + 3$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	0		2		4
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
A		$\nearrow$	$A(2)$	$\searrow$	

A área do triângulo $[ORP]$ é máxima quando $x = 2$. Nesse caso, $P\left(2, -\frac{3}{2} \times 2 + 6\right)$, ou seja, $P(2, 3)$.

16.



30 cm de rede

Seja $\overline{AB} = x$, então $\overline{BC} = 30 - x$.

A área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$A(x) = \frac{x \times (30 - x)}{2} = \frac{(30x - x^2)}{2} = 15x - \frac{1}{2}x^2$

Sabe-se que $x > 0 \wedge 30 - x > 0$, ou seja, $0 < x < 30$.

$A'(x) = \left(15x - \frac{1}{2}x^2\right)' = 15 - x$

$A'(x) = 15 - x = 0 \Leftrightarrow x = 15$

x	0		15		30
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
A		$\nearrow$	$A(15)$	$\searrow$	

A área do triângulo $[ABC]$ é máxima quando $x = 15$.

$30 - x = 30 - 15 = 15$

Nesse caso, os catetos são iguais e medem 15 cm.

Página 141 – Consolida

17. $N(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 9t + 5,\ 0 \le t \le 5$

N: número de bactérias, em milhares

t: tempo, em horas

$N'(t) = \left(-\frac{1}{3}t^3 + 9t + 5\right)' = -t^2 + 9$

$N'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 9 \underset{0 \le t \le 5}{\Leftrightarrow} t = 3$

t	0		3		5
$N'(t)$	+	+	0	−	−
N	$N(0)$	↗	$N(3)$	↘	$N(5)$

$N(3) = -\frac{1}{3} \times 3^3 + 9 \times 3 + 5 = -9 + 27 + 5 = 23$

O número máximo de bactérias atingido durante a experiência foi 23 milhares e ocorreu três horas após o início da experiência.

18.1. $h(t) = -0{,}02t^3 + t^2 + 7$

h: altura do projétil

t: tempo decorrido após o instante inicial, em minutos

18.1. $h(0) = -0{,}02 \times 0^3 + 0^2 + 7 = 7$

No instante em que foi lançado, o projétil encontrava-se a 7 metros de altura.

18.2. $h'(t) = \left(-0{,}02t^3 + t^2 + 7\right)' = -0{,}06t^2 + 2t$

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}06t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t(-0{,}06t + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee -0{,}06t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{100}{3}$

t	0		$\frac{100}{3}$	$+\infty$
$h'(t)$	0	+	0	−
h	7	↗	$h\left(\frac{100}{3}\right)$	↘

$t = \frac{100}{3}$ minutos

$\frac{100}{3} = \frac{99}{3} + \frac{1}{3} = 33 + \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \times 60 = 20$

$h\left(\frac{100}{3}\right) = -0{,}02 \times \left(\frac{100}{3}\right)^3 + \left(\frac{100}{3}\right)^2 + 7 \approx 377$

O projétil atingiu a altura máxima de, aproximadamente, 377 metros, 33 minutos e 20 segundos após o instante inicial.

19. Custo de cada peça: 80 €

Preço de venda de cada peça: 150 €

Número de peças vendidas semanalmente: 200

Por cada 2 € de desconto no preço de venda de cada peça, são vendidas mais 40 peças semanalmente.

Seja x o número de descontos de 2 € aplicados no preço de venda de cada peça.

O preço de venda de cada peça passa a ser dado por $150 - 2x$ e o número de peças vendidas por semana passa a ser dado por $200 + 40x$.

Lucro semanal:

$L(x) = (150 - 2x - 80) \times (200 + 40x) = (70 - 2x)(200 + 40x)$

$L'(x) = ((70 - 2x)(200 + 40x))$

$= (70 - 2x)' \times (200 + 40x) + (200 + 40x)' \times (70 - 2x)$

$= -2(200 + 40x) + 40(70 - 2x) = -400 - 80x + 2800 - 80x$

$= 2400 - 160x$

$L'(x) = 0 \Leftrightarrow 2400 - 160x = 0 \Leftrightarrow x = 15$

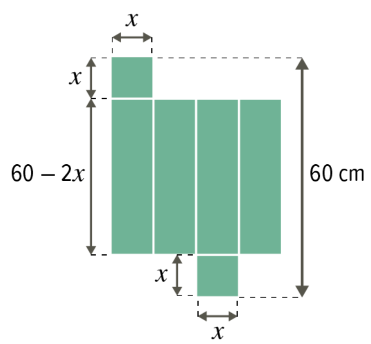
x	0		15		35
$L'(x)$		+	0	−	
L		↗	$L(15)$	↘	

$70 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 35$

O lucro é máximo quando $x = 15$.

Preço de venda: $(150 - 2 \times 15)$ €, ou seja, 120 €.

20.1.



Volume da lata

$V(x) = x \times x \times (60 - 2x)$

$= x^2(60 - 2x)$

$= 60x^2 - 2x^3$

Valores que x pode tomar:

$x > 0 \wedge 60 - 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 30$

$V'(x) = \left(60x^2 - 2x^3\right)' = 120x - 6x^2$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 120x - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x(120 - 6x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20$

x	0		20		30
$V'(x)$		+	0	−	
V		↗	$V(20)$	↘	

O volume da lata é máximo quando $x = 20$.

$A_{\text{total}} = 2 \times 20^2 + (4 \times 20) \times (60 - 2 \times 20) =$
$= 800 + 80 \times 20 = 800 + 1600 = 2400$

Ou seja, 2400 cm^2.

20.2. $20 \text{ m} = 2000 \text{ cm}$

Área da folha metálica do rolo, em centímetros quadrados: $2000 \times 60 = 120\,000$

O volume da lata é máximo quando $x = 20$.

$4 \times 20 = 80$; $2000 : 80 = 25$

Logo, ao comprimento total do rolo cabem 26 latas de volume máximo.

Área, em centímetros quadrados, do quadrado da base do prisma de volume máximo: $20^2 = 400$

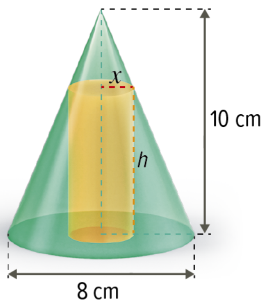
Área desperdiçada, em centímetros quadrados:

$400 \times 6 \times 5 = 60\,000$; $\dfrac{60\,000}{120\,000} = 50\%$

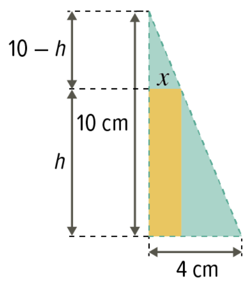
O número máximo de latas de volume máximo é 25 e a percentagem de material desperdiçado é 50%.

21. x : raio da base do cilindro

h: altura do cilindro



21.1. a)



Atendendo à semelhança de triângulos:

$$\frac{x}{4} = \frac{10-h}{10} \Leftrightarrow 10x = 40 - 4h \Leftrightarrow 4h = 40 - 10x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{40 - 10x}{4} \Leftrightarrow h = 10 - 2{,}5x$$

b) $V(x) = \pi x^2 \times (10 - 2{,}5x) = 10\pi x^2 - 2{,}5\pi x^3 =$

$= -2{,}5\pi x^3 + 10\pi x^2$

21.2. $V'(x) = \left(-2{,}5\pi x^3 + 10\pi x^2\right)' = -7{,}5\pi x^2 + 20\pi x$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow -7{,}5\pi x^2 + 20\pi x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \pi x(-7{,}5x + 20) = 0 \Leftrightarrow \pi x = 0 \vee -7{,}5x + 20 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{8}{3}$

Como $x > 0 \wedge 10 - 2{,}5x > 0$, ou seja,

$x > 0 \wedge x < 4$, conclui-se que $x = \dfrac{8}{3}$.

x	0		$\frac{8}{3}$		4
$V'(x)$		+	0	−	
V		↗	$V\left(\frac{8}{3}\right)$	↘	

O volume do cilindro é máximo quando $x = \dfrac{8}{3}$ cm

e $h = \left(10 - 2{,}5 \times \dfrac{8}{3}\right)$ cm, ou seja, $x = \dfrac{8}{3}$ cm e

$h = \dfrac{10}{3}$ cm.

Página 142 – Avalia 2 – Parte 1

1. Por observação gráfica, atendendo a que a derivada de uma função num ponto é igual ao declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, sabe-se que:

$f'(0) < 0$; $f'(b) = 0$; $f'(c) > 0$; $f'(d) = 0$;

$f'(e) > 0$

Assim, a opção correta é a **(C)**.

2. $D_f = \mathbb{R}$ e $f'(x) = -2x - 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
f	↗	$f(-2)$	↘

Atendendo ao quadro anterior, conclui-se que a opção correta é a **(D)**.

3. Partindo da representação gráfica da função g', podemos construir um quadro que relacione o sinal de g' com a monotonia de g.

x	$-\infty$	2		6	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	–	0	+
g	↗	$g(2)$	↘	$g(6)$	↗

Donde se conclui que a opção correta é a **(C)**.

4. $f'(-1)<0$ e $f(1)<0$, logo $f'(-1)\times f(1)>0$.

$f'(0)=0$ e $f'(-2)<0$, logo $f'(0)-f'(-2)>0$.

$f(4)=0$ e $f'(-4)<0$, logo $f(4)\times f'(-4)=0$.

$f'(4)=0$ e $f(-4)>0$, logo $f'(4)-f(-4)<0$.

A opção correta é a **(D)**.

Página 143 – Avalia 2 – Parte 2

1. $f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x)=\left(x^3-3x+1\right)'=3x^2-3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
f	↗	$f(-1)$	↘	$f(1)$	↗

$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)+1=3$

$f(1)=1^3-3\times1+1=-3$

Sabe-se que a função *f* admite um máximo no ponto *A* e um mínimo no ponto *B*. Logo, $A(-1, 3)$ e $B(1, -1)$.

A função *f* é crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é decrescente em $[-1, 1]$.

2. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ e $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$

2.1. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)'=\dfrac{(x^2)'\times(x-3)-(x-3)'\times x^2}{(x-3)^2}=$

$=\dfrac{2x\times(x-3)-1\times x^2}{(x-3)^2}=\dfrac{2x^2-6x-x^2}{(x-3)^2}=\dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+9}$

2.2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+9}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-6x=0 \wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{3\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-6)=0 \wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{3\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=6) \wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{3\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=6$

x	$-\infty$	-2		2		5	$+\infty$

x^2-6x	+	0	–	–	–	0	+
x^2-6x+9	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	–	n.d.	–	0	+
f	↗	$f(0)$	↘	n.d.	↘	$f(6)$	↗

$f(0)=\dfrac{0^2}{0-3}=0$

$f(6)=\dfrac{6^2}{6-3}=12$

Então, conclui-se que a função *f* tem um mínimo relativo igual a 12.

3. $D_f=[0, 3]$ e $f(x)=x^2-2x+2$

3.1. $D(0, f(0))$ $\quad f(0)=0^2-2\times0+2=0$

Logo, $D(0, 2)$.

$f(3)=3^2-2\times3+2=5$, logo $C(0, 5)$ e $y_B=5$.

$A(x, f(x)),\ 0<x<3$

Como *B* tem a mesma abcissa do ponto *A* e $y_B=5$, então $B(x, 5),\ 0<x<3$.

$A_{[ABCD]}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\times\overline{BC}$

$\overline{AB}=5-f(x)=5-\left(x^2-2x+2\right)=$

$=5-x^2+2x-2=-x^2+2x+3$

$\overline{CD}=5-2=3$

$\overline{BC}=x-0=x$

Então, $g(x)=\dfrac{-x^2+2x+3+3}{2}\times x$

$=\dfrac{-x^2+2x+6}{2}\times x=\left(-\dfrac{x^2}{2}+x+3\right)\times x=-\dfrac{x^3}{2}+x^2+3x$

3.2. $g'(x)=\left(-\dfrac{x^3}{2}+x^2+3x\right)'=-\dfrac{3x^2}{2}+2x+3$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{3x^2+2x+3}{2}=0 \Leftrightarrow -3x^2+4x+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-4\times(-3)\times6}}{-6} \Leftrightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{88}}{-6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-4\pm2\sqrt{22}}{-6} \Leftrightarrow x=\dfrac{-4+2\sqrt{22}}{-6} \vee x=\dfrac{-4-2\sqrt{22}}{-6}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2-\sqrt{22}}{3} \vee x=\dfrac{2+\sqrt{22}}{3}$

Como $x\in\,]0, 3[$, então $x=\dfrac{2+\sqrt{22}}{3}$.

x	0		$\dfrac{2+\sqrt{22}}{3}$		3

$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	$A\left(\frac{2+\sqrt{22}}{3}\right)$	$\searrow$	

A área do trapézio $[ABCD]$ é máxima quando a abcissa do ponto *A* é igual a $\frac{2+\sqrt{22}}{3}$, ou seja, quando a abcissa do ponto *A* é, aproximadamente, 2,23.

Página 146 – Para Saber +

Proposta 1

1.1.

- **1.º caso:** $x > c$, sendo $x \in]c-r, c+r[$

  $f(x) \geq f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \geq 0$

  Atendendo a que $x > c \Leftrightarrow x - c > 0$, verifica-se que: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$

  Então: $\lim\limits_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$

  Sabendo que $f'(c)$ existe e que $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, conclui-se que:

  $f'(c) \geq 0$ **(I)**

- **2.º caso:** $x < c$, sendo $x \in]c-r, c+r[$

  $f(x) \geq f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \geq 0$

  Atendendo a que $x < c \Leftrightarrow x - c < 0$, verifica-se que: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$

  Então: $\lim\limits_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$. Assim:

  $f'(c) \leq 0$ **(II)**

  De **(I)** e **(II)** observa-se que $f'(c) \geq 0$ e $f'(c) \leq 0$, o que só é possível quando $f'(c) = 0$.

1.2. Se $f(c)$ é um máximo, existe um $r > 0$ tal que:

$f(x) \leq f(c),\ \forall x \in]c-r, c+r[$

- **1.º caso:** $x > c$, sendo $x \in]c-r, c+r[$

  $f(x) \leq f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \leq 0$

  Atendendo a que $x > c \Leftrightarrow x - c > 0$, verifica-se que: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$

  Então: $\lim\limits_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$

  Sabendo que $f'(c)$ existe e que $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, conclui-se que:

  $f'(c) \leq 0$ **(I)**

- **2.º caso:** $x < c$, sendo $x \in]c-r, c+r[$

  $f(x) \leq f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \leq 0$

  Atendendo a que $x < c \Leftrightarrow x - c < 0$, verifica-se que: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$

  Então: $\lim\limits_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Assim:

  $f'(c) \geq 0$ **(II)**

  De **(I)** e **(II)** observa-se que $f'(c) \leq 0$ e $f'(c) \geq 0$, o que só é possível quando $f'(c) = 0$.

Página 147 – Para Saber +

Proposta 2

2.1. As funções polinomiais têm derivada em todos os pontos do seu domínio, neste caso, $]-4, 3[$. Se um ponto corresponde a um extremo, pelo Teorema de Fermat, a derivada é nula nesse ponto.

2.2. Sendo $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$, tem-se:

$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$

	4	0	–12	8
1		4	4	–8
	4	4	-8	0

2.3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(4x^2 + 4x - 8) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee 4x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1 \vee x = -2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$

Os zeros da função derivada são -2 e 1.

2.4.

x	-4		-2		1		3
$x-1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	

$4x^2+4x-8$		+	0	–	0	+	
$f'(x)$		–	0	+	0	+	
f		↘	–23	↗	4	↗	

2.5. Mínimo: –23

A função não tem máximos.

2.6. $f'(1)=0$ e, no entanto, $f(1)$ não é extremo, pois não houve mudança de sinal da derivada à direita e à esquerda de 1.

2.7. A afirmação é falsa.

Página 150 – Questões tipo exame – Unidade 5

1. $g(x)=f(x)+d$, com $d\in\left]0,3\right[$

O gráfico de *g* é obtido a partir do gráfico de *f* através de uma translação de vetor $\vec{u}(0,d)$, com $d\in\left]0,3\right[$.

Assim, o eixo Ox interseta três vezes o gráfico de *f*, ou seja, a equação $g(x)=0$ tem três soluções distintas.

A opção correta é a **(D)**.

2. $f(x)=-0{,}000\,03x^4+0{,}0054x^3-0{,}31x^2+5{,}5x+27$,

$0\le x\le 85$

$f(x)\rightarrow$ distância ao solo, em metros

2.1. A altura do ponto *A* ao solo é dada por $f(0)$ e a altura do ponto *D* ao solo é dada por $f(85)$.

$f(0)=27$

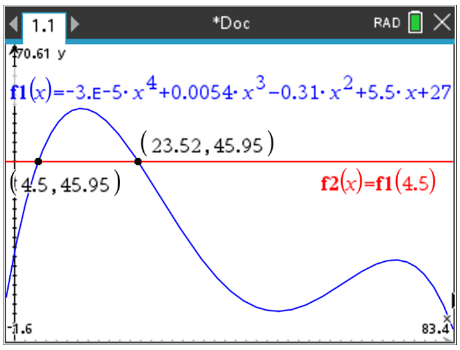
$f(85)=-0{,}00003\times 85^4+0{,}0054\times 85^3-0{,}31\times 85^2+$
$+5{,}5\times 85+27\approx 5$

$f(0)-f(85)=27-5=22$

A diferença entre alturas (relativamente ao solo) dos pontos *A* e *D* é, aproximadamente, 22 metros.

2.2. Distância do ponto *U* ao solo: $f(4{,}5)$

A equação que permite resolver o problema é $f(x)=f(4{,}5)$.



$x=4{,}5\vee x\approx 23{,}52$

Então, $U(4{,}5;\,45{,}95)$ e $P(23{,}52;\,45{,}95)$.

Assim, $\overline{UP}=23{,}53-4{,}5=19{,}02\approx 19$.

$\overline{UP}\approx 19$ m

Página 151 – Questões tipo exame – Unidade 5

3.

- $f(x)=0\Leftrightarrow x=2$
- $g(x)=0\Leftrightarrow a(x+2)(x-1)(x-4)=0\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x+2=0\vee x-1=0\vee x-4=0\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x=-2\vee x=1\vee x=4$
- A afirmação **(A)** é falsa porque:
  $(f\times g)(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\vee g(x)=0\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x=2\vee x=-2\vee x=1\vee x=4$
- A afirmação **(B)** é falsa porque:
  $(f-g)(x)>0\Leftrightarrow f(x)-g(x)>0\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow f(x)>g(x)\underset{\text{por observação gráfica}}{\Leftrightarrow} x\in\left]-\infty,3\right[$
-

x	$-\infty$	–2		1		2		4	$+\infty$
$g(x)$	–	0	+	0	–	–	–	0	+
$f(x)$	+	+	+	–	+	0	–	–	–
$\left(\frac{g}{f}\right)(x)$	–	0	+	0	–	n.d.	+	0	–

$\left(\frac{g}{f}\right)(x)\le 0\Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)}\le 0$

$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[1,2\right[\cup\left[4,+\infty\right[$

A opção **(C)** é falsa.

-

x	$-\infty$	–2		1		2		4	$+\infty$
$f(x)$	+	+	+	+	+	0	–	–	–
$g(x)$	–	0	+	0	–	–	–	0	+
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	–	n.d.	+	n.d.	–	0	+	n.d.	–

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 1[\cup [2, 4[$

A afirmação verdadeira é a **(D)**.

4. $f(x) = \frac{2x-9}{x-6}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{6\}$

r e *s* são assíntotas ao gráfico de *f*.

I é o ponto de interseção das retas *r* e *s*.

A e *B* são os pontos de interseção do gráfico de *f* com os eixos coordenados.

4.1. $f(x) = \frac{2x-9}{x-6}$

Recorrendo ao algoritmo da divisão, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 2x - 9 & x-6 \\ \hline -2x+12 & 2 \\ \hline 3 & \end{array} \qquad f(x) = 2 + \frac{3}{x-6}$$

Equação da assíntota vertical (reta *r*) ao gráfico de *f*: $x = 6$

Equação da assíntota horizontal (reta *s*) ao gráfico de *f*: $y = 2$

Sendo *I* o ponto de interseção das retas *r* e *s*, então $I(6, 2)$.

4.2. *s*: $y = 2$

$D_f' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

A equação $f(x) = 2$ é impossível, logo $a = 2$.

A opção correta é a **(C)**.

4.3. Por observação gráfica, sabe-se que, quando x tende para 6^-, então $f(x)$ tende para $-\infty$.

A opção correta é a **(B)**.

4.4.

- $A(0, f(0))$

  Como $f(0) = \frac{2\times 0-9}{0-6} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$, então $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

- $B(x, 0)$, tal que $f(x) = 0$.

  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-9}{x-6} = 0 \Leftrightarrow 2x-9 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{6\} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{6\} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

  Então, $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

- Sejam I_1 e I_2, respetivamente, as projeções ortogonais do ponto *I* sobre os eixos Ox e Oy.

  $A_{[ABI]} = A_{[OI_1II_2]} - A_{[AOB]} - A_{[BI_1I]} - A_{[AII_2]} =$

  $= 6 \times 2 - \frac{\frac{9}{2} \times \frac{3}{2}}{2} - \frac{\left(6 - \frac{9}{2}\right) \times 2}{2} - \frac{6 \times \left(2 - \frac{3}{2}\right) \times 2}{2} =$

  $= 12 - \frac{27}{8} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = \frac{45}{8}$

Página 152 – Questões tipo exame – Unidade 6

1. A reta *t* passa nos pontos $A(0, 1)$ e $I(1, -1)$.

$m_t = \frac{-1-1}{1-0} = \frac{-2}{1} = -2$; $f'(-1) = m_t = -2$

A opção correta é a **(A)**.

2. $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = -x^2$

$A(1, f(1))$ e $B(1, g(1))$

Como $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ e $g(1) = -1^2 = -1$, então $A(1, 2)$ e $B(1, -1)$.

r: reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*

$f'(x) = (x^2+1)' = 2x$

$m_r = f'(1) = 2 \times 1 = 2$

r: $y = 2x + b$

Como $A \in r$, tem-se:

$2 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow 2 = 2 + b \Leftrightarrow b = 0$

r: $y = 2x$

s: reta tangente ao gráfico de *g* no ponto *B*

$g'(x) = (-x^2)' = -2x$

$m_s = g'(1) = -2 \times 1 = -2$

s: $y = -2x + b$

Como $B \in s$, tem-se:

$-1 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow -2 = -2 + b \Leftrightarrow b = 1$

s: $y = -2x + 1$

I: ponto de interseção das retas *r* e *s*

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x = -2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Então, $I\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

3. $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 1$

$f'(x) = \left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 1\right)' = 3x^2 - 9x + 6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗

$f(1) = 1^3 - \frac{9}{2} \times 1^2 + 6 \times 1 - 1 = 1 - \frac{9}{2} + 6 - 1 = \frac{3}{2}$

$f(2) = 2^3 - \frac{9}{2} \times 2^2 + 6 \times 2 - 1 = 8 - 18 + 12 - 1 = 1$

Assim, $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $B(2, 1)$, $C(2, 0)$ e $D(1, 0)$.

$$A_{[ADCB]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{DC} = \frac{\frac{3}{2} + 1}{2} \times (2 - 1) = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$

A medida da área do trapézio $[ADCB]$ é $\frac{5}{4}$.

4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $f(x) = \frac{3x-2}{x+2}$

P: ponto de interseção do gráfico de *f* com Oy

$P(0, f(0))$; $f(0) = \frac{3 \times 0 - 2}{0 + 2} = \frac{-2}{2} = -1$

Então, $P(0, -1)$.

t: reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *P*

$m_t = f'(0)$

$f'(x) = \left(\frac{3x-2}{x+2}\right)' =$

$= \frac{(3x-2)' \times (x+2) - (x+2)' \times (3x-2)}{(x+2)^2} =$

$= \frac{3 \times (x+2) - 1 \times (3x-2)}{(x+2)^2} =$

$= \frac{3x + 6 - 3x + 2}{(x+2)^2} = \frac{8}{(x+2)^2}$

Logo, $m_t = \frac{8}{(0+2)^2} = \frac{8}{4} = 2$

t: $y = 2x + b$

Como $P \in t$, tem-se:

$-1 = 2 \times 0 + b \Leftrightarrow -1 = 0 + b \Leftrightarrow b = -1$

A equação reduzida da reta *t* é $y = 2x - 1$.

Página 153 – Questões tipo exame – Unidade 6

5. $f(x) = x^3 - kx^2 + k^2x + \frac{3}{5}$, $k \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \left(x^3 - kx^2 + k^2x + \frac{3}{5}\right)' = 3x^2 - 2kx + k^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2kx + k^2 = 0 \Leftrightarrow$

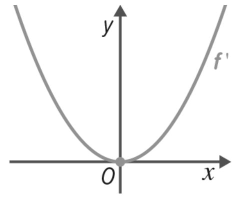
$\Leftrightarrow x = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 4 \times 3 \times k^2}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 12k^2}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2k \pm \sqrt{-8k^2}}{6}$

Sabe-se que $\forall k \in \mathbb{R},\ -8k^2 \leq 0$.

$k = 0$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

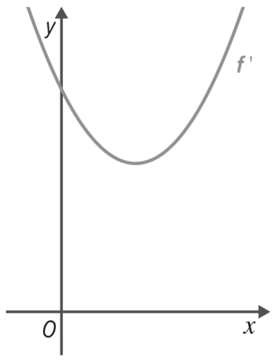
$\forall k \in \mathbb{R},\ f'(x) \geq 0$



Então, *f* é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos.

$k \neq 0$: A função f' não tem zeros.

$\forall k \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$



Então, *f* é crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos.

Conclusão: Qualquer que seja o valor de *k*, a função *f* não tem extremos.

6. O gráfico de f' interseta os eixos coordenados nos pontos $A(0, 2)$ e $B(1, 0)$.

$g(x) = f(x) - 2x$

$g'(x) = (f(x) - 2x)' = f'(x) - 2$

O gráfico de g' pode ser obtido a partir do gráfico de f' através de uma translação de vetor $\vec{u}(0, -2)$.

Sabe-se que o gráfico de g' passa nos pontos $A'(0, 0)$ e $B'(1, -2)$.

Assim, a função g' pode estar representada na opção **(A)**.p

7. $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ e $g(x) = -x + 6$

7.1. *a* e *b* são abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções *f* e *g*, sendo $a < b$.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 2 = -x + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-1) \times (-4)}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-5+3}{-2} \vee x = \dfrac{-5-3}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$

Como $a < b$, conclui-se que $a = 1$ e $b = 4$.

7.2. **a)** $P(x, f(x))$, sendo $1 < x < 4$.

$Q(x, g(x))$, sendo $1 < x < 4$.

$A_{[PAQ]} = \dfrac{\overline{PQ} \times \overline{AA'}}{2}$, sendo A' a projeção ortogonal se *A* sobre *PQ*.

Sendo *h* a função que, a cada valor de $x \in]1, 4[$, abcissa de *P*, faz corresponder $h(x)$, a área do triângulo $[PAQ]$, tem-se:

$h(x) = \dfrac{(f(x) - g(x)) \times (x-1)}{2}$

$= \dfrac{(-x^2 + 4x + 2 + x - 6) \times (x-1)}{2} =$

$= \dfrac{(-x^2 + 5x - 4) \times (x-1)}{2} =$

$= \dfrac{-x^3 + x^2 + 5x^2 - 5x - 4x + 4}{2} =$

$= \dfrac{-x^3 + 6x^2 - 9x + 4}{2} =$

$= -0{,}5x^3 + 3x^2 - 4{,}5x + 2$

b) $h(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2 - 4{,}5x + 2$, com $x \in]1, 4[$

$h'(x) = (-0{,}5x^3 + 3x^2 - 4{,}5x + 2)' = -1{,}5x^2 + 6x - 4{,}5$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -1{,}5x^2 + 6x - 4{,}5 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times (-1{,}5) \times (-4{,}5)}}{2 \times (-1{,}5)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{9}}{-3}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-6+3}{-3} \vee x = \dfrac{-6-3}{-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Como $x \in]1, 4[$, então $x = 3$.

x	1		3		4
$h'(x)$		+	0	−	
h		↗	$h(3)$	↘	

Assim, conclui-se que a área do triângulo $[PAQ]$ é máxima quando $x = 3$.