Propostas de resolução

Caderno de Atividades

1. NÚMEROS COMPLEXOS

Ficha 1

Página 4

1.

z	$2-i$	$-\sqrt{3}i$	$\sqrt{2}-2i$	$6i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}+3i$
$\text{Re}(z)$	2	0	$\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$
$\text{Im}(z)$	-1	$-\sqrt{3}$	-2	6	0	3

2.1. $z=8i$

2.2. $z=\sqrt{12}i=2\sqrt{3}i$

2.3. $z=3+i$

2.4. $z=-\sqrt{5}+5i$

3. Opção **(C)**

$\text{Re}(z)=-\text{Im}(t) \iff -2\sqrt{2}=-\text{Im}(t) \iff 2\sqrt{2}=\text{Im}(t)$, ou seja, $t=2\sqrt{2}i \iff t=\sqrt{8}i$

Página 5

4.1. Para $k=-1$: $z=2\times(-1)-1+(-1+3)i \iff z=-3+2i$

4.2. **a)** $\text{Re}(z)=3 \wedge \text{Im}(z)=5 \iff$

$\iff 2k-1=3 \wedge k+3=5$

$\iff k=2$

b) $\text{Im}(z)=0 \iff k+3=0 \iff$

$\iff k=-3$

c) $2k-1=-1 \wedge k+3=3 \iff$

$\iff k=0$

d) $2k-1=k+3 \iff k=4$

e) $\text{Re}(z)=0 \wedge \text{Im}(z)\neq 0 \iff$

$\iff 2k-1=0 \wedge k+3\neq 0 \iff$

$\iff k=\frac{1}{2}$

f) $2k-1<0 \wedge k+3\geqslant 1 \iff$

$\iff k<\frac{1}{2} \wedge k\geqslant -2 \iff$

$\iff k\in\left[-2,\frac{1}{2}\right[$

5.1. **a)** $\text{Re}(z)>0 \wedge \text{Im}(z)=0 \iff$

$\iff 1-2k>0 \wedge k^2-4=0$

$\iff k<\frac{1}{2} \wedge (k=-2 \vee k=2) \iff k=-2$

b) $\text{Re}(z)<0 \wedge \text{Im}(z)=0 \iff$

$\iff 1-2k<0 \wedge k^2-4=0$

$\iff k>\frac{1}{2} \wedge (k=-2 \vee k=2) \iff k=2$

c) $\text{Re}(z)=0 \wedge k^2-4\neq 0 \iff 1-2k=0 \wedge k\neq -2 \wedge k\neq 2 \iff k=\frac{1}{2}$

5.2. $1-2k=-(k^2-4) \iff k^2-2k-3=0 \iff k=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \iff k=-1 \vee k=3$

Se $k=-1$, $z=3-3i$; se $k=3$, $z=-5+5i$.

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

5.3.

```
k=float(input("k="))

a = 1 - 2*k
b = k**2 - 4
print(f"z = {a} + {b}i")

if b==0:
  print(f"z = {a}")
  print("z é um número real")

elif a==0:
  print(f"z = {b}i")
  print("z é imaginário puro")

else:
  print("z não é um número real e não é imaginário puro")
```

6. $z=t \iff \text{Re}(z)=\text{Re}(t) \wedge \text{Im}(z)=\text{Im}(t) \iff -k=k^2-6 \wedge 1+k=2k-1 \iff k^2+k-6=0 \wedge k=2 \iff$

$\iff k=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} \wedge k=2 \iff (k=-3 \vee k=2) \wedge k=2 \iff k=2$

Página 6

7.1. $2z^2+36=0$

$\iff z^2=-18 \iff z=-\sqrt{-18} \vee z=\sqrt{-18} \iff$

$\iff z=-\sqrt{18}\,\text{i} \vee z=\sqrt{18}\,\text{i} \iff$

$\iff z=-3\sqrt{2}\,\text{i} \vee z=3\sqrt{2}\,\text{i}$

7.2. $z^2+15=0$

$\iff z^2=-15 \iff z=-\sqrt{-15} \vee z=\sqrt{-15} \iff$

$\iff z=-\sqrt{15}\,\text{i} \vee z=\sqrt{15}\,\text{i}$

7.3. $4z^2+49=0$

$\iff z^2=-\dfrac{49}{4} \iff z=-\sqrt{-\dfrac{49}{4}} \vee z=\sqrt{-\dfrac{49}{4}} \iff$

$\iff z=-\dfrac{7}{2}\,\text{i} \vee z=\dfrac{7}{2}\,\text{i}$

7.4. $6z^3+24z=0$

$\iff 6z\left(z^2+4\right)=0 \iff z=0 \vee z^2=-4 \iff$

$\iff z=0 \vee z=-\sqrt{-4} \vee z=\sqrt{-4} \iff$

$\iff z=0 \vee z=-2\text{i} \vee z=2\text{i}$

7.5. $(z-2)\left(2z^2+4\right)=0$

$\iff z-2=0 \vee 2z^2+4=0 \iff z=2 \vee z^2=-2 \iff$

$\iff z=2 \vee z=-\sqrt{-2} \vee z=\sqrt{-2} \iff$

$\iff z=2 \vee z=-\sqrt{2}\,\text{i} \vee z=\sqrt{2}\,\text{i}$

7.6. $4z^3+20z=0$

$\iff 4z\left(z^2+5\right)=0 \iff z=0 \vee z^2=-5 \iff$

$\iff z=0 \vee z=-\sqrt{-5} \vee z=\sqrt{-5} \iff$

$\iff z=0 \vee z=-\sqrt{5}\,\text{i} \vee z=\sqrt{5}\,\text{i}$

8.1. $z^2+3z+5=0$

$\iff z=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-20}}{2} \iff z=\dfrac{-3\pm\sqrt{-11}}{2} \iff$

$\iff z=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{11}}{2}\,\text{i} \vee z=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}\,\text{i}$

8.2. $z^2-2z+5=0$

$\iff z=\dfrac{2\pm\sqrt{4-20}}{2} \iff z=\dfrac{2\pm\sqrt{-16}}{2} \iff$

$\iff z=\dfrac{2\pm 4\text{i}}{2} \iff z=1+2\text{i} \vee z=1-2\text{i}$

8.3. $z^2+6z+10=0$

$\iff z=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-40}}{2} \iff z=\dfrac{-6\pm\sqrt{-4}}{2} \iff$

$\iff z=\dfrac{-6\pm 2\text{i}}{2} \iff z=-3+\text{i} \vee z=-3-\text{i}$

8.4. $(z-5)^2+64=0$

$\iff (z-5)^2=-64 \iff$

$\iff z-5=\sqrt{-64} \vee z-5=-\sqrt{-64} \iff$

$\iff z=5+8\text{i} \vee z=5-8\text{i}$

8.5. $2+(z+1)^2=0$

$\iff (z+1)^2=-2 \iff$

$\iff z+1=\sqrt{-2} \vee z+1=-\sqrt{-2} \iff$

$\iff z=-1+\sqrt{2}\,\text{i} \vee z=-1-\sqrt{2}\,\text{i}$

8.6. $20+(z-5)^2=0$

$\iff (z-5)^2=-20 \iff$

$\iff z-5=\sqrt{-20} \vee z-5=-\sqrt{-20} \iff$

$\iff z=5+\sqrt{20}\,\text{i} \vee z=5-\sqrt{20}\,\text{i} \iff$

$\iff z=5+2\sqrt{5}\,\text{i} \vee z=5-2\sqrt{5}\,\text{i}$

9.1. $z^2 - 4z + 13 = 0 \iff z = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} \iff z = \dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \iff$

$\iff z = \dfrac{4 + 6\text{i}}{2} \vee z = \dfrac{4 - 6\text{i}}{2} \iff z = 2 + 3\text{i} \vee z = 2 - 3\text{i}$

9.2. Sejam $z_1 = 2 + 3\text{i}$ e $z_2 = 2 - 3\text{i}$.

$z = z_1 \vee z = z_2 \iff \left(\dfrac{k+5}{2} = 2 \wedge 5k + 2 = 3\right) \vee \left(\dfrac{k+5}{2} = 2 \wedge 5k + 2 = -3\right) \iff$

$\iff \underbrace{\left(k = -1 \wedge k = \dfrac{1}{5}\right)}_{\text{impossível}} \vee (k = -1 \wedge k = -1)$

Logo, para $k = -1$, tem-se $z = z_2$.

Página 7

10. Opção **(C)**

$z^3 + 4z^2 + 6z = 0 \iff z\left(z^2 + 4z + 6\right) = 0 \iff z = 0 \vee z = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} \iff z = 0 \vee z = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2} \iff$

$\iff z = 0 \vee z = -2 + \sqrt{2}\text{i} \vee z = -2 - \sqrt{2}\text{i}$

11.1.

	1	1	3	−5
1		1	2	5
	1	2	5	0

$z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0 \iff$

$\iff (z - 1)\left(z^2 + 2z + 5\right) = 0 \iff$

$\iff z = 1 \vee z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} \iff$

$\iff z = 1 \vee z = -1 + 2\text{i} \vee z = -1 - 2\text{i}$

11.2.

	2	0	9	11
−1		−2	2	−11
	2	−2	11	0

$2z^3 + 9z + 11 = 0 \iff$

$\iff (z + 1)\left(2z^2 - 2z + 11\right) = 0 \iff$

$\iff z = -1 \vee z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 88}}{4} \iff$

$\iff z = -1 \vee z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}\text{i} \vee z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}\text{i}$

11.3. $\left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + 6z + 10\right) = 0 \iff$

$\iff z^2 = 1 \vee z = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \iff$

$\iff z = -1 \vee z = 1 \vee z = \dfrac{-6 + 2\text{i}}{2} \vee z = \dfrac{-6 - 2\text{i}}{2} \iff$

$\iff z = -1 \vee z = 1 \vee z = -3 + \text{i} \vee z = -3 - \text{i}$

11.4. $z^4 - 16 = 0 \iff$

$\iff \left(z^2 - 4\right)\left(z^2 + 4\right) = 0 \iff$

$\iff z^2 = 4 \vee z^2 = -4 \iff$

$\iff z = -2 \vee z = 2 \vee z = 2\text{i} \vee z = -2\text{i}$

12.1. Opção **(C)**

$\left(z^2 + 4\right)(4z - 2) = 0 \iff z^2 = -4 \vee z = \dfrac{1}{2} \iff z = 2\text{i} \vee z = -2\text{i} \vee z = \dfrac{1}{2}$

12.2. Opção **(B)**

$\left(z^2 + 1\right)\left(z^2 + z - 2\right) = 0 \iff z^2 + 1 = 0 \vee z^2 + z - 2 = 0 \iff z = \text{i} \vee z = -\text{i} \vee z = 1 \vee z = -2$

Soluções reais: 1 e -2

Soluções não reais: i e $-\text{i}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

Ficha 2

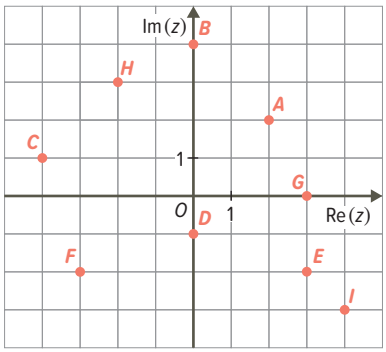
Página 8

1.1. $z_A = 2 + 2\text{i}$; $z_B = 4\text{i}$; $z_C = -4 + \text{i}$; $z_D = -\text{i}$;
$z_E = 3 - 2\text{i}$; $z_F = -3 - 2\text{i}$

1.2. **a)** $z_G = 3$

b) $z_H = -2 + 3\text{i}$

c) $z_I = 4 - 3\text{i}$



1.3. **a)** $z_J = 4 - 2\text{i}$. $J \in$ 4.º quadrante

b) $z_J = 4 + 3\text{i}$. $J \in$ 1.º quadrante

2.1. **a)** Ponto C

b) Ponto A

c) Pontos E e G

d) Pontos C , D , G , I e K

e) Pontos B e J

f) Pontos D e J

g) Pontos A , C , D , F , G e I

2.2. $z_B = 3 - 2\text{i}$ e $z_J = 1 - \text{i}$

Página 9

2.3. **a)** Opção **(C)**

b) Opção **(A)**

c) Opção **(B)**

3.1. **a)** $z = -4 - 7\text{i}$, afixo no 3.º quadrante

b) $z = 11 + 2\text{i}$, afixo no 1.º quadrante

c) $z = -14 - 13\text{i}$, afixo no 3.º quadrante

3.2. $\text{Re}(z) < 0 \wedge \text{Im}(z) > 0 \iff 1 + 5k < 0 \wedge 3k - 4 > 0 \iff k < -\frac{1}{5} \wedge k > \frac{4}{3} \iff k \in \{\,\}$

3.3. **a)** $\text{Re}(z) > 0 \wedge \text{Im}(z) < 0 \iff 1 + 5k > 0 \wedge 3k - 4 < 0 \iff k > -\frac{1}{5} \wedge k < \frac{4}{3} \iff k \in \left]-\frac{1}{5}, \frac{4}{3}\right[$

b) $\text{Re}(z) = 0 \iff 1 + 5k = 0 \iff k = -\frac{1}{5}$

c) $\text{Im}(z) = 0 \iff 3k - 4 = 0 \iff k = \frac{4}{3}$

d) $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) \iff 1 + 5k = 3k - 4 \iff 2k = -5 \iff k = -\frac{5}{2}$

4. Sejam $z = a + b\text{i}$ e P o afixo de z .

$$\begin{cases} a^2 = b \\ b - a = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - a - 20 = 0 \\ b = a + 20 \end{cases} \iff \ldots \iff \begin{cases} a = -4 \vee a = 5 \\ b = a + 20 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -4 \\ b = 16 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 5 \\ b = 25 \end{cases}$$

Como $P \in$ 2.º quadrante, $a < 0$, logo $z = -4 + 16\text{i}$.

Ficha 3

Página 10

1.

z	Coordenadas de P	Coordenadas de Q	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
$2-3\text{i}$	$P(2,-3)$	$Q(2,3)$	$2+3\text{i}$	$\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$
$-\sqrt{5}-4\text{i}$	$P(-\sqrt{5},-4)$	$Q(-\sqrt{5},4)$	$-\sqrt{5}+4\text{i}$	$\sqrt{(-\sqrt{5})^2+(-4)^2}=\sqrt{21}$
-1	$P(-1,0)$	$Q(-1,0)$	-1	1
$-1+\sqrt{3}\text{i}$	$P(-1,\sqrt{3})$	$Q(-1,-\sqrt{3})$	$-1-\sqrt{3}\text{i}$	$\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$
$-3+4\text{i}$	$P(-3,4)$	$Q(-3,-4)$	$-3-4\text{i}$	$\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$
7i	$P(0,7)$	$Q(0,-7)$	-7i	$\sqrt{7^2}=7$

2.1. Opção **(A)**

2.2. Opção **(C)**

2.3. Opção **(B)**

$\lvert z\rvert=\lvert\overline{z}\rvert=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

Página 11

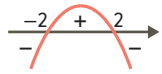
3. Os afixos de z e $\overline{z}$ são simétricos em relação ao eixo real, então o afixo de z pertence ao 2.º quadrante.

$\text{Re}(z)<0\wedge\text{Im}(z)>0 \iff 4-k^2<0\wedge k+2>0 \iff (k<-2\vee k>2)\wedge k>-2 \iff$

$\iff k\in\,]2,+\infty[$

Cálculo auxiliar

$4-k^2=0 \iff k=-2\vee k=2$



4.1. • $z_A=2+3\text{i}$

• $\lvert z_A\rvert=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

4.2. $z_B=\sqrt{13}$ e $z_D=-\sqrt{13}\text{i}$

$z_C=a+b\text{i}=-1+b\text{i}$ e $\lvert z_C\rvert=\sqrt{13} \iff \sqrt{(-1)^2+b^2}=\sqrt{13}$.

Então: $1+b^2=13 \iff b^2=12 \iff b=-2\sqrt{3}\vee b=2\sqrt{3}$

Como o ponto C pertence ao 2.º quadrante, $z_C=-1+2\sqrt{3}\text{i}$.

5. Se $z_C=2-4\text{i}$, então $z_D=-2-4\text{i}$.

Por outro lado, $z_B=\overline{z_D}=-2+4\text{i}$, logo $\text{Im}(z_A)=\text{Im}(z_B)=4$. Então, $z_A=a+4\text{i}$.

$\lvert z_A\rvert=5 \iff \sqrt{a^2+4^2}=5$. Então, $a^2+16=25 \iff a=-3\vee a=3$.

O ponto A pertence ao 2.º quadrante, logo $\text{Re}(z_A)<0$.

Assim, $z_A=-3+4\text{i}$.

6. $\overline{OA}=\overline{OB}=2$ e $A\hat{O}B=45°$.

Sendo $z_B=a+b\text{i}$, então:

$\sin 45°=\frac{b}{2} \iff b=\sqrt{2}$ e $\cos 45°=\frac{a}{2} \iff a=\sqrt{2}$

$z_A=2$; $z_B=\sqrt{2}+\sqrt{2}\text{i}$; $z_C=2\text{i}$; $z_D=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\text{i}$; $z_E=-2$; $z_F=-\sqrt{2}-\sqrt{2}\text{i}$; $z_G=-2\text{i}$; $z_H=\sqrt{2}-\sqrt{2}\text{i}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

Ficha 4

Página 12

1.1. $(-5+2\mathrm{i})+(4-3\mathrm{i})=-1-\mathrm{i}$

1.2. $(-5+2\mathrm{i})-(4+3\mathrm{i})=-9-\mathrm{i}$

1.3. $(4-3\mathrm{i})-(-5-2\mathrm{i}-\mathrm{i})=9$

1.4. $\sqrt{4^2+(-3)^2}+(-5-2\mathrm{i})=$
$=5-5-2\mathrm{i}=-2\mathrm{i}$

1.5. $(-5+2\mathrm{i})-2\mathrm{i}-(4+3\mathrm{i})=-9-3\mathrm{i}$

1.6. $(-5+2\mathrm{i})\times(-4\mathrm{i})=20\mathrm{i}-8\mathrm{i}^2=8+20\mathrm{i}$

1.7. $(-5+2\mathrm{i})\times(4-3\mathrm{i}+4\mathrm{i})=$
$=(-5+2\mathrm{i})\times(4+\mathrm{i})=$
$=-20-5\mathrm{i}+8\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2=-22+3\mathrm{i}$

1.8. $\dfrac{-5+2\mathrm{i}}{-4\mathrm{i}}=\dfrac{(-5+2\mathrm{i})\times 4\mathrm{i}}{(-4)^2}=$
$=\dfrac{-20\mathrm{i}+8\mathrm{i}^2}{16}=\dfrac{-8-20\mathrm{i}}{16}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{4}\mathrm{i}$

1.9. $\dfrac{-5+2\mathrm{i}+4\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}=\dfrac{(-5+6\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}{4^2+(-3)^2}=$
$=\dfrac{-38+9\mathrm{i}}{25}=-\dfrac{38}{25}+\dfrac{9}{25}\mathrm{i}$

Página 13

2.1. 1.º quadrante

2.2. 4.º quadrante

2.3. 4.º quadrante

2.4. 3.º quadrante

2.5. O afixo de $-z_A-z_B$ pertence ao 1.º Q.
O afixo de $\overline{-z_A-z_B}$ pertence ao 4.º Q.

2.6. O afixo de z_A+z_B pertence ao 3.º Q.
O afixo de $2(z_A+z_B)$ pertence ao 3.º Q.
O afixo de $2\mathrm{i}(z_A+z_B)$ pertence ao 4.º Q.

3.1. Opção **(B)**

Seja $z=a+b\mathrm{i}$, com $a, b\in\mathbb{R}$, $a<0$ e $b>0$. Então, $z\times\overline{z}=a^2+b^2$ e $a^2+b^2\in\mathbb{R}^+$.

3.2. Opção **(C)**

Seja $z=a+b\mathrm{i}$, com $a, b\in\mathbb{R}$, $a<0$ e $b>0$. Então, $\mathrm{i}(a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i})=\mathrm{i}\times 2a=2a\mathrm{i}$.

Como $\mathrm{Re}(z)=a<0$, então $2a<0$.

4.1. $\dfrac{-1+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+(-4-2\mathrm{i})=\dfrac{(-1+4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1^2+(-1)^2}+(-4-2\mathrm{i})=$
$=\dfrac{-5+3\mathrm{i}}{2}+(-4-2\mathrm{i})=-\dfrac{13}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

4.2. $(3+4\mathrm{i})\times\dfrac{-5+3\mathrm{i}}{2}=-\dfrac{27}{2}-\dfrac{11}{2}\mathrm{i}$

4.3. $(3-4\mathrm{i})\times\dfrac{1}{-4-2\mathrm{i}}=\dfrac{(3-4\mathrm{i})\times(-4-2\mathrm{i})}{(-4)^2+(-2)^2}=$
$=\dfrac{-4+22\mathrm{i}}{20}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{11}{10}\mathrm{i}$

4.4. $\dfrac{-4-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}-\dfrac{-\mathrm{i}}{1^2}=\dfrac{(-4-2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{3^2+(-4)^2}+\mathrm{i}=$
$=\dfrac{-4-22\mathrm{i}}{25}+\mathrm{i}=-\dfrac{4}{25}+\dfrac{3}{25}\mathrm{i}$

5.1. $x-2y\mathrm{i}=1+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2 \iff$
$\iff x-2y\mathrm{i}=-3+4\mathrm{i} \iff$
$\iff x=-3\wedge -2y=4 \iff$
$\iff x=-3\wedge y=-2$

5.2. $\dfrac{x-2y\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=2-\mathrm{i} \iff \dfrac{(x-2y\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{1}=2-\mathrm{i} \iff$
$\iff -x\mathrm{i}+2y\mathrm{i}^2=2-\mathrm{i} \iff -2y-x\mathrm{i}=2-\mathrm{i} \iff$
$\iff -2y=2\wedge -x=-1 \iff$
$\iff y=-1\wedge x=1$

5.3. $x+2y\mathrm{i}-\dfrac{-2\mathrm{i}}{4}=x+2y\mathrm{i}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}=x+\left(2y+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{i}$

$x\in\mathbb{R}\ \wedge\ 2y+\dfrac{1}{2}=0 \iff x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=-\dfrac{1}{4}$

Página 14

6.1. $z+w=-2+3\text{i}+k-2+\frac{k}{2}\text{i}=(k-4)+\left(3+\frac{k}{2}\right)\text{i}$

$k-4<0 \wedge 3+\frac{k}{2}>0 \iff k\in\,]-6,\,4[$

6.2. $z-w=-2+3\text{i}-k+2-\frac{k}{2}\text{i}=-k+\left(3-\frac{k}{2}\right)\text{i}$. O afixo de $z-w$ pertence ao 4.º quadrante se $-k>0 \wedge 3-\frac{k}{2}<0 \iff k<0 \wedge k>6$, que é uma condição impossível.

6.3. **a)** $w=\text{i}$

$zw\text{i}=(-2+3\text{i})\text{i}^2=$

$=-(-2+3\text{i})=2-3\text{i}$

O afixo de $zw\text{i}$ pertence ao 4.º Q.

b) $-\frac{z}{w}=-\frac{-2+3\text{i}}{\text{i}}=-\frac{(-2+3\text{i})(-\text{i})}{1}=$

$=-3-2\text{i}$

O afixo de $-\frac{z}{w}$ pertence ao 3.º Q.

c) $-2\text{i}(z+w)=-2\text{i}(-2+3\text{i}+\text{i})=$

$=-2\text{i}(-2+4\text{i})=$

$=8+4\text{i}$

O afixo de $-2\text{i}(z+w)$ pertence ao 1.º Q.

7.1. $\frac{\text{i}}{1-2\text{i}}=\frac{\text{i}(1+2\text{i})}{1^2+(-2)^2}=\frac{\text{i}+2\text{i}^2}{5}=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\text{i}$. Substituindo z por $-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\text{i}$ na equação, tem-se:

$5\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\text{i}\right)^2+4\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\text{i}\right)+1=0 \iff 0=0$

Conclui-se que $-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\text{i}$ é solução da equação, bem como o seu conjugado, ou seja, $-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\text{i}$.

7.2. **a)** Ponto A, $z_2=\overline{z_1}$

b) Ponto E

c) Ponto B

d) Ponto D

8.1. $z=-\frac{2\text{i}}{\text{i}}=-2$, logo $\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}$. O afixo de $\frac{1}{z}$ pertence ao semieixo real negativo, tendo módulo igual a $\frac{1}{2}$.

8.2. $z=-\frac{(k+2\text{i})(-\text{i})}{1^2}=-2+k\text{i}$, então $\frac{1}{z}=\frac{1}{-2+k\text{i}}=\frac{-2-k\text{i}}{(-2)^2+k^2}=-\frac{2}{4+k^2}-\frac{k}{4+k^2}\text{i}$.

O afixo de $\frac{1}{z}$ tem coordenadas $\left(-\frac{2}{4+k^2},\,-\frac{k}{4+k^2}\right)$. Repara que $-\frac{2}{4+k^2}<0$, para $k\neq 0$.

• Se $k<0$, tem-se $\frac{-k}{4+k^2}>0$. Neste caso, o afixo de $\frac{1}{z}$ pertence ao 2.º quadrante.

• Se $k>0$, tem-se $\frac{-k}{4+k^2}<0$. Neste caso, o afixo de $\frac{1}{z}$ pertence ao 3.º quadrante.

Página 15

9.1. Ponto C

9.2. Ponto A

9.3. Ponto B

9.4. $\frac{z_A}{\text{i}}=-\text{i}z_A$. Ponto D

10.1. $z=\left(\text{i}^2-3\text{i}\right)^2=(-1-3\text{i})^2=$

$=1+6\text{i}+9\text{i}^2=-8+6\text{i}$

10.2. $\overline{z}=-8-6\text{i}$

10.3. $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{-8-6\text{i}}{100}=-\frac{2}{25}-\frac{3}{50}\text{i}$

11.1. $z=\text{i}^3-2\text{i}^2=2-\text{i}$

11.2. $z=\text{i}^2\left(2+\text{i}^3\right)=-1(2-\text{i})=-2+\text{i}$

11.3. $z=\left(\text{i}^3-2\text{i}^2\right)^2=(-\text{i}+2)^2=(2-\text{i})^2=$

$=4-4\text{i}+\text{i}^2=3-4\text{i}$

11.4. $z=\frac{4\text{i}^3}{\text{i}^2-2\text{i}}=\frac{-4\text{i}}{-1-2\text{i}}=$

$=\frac{-4\text{i}(-1+2\text{i})}{(-1)^2+(-2)^2}=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}\text{i}$

11.5. $z=\frac{\text{i}+2\times 1-5\text{i}}{\text{i}-1}=\frac{2-4\text{i}}{-1+\text{i}}=$

$=\frac{(2-4\text{i})(-1-\text{i})}{(-1)^2+1^2}=-3+\text{i}$

11.6. $z=\left(\text{i}+\frac{2\text{i}}{\text{i}^2}\right)^{35}=(\text{i}-2\text{i})^{35}=$

$=(-\text{i})^{35}=-\text{i}^3=\text{i}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

12.1. $\dfrac{5i^3}{(1-2i)^2}=\dfrac{-5i}{-3-4i}=\dfrac{-5i(-3+4i)}{25}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$

12.2. $\dfrac{1}{(-i)^{29}}=-i^3 \iff \dfrac{1}{-i}=-(-i) \iff i=i$

13. $w=\dfrac{(1+i^3)^2}{2}+1=\dfrac{(1-i)^2}{2}+1=\dfrac{1-2i+i^2}{2}+1=1-i$

Repara que: $|w|^2=2$ e $w^3=(1-i)^2(1-i)=-2i(1-i)=-2i+2i^2=-2-2i$

$\overline{w^3}=-2+2i$ e $\dfrac{2|w|^2}{i\,\overline{w}}=\dfrac{2\times 2}{i(1+i)}=\dfrac{4}{-1+i}=\dfrac{4(-1-i)}{2}=-2-2i$

Como $\overline{w^3}\neq\dfrac{2|w|^2}{i\,\overline{z}}$, conclui-se que w não é solução da equação dada.

14. $z=\dfrac{i^{2n+2}\times i^{n+3}}{i^{3n}-i^{3n}\times i}=\dfrac{i^{3n}\times i^5}{i^{3n}(1-i)}=\dfrac{i}{1-i}=\dfrac{i(1+i)}{2}=\dfrac{i+i^2}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

Ficha 5

Página 16

1.

Afixo	E	F	D	A	G	C	B	H
$z=\lvert z\rvert e^{i\theta}$	$z=8e^{i\pi}$	$z=5e^{i\frac{7\pi}{6}}$	$z=5e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$z=5e^{i0}=5$	$z=5e^{i\frac{3\pi}{2}}$	$z=8e^{i\frac{\pi}{2}}$	$z=8e^{i\frac{\pi}{3}}$	$z=8e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$
$z=a+bi$	$z=-8$	$z=-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-\dfrac{5}{2}i$	$z=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}i$	$z=5$	$z=-5i$	$z=8i$	$z=4+4\sqrt{3}i$	$z=4-4\sqrt{3}i$

F: $z=5\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)=-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-\dfrac{5}{2}i$

D: $z=5\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}i$

B: $z=8\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=4+4\sqrt{3}i$

H: $z=8\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)\right)=4-4\sqrt{3}i$

Página 17

2.1. • $|z|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

• $\tan\theta=\dfrac{-2}{2}=-1\wedge\theta\in 4.^{\circ}Q,\ \theta=-\dfrac{\pi}{4}$

Logo, $z=2\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

2.2. • $|z|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=1$

• $\tan\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}\wedge\theta\in 2.^{\circ}Q,\ \theta=\dfrac{2\pi}{3}$

Logo, $z=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2.3. • $|z|=\sqrt{81+27}=6\sqrt{3}$

• $\tan\theta=\dfrac{-3\sqrt{3}}{-9}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\wedge\theta\in 3.^{\circ}Q,\ \theta=-\dfrac{5\pi}{6}$

Logo, $z=6\sqrt{3}\,e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$.

3. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \iff \cos^2\theta=1-\frac{1}{5} \iff \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5} \vee \cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Como $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, então $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$|z|=5$, então: $z=5(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}-5\times\frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{i}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}\,\mathrm{i}$

4.1. $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)=4\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

4.2. $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}\right)\approx 1{,}236+3{,}804\mathrm{i}$

5.1. $|z_A|=\overline{OA}=4$, então $z_A=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Como $A\hat{O}B=\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$, tem-se: $z_B=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

$z_C=-z_A=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$; $z_D=-z_B=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right)}=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$

5.2. $z_C=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$, então: $z_C=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)=4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=-2-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$z_D=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$, então: $z_D=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$

Página 18

6.1. **a)** $\frac{23\pi}{3}=8\pi-\frac{\pi}{3}$ e $-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$, logo o argumento não negativo mínimo de z_1 é $\frac{5\pi}{3}$. Então, $z_1=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$.

$-\frac{17\pi}{6}=-2\pi-\frac{5\pi}{6}$ e $-\frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{7\pi}{6}$, logo o argumento não negativo mínimo de z_2 é $\frac{7\pi}{6}$. Então, $z_2=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$.

$\frac{13\pi}{3}=4\pi+\frac{\pi}{3}$, logo o argumento não negativo mínimo de z_3 é $\frac{\pi}{3}$. Então, $z_3=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

$\frac{19\pi}{6}=2\pi+\frac{7\pi}{6}$, logo o argumento não negativo mínimo de z_4 é $\frac{7\pi}{6}$. Então, $z_4=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$.

$\frac{17\pi}{3}=6\pi-\frac{\pi}{3}$ e $-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$, logo o argumento não negativo mínimo de z_5 é $\frac{5\pi}{3}$. Então, $z_5=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$.

b) $z_1=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$; $z_2=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$; $z_3=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$; $z_4=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$; $z_5=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

6.2. Opção **(D)**

$|z_1|=|z_5|=2\sqrt{2}$ e a diferença entre os argumentos de z_1 e z_5 é 2π.

6.3.

z	$-z$	$\overline{z}$	$-\overline{z}$
z_1	$-z_1=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{3}+\pi\right)}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{3}}=$ $=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$	$\overline{z_1}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$	$-\overline{z_1}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$
z_2	$-z_2=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{7\pi}{6}+\pi\right)}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{6}}=$ $=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$	$\overline{z_2}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$	$-\overline{z_1}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right)}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$

7.1. $|z|=\sqrt{9+27}=6$ e $|w|=6$. Argumento de z: $\tan\theta=\frac{-3\sqrt{3}}{-3}=\sqrt{3}\wedge\theta\in 3.^{\circ}\,\mathrm{Q}$. Um possível argumento de z é $\frac{4\pi}{3}$. A diferença de argumentos é $-\frac{8\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=-\frac{12\pi}{3}=-4\pi$ (do tipo $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$). Conclui-se que $z=w$.

7.2. $-\frac{2\pi}{3}$

7.3. **a)** $z=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$ e $-z=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{3}+\pi\right)}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{3}}$, então: $\overline{-z}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$

b) $w=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)}$ e $\overline{w}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{8\pi}{3}\right)}$, então: $-\overline{w}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{8\pi}{3}+\pi\right)}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

Página 19

8.1. $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_C = -z_A = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$;

$z_B = \overline{z_C} = 2e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}$; $z_D = \overline{z_A} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

8.2. $z_A = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$; $z_C = -z_A = -\sqrt{3} - i$; $z_B = \overline{z_C} = -\sqrt{3} + i$; $z_D = \overline{z_A} = \sqrt{3} - i$

9.

```
r = float(input("módulo de z (r): "))
θ = float(input("argumento de z (θ em radianos): "))

import math

a = r * math.cos(θ)
b = r * math.sin(θ)

print(f"Coordenadas do afixo: ({a: .2f}, {b: .2f})")
```

10. $\mathrm{Re}(z) = a$ e $\mathrm{Im}(z) = b$, então $a + b = 0$ e $\sqrt{a^2 + b^2} = 4$.

Assim: $\begin{cases} a + b = 0 \\ a^2 + b^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 2b^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = -2\sqrt{2} \vee b = 2\sqrt{2} \end{cases}$

$z \in 4.^{\circ}Q$, então $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$. $\tan\theta = \frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -1 \wedge \theta \in 4.^{\circ}Q$.

O argumento principal de z é $\theta = -\frac{\pi}{4}$, logo $z = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

11. Opção **(C)**

$z = -2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ e $\overline{z} = 2e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}$, então: $-\overline{z} = 2e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}+\pi\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$

Ficha 6

Página 20

1.1. $3e^{i\frac{4\pi}{3}} \times 4e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$= 12e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}\right)} = 12e^{i\left(\frac{31\pi}{12}\right)} =$

$= 12e^{i\left(\frac{24\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}\right)} = 12e^{i\frac{7\pi}{12}}$

1.2. $-4i \times 3e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$= 4e^{i\frac{3\pi}{2}} \times 3e^{i\frac{5\pi}{3}} = 12e^{i\frac{19\pi}{6}} =$

$= 12e^{i\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}\right)} = 12e^{i\frac{7\pi}{6}}$

1.3. $e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} \times 6e^{i\pi}$

$= 6e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}+\pi\right)} =$

$= 6e^{i\frac{\pi}{6}}$

1.4. $\frac{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}}{3e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}}$

$= \frac{e^{i\frac{\pi}{9}}}{3e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}} = \frac{1}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{5\pi}{3}\right)} =$

$= \frac{1}{3}e^{i\frac{16\pi}{9}}$

1.5. $\frac{6e^{i\frac{3\pi}{4}}}{3e^{i\frac{7\pi}{6}}}$

$= \frac{6}{3}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}\right)} =$

$= 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}+2\pi\right)} = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$

1.6. $\frac{8i}{2e^{i\frac{5\pi}{16}}}$

$= \frac{8e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{5\pi}{16}}} = \frac{8}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{16}\right)} =$

$= 4e^{i\frac{3\pi}{16}}$

2.1. $\dfrac{\mathrm{i}\times\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{1-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}}=$

$=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{1-\left(2\cos\frac{5\pi}{3}+2\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}}{1-(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}=\dfrac{\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}}{\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

2.2. Sejam $w=-2+2\mathrm{i}$ e θ argumento de w.

$|w|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ e $\tan\theta=\dfrac{2}{-2}=-1\wedge\theta\in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}$.

Então, $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$.

$\overline{\left(\dfrac{2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}}\right)}=\overline{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{7\pi}{12}\right)}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$

Página 21

3.1. $z_E=-z_A$ e $z_G=-z_C$, logo:

$z_A+z_C+z_E+z_G=$

$=z_A+z_C-z_A-z_C$

$=0$

3.2. $z_B=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$; $\overline{z_B}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}$;

$z_D=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$

Sejam $w=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ e θ argumento de w.

$|w|=2$ e $\tan\theta=\sqrt{3}\wedge\theta\in 3.^{\circ}\,\mathrm{Q}$. Então, $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$.

$\dfrac{2\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}=\overline{z_B}$

3.3. $\dfrac{2\mathrm{i}\,z_G}{z_H}=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$

3.4. $z_F=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{4}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{12}}$

$-\dfrac{z_D}{\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}+\pi\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{11\pi}{12}+\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=$

$=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{12}}=z_F$

4.1. Seja θ um argumento de z. Tem-se $|z|=\sqrt{2}$ e $\tan\theta=-1\wedge\theta\in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}$.

Considere-se $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$. Então $z=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

$w=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

4.2. $w=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}$

4.3. $\dfrac{\overline{z}}{w}=\dfrac{-1-\mathrm{i}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}}=\dfrac{(-1-\mathrm{i})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}\right)}{\frac{2}{4}+\frac{6}{4}}=\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}+\frac{\sqrt{6}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$;

$\dfrac{\overline{z}}{w}=\dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}$

4.4. De **4.3.** resulta que: $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$

$\tan\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}=\dfrac{\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{(-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\dfrac{-(6+2\sqrt{12}+2)}{4}=-2-\sqrt{3}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

Ficha 7

ESPMA12CAD © Porto Editora

Página 22

1.1. $z^3 = 2^3 e^{i\left(3\times\frac{5\pi}{4}\right)} = 8e^{i\frac{15\pi}{4}} = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

1.2. $(1-i)\times i^7 = (1-i)\times i^3 = (1-i)\times(-i) = -i + i^2 = -1 - i$

Seja θ o argumento principal de $(1-i)t^7$. Tem-se $\tan\theta = 1 \wedge \theta \in 3.^{\circ}Q$, então $\theta = -\frac{3\pi}{4}$.

1.3. $w = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, então $w^{12} = 2^{12}e^{i\frac{12\times 2\pi}{3}} = 2^{12}e^{i8\pi} = 2^{12}$ e $2^{12} \in \mathbb{R}^+$.

2.1. $z = -e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{i\left(\frac{9\pi}{8}\right)}$

$z^5 = e^{i\left(5\times\frac{9\pi}{8}\right)} = e^{i\left(\frac{45\pi}{8}\right)} = e^{i\frac{13\pi}{8}}$

$\frac{3\pi}{2} < \frac{13\pi}{8} < 2\pi$, logo o afixo de z^5 pertence ao 4.º quadrante.

2.2. $z^9 = -e^{i\frac{9\pi}{8}} = e^{i\left(\frac{9\pi}{8}+\pi\right)} = e^{i\frac{\pi}{8}}$

$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, logo o afixo de z^5 pertence ao 1.º quadrante.

Página 23

3.1. $z = -i + \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Seja $z = |z|e^{i\theta}$, em que $|z| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$ e $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, com $\theta \in 3.^{\circ}Q$. Por exemplo, $\theta = \frac{7\pi}{6}$. Então, $z = e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

3.2. **a)** $(\overline{z})^5$

$z = e^{i\frac{7\pi}{6}}$, logo $\overline{z} = e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}$.

$(\overline{z})^5 = e^{i\left(-\frac{35\pi}{6}\right)} = e^{i\left(-\frac{36\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$; 1.º quadrante

b) $\overline{w^4}$

$w = 2e^{i\frac{3\pi}{5}}$, logo $w^4 = 16e^{i\frac{12\pi}{5}} = 16e^{i\left(\frac{10\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)} = 16e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

$\overline{w^4} = 16e^{i\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}$ e $-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{5} < 0$; 4.º quadrante

c) $-z^7$

$z = e^{i\frac{7\pi}{6}}$, logo $z^7 = e^{i\frac{49\pi}{6}} = e^{i\left(\frac{48\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$-z^7 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$; 3.º quadrante

d) iw^6

$iw^6 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times 64e^{i\frac{18\pi}{5}} = 64e^{i\frac{41\pi}{10}} = 64e^{i\left(\frac{40\pi}{10}+\frac{\pi}{10}\right)} = 64e^{i\frac{\pi}{10}}$

$0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{2}$; 1.º quadrante

4.1. $z^n = e^{i\frac{5n\pi}{12}}$ pertence a $\mathbb{R}^-$ quando $\frac{5n\pi}{12} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $n = \frac{12}{5} + \frac{24k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Se $k = 0$, $n = \frac{12}{5} \notin \mathbb{N}$; se $k = 1$, $n = \frac{36}{5} \notin \mathbb{N}$;

se $k = 2$, $n = \frac{60}{5} = 12 \in \mathbb{N}$.

Logo, $n = 12$.

4.2. $z^n = e^{i\frac{5n\pi}{12}}$ pertence a $\mathbb{R}^+$ quando $\frac{5n\pi}{12} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $n = \frac{24k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Se $k = 0$, $n = 0$.

4.3. $z^n = e^{i\frac{5n\pi}{12}}$ pertence ao semieixo imaginário negativo quando $\frac{5n\pi}{12} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $n = \frac{18}{5} + \frac{24k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Se $k = 0$, $n = \frac{18}{5}$; se $k = 1$, $n = \frac{42}{5}$; se $k = 2$, $n = \frac{66}{5}$;

se $k = 3$, $n = \frac{90}{5} = 18$.

Logo, $n = 18$.

4.4. $z^n = e^{i\frac{5n\pi}{12}}$ pertence ao semieixo imaginário positivo quando $\frac{5n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $n = \frac{6}{5} + \frac{24}{5}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Se $k = 0$, $n = \frac{6}{5}$; se $k = 1$, $n = \frac{30}{5} = 6$. Logo, $n = 6$.

5.1. $z^3 = -\frac{8}{27} = \frac{8}{27}e^{i\pi}$. Seja $z = \rho e^{i\theta}$, então $z^3 = \rho^3 e^{i(3\theta)}$.

$\rho^3 = \frac{8}{27} \wedge 3\theta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \iff \rho = \frac{2}{3} \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}$; se $k = 1$, $\theta = \pi$; se $k = 2$, $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

Como $A \in 4.^{\circ}Q$, $z = \frac{2}{3}e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Assim, $z^4 = \frac{16}{81}e^{i\frac{20\pi}{3}} = \frac{16}{81}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Página 24

5.2. De **5.1.** tem-se $z = \frac{2}{3}e^{i\frac{5\pi}{3}}$; $z^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\frac{5n\pi}{3}}$. Então, $\frac{5n\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $n = 1 + \frac{3}{5}k$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Como $n < 20$, então: $1 + \frac{3}{5}k < 20 \iff 3k < 95 \iff k < \frac{95}{3}$.

O maior número inteiro menor do que $\frac{95}{3}$ é 31.

Se $k = 31$, $n = \frac{98}{5} \notin \mathbb{N}$. Se $k = 30$, $n = 19$. Assim, $n = 19$.

6.1. $z^3 = 2^3 e^{i\frac{3\times 2\pi}{9}} = 8e^{i\frac{2\pi}{3}} = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8\left(-\frac{1}{2} + i\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4 + 4\sqrt{3}\,i = w$

6.2. Se $z = 2e^{i\frac{2\pi}{9}}$ é uma das raízes cúbicas de w, as outras raízes cúbicas de w são

$z_1 = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{8\pi}{9}}$ e $z_2 = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + 2\times\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{14\pi}{9}}$.

7.1. Seja $w = |w|e^{i\alpha}$. $|w| = \sqrt{3+1} = 2$ e $\tan\alpha = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Como $\alpha \in 2.^{\circ}Q$, um valor de α pode ser $\frac{5\pi}{6}$. Assim, $w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

$z^2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \iff \rho^2 e^{i(2\theta)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \iff$

$\iff \rho^2 = 2 \wedge 2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \{0, 1\} \underset{(\rho > 0)}{\iff}$

$\iff \rho = \sqrt{2} \wedge \theta = \frac{5\pi + 12k\pi}{12}$, $k \in \{0, 1\}$

Se $k = 0$, $\theta = \frac{5\pi}{12}$; se $k = 1$, $\theta = \frac{17\pi}{12}$.

Logo: $z_0 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$; $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

7.2. $t = -e^{i\frac{3\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\right)} = e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$

$z^4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} \iff \rho^4 e^{i(4\theta)} = e^{i\frac{7\pi}{4}} \iff \rho^4 = 1 \wedge 4\theta = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \{0, 1, 2, 3\} \underset{(\rho>0)}{\iff} \rho = 1 \wedge \theta = \frac{7\pi + 8k\pi}{16},\ k \in \{0, 1, 2, 3\}$

Se $k = 0$, $\theta = \frac{7\pi}{16}$; se $k = 1$, $\theta = \frac{15\pi}{16}$; se $k = 2$, $\theta = \frac{23\pi}{16}$; se $k = 3$, $\theta = \frac{31\pi}{16}$.

Logo: $z_0 = e^{i\frac{7\pi}{16}}$; $z_1 = e^{i\frac{15\pi}{16}}$; $z_2 = e^{i\frac{23\pi}{16}}$; $z_3 = e^{i\frac{31\pi}{16}}$

8.1. Seja A o afixo de z_A. Então, $z_A = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Assim: $w = (z_A)^5 = 32e^{i\frac{15\pi}{2}} = 32e^{i\frac{3\pi}{2}}$

8.2. $\frac{3\pi}{2} - \frac{2 \times 2\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$. O argumento não negativo mínimo de z_D é $\frac{7\pi}{10}$.

Página 25

9.1. $z_Q = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = e^{i\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}$

$Q\hat{O}R = -\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$

$n \times \frac{\pi}{5} = 2\pi \iff n = 10$

9.2. $z_R = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)} = e^{i\left(\frac{9\pi}{5}\right)}$

$P\hat{O}R = \frac{9\pi}{5} - \frac{22\pi}{15} = \frac{\pi}{3}$, logo $P\hat{O}Q = \frac{\pi}{6}$.

$n \times \frac{\pi}{6} = 2\pi \iff n = 12$

10.1. Seja $z = x + yi$.

$1 - 2i - 1 - (x - yi) = 5(x + yi) \iff -2i - x + yi = 5x + 5yi \iff -6x + (-4y - 2)i = 0 \iff$

$\iff -6x = 0 \wedge -4y - 2 = 0 \iff x = 0 \wedge y = -\frac{1}{2}$

Solução: $z = -\frac{1}{2}i$

10.2. Seja $z = \rho e^{i\theta}$, $z \neq 0$.

$z \times z^2 = -i^2 \iff z^3 = 1 \iff \rho^3 e^{i(3\theta)} = e^{i0} \iff \rho^3 = 1 \wedge 3\theta = 0 + 2k\pi,\ k \in \{0, 1, 2\} \underset{(\rho>0)}{\iff} \rho = 1 \wedge \theta = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \{0, 1, 2\}$

Se $k = 0$, $\theta = 0$; se $k = 1$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$; se $k = 2$, $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

Soluções: $z_0 = e^{i0} = 1$; $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

10.3. Seja $z = \rho e^{i\theta}$.

$z^4 = 16i^3 \iff z^4 = -16i \iff \rho^4 e^{i(4\theta)} = 16e^{i\frac{3\pi}{2}} \iff \rho^4 = 16 \wedge 4\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \{0, 1, 2, 3\} \underset{(\rho>0)}{\iff} \rho = \sqrt[4]{16} = 2 \wedge \theta = \frac{3\pi + 4k\pi}{8},$

$k \in \{0, 1, 2, 3\}$

Se $k = 0$, $\theta = \frac{3\pi}{8}$; se $k = 1$, $\theta = \frac{7\pi}{8}$;

se $k = 2$, $\theta = \frac{11\pi}{8}$; se $k = 3$, $\theta = \frac{15\pi}{8}$.

Soluções: $z_0 = 2e^{i\frac{3\pi}{8}}$; $z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$; $z_2 = 2e^{i\frac{11\pi}{8}}$; $z_3 = 2e^{i\frac{15\pi}{8}}$

11. $z^4=\dfrac{32\sqrt{3}}{\mathrm{i}}-32\mathrm{i}^3 \iff z^4=-32\sqrt{3}\,\mathrm{i}+32 \iff z^4=32-32\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Seja $w=32-32\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ e $w=|w|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$. Então, $|w|=\sqrt{32^2+32^2\times 3}=64$ e $\tan\theta_1=-\sqrt{3}\wedge\theta_1\in 4.^{\circ}\,\mathrm{Q}$. Um valor de θ_1 pode ser $\dfrac{5\pi}{3}$.

Assim, $z^4=64\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$.

Seja $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$.

$\rho^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4\theta_2)}=64\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{3}\right)} \iff \rho^4=64\wedge 4\theta_2=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\{0,1,2,3\} \underset{(\rho>0)}{\iff} \rho=\sqrt[4]{64}\wedge\theta_2=\dfrac{5\pi+6k\pi}{12},\ k\in\{0,1,2,3\}$

Se $k=0$, $\theta_2=\dfrac{5\pi}{12}$, sendo $z_0=\sqrt[4]{64}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$; ...

Como A pertence ao $1.^{\circ}\,\mathrm{Q}$, $z_A=z_0=\sqrt[4]{64}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ e $\overline{OA}=\overline{AB}=\sqrt[4]{64}$.

$|z_B|=\overline{OB}$ e $\overline{OB}^2=\left(\sqrt[4]{64}\right)^2+\left(\sqrt[4]{64}\right)^2 \iff \overline{OB}=\sqrt{8+8} \iff \overline{OB}=4$

Seja $z_B=|z_B|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3}$. Tem-se $\theta_3=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2\pi}{3}$. Assim: $z_B=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=-2+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Ficha 8

Página 26

1.1. **a)** $A(-2,3)$ e $B(1,-1)$

$\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(-1-3)^2}=5$

$|z-z_B|=5 \iff |z-1+\mathrm{i}|=5$

b) $A(-2,3)$ e $C(6,-1)$. Seja M o ponto médio de $[AC]$.

$M\left(\dfrac{-2+6}{2},\dfrac{3-1}{2}\right)$, ou seja, $M(2,1)$

$\overline{AM}=\sqrt{(2+2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$|z-z_M|\leqslant\overline{AM} \iff |z-2-\mathrm{i}|\leqslant 2\sqrt{5}$

c) $|z-z_A|=|z-z_C| \iff |z+2-3\mathrm{i}|=|z-6+\mathrm{i}|$

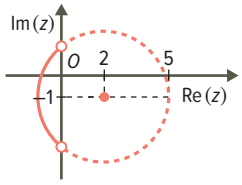
d) $|z-z_B|<|z-z_C| \iff |z-1+\mathrm{i}|<|z-6+\mathrm{i}|$

1.2. **a)** $|z_C-1+\mathrm{i}|=|6-\mathrm{i}-1+\mathrm{i}|=|5|=5$

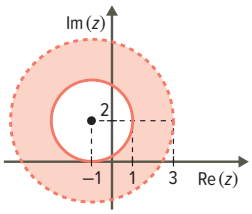
b) $|z_B-z_A|=|z_B-z_C| \iff |1-\mathrm{i}+2-3\mathrm{i}|=|1-\mathrm{i}-6+\mathrm{i}| \iff |3-4\mathrm{i}|=|-5| \iff \sqrt{3^2+(-4)^2}=5 \iff 5=5$

Página 27

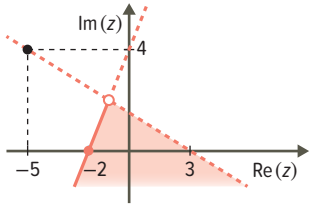
2.1. $|z-(2-\mathrm{i})|=3$



2.2. $|z-(-1+2\mathrm{i})|\geqslant 2\wedge|z-(-1+2\mathrm{i})|<4$



2.3. $|z-3|\leqslant|z-(-5+4\mathrm{i})|\wedge|z-(-2)|<|z-4\mathrm{i}|$



3. Seja $z_C=b\mathrm{i}$, com $b\in\mathbb{R}$. Os pontos A, B e C têm de coordenadas $(0,2)$, $(4,0)$ e $(0,b)$, respetivamente.

$\overline{CA}=\overline{CB} \iff \sqrt{(b-2)^2}=\sqrt{(-4)^2+b^2}$, então: $(b-2)^2=(-4)^2+b^2 \iff b^2-4b+4=16+b^2 \iff b=-3$. $A_{[ABC]}=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{OB}}{2}=\dfrac{5\times 4}{2}=10$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

4. Opção **(D)**

$z \times \overline{z} = 9 \iff (x+y\text{i}) \times (x-y\text{i}) = 9 \iff x^2 + y^2 = 9$, que representa uma circunferência de centro O e raio 3.

5.1. $A(-6, -1)$ e $B(2, 3)$. Seja W o centro da circunferência. $W\left(\frac{-6+2}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = W(-2, 1)$, então $w = -2 + \text{i}$.

5.2. $\overline{AW} = \sqrt{(-6+2)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{5}$ é a medida do raio da circunferência, que é definida por $|z - w| = 2\sqrt{5}$.

Seja $z_C = b\text{i}$. Como o ponto C, de coordenadas $(0, b)$, pertence à circunferência, então:

$|z_C - w| = 2\sqrt{5} \iff |b\text{i} + 2 - \text{i}| = 2\sqrt{5} \iff |2 + (b-1)\text{i}| = 2\sqrt{5} \iff \sqrt{2^2 + (b-1)^2} = 2\sqrt{5} \implies b^2 - 2b + 5 = 20 \iff$

$\iff b^2 - 2b - 15 = 0 \iff b = 5 \vee b = -3$. Como C pertence ao semieixo imaginário negativo, $z_C = -3\text{i}$.

Região sombreada: $|z - w| \leqslant 2\sqrt{5} \wedge |z - z_C| < |z - z_A| \wedge \text{Im}(z) \geqslant 0 \iff |z + 2 - \text{i}| \leqslant 2\sqrt{5} \wedge |z + 3\text{i}| < |z + 6 + \text{i}| \wedge \text{Im}(z) \geqslant 0$

Ficha 9

Página 28

1.1. $z_D = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = -1 + \sqrt{3}\,\text{i}$

***AB*:** $\text{Im}(z) = -2$;

***CD*:** $\text{Im}(z) = \sqrt{3}$;

***BC*:** $\text{Re}(z) = 5$;

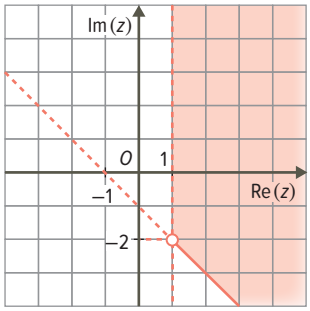
***AD*:** $\text{Re}(z) = -1$

1.2. $-2 \leqslant \text{Im}(z) \leqslant \sqrt{3} \wedge -1 \leqslant \text{Re}(z) \leqslant 5$

2.1. $\text{Re}(-x - y\text{i} - 4 + 3\text{i}) < -5 \wedge \text{Im}(x - y\text{i} - 2 - 2\text{i}) \leqslant \text{Re}(x + y\text{i} - 1) \iff$

$\iff -x - 4 < -5 \wedge -y - 2 \leqslant x - 1 \iff$

$\iff x > 1 \wedge y \geqslant -x - 1$

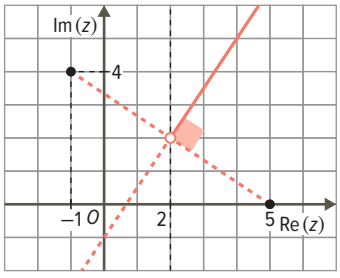


Página 29

2.2. $|z - (-1 + 4\text{i})| = |z - 5| \wedge \text{Re}(-x - y\text{i} + 2 - 3\text{i}) < 0 \iff$

$\iff |z - (-1 + 4\text{i})| = |z - 5| \wedge -x + 2 < 0$

$\iff |z - (-1 + 4\text{i})| = |z - 5| \wedge x > 2$



3. $|z+z_1|=|z-z_2| \iff |z-(-z_1)|=|z-z_2|$ representa a mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os afixos de $-z_1$ e de z_2. Sejam A o afixo de $-z_1$ e B o afixo de z_2. As coordenadas dos pontos A e B têm coordenadas $(-2, 1)$ e $\left(-k, (k+2)^2\right)$, respetivamente. Se a mediatriz de $[AB]$ é paralela ao eixo imaginário, então $[AB]$ é paralelo ao eixo real:

$1=(k+2)^2 \iff k+2=1 \vee k+2=-1 \iff k=-1 \vee k=-3$

4.1. $z_A=2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_B=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $z_C=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$; $z_D=2e^{i\frac{3\pi}{2}}$; $z_E=2e^{i\frac{11\pi}{6}}$; $z_F=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

4.2. **a)** $\arg(z)=\frac{5\pi}{6}$

b) $z_B=2e^{i\frac{5\pi}{6}}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}+i$

$\arg\left(z+\sqrt{3}-i\right)=\frac{3\pi}{2}$

c) $O\hat{A}F=\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

$\arg(z-2i)=\frac{11\pi}{6}$

d) $z_E=2e^{i\frac{11\pi}{6}}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}-i$

$F\hat{E}D=\frac{2\pi}{3}$ e $C\hat{E}D=\frac{\pi}{6}$

$\arg\left(z-\sqrt{3}+i\right)=\frac{7\pi}{6}$

4.3. $\left(\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\arg(z-z_A)\leqslant\frac{11\pi}{6}\wedge \operatorname{Im}(z)>1\right)\vee\left(\frac{\pi}{6}\leqslant\arg(z-z_D)\leqslant\frac{5\pi}{6}\wedge\operatorname{Im}(z)<-1\right)\iff$

$\iff\left(\frac{7\pi}{6}\leqslant\arg(z-2i)\leqslant\frac{11\pi}{6}\wedge\operatorname{Im}(z)>1\right)\vee\left(\frac{\pi}{6}\leqslant\arg(z+2i)\leqslant\frac{5\pi}{6}\wedge\operatorname{Im}(z)<-1\right)$

5. $z_B=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$; $z_D=2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\pi\right)}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_A=2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $z_F=2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$2\leqslant|z|\leqslant 4\wedge\frac{\pi}{6}\leqslant\arg(z)\leqslant\frac{\pi}{3}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

2. PROBABILIDADE

Ficha 1

Página 30

1.1. Fenómeno aleatório

1.2. Fenómeno determinístico

1.3. Fenómeno determinístico

1.4. Fenómeno aleatório

1.5. Fenómeno aleatório

Página 31

2.1. $\Omega = \{12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43\}$

	1	**2**	**3**	**4**
1	X	12	13	14
2	21	X	23	24
3	31	32	X	34
4	41	42	43	X

2.2. **a)** $A = \{\}$; $B = \{14, 23, 32, 41\}$; $C = \Omega$; $D = \{24, 32\}$

A é um acontecimento impossível; B e D são acontecimentos compostos; C é um acontecimento certo.

b) $B \cap D = \{32\}$. Como $B \cap D$ é constituído por um único elemento do espaço amostral, então é um acontecimento elementar.

3.1.

	C2	**C6**	**O3**	**O4**
C2	X	(C2, C6)	(C2, O3)	(C2, O4)
C6	(C6, C2)	X	(C6, O3)	(C6, O4)
O3	(O3, C2)	(O3, C6)	X	(O3, O4)
O4	(O4, C2)	(O4, C6)	(O4, O3)	X

$\Omega = \{(C2, C6); (C2, O3); (C2, O4); (C6, C2); (C6, O3); (C6, O4); (O3, C2); (O3, C6); (O3, O4); (O4, C2); (O4, C6); (O4, O3)\}$

3.2. **a)** $A = \{(C2, C6); (C6, C2); (O3, O4); (O4, O3)\}$

$B = \{(C2, C6); (C2, O4); (C6, C2); (C6, O4); (O4, C2); (O4, C6)\}$

$\overline{A} = \{(C2, O3); (C2, O4); (C6, O3); (C6, O4); (O3, C2); (O3, C6); (O4, C2); (O4, C6)\}$

$A \cap B = \{(C2, C6); (C6, C2)\}$

$A \cup B = \{(C2, C6); (C2, O4); (C6, C2); (C6, O4); (O3, O4); (O4, C2); (O4, C6); (O4, O3)\}$

$\overline{A \cap B} = \{(C2, O3); (C2, O4); (C6, O3); (C6, O4); (O3, C2); (O3, C6); (O3, O4); (O4, C2); (O4, C6); (O4, O3)\}$

$\overline{A \cup B} = \{(C2, O3); (C6, O3); (O3, C2); (O3, C6)\}$

b) $\overline{B}$: "pelo menos uma das cartas tem número ímpar"

ou

$\overline{B}$: "o número de uma das cartas é 3"

Página 32

4.1. $\overline{A \cup B} = \{e\}$

Opção **(B)** . $\overline{A} \cap B = \{\}$

$A \cap \overline{B} = \{a\}$

$\overline{A} = \{e\}$

4.2. $D = \{c\,,\, e\}$

$C \cup D = \Omega$

Opção **(C)** . $\overline{C} = \{c\}$

$C \cap \overline{D} = \{a\,,\, b\,,\, d\}$

5.1. Há $9 \times 8 \times 7 = 504$ resultados possíveis.

5.2. Como o número é superior a 900 , há uma única possibilidade para o algarismo das centenas (9).

Como o número é par, há quatro possibilidades para o algarismo das unidades (2 , 4 , 6 ou 8).

Para o algarismo das dezenas, há sete possibilidades.

Assim, existem $1 \times 7 \times 4 = 28$ casos favoráveis ao acontecimento.

6.1. $\Omega = \{20\,,\, 50\,,\, 100\}$

6.2. $P\left(\{50\}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

6.3. $500 \times \frac{1}{6} = 83{,}(3)$. Estima-se que, dos participantes, 83 jogadores ganharam 100 euros.

Página 33

7. $P(\text{“sair bola amarela”}) + P(\text{“sair bola verde”}) + P(\text{“sair bola branca”}) = 1 \iff k^2 + 2k + \frac{2}{9} = 1 \iff$

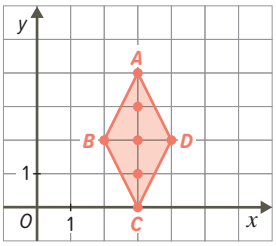
$\iff 9k^2 + 18k - 7 = 0 \iff k = \frac{1}{3} \vee k = -\frac{7}{3}$

No contexto, $k = \frac{1}{3}$. Assim, $P(\text{“sair bola amarela”}) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ e $P(\text{“sair bola verde”}) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Seja n o número total de bolas no saco: $\frac{2}{9} \times n = 6 \iff n = 27$.

O número de bolas amarelas é $\frac{1}{9} \times 27 = 3$ e o número de bolas verdes é $\frac{2}{3} \times 27 = 18$.

8.1. $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -2x + 10 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 10 = 2x - 2 \\ y = -2x + 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$



A , de coordenadas $(3\,,\, 4)$, é o ponto de interseção de AB e AD .

$C \in Ox$ e $[AC]$ é paralela ao eixo Oy , então o ponto C tem coordenadas $(3\,,\, 0)$.

As diagonais do losango bissetam-se, logo a ordenada dos pontos B e D é igual a 2 .

Como $B \in AB$, tem-se $2 = 2x - 2 \iff x = 2$. Logo, B tem coordenadas $(2\,,\, 2)$.

Como $D \in AD$, então $2 = -2x + 10 \iff x = 4$. Logo, D tem coordenadas $(4\,,\, 2)$.

$\Omega = \{(2\,,\, 2)\,;\, (3\,,\, 0)\,;\, (3\,,\, 1)\,;\, (3\,,\, 2)\,;\, (3\,,\, 3)\,;\, (3\,,\, 4)\,;\, (4\,,\, 2)\}$

8.2. Opção **(A)**

I: Falso. $V \cap M = \{(3\,,\, 0)\,;\, (4\,,\, 2)\} \neq \{\,\}\,;$

II: Falso

III: Verdadeiro. $V \cup M = \{(2\,,\, 2)\,;\, (3\,,\, 0)\,;\, (3\,,\, 1)\,;\, (3\,,\, 2)\,;\, (3\,,\, 3)\,;\, (3\,,\, 4)\,;\, (4\,,\, 2)\} = \Omega$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

Ficha 2

Página 34

1.

Número	Frequência absoluta	Frequência relativa
1	214	0,267 50
2	119	0,148 75
3	62	0,077 50
4	263	0,328 75
5	142	0,177 50
Total	800	1

1.1.

Número	1	2	3	4	5
Probabilidade	0,267 50	0,148 750	0,077 50	0,328 750	0,177 50

1.2. **a)** $P(\text{“sair face com número superior a 3”}) = P(\text{“sair 4”}) + P(\text{“sair 5”}) = 0{,}328\,75 + 0{,}177\,50 = 0{,}506\,25$

b) $0{,}267\,50 \times 12 = 3{,}21$; $0{,}148\,75 \times 12 = 1{,}785$; $0{,}077\,50 \times 12 = 0{,}93$; $0{,}328\,75 \times 12 = 3{,}945$; $0{,}177\,50 \times 12 = 2{,}13$

Estima-se que o dodecaedro é constituído por: três faces com o número 1 ; duas faces com o número 2 ; uma face como número 3 ; quatro faces com o número 4 ; duas faces com o número 5 .

Página 35

2. $\dfrac{200-8}{200} = 0{,}96 = 96\%$

O Gil acertou 96% das questões no primeiro dia de estudo e 95% no segundo. O seu desempenho foi melhor no primeiro dia de estudo.

3.1. Seja N o número total de vezes que se repetiu a experiência.

$\dfrac{33}{N} = 0{,}066 \iff N = 500$, pelo que a experiência foi repetida 500 vezes.

3.2. Opção **(D)**

Rejeitam-se as opções **(A)** e **(B)**, pois a probabilidade de cada acontecimento elementar tem de pertencer a $[0\,,\,1]$.

Rejeita-se a opção **(C)**, pois a soma da probabilidade dos acontecimentos elementares é diferente de 100% .

Página 36

4. $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}996 = 0{,}004$

Assim, foram enviados $0{,}004 \times 2500 = 10$ convites dourados.

5.1. $0{,}78 + 0{,}62 = 1{,}4$. Como $1{,}4 - 1 = 0{,}4$, conclui-se que a probabilidade de o arranjo conter hortênsias e rosas é $0{,}4$.

5.2. A partir de **5.1.**, tem-se que a probabilidade de o arranjo conter apenas hortênsias é: $0{,}78 - 0{,}4 = 0{,}38$.

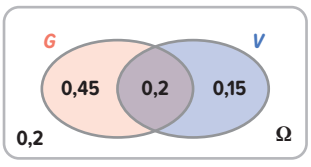
5.3. A partir de **5.1.**, tem-se que a probabilidade de o arranjo conter apenas rosas é: $0{,}62 - 0{,}4 = 0{,}22$.

6.1. $P(G \cup V) = 1 - P(O) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$P(G \cup V) = P(G) + P(V) - P(G \cap V) \iff 0{,}8 = 0{,}65 + 0{,}35 - P(G \cap V) \iff P(G \cap V) = 0{,}2$

$P(G \cap \overline{V}) = 0{,}65 - 0{,}2 = 0{,}45$

$P(V \cap \overline{G}) = 0{,}35 - 0{,}2 = 0{,}15$



6.2. $P(G \cap \overline{V}) + P(V \cap \overline{G}) = 0{,}45 + 0{,}15 = 0{,}6$

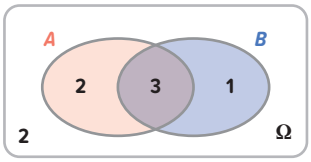
Página 37

7.1. N.º de setores vermelhos e com números primos: $\#(A \cap B) = 3$

N.º de setores vermelhos e sem números primos: $\#(A \cap \overline{B}) = 2$

N.º de setores com números primos e que não são vermelhos: $\#(\overline{A} \cap B) = 1$

N.º de setores sem números primos e que não são vermelhos: $\#(\overline{A} \cap \overline{B}) = 2$



7.2. **a)** $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

b) $P(A \cup B) = \frac{2+3+1}{8} = \frac{3}{4}$

c) $P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{8}$

d) $P(A \cap \overline{B}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

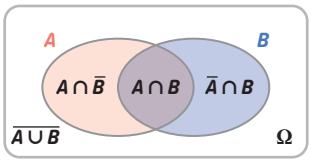
8. $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff 0{,}86 = 0{,}52 + P(B) - 0{,}12 \iff P(B) = 0{,}46$

9.1. $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$

$P(A \cup B) = 0{,}38 + 0{,}45 - 0{,}05 = 0{,}78$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$



9.2. $P(A \cap \overline{B}) =$

$= P(A) - P(A \cap B) =$

$= 0{,}38 - 0{,}05 = 0{,}33$

10. $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] = P(\overline{A}) + P(A \cap B)$

11. $P(R) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $P(\overline{A} \cap R) = P(R) - P(A \cap R)$

$4P(A \cap R) = 0{,}4 - P(A \cap R) \iff 5P(A \cap R) = 0{,}4 \iff P(A \cap R) = 0{,}08$

Ficha 3

Página 38

1.1. **a)** $A = \{(2, 1) ; (4, 2) ; (6, 3) ; (8, 4)\}$

$P(A) = \frac{4}{81}$

b) $A \cap B = \{(4, 2) ; (8, 4)\}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{81}$

c) $P(B) = \frac{5 \times 5 + 4 \times 4}{81} = \frac{41}{81}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{81} + \frac{41}{81} - \frac{2}{81} = \frac{43}{81}$

d) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{43}{81} = \frac{38}{81}$

1.2. **a)** $P = \frac{9 \times 9 \times 5}{9 \times 9 \times 9} = \frac{5}{9}$ **b)** $P = \frac{9}{9 \times 9 \times 9} = \frac{1}{81}$ **c)** $P = \frac{1 \times 9 \times 9}{9 \times 9 \times 9} = \frac{1}{9}$

2.1. $P = \frac{{}^{3}C_1 \times {}^{2}C_1}{{}^{5}C_2} = \frac{3}{5}$ ou $P = \frac{{}^{3}C_1 \times {}^{2}C_1 \times 2!}{{}^{5}A_2} = \frac{3}{5}$

2.2. $P = \frac{{}^{3}C_2 + {}^{2}C_2}{{}^{5}C_2} = \frac{2}{5}$ ou $P = \frac{({}^{3}C_2 + {}^{2}C_2) \times 2!}{{}^{5}A_2} = \frac{2}{5}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

Página 39

3.1. Na caixa existem $0{,}16 \times 25 = 4$ fichas pretas.

$P(\text{"sair exatamente uma ficha preta"}) = \dfrac{2 \times 4 \times 21}{25 \times 24} = \dfrac{7}{25}$

3.2. $P(\text{"não sairem fichas pretas"}) = \dfrac{{}^{21}A_2}{{}^{25}A_2} = \dfrac{21 \times 20}{25 \times 24} = \dfrac{7}{10}$

4.1. $P(\text{"utilizar o autocarro 44 e o comboio intercidades"}) = \dfrac{10}{15+9+5+4+8+6+10+3} = \dfrac{10}{60} = \dfrac{1}{6}$

4.2. $P(\text{"utilizar o autocarro 23"}) = \dfrac{9+6}{60} = \dfrac{15}{60} = \dfrac{1}{4}$

4.3. $P(\text{"utilizar o comboio regional"}) = \dfrac{15+9+5+4}{60} = \dfrac{33}{60} = \dfrac{11}{20}$

5.1. $P(A) = \dfrac{9}{1+12+9} = \dfrac{9}{22}$

5.2. $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{12}{22} = \dfrac{5}{11}$

5.3. $P(B \cup C) = \dfrac{12+1}{22} = \dfrac{13}{22}$

5.4. $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \dfrac{21}{22} = \dfrac{1}{22}$

Página 40

6.1. **a)** $P(A \cap B \cap C) = \dfrac{a}{204} \iff \dfrac{11}{51} = \dfrac{a}{204} \iff a = 44$

$P(A) = \dfrac{b+6+11+44}{204} \iff \dfrac{21}{68} = \dfrac{b+61}{204} \iff b = 2$

$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = \dfrac{d}{204} \iff \dfrac{1}{17} = \dfrac{d}{204} \iff d = 12$

Houve 12 países que apenas ganharam medalhas de bronze.

b) $c = 204 - (114+2+6+44+11+10+12) = 5$

Houve 5 países que apenas ganharam medalhas de prata.

6.2. **a)** $P(\text{"ter conquistado medalhas de, pelo menos, duas tipologias"}) = \dfrac{6+11+10+44}{204} = \dfrac{71}{204}$

b) $P(\text{"ter conquistado, no máximo, dois tipos de medalha"}) = 1 - \dfrac{44}{204} = \dfrac{40}{51}$

6.3. $P = \dfrac{6}{2+11+44+6} = \dfrac{6}{63} = \dfrac{2}{21}$

7. Seja n o número de alunos da turma. Sabe-se que $0{,}4n$ já concluíram a tarefa e que existem 56 formas diferentes de escolher os alunos de entre os $0{,}4n$ que já a concluíram, ou seja:

$0{,}4n \times (0{,}4n - 1) = 56 \iff 0{,}16n^2 - 0{,}4n - 56 = 0 \implies n = 20$

N.º de alunos que concluíram a tarefa: $0{,}4 \times 20 = 8$

N.º de alunos que não concluíram a tarefa: $20 - 8 = 12$

$P(\text{"ambos não terem concluído a tarefa"}) = \dfrac{12 \times 11}{20 \times 19} = \dfrac{132}{380} = \dfrac{33}{95}$

Página 41

8.1. $P = \dfrac{7 \times 7 + 5 \times 5}{12 \times 12} = \dfrac{74}{144} = \dfrac{37}{72}$

8.2. **a)** $P = \dfrac{{}^{5}C_1 \times {}^{7}C_2}{{}^{12}C_3} = \dfrac{21}{44}$

b) $P = \dfrac{{}^{5}C_3 + {}^{7}C_3}{{}^{12}C_3} = \dfrac{9}{44}$

9.1. Número de casos possíveis: $6!$; número de casos favoráveis: $2! \times 5!$

$P = \dfrac{2! \times 5!}{6!} = \dfrac{1}{3}$

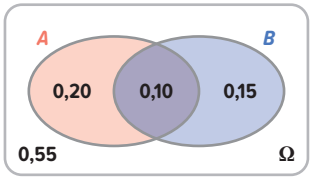
9.2. **a)** Como o nome TOMÁS só tem duas vogais, a sequência terá necessariamente uma consoante.

$P(\text{“ter, pelo menos, uma consoante”}) = 1$

b) $P(\text{“ter, exatamente, uma vogal”}) = \dfrac{{}^{2}C_{1} \times {}^{3}C_{2} \times 3!}{{}^{5}A_{3}} = \dfrac{36}{60} = \dfrac{3}{5}$

10. $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ $\quad A \cap B = \{4, 8\}$

$B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ $\quad P(A) = 0{,}3$ $\quad P(B) = 0{,}25$ $\quad P(A \cap B) = 0{,}1$



11.1. Seja o acontecimento A: “ficar, pelo menos, 1 bola na última coluna da caixa”

$\overline{A}$: “não ficar qualquer bola na última coluna da caixa”

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{{}^{9}C_{5}}{{}^{12}C_{5}} = \dfrac{37}{44}$

11.2. $P = \dfrac{4 \times {}^{9}C_{2}}{{}^{12}C_{3} \times {}^{9}C_{2}} = \dfrac{1}{55}$

Ficha 4

Página 42

1.1. $P(V \cap I) = \dfrac{1}{15}$

1.2. $P(I \mid V) = \dfrac{P(I \cap V)}{P(V)} = \dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{4}{15}} = \dfrac{1}{4}$

1.3. $P(\overline{I} \mid A) = \dfrac{P(\overline{I} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{6}{15}} = \dfrac{1}{6}$

1.4. $P(\overline{A} \mid I) = \dfrac{P(\overline{A} \cap I)}{P(I)} = \dfrac{\frac{3}{15}}{\frac{8}{15}} = \dfrac{3}{8}$

2. Sejam os acontecimentos A e B, tais que:

- $\boldsymbol{A}$: “sair vogal”
- $\boldsymbol{B}$: “sair letra da palavra SOFIA”

Tem-se $A = \{\text{A}, \text{O}, \text{U}\}$ e $B = \{\text{S}, \text{O}, \text{A}\}$, então $A \cap B = \{\text{A}, \text{O}\}$.

Assim, $P(A \mid B) = \dfrac{2}{3}$.

3. $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}79 = 0{,}21$

$P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \iff 0{,}2P(A) = P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff 0{,}45 = P(A) + 0{,}21 - 0{,}2P(A) \iff P(A) = 0{,}3$

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2 \times 0{,}3}{0{,}21} = \dfrac{2}{7}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

Página 43

4.1. Sejam os acontecimentos:

- A : "sair bola preta"
- B : "sair bola com número par"

Então:

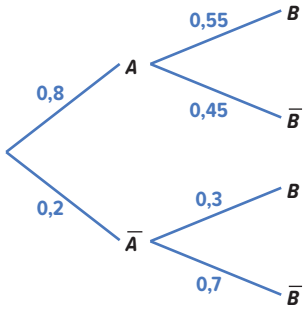
- $\overline{A}$: "sair bola branca"
- $\overline{B}$: "sair bola com número ímpar"

$P(A) = 0{,}8$, então $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

$P(B \mid A) = 0{,}55$, então $P(\overline{B} \mid A) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$

ou

$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}7$, então $P(B \mid \overline{A}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.



4.2. $P(B \mid \overline{A}) = 0{,}3$

4.3. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B} \mid A) = 0{,}8 \times 0{,}45 = 0{,}36$

5.1.

	B	$\overline{B}$	
A	0,04	0,44	0,48
$\overline{A}$	0,34	0,18	0,52
	0,38	0,62	1

$P(A) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$

$P(\overline{B}) = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$

$P(A \cap B) = 0{,}48 - 0{,}44 = 0{,}04$

$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}38 - 0{,}04 = 0{,}34$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}62 - 0{,}44 = 0{,}18$

5.2. **a)** $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}38} = \dfrac{2}{19}$

b) $P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}34}{0{,}38} = \dfrac{17}{19}$

c) $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0{,}44}{0{,}62} = \dfrac{22}{31}$

d) $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0{,}18}{0{,}62} = \dfrac{9}{31}$

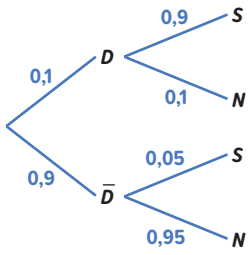
Página 44

6.1. $P(D) = 0{,}10$

$P(\overline{D}) = 1 - 0{,}10 = 0{,}9$

Falso positivo: $P(S \mid \overline{D}) = 0{,}05$, então $P(N \mid \overline{D}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

Falso negativo: $P(N \mid D) = 0{,}1$, então $P(S \mid D) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.



6.2. **a)**

	S	N	
D	216	24	240
$\overline{D}$	108	2052	2160
	324	2076	2400

$0{,}10 \times 2400 = 240$ indivíduos com a doença.

$2400 - 240 = 2160$ pessoas sem a doença.

$P(S \cap \overline{D}) = 0{,}9 \times 0{,}05 = 0{,}045$, logo $0{,}045 \times 2400 = 108$ pessoas testaram positivo e não têm a doença.

$2160 - 108 = 2052$ pessoas testaram negativo e não têm a doença.

$P(N \cap D) = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$, logo $0{,}01 \times 2400 = 24$ indivíduos testaram negativo e têm a doença.

$240 - 24 = 216$ testaram positivo e têm a doença.

Como $216 + 108 = 324$ e $24 + 2052 = 2076$, conclui-se que 324 indivíduos testaram positivo e 2076 negativo.

b) $P(D \mid N) = \dfrac{24}{2076}$, ou seja, $P(D \mid N) \approx 1\%$

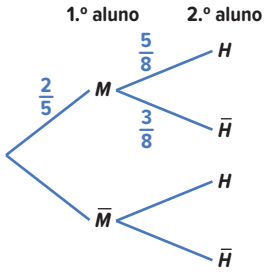
$P(\overline{D} \mid S) = \dfrac{108}{324}$, ou seja, $P(\overline{D} \mid S) \approx 33\%$

7. Seja x o número de raparigas.

$P(\overline{H} \mid M) = \frac{3}{8} \iff \frac{x-1}{24} = \frac{3}{8} \iff 8x - 8 = 72 \iff x = 10$

A turma tem 10 raparigas e 15 rapazes.

$P(M \cap H) = P(M) \times P(H \mid M) = \frac{10}{25} \times \frac{15}{24} = \frac{1}{4}$



Página 45

8.1.

	O	F	
N	189	1071	1260
H	1764	1176	2940
	1953	2247	4200

$P(H) = 0{,}7$, então $0{,}7 \times 4200 = 2940$.

$\frac{3}{5} \times 2940 = 1764$ e $2940 - 1764 = 1176$.

Logo, dos 2940 clientes habituais, 1764 compraram *online* e 1176, na loja física.

$4200 - 2940 = 1260$; $0{,}85 \times 1260 = 1071$ e $1260 - 1071 = 189$

Dos 1260 novos clientes, 1071 compraram na loja física e 189 *online*.

Número de transações *online*: $189 + 1764 = 1953$

Número de transações na loja física: $1071 + 1176 = 2247$

8.2. **a)** $P(H \cap F) = \frac{1176}{4200} = 0{,}28$ **b)** $P(N \mid O) = \frac{189}{1953} = \frac{3}{31}$

9.1. Sejam os acontecimentos A: "utilizar uma árvore de probabilidade" e T: "utilizar uma tabela de contingência".

$0{,}45 + 0{,}65 = 1{,}1$ e $1{,}1 - 1 = 0{,}1$

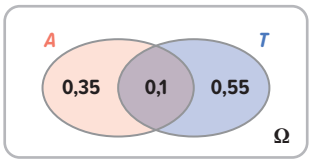
0,1 dos alunos utilizou os dois esquemas.

$0{,}45 - 0{,}1 = 0{,}35$

0,35 dos alunos utilizou, apenas, uma árvore de probabilidade.

$0{,}65 - 0{,}1 = 0{,}55$

0,55 dos alunos utilizou, apenas, uma tabela de contingência.



9.2. $P(A \mid T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}1}{0{,}65}$, ou seja, $P(A \mid T) \approx 15{,}4\%$

Ficha 5

Página 46

1.1. $A = \{21, 22, 23, 24\}$

$B = \{12, 14, 22, 24, 32, 34, 42, 44\}$

$C = \{12, 24, 32, 44\}$

	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

1.2. **a)** $A \cap B = \{22, 24\}$, logo $P(A \cap B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = P(A \cap B)$

b) $P(B) = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$P(B \cap C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(B \cap C)$

2.1. Se A e B são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) =$

$= P(A)[1 - P(B)] + P(B) = P(A)P(\overline{B}) + P(B)$

2.2. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$, ou seja, $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Se A e B são acontecimentos independentes, então $P(B) = P(B \mid A) = \frac{1}{2}$.

Assim, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

Página 47

3.1. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3 \iff P(\overline{A \cup B}) = 0{,}3 \iff 1 - P(A \cup B) = 0{,}3 \iff P(A \cup B) = 0{,}7 \iff P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 \iff$

$\iff 0{,}25 + 0{,}6 - P(A \cap B) = 0{,}7 \iff P(A \cap B) = 0{,}15$

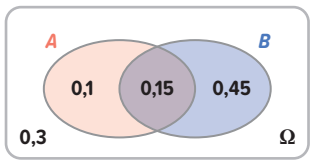
$P(A) \times P(B) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15 = P(A \cap B)$.

Assim, A e B são acontecimentos independentes.

3.2. Da alínea **3.1.**, tem-se que:

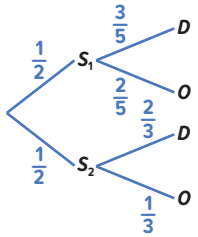
$P(\overline{A \cup B}) = 0{,}3$; $P(A \cap B) = 0{,}15$

$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}1$ e $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}6 - 0{,}15 = 0{,}45$



3.3. $P(\overline{B} \mid A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4$

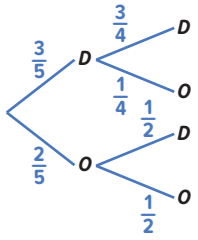
4.1. **a)** $P(D) = P(S_1 \cap D) + P(S_2 \cap D) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{19}{30}$



b) $P(S_1 \mid O) = \frac{P(S_1 \cap O)}{P(O)} = \frac{P(S_1 \cap O)}{P(S_1 \cap O) + P(S_2 \cap O)} =$

$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{30}} = \frac{6}{11}$

4.2. $P(\text{“retirar bola prateada de } S_2\text{”}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{20}$



Ficha 6

Página 48

1.1.

	−1	**0**	**1**	**2**
−1	1	0	−1	−2
0	0	0	0	0
1	−1	0	1	2
2	−2	0	2	4

x_i	−2	−1	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

1.2. **a)** $P(X=0)=\frac{7}{16}$

b) $P(X>-1)=1-P(X=-2)-P(X=-1)=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

c) $P(0<X<2)=P(X=1)=\frac{1}{8}$

d) $P(X\neq 4)=1-P(X=4)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

2.1. Letras nos cartões: A, E, I, O e G. Como só existe uma consoante, a variável X pode tomar os valores 1 ou 2.

2.2. $P(X=1)=\frac{4\times 1+1\times 4}{5\times 4}=\frac{2}{5}$

$P(X=2)=\frac{4\times 3}{5\times 4}=\frac{3}{5}$

x_i	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Página 49

3.1. $P(Y=2)+P(Y=5)=0{,}35 \iff$

$\iff 0{,}15+b=0{,}35 \iff b=0{,}2$

$P(Y>2)=P(Y=5)=0{,}2$

3.2. $a+0{,}4+0{,}15+0{,}2=1 \iff a=0{,}25$

$P(Y<1)=P(Y=0)=0{,}25$

4. Se as cartas retiradas têm números iguais, o produto dos números é um quadrado perfeito.

$P(Z=25)+P(Z=49)=0{,}36+0{,}16=0{,}52$

5.1.

z_i	0	1	2
$P(Z=z_i)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$P(Z=0)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$

$P(Z=1)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{28}$

$P(Z=2)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$

5.2. $P(Z\geqslant 1)=1-P(Z<1)=1-P(Z=0)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

Página 50

6.1.

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,3	0,6	0,1

Podem sair três bolas com números positivos, duas bolas com números positivos ou uma bola com número positivo, pois só existem dois números que não são positivos. Assim:

- $P(X=3)=\dfrac{{}^{3}C_{3}}{{}^{5}C_{3}}=0,1$
- $P(X=2)=\dfrac{{}^{3}C_{2}\times{}^{2}C_{1}}{{}^{5}C_{3}}=0,6$
- $P(X=1)=\dfrac{{}^{3}C_{1}\times{}^{2}C_{2}}{{}^{5}C_{3}}=0,3$

6.2. **a)** $P(Y>0\mid X=1)$ representa a probabilidade de se obter a soma positiva dos números das bolas retiradas, sabendo que saiu exatamente uma bola com um número positivo.

b) Se saiu exatamente uma bola com número positivo, as restantes bolas só podem ser 0 e -1, logo as somas possíveis são: $1+0+(-1)=0$; $2+0+(-1)=1$ e $3+0+(-1)=2$. Assim, $P(Y>0\mid X=1)=\dfrac{2}{3}$.

7.1.

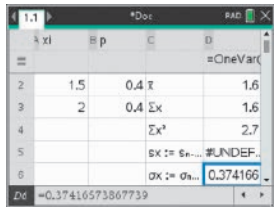
x_i	1	1,50	2
$P(X=x_i)$	0,2	0,4	0,4

$P(X=1)=0,2$

$P(X=1,5)=P(X=2)=\dfrac{1-0,2}{2}=0,4$

7.2. $P(X<2)=P(X=1)+P(X=1,5)=0,2+0,4=0,6$ e significa que a probabilidade de a criança retirar uma bola que custa menos de 2 € é 60%.

7.3. Recorrendo à calculadora gráfica: $\mu\approx 1,6$ e $\sigma\approx 0,4$.

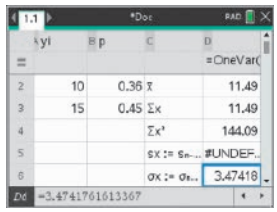


Página 51

8. Sabe-se que: $0,19+0,36+b=1 \iff b=0,45$

e $\mu=0,19a+0,36\times 10+0,45\times 15 \iff 11,49=0,19a+10,35 \iff a=6$

Recorrendo à calculadora gráfica, $\sigma\approx 3,47$.



9. $\begin{cases}P(X>5)=P(X\leqslant 4)\\ 0,05+0,08+0,12+a+0,2+b+0,3=1\end{cases} \iff \begin{cases}b+0,3=0,05+0,08+0,12+a\\ a+b=0,25\end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases}b=a-0,05\\ a+b=0,25\end{cases} \iff \begin{cases}b=a-0,05\\ 2a=0,3\end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases}b=0,1\\ a=0,15\end{cases}$

$\mu=0,05\times 1+0,08\times 2+0,12\times 3+0,15\times 4+0,2\times 5+0,1\times 6+0,3\times 7=4,87$

(Em alternativa, recorre a uma calculadora gráfica.)

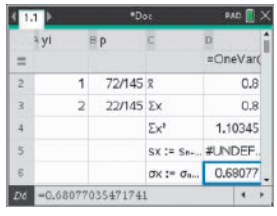
Espera-se que a mãe do Gil cozinhe peixe, aproximadamente, cinco vezes numa semana.

10. Se o número de raparigas é 2, então o número de rapazes a apresentar o projeto é 0,

logo $P(X=2)=P(Y=0)=\dfrac{51}{145}$.

Sabe-se que $P(Y=2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-\dfrac{51}{145}-\dfrac{72}{145}=\dfrac{22}{145}$

Assim, recorrendo à calculadora gráfica, $\mu\approx 0,8$ e $\sigma\approx 0,7$.



Ficha 7

Página 52

1. f corresponde a $N(8\,;\,1{,}5)$, g corresponde a $N(10\,;\,3{,}5)$;
h corresponde a $N(15\,;\,2)$.

2.1. $P(30 \leqslant X \leqslant 36) \approx 0{,}3943$

2.2. $P(34 \leqslant X \leqslant 40) \approx 0{,}4592$

2.3. $P(X \leqslant 32) \approx 0{,}2023$

2.4. $P(X \geqslant 29) \approx 0{,}9276$

3. Opção **(B)**. $P(X \leqslant 80) = P(X \geqslant 80)$

Página 53

4.1. $P(X \geqslant 290) = P(X \geqslant 280) - P(280 \leqslant X \leqslant 290)$
Logo, $P(X \geqslant 290) \approx 0{,}5 - 0{,}341345 \approx 0{,}159$.

4.2. $P(X \leqslant 260) = P(X \leqslant 280) - P(260 \leqslant X \leqslant 280)$
Logo, $P(X \leqslant 260) \approx 0{,}5 - 0{,}47725 \approx 0{,}023$.

5.1. **a)** $P(X \leqslant 0{,}81) \approx 0{,}6914$, ou seja, $P(X \leqslant 0{,}81) \approx 69\%$.
b) $P(X \geqslant 0{,}76) \approx 0{,}9772$, ou seja $P(X \geqslant 0{,}76) \approx 98\%$.
c) $P(0{,}78 \leqslant X \leqslant 0{,}82) \approx 0{,}6826$, ou seja, $P(0{,}78 \leqslant X \leqslant 0{,}82) \approx 68\%$.

5.2. O cabo não é considerado defeituoso se: $0{,}8 - 0{,}025 \leqslant X \leqslant 0{,}8 + 0{,}025 \iff 0{,}775 \leqslant X \leqslant 0{,}825$.
A probabilidade de um cabo ser defeituoso é $1 - P(0{,}775 \leqslant X \leqslant 0{,}825) \approx 1 - 0{,}7887 \approx 0{,}2113$.
A probabilidade de um cabo ser defeituoso é, aproximadamente, de 21,1%.

6.1. $P(X \geqslant 120) = 0{,}5$

6.2. $120 - 90 = 30\,;\ 180 - 120 = 60$
Dado que a curva normal é simétrica em relação ao valor médio, 120, conclui-se que $P(X \leqslant 90) > P(X \geqslant 180)$.
É mais provável a instalação do programa demorar menos de 90 segundos.

7. $P(X < a) = \dfrac{P(X > a)}{4} \iff P(X < a) = \dfrac{1 - P(X < a)}{4} \iff 4P(X < a) = 1 - P(X < a) \iff 5P(X < a) = 1 \iff P(X < a) = 0{,}2$
Na calculadora, recorrendo à instrução "InvNorm", obtém-se $a \approx 4{,}74$.

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

3. FUNÇÕES I

Ficha 1

Página 54

1.1. $D_f = \mathbb{R}$

Se $x \in \mathbb{R}$, tem-se: $5^x > 0 \iff -5^x < 0 \iff 25 - 5^x < 25 \iff f(x) < 25$. Logo, $D_f' =]-\infty, 25[$.

1.2. $f(0) = 25 - 5^0 = 25 - 1 = 24$; $f(x) = 0 \iff 25 - 5^x = 0 \iff 5^x = 5^2 \iff x = 2$

Coordenadas do ponto de interseção com o eixo Oy: $(0, 24)$; coordenadas do ponto de interseção com o eixo Ox: $(2, 0)$

1.3. f é uma função decrescente.

1.4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 25$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2. $f(c) = 4 \iff \left(\frac{1}{4}\right)^c = 4 \iff 4^{-c} = 4^1 \iff c = -1$; $h(b) = 4 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{-b} = 4 \iff 2^b = 2^2 \iff b = 2$

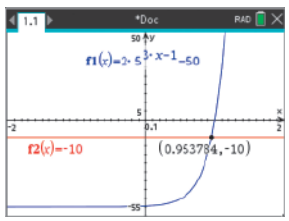
$g(6) = a \iff \left(\sqrt{2}\right)^6 = a \iff a = 8$

Página 55

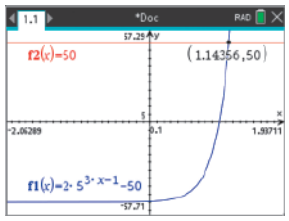
3.1. **a)** $2 \times 5^{3x-1} - 50 = 0 \iff 5^{3x-1} = 5^2 \iff 3x - 1 = 2 \iff x = 1$

b) $2 \times 5^{3x-1} - 50 = -48 \iff 5^{3x-1} = 1 \iff 5^{3x-1} = 5^0 \iff 3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$

3.2. **a)** $x \approx 0{,}95$



b) $x \in]-\infty\,;\,1{,}14[$



4.1. $f(x) = \frac{1}{3^x} - 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$. Sabe-se que: $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 > -2 \iff f(x) > -2$

O gráfico de f tem uma assíntota horizontal de equação $y = -2$; $D_f' =]-2, +\infty[$

4.2. **a)** $f(0) = 0 \iff \frac{1}{3^0} - k = 0 \iff 1 - k = 0 \iff k = 1$

b) $f(-1) = 5 \iff \frac{1}{3^{-1}} - k = 5 \iff k = -2$

c) $D_f' =]-k, +\infty[$, logo $k = 4$.

d) $f(0) = 6 \iff \frac{1}{3^0} - k = 6 \iff k = -5$

5.1. $\begin{cases} f(0)=3 \\ f(1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{8}b=3 \\ a+\frac{1}{4}b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+b=24 \\ 4a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+8-4a=24 \\ b=8-4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-8 \end{cases}$

5.2. $f(x)=0 \Leftrightarrow 4-8\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}=0 \Leftrightarrow 2^2-2^3\times 2^{-(3-x)}=0 \Leftrightarrow 2^x=2^2 \Leftrightarrow x=2$

5.3. Opção **(D)**.

$f(x)=4-8\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}=4-2^3\times 2^{x-3}=4-2^x$. Repara que $2^x>0 \Leftrightarrow -2^x<0 \Leftrightarrow 4-2^x<4$.

Como $D'_f=]-\infty, 4[$ e $2\sqrt{5}\notin]-\infty, 4[$, a equação $f(x)=2\sqrt{5}$ é impossível.

Página 56

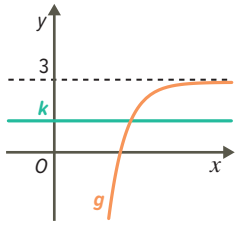
6.1. Sabe-se que $a^{x-c}>0$. Como $b<0$, tem-se $b\,a^{x-c}<0 \Leftrightarrow b\,a^{x-c}+d<d$, ou seja, $f(x)<d$. Assim, $D'_f=]-\infty, d[$.

Como $f(x)=-1$ é impossível, conclui-se que $d<-1$.

6.2. **a)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}>0 \Leftrightarrow -2\times\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}+3<3$

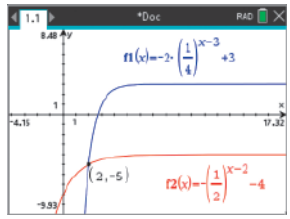
Assim, $D'_g=]-\infty, 3[$.

Se $g(x)>k$ é possível e $k>0$, então $k\in]0, 3[$.



b) $g(x)\geqslant h(x) \Leftrightarrow x\geqslant 2$

Como $D'_g=]-\infty, 3[$, o intervalo pedido é $[g(2), 3[=[-5, 3[$.



7.1. $g(0)=3^{-1}+2=\frac{7}{3}$, então as coordenadas do ponto A são $\left(0, \frac{7}{3}\right)$.

$h(0)=5\times\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}+1=\frac{25}{4}+1=\frac{29}{4}$, então as coordenadas do ponto B são $\left(0, \frac{29}{4}\right)$.

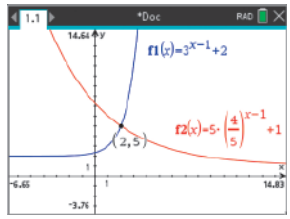
Assim, $\overline{AB}=\frac{29}{4}-\frac{7}{3}=\frac{59}{12}$.

7.2. Q é o ponto de interseção dos gráficos de g e de h.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtêm-se as coordenadas do ponto Q, ou seja, $(2, 5)$.

$g(1)=3$ e $h(1)=6$, então as coordenadas dos pontos P e R são $(1, 3)$ e $(1, 6)$, respetivamente.

$A_{[PQR]}=\frac{(2-1)\times(6-3)}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$



Página 57

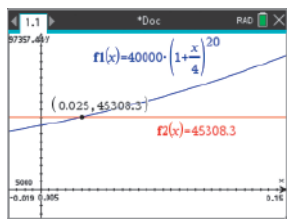
8.1. $25\,000(1+r)^2=25\,000+1010 \Leftrightarrow 25\,000(1+r)^2=26\,010 \Leftrightarrow (1+r)^2=1{,}0404$

Como $1+r>0$, tem-se $1+r=\sqrt{1{,}0404} \Leftrightarrow r=1{,}02-1 \Leftrightarrow r=0{,}02$.

$r=2\%$

8.2. $40\,000\left(1+\frac{r}{4}\right)^{20}=45\,308{,}31$

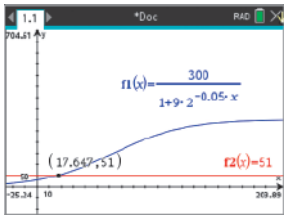
$r=0{,}025 \Leftrightarrow r=2{,}5\%$



ESPMA12CAD © Porto Editora

9.1. $N(d) = 30 \times 1{,}70 \iff \dfrac{300}{1 + 9 \times 2^{-0{,}05d}} = 51$

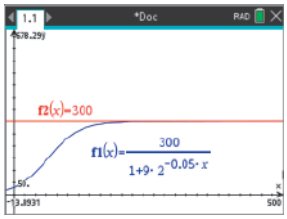
De acordo com o modelo, estima-se que o número de borboletas tenha aumentado cerca de 70%, aproximadamente 18 dias depois de terem sido colocadas as primeiras borboletas.



ESPMA12CAD © Porto Editora

9.2. $N(d) = 30 \times 10 \iff N(d) = 300$

Não. De acordo com o modelo, o número de borboletas aproxima-se de 300 mas não o ultrapassa, sendo este o número que é considerado a lotação máxima do borboletário.



Ficha 2

Página 58

1.1. $f(x) = y \iff 5 - 2x = y \iff x = \dfrac{5 - y}{2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{5 - x}{2}$ e $D_{f^{-1}} = D'_f = \mathbb{R}$

1.2. $f(x) = y \iff \dfrac{4x - 3}{2} = y \iff 4x = 2y + 3 \iff x = \dfrac{2y + 3}{4}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{2x + 3}{4}$ e $D_{f^{-1}} = D'_f = \mathbb{R}$

2. Opção **(A)**

$f(x) = y \iff 2 - x = y \iff x = 2 - y$. Então, $f^{-1}(x) = 2 - x$.

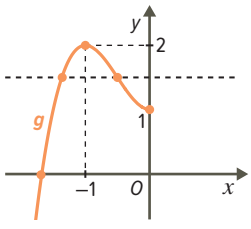
Página 59

3.1. É possível traçar uma reta horizontal que interseta o gráfico de f em mais do que um ponto.

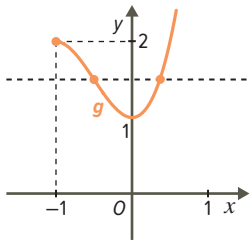
Por exemplo, a reta definida pela equação $y = 1$ interseta o gráfico de f em dois pontos distintos.

Assim, existem dois objetos diferentes com a mesma imagem, logo f não é invertível.

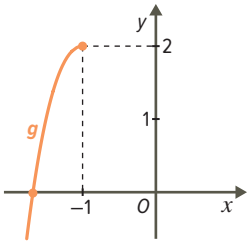
3.2. **a)** g não é invertível.



b) g não é invertível.



c) g é invertível.



4.1. $f(x)=9 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^{4-x^2}=3^2 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^{4-x^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \iff 4-x^2=-2 \iff x^2=6 \iff x=-\sqrt{6} \vee x=\sqrt{6}$

Os pontos de interseção têm coordenadas $(-\sqrt{6}, 9)$ e $(\sqrt{6}, 9)$.

4.2. $f(-\sqrt{6})=f(\sqrt{6})=9$, ou seja, objetos diferentes têm a mesma imagem.

5.1. $f(x)=y \iff 8-3x^3=y \iff x^3=\frac{8-y}{3} \iff x=\sqrt[3]{\frac{8-y}{3}}$

Então, $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{8-x}{3}}$.

5.2. **a)** $x \geqslant 2 \iff x^3 \geqslant 8 \iff -3x^3 \leqslant -24 \iff 8-3x^3 \leqslant -16$

Logo, $g(x) \leqslant -16$. Assim, $D_{g^{-1}}=D'_g=]-\infty, -16]$.

b) $-1 \leqslant x<1 \iff -1 \leqslant x^3<1 \iff -3<-3x^3 \leqslant 3 \iff 5<8-3x^3 \leqslant 11$

Logo, $5<g(x) \leqslant 11$. Assim, $D_{g^{-1}}=D'_g=]5, 11]$.

Página 60

6.1. Ao traçar qualquer reta horizontal, esta não interseta o gráfico de f em mais do que um ponto, logo f é invertível.

A função g é a função inversa de f, ou seja, $g=f^{-1}$.

6.2. $f(x)=y \wedge x \geqslant 3 \iff x^2-6x=y \wedge x \geqslant 3 \iff x^2-6x+9=y+9 \wedge x \geqslant 3 \iff (x-3)^2=y+9 \wedge x \geqslant 3 \iff$

$\iff \left(x-3=-\sqrt{y+9} \vee x-3=\sqrt{y+9}\right) \wedge x \geqslant 3 \iff \left(x=3-\sqrt{y+9} \vee x=3+\sqrt{y+9}\right) \wedge x \geqslant 3 \iff$

$\iff x=3+\sqrt{y+9}$

$f^{-1}(x)=g(x)=3+\sqrt{x+9}$

6.3. Os pontos da bissetriz dos quadrantes ímpares são da forma (x, x).

$f(x)=x \wedge x \geqslant 3 \iff x^2-6x=x \wedge x \geqslant 3 \iff x^2-7x=0 \wedge x \geqslant 3 \iff (x=0 \vee x=7) \wedge x \geqslant 3 \iff x=7$

O ponto de interseção tem coordenadas $(7, 7)$.

Por observação do gráfico, $g(x) \leqslant f(x) \iff x \geqslant 7$.

Conjunto-solução: $[7, +\infty[$

7.1. $f(x)=\frac{2x+6}{x+1}=2+\frac{4}{x+1}$, com $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$2x+6$	$x+1$
$-2x-2$	2
4	

$f(x)=y \iff 2+\frac{4}{x+1}=y \iff \frac{4}{x+1}=y-2 \iff x=-1+\frac{4}{y-2} \wedge y \neq 2$

Assim, $f^{-1}(x)=-1+\frac{4}{x-2}$ e $D'_f=D_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

7.2. $f(x)=f^{-1}(x) \iff \frac{2x+6}{x+1}=-1+\frac{4}{x-2} \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2 \iff \frac{2x+6}{x+1}=\frac{-x+6}{x-2} \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2 \iff$

$\iff (2x+6)(x-2)=(x+1)(-x+6) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2 \iff 3x^2-3x-18=0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2 \iff$

$\iff (x=-2 \vee x=3) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2 \iff x=-2 \vee x=3$

$f(-2)=-2$ e $f(3)=3$

Os pontos de interseção têm coordenadas $(-2, -2)$ e $(3, 3)$.

8.1. Opção **(B)**

$f^{-1}(4)=a \iff f(a)=4$. Analisando as opções, $19 \notin D_f$, $16 \notin D_f$, $f(-1) \neq 4$, mas $f(-13)=4$.

Página 61

8.2. $\sqrt{3-x}=y \wedge y \geqslant 0 \iff 3-x=y^2 \wedge y \geqslant 0 \iff x=3-y^2 \wedge y \geqslant 0$

Assim, $f^{-1}(x)=3-x^2$ e $D_{f^{-1}}=D'_f=[0, +\infty[$.

9. $f(4)+f^{-1}(2)-f^{-1}(4)=2+4-5=1$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

10.1. $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$.

$D_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ e $D'_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

x	$x+1$
$-x-1$	1
-1	

10.2. $f^{-1}(x)=y \iff x=f(y)$

$f^{-1}(x)=y \iff \dfrac{x}{x+1}=y \iff 1-\dfrac{1}{x+1}=y \iff \dfrac{1}{x+1}=1-y \iff x+1=\dfrac{1}{1-y} \iff x=-1-\dfrac{1}{y-1}$

Assim, $f(x)=-1+\dfrac{-1}{x-1}$, sendo $a=-1$, $b=-1$ e $c=1$.

11.1. É possível traçar uma reta horizontal que interseta o gráfico de f em mais do que um ponto.

Assim, existem objetos diferentes aos quais corresponde uma mesma imagem, logo f não é invertível.

11.2. $f(x)=x \iff -\dfrac{x^4}{12}=x \iff -x^4-12x=0 \iff x\left(-x^3-12\right)=0 \iff$

$\iff x=0 \vee x^3=-12 \iff x=0 \vee x=\sqrt[3]{-12}$

A abcissa de P é $\sqrt[3]{-12}$.

11.3. Por observação do gráfico, sabe-se que $D'_g=]-\infty,\ 0]$. Então, $D_{g^{-1}}=]-\infty,\ 0]$.

$f(x)=y \wedge x\geqslant 0 \iff -\dfrac{x^4}{12}=y \wedge x\geqslant 0 \iff x^4=-12y \wedge x\geqslant 0 \wedge y\leqslant 0 \iff$

$\iff \left(x=-\sqrt[4]{-12y} \vee x=\sqrt[4]{-12y}\right) \wedge x\geqslant 0 \wedge y\leqslant 0 \iff x=\sqrt[4]{-12y} \wedge y\leqslant 0$

Assim, $g^{-1}(x)=\sqrt[4]{-12x}$.

Ficha 3

Página 62

1.1. $\log_9 81=x \iff 9^x=9^2 \iff x=2$

1.2. $\log_{\frac{1}{3}} 27=x \iff \left(\dfrac{1}{3}\right)^x=3^3 \iff \left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} \iff x=-3$

1.3. $\log_{\sqrt{3}} 9=x \iff \left(\sqrt{3}\right)^x=3^2 \iff 3^{\frac{1}{2}x}=3^2 \iff \dfrac{1}{2}x=2 \iff x=4$

1.4. $\log_9\left(\dfrac{1}{27}\right)=x \iff 9^x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \iff 3^{2x}=3^{-3} \iff x=-\dfrac{3}{2}$

1.5. $\log(0{,}000\,000\,1)=x \iff 10^x=10^{-7} \iff x=-7$

1.6. $\log_4 \sqrt[5]{16}=x \iff 4^x=16^{\frac{1}{5}} \iff 4^x=4^{\frac{2}{5}} \iff x=\dfrac{2}{5}$

2.1. $\log_5 x=4 \iff x=5^4 \iff x=625$, então $4=\log_5 625$.

2.2. $3^x=4 \iff x=\log_3 4$, então $4=3^{\log_3 4}$.

Página 63

3.1. $3=\log_5 x \iff x=5^3 \iff x=125$

3.2. $3=2^x \iff x=\log_2 3$

3.3. $\left(\sqrt{2}\right)^x=9 \iff x=\log_{\sqrt{2}} 9$

3.4. $5=\log_{\frac{1}{2}} x \iff x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \iff x=\dfrac{1}{32}$

3.5. $2+10^x=5 \iff 10^x=3 \iff x=\log 3$

3.6. $1-\log x=4 \iff \log x=-3 \iff x=10^{-3} \iff x=0{,}001$

3.7. $5-\log_2 x=9 \iff \log_2 x=-4 \iff x=2^{-4} \iff x=\frac{1}{16}$

3.8. $2-3\log_3 x=8 \iff -3\log_3 x=6 \iff \log_3 x=-2 \iff x=3^{-2} \iff x=\frac{1}{9}$

3.9. $\log_4 8=x-2 \iff 4^{x-2}=8 \iff 2^{2x-4}=2^3 \iff x=\frac{7}{2}$

4. **I.** Falso. f tem um único zero e é igual a 1.

II. Verdadeiro. Se $0<a<1$, f é decrescente e $f(x)<0 \iff x\in]1,+\infty[$. Então, $f(2)<0$.

III. Verdadeiro. Se $a>1$, f é crescente, logo $f(1)<f(2)$.

IV. Falso. A reta de equação $x=0$ é a única assíntota ao gráfico de f.

Opção **(D)**

5. $f(1)=2 \iff c+\log_a 1=2 \iff c+0=2 \iff c=2$

$f(9)=0 \iff 2+\log_a 9=0 \iff \log_a 9=-2 \iff a^{-2}=9 \iff \left(\frac{1}{a}\right)^2=3^2 \iff \frac{1}{a}=3 \vee \frac{1}{a}=-3 \iff a=\frac{1}{3} \vee a=-\frac{1}{3}$

Como $a>0$, $a=\frac{1}{3}$.

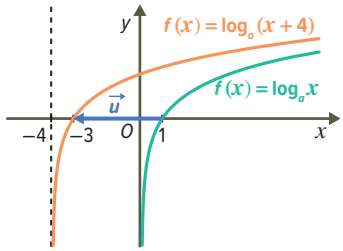
Então, $a=\frac{1}{3}$ e $c=2$.

6. Opção **(C)**

O gráfico de f pode obter-se do gráfico de $y=\log_a x$ pela translação horizontal de vetor $\vec{u}(0,b)$.

Como $f(x)<0 \iff x\in]-4,-3[$, pode concluir-se que $b=-4$ e $a>1$.

Assim, f é crescente, pelo que $f\left(-\frac{7}{2}\right)<f\left(-\frac{5}{2}\right)$.



Página 64

7.1. $D_f=]-1,+\infty[$ e $D'_f=\mathbb{R}$

7.2. $f(0)=4-\log_3(0+1)=4-\log_3 1=4-0=4$, então as coordenadas do ponto A são $(0,4)$.

$f(2)=4-\log_3(2+1)=4-\log_3 3=4-1=3$, então as coordenadas do ponto B são $(2,3)$.

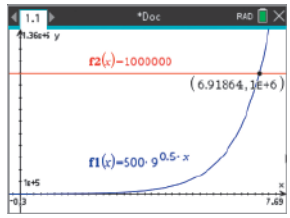
$f(x)=2 \iff 4-\log_3(x+1)=2 \iff \log_3(x+1)=2 \iff x+1=3^2 \iff x=8$, então as coordenadas do ponto C são $(8,2)$.

7.3. $f(x)=0 \iff 4-\log_3(x+1)=0 \iff \log_3(x+1)=4 \iff x+1=3^4 \iff x=80$. O zero de f é 80.

8.1. $N(0)=500\times 9^{0,5\times 0}=500$. No primeiro mês foram vendidas 500 unidades do produto.

8.2. $500\times 9^{0,5m}=1\,000\,000$. Utilizando a calculadora, obtém-se $m\approx 7$.

O número de unidades vendidas ultrapassará $1\,000\,000$, cerca de sete meses após o primeiro, ou seja, cerca oito meses após o dia do lançamento.



8.3. $\frac{N}{500}=9^{0,5m} \iff \log_9\left(\frac{N}{500}\right)=\frac{m}{2} \iff m=2\log_9\left(\frac{N}{500}\right)$

9.1. **A:** $\text{pH}_A=-\log\left(3{,}8\times 10^{-4}\right)\approx 3{,}4 \longrightarrow$ Ácida

B: $\text{pH}_B=-\log\left(6{,}9\times 10^{-5}\right)\approx 4{,}2 \longrightarrow$ Ácida

C: $\text{pH}_C=-\log\left(2{,}5\times 10^{-8}\right)\approx 7{,}6 \longrightarrow$ Básica

9.2. $\text{pH}_{\text{água pura}}=-\log[H^+] \iff 7=-\log[H^+] \iff -7=\log[H^+] \iff [H^+]=10^{-7}$;

10^{-7} mol/dm^3

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

Página 65

9.3. $pH_D = -\log[H^+]_D$ e $pH_E = -\log[H^+]_E$. Seja $pH_E = pH_D - 1$, então:

$-\log[H^+]_E = -\log[H^+]_D - 1 \iff \log[H^+]_E = \log[H^+]_D + 1 \iff \log[H^+]_E = \log[H^+]_D + \log 10 \iff$

$\iff \log[H^+]_E = \log\left(10[H^+]_D\right) \iff [H^+]_E = 10 \times [H^+]_D$

De onde se conclui que, se $pH_E = pH_D - 1$, então $[H^+]_E = 10 \times [H^+]_D$.

10.1. $0 = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \iff 0 = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \iff \frac{I}{I_0} = 10^0 \iff \frac{I}{I_0} = 1 \iff I = I_0$

10.2. $N = 10 \log\left(\frac{100 I_0}{I_0}\right) = 10 \log(100) = 10 \times \underbrace{\log\left(10^2\right)}_{2} = 10 \times 2 = 20$; $N = 20$ dB

10.3. **a)** $100 = 10 \log\left(\frac{10^{-2}}{I_0}\right) \iff 10 = \log\left(\frac{10^{-2}}{I_0}\right) \iff \frac{10^{-2}}{I_0} = 10^{10} \iff I_0 = \frac{10^{-2}}{10^{10}} \iff I_0 = 10^{-12}$

Então, $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$.

b) $120 = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \iff 10^{12} = \frac{I}{10^{-12}} \iff I = 1$

A intensidade do som que corresponde ao limiar da dor é $1\ \text{W/m}^2$.

c) $N = 10 \log\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 10 \underbrace{\log\left(10^6\right)}_{6} = 10 \times 6 = 60$

$N = 60$ dB, logo não cumpre, pois o nível de ruído é superior a 55 dB.

Ficha 4

Página 66

1.1. $\log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2 15 = \log_2\left(\frac{1}{5} \times 15\right) = \log_2 3$

1.2. $3 \log_5 2 - \log_5 4 = \log_5\left(\frac{2^3}{4}\right) = \log_5 2$

1.3. $2 + \log_4\left(\sqrt{5}\right) = \log_4\left(4^2\right) + \log_4 \sqrt{5} = \log_4\left(16\sqrt{5}\right)$

1.4. $1 - \log_7 9 = \log_7 7 - \log_7 9 = \log_7\left(\frac{7}{9}\right)$

1.5. $\log_3 5 + \log_9 2 = \log_3 5 + \frac{\log_3 2}{\log_3 9} = \log_3 5 + \frac{\log_3 2}{2} = \log_3\left(5\sqrt{2}\right)$

1.6. $\log_{0,1} 5 - \log 3 = \frac{\log 5}{\log 0{,}1} - \log 3 = \frac{\log 5}{-1} - \log 3 = \log\left(\frac{1}{15}\right)$

2.1. $\log_2 x - \log_2 3 = \log_2\left(\frac{x}{3}\right)$

2.2. $\log y + 2 \log\left(\sqrt{5}\right) = \log y + \log\left(\sqrt{5}^2\right) = \log(5y)$

2.3. $2 \log_5 x - \log_5\left(\frac{1}{y}\right) = \log_5\left(x^2\right) + \log_5 y = \log_5\left(x^2 y\right)$

2.4. $-1 - \log_7\left(\frac{x}{y}\right) = \log_7\left(7^{-1}\right) + \log_7\left(\frac{y}{x}\right) = \log_7\left(\frac{y}{7x}\right)$

2.5. $\log_4 x + \log_2 7 = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 7 = \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 7 = \log_2\left(7\sqrt{x}\right)$

2.6. $2 \log_3 y + \log_9(25) = \log_3\left(y^2\right) + \frac{\log_3 25}{\log_3 9} = \log_3\left(y^2\right) + \frac{1}{2}\log_3 25 = \log_3\left(5y^2\right)$

3. Opção **(B)**

$\log_a\left(\sqrt[3]{b}\right)=1 \iff \frac{1}{3}\log_a b=1 \iff \log_a b=3 \iff b=a^3$, então $\log_a\left(\sqrt{ab}\right)=\frac{1}{2}\log_a(ab)=\frac{1}{2}\log_a\left(a^4\right)=2$.

Página 67

4.1. $\log_b\left(\frac{\sqrt{b}}{a^2}\right)=\log_b\left(\sqrt{b}\right)-\log_b\left(a^2\right)=\frac{1}{2}\log_b b-\log_b\left(b^{2c}\right)=\frac{1}{2}-2c$

4.2. $\log_{\frac{1}{b}}\left(b\sqrt{a}\right)=\frac{\log_b\left(b\sqrt{a}\right)}{\log_b\left(b^{-1}\right)}=\frac{\log_b b+\log_b\sqrt{a}}{-1}=\frac{1+\frac{1}{2}\log_b a}{-1}=-1-\frac{1}{2}\log_b\left(b^c\right)=-1-\frac{c}{2}$

5.1. $1+\log_k(2x)=2 \iff \log_k(2x)=1 \iff 2x=k \iff x=\frac{k}{2}$

5.2. **a)** $f(2k)=1+\log_k(4k)=\log_k k+\log_k(4k)=\log_k\left(4k^2\right)$

b) $2-\log_k\left(4k^2\right)=2-\left(\log_k 4+\log_k\left(k^2\right)\right)=2-\log_k 4-2=-\log_k 4$

5.3. $f(k)=3 \iff 1+\log_k(2k)=3 \iff \log_k(2k)=2 \iff k^2=2k \iff k^2-2k=0 \iff k=0 \vee k=2$. Como $k>1$, então $k=2$.

6.1. $1+\log_2(x-1)=0 \wedge x>1 \iff \log_2(x-1)=-1 \wedge x>1 \iff x-1=2^{-1} \wedge x>1 \iff x=\frac{3}{2}$

O zero de f é $\frac{3}{2}$.

6.2. $A(x)=\frac{\frac{3}{2}\times f(x)}{2}=\frac{3}{4}\left[1+\log_2(x-1)\right]=\frac{3}{4}\left[\log_2 2+\log_2(x-1)\right]=\frac{3}{4}\log_2(2x-2)=\frac{\log_2(2x-2)^3}{4}$

6.3. $\frac{\log_2(2x-2)^3}{4}=2{,}25 \wedge x>1 \iff 3\log_2(2x-2)=9 \wedge x>1 \iff \log_2(2x-2)=3 \wedge x>1 \iff$

$\iff 2x-2=8 \wedge x>1 \iff x=5$

$f(5)=1+\log_2(5-1)=3$. Assim, as coordenadas do ponto P são $(5, 3)$.

Página 68

7.1. $f(x)=0 \iff 2-2\log_2(x-3)=0 \wedge x-3>0 \iff \log_2(x-3)=1 \wedge x>3 \iff x-3=2 \wedge x>3 \iff x=5$

$g(x)=0 \iff 4\log_4(x-2)=0 \wedge x-2>0 \iff \log_4(x-2)=0 \wedge x>2 \iff x-2=1 \wedge x>2 \iff x=3$

Zero de f: 5; zero de g: 3

7.2. $f(x)=g(x) \iff 2-2\log_2(x-3)=4\log_4(x-2) \wedge \underbrace{x>3 \wedge x>2}_{x>3} \iff 1-\log_2(x-3)=2\log_4(x-2) \wedge x>3 \iff$

$\iff 1-\log_2(x-3)=2\times\frac{\log_2(x-2)}{\log_2 4} \wedge x>3 \iff 1=\log_2(x-3)+\log_2(x-2) \wedge x>3 \iff$

$\iff 1=\log_2\left((x-3)(x-2)\right) \wedge x>3 \iff 1=\log_2\left(x^2-5x+6\right) \wedge x>3 \iff$

$\iff x^2-5x+4=0 \wedge x>3 \iff (x=1 \vee x=4) \wedge x>3 \iff x=4$

$f(4)=2-2\log_2(4-3)=2$

Logo, as coordenadas do ponto I são $(4, 2)$.

8.1. $2\log_2(x+3)-\log_2(x-1)=4 \iff \log_2(x+3)^2=\log_2 2^4+\log_2(x-1) \wedge x+3>0 \wedge x-1>0 \iff$

$\iff x^2+6x+9=16(x-1) \wedge x>-3 \wedge x>1 \iff x^2+6x+9=16x-16 \wedge x>1 \iff$

$\iff x^2-10x+25=0 \wedge x>1 \iff x=5$

8.2. $\log_4(-4x)=2+\log_4\left(\frac{1}{3-x}\right) \iff \log_4(-4x)-\log_4\left(\frac{1}{3-x}\right)=2 \wedge -4x>0 \wedge 3-x>0 \iff$

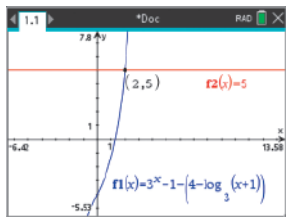
$\iff \log_4\left[-4x(3-x)\right]=\log_4\left(4^2\right) \wedge x<0 \wedge x<3 \iff -12x+4x^2=4^2 \wedge x<0 \iff$

$\iff 4x^2-12x-16=0 \wedge x<0 \iff (x=4 \vee x=-1) \wedge x<0 \iff x=-1$

ESPMA12CAD © Porto Editora

9.1. $f(a)-g(a)=5 \iff 3^a-1-\left[4-\log_3(a+1)\right]=5$

Utilizando a calculadora, obtém-se $a=2$.



ESPMA12CAD © Porto Editora

9.2. $A_{[PQR]}=\dfrac{\overline{PQ}\times a}{2}=\dfrac{5\times 2}{2}=5$

Página 69

10.1. $1+2\log_2(x+3)=k \wedge x+3>0 \iff \log_2(x+3)=\dfrac{k-1}{2} \wedge x>-3 \iff x=2^{\frac{k-1}{2}}-3 \wedge x>-3$

10.2.

```
import math

k = float(input("Introduz o valor de k: "))

x = 2**((k-1)/2)-3

print(f"A solução da equação é x = {x}")
```

11.1. $V_t=V_0\times 0{,}8^t$

11.2. $V_t=0{,}1\,V_0 \iff V_0\times 0{,}8^t=0{,}1V_0 \iff 0{,}8^t=\dfrac{0{,}1V_0}{V_0} \iff 0{,}8^t=0{,}1 \iff t=\log_{0{,}8}0{,}1$, ou seja, $t\approx 10{,}32$.

Terão de decorrer 11 anos.

11.3. $V_t=V_0\times 0{,}8^t \iff 0{,}8^t=\dfrac{V_t}{V_0} \iff t=\log_{0{,}8}\left(\dfrac{V_t}{V_0}\right)$

$\dfrac{V_t}{V_0}=1-0{,}5904 \iff \dfrac{V_t}{V_0}=0{,}4096$, então $t=\log_{0{,}8}(0{,}4096)=4$. Passaram quatro anos.

12.1. $c(0)=a-b\log_2 1 \iff c(0)=a$, o que significa que, no instante $t=0$, a concentração do medicamento no sangue (administrada) é igual a a, em mg/L.

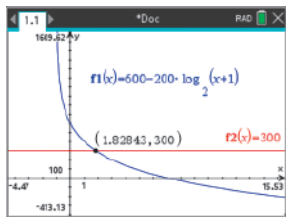
12.2. $\begin{cases}c(3)=200\\c(7)=0\end{cases} \iff \begin{cases}a-b\log_2 4=200\\a-b\log_2 8=0\end{cases} \iff \begin{cases}a-2b=200\\a-3b=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=2b+200\\b=200\end{cases} \iff \begin{cases}a=600\\b=200\end{cases}$

12.3. $c(t)=300 \iff 600-200\log_2(t+1)=300$; $t\approx 1{,}8284$ h

Repara que $1{,}8284=1+0{,}8284$ e que $0{,}8284\times 60\approx 50$.

A concentração do medicamento passa a metade da inicial após, aproximadamente, 1 h e 50 min.

$D_{g\circ f}=\left\{x:\ x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\right\}$ e é tal que $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)$.



Ficha 5

Página 70

1.1. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x+3\geqslant 0\right\}=[-3,+\infty[$; $D_g=\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\geqslant -3 \wedge \sqrt{x+3}\neq 0\right\}$

Repara que $\sqrt{x+3}=0 \iff x+3=0 \iff x=-3$, logo:

$D_{g\circ f}=\left\{x:\ x\geqslant -3 \wedge x\neq -3\right\}=]-3,+\infty[$

$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=\dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$

$g\circ f:\ ]-3,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$

1.2. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1>0\} =]-1, +\infty[$; $D_g = \mathbb{R}$

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge \log(x+1) \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$

$D_{g\circ f} =]-1, +\infty[$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = 2\log(x+1) - 3$

$g\circ f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 2\log(x+1) - 3$

2. $(f\circ g)(a) = 5 \iff f(g(a)) = 5 \iff \log_3(3\times 3^{a-5}) = 5 \iff \log_3(3^{a-4}) = 5 \iff a-4 = 5 \iff a = 9$

3.1. **a)** $(g\circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-3) = 3-(-3) = 6$

b) $(f\circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(3-(-3)) = f(6) = 3$

3.2. $g(f(x)) = 0 \iff 3 - f(x) = 0 \iff f(x) = 3 \iff x = 6$

3.3. $f(g(x)) = -3 \iff f(3-x) = -3 \iff 3 - x = -1 \iff x = 4$

Página 71

4. Opção **(B)**

$f(g(x)) = 0 \iff g(x) = -2 \vee g(x) = 1 \iff x = 0 \vee x = 3$

$g(x) = x - 2$; $g(x) = 1 \iff x = 3$

5.1. **a)** $(f\circ g)(\sqrt{5}) = f(g(\sqrt{5})) =$

$= f(\sqrt{5}^2 - 1) = f(4) = 3^{4-1} = 27$

b) $(g\circ f)(1) = g(f(1)) =$

$= g(3^{1-1}) = g(1) = 1^2 - 1 = 0$

c) $(h\circ f)(-1) = h(f(-1)) =$

$= h(3^{-1-1}) = h\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{4-\frac{1}{9}}{2} = \frac{35}{18}$

5.2. $D_f = D_g = \mathbb{R}$ e $D_{g\circ f} = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 3^{x-1} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$;

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(3^{x-1}) = (3^{x-1})^2 - 1 = 3^{2x-2} - 1$

$g\circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

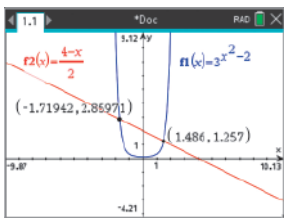
$x \mapsto 3^{2x-2} - 1$

5.3. $D_{f\circ g} = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2-1) = 3^{x^2-1-1} = 3^{x^2-2} \wedge x \in D_{f\circ g}$

$(f\circ g)(x) = h(x) \iff 3^{x^2-2} = \frac{4-x}{2}$

Utilizando a calculadora, obtêm-se os pontos de coordenadas $(-1{,}72\,;\ 2{,}86)$ e $(1{,}49\,;\ 1{,}26)$.



6.1. $(f\circ g)(\sqrt{8}) = f(g(\sqrt{8})) = f(1+2\log_2\sqrt{8}) = f\left(1+2\log_2\left(8^{\frac{1}{2}}\right)\right) = f(1+\log_2(2^3)) = f(4) = 2\times 3^4 = 162$

6.2. $g(f(x)) = g(2\times 3^x) = 1+2\log_2(2\times 3^x) = 1+2(\log_2 2 + \log_2(3^x)) = 1+2+2\log_2(3^x) = 3+\log_2(3^{2x}) = 3+\log_2(9^x)$

7. Opção **(D)**

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)}$; $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} = [0, +\infty[$

$D_{g\circ f} = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \geqslant 0\} = [-3, 0] \cup [2, +\infty[$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

4. FUNÇÕES II

Ficha 1

Página 72

1.1. $f'(x) = e^x + 2x$

1.2. $f'(x) = 6x^2 + \frac{e^x}{e^{2x}} = 6x^2 + \frac{1}{e^x}$

1.3. $f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

1.4. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

1.5. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

1.6. $f'(x) = -\frac{e^x}{e^{2x}} + 2 \times \frac{1}{x} = -\frac{1}{e^x} + \frac{2}{x}$

2.1. $f'(x) = \frac{1 - \ln x - x \times \left(-\frac{1}{x}\right)}{(1 - \ln x)^2} = \frac{2 - \ln x}{(1 - \ln x)^2}$

2.2. $f(1) = \frac{1}{1-0} = 1$, então $A(1, 1)$. $f'(1) = \frac{2-0}{(1-0)^2} = 2$, então $t: y = 2x + b$. Como $A \in t$, $1 = 2 \times 1 + b \iff b = -1$. Assim, $t: y = 2x - 1$.

Página 73

3.1. Opção **(B)**

$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} \iff \frac{1}{2} = \frac{1}{f'(a)} \iff f'(a) = 2$

3.2. $g'(x) = \frac{1}{x}$, então $g'(b) = \frac{1}{b} \iff 0{,}5 = \frac{1}{b} \iff b = 2$. Como $f(a) = b \iff e^a = 2 \iff a = \ln 2$. Assim, $P(2, \ln 2)$.

4.1. $f(0) = -e^0(2 \times 0 - 3) = 3$, ou seja, $A(0, 3)$.

4.2. $f'(x) = -e^x(2x - 3) + 2 \times (-e^x) = e^x(1 - 2x)$; $f'(1) = e(1 - 2 \times 1) = -e$

$r: y = -ex + b$

Como $f(1) = -e(2 \times 1 - 3) = e$, logo, $B(1, e)$.

Como $B \in r$, então $e = -e \times 1 + b \iff b = 2e$. Assim, $t: y = -ex + 2e$.

4.3. $f'(0) = e^0(1 - 2 \times 0) = 1$ e $A(0, 3)$, então $t: y = x + 3$. $x + 3 = -ex + 2e \iff x(1 + e) = 2e - 3 \iff x = \frac{2e-3}{1+e}$

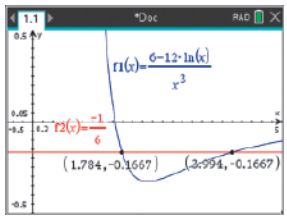
Logo, as retas r e t intersetam-se no ponto de abcissa $\frac{2e-3}{1+e}$.

5.1. $f'(x) = \frac{6 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times 6 \ln x}{x^4} = \frac{6x - 12x \ln x}{x^4} = \frac{6 - 12 \ln x}{x^3}$

5.2. $f(x) = 0 \iff \frac{6 \ln x}{x^2} = 0 \wedge x > 0 \iff \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \wedge x > 0 \iff x = 1$, então $A(1, 0)$.

$f'(1) = \frac{6 - 12 \ln 1}{1} = 6$, então $t: y = 6x + b$. Como as duas retas são perpendiculares a t, o seu declive é $-\frac{1}{6}$.

Então, as abcissas de P e de Q são dadas por $f'(x) = -\frac{1}{6} \iff \frac{6 - 12 \ln x}{x^3} = -\frac{1}{6}$.



Recorrendo à calculadora, $x \approx 1{,}78 \vee x \approx 3{,}99$. Como $f(1{,}78) \approx 1{,}09$ e $f(3{,}99) \approx 0{,}52$, conclui-se que as coordenadas dos pontos, com arredondamento às centésimas, são $P(1{,}78\,;\ 1{,}09)$ e $Q(3{,}99\,;\ 0{,}52)$.

Ficha 2

Página 74

1.1. $y_A = -1 + 2 = 1$. Então, A tem de coordenadas $(-1, 1)$.

1.2. $(g \circ f)'(-1) = g'(f(-1)) \times f'(-1) = e^1 \times 1 = e$

2. Opção **(D)**

$$(f \circ g)'(4) = \frac{1}{5} \iff f'(g(4)) \times \underbrace{g'(4)}_{g'(x)=2x} = \frac{1}{5} \iff f'(4^2+4) \times 2 \times 4 = \frac{1}{5} \iff f'(20) = \frac{1}{40}$$

Página 75

3.1. $f'(x) = 2^{x^3-2x}(3x^2-2)\ln 2$

3.2. $f'(x) = \dfrac{5-2x}{5x-x^2}$

3.3. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+1} \times \ln 2} = \dfrac{1}{2(x+1)\ln 2}$

3.4. $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x^2-3x)^{-\frac{1}{2}} \times (2x-3) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$

3.5. $f'(x) = \dfrac{4xe^{2x^2-1} \times x - e^{2x^2-1}}{x^2} = \dfrac{e^{2x^2-1}(4x^2-1)}{x^2}$

3.6. $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{2x}e^{2x} - \ln(2x) \times 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \dfrac{1}{xe^{2x}} - \dfrac{2\ln(2x)}{e^{2x}}$

3.7. $f'(x) = \dfrac{-\frac{3}{(x+2)^2}}{\frac{3\ln 10}{x+2}} = -\dfrac{1}{(x+2)\ln 10}$

3.8. $f'(x) = 2^{\frac{1}{x}} + x\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)2^{\frac{1}{x}}\ln 2 = 2^{\frac{1}{x}}\left(1 - \dfrac{\ln 2}{x}\right)$

3.9. $f'(x) = \pi\cos\left(\dfrac{x}{\pi}\right) - \pi x \times \dfrac{1}{\pi}\sin\left(\dfrac{x}{\pi}\right) = \pi\cos\left(\dfrac{x}{\pi}\right) - x\sin\left(\dfrac{x}{\pi}\right)$

3.10. $f'(x) = \dfrac{4}{\cos^2(4x)}$

3.11. $f'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

3.12. $f'(x) = \sin(2x) + 2x\cos(2x)$

4.1. $f'(x) = \dfrac{1}{2}(4x+5)^{-\frac{1}{2}} \times 4 = \dfrac{2}{\sqrt{4x+5}}$; $f'(-1) = \dfrac{2}{\sqrt{-4+5}} = 2$

4.2. $f'(x) = \ln(2x-1) + \dfrac{2x}{2x-1}$; $f'(1) = \ln 1 + \dfrac{2}{1} = 2$

4.3. $f'(x) = \dfrac{4e^{2x} - 2(4x+3)e^{2x}}{(e^{2x})^2} = -\dfrac{8x+2}{e^{2x}}$; $f'(0) = -\dfrac{2}{e^0} = -2$

4.4. $f'(x) = 2^{x^3+1} + x3x^2 2^{x^3+1}\ln 2 = 2^{x^3+1}(1+3x^3\ln 2)$; $f'(0) = 2(1+0) = 2$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

4.5. $f'(x)=\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$; $f'(2)=\frac{\pi}{4}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

4.6. $f'(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$; $f'(\pi)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$

5. Opção **(B)**

$2\log_3\left(x^2+2\right)=2 \iff \log_3\left(x^2+2\right)=1 \iff x^2+2=3 \underset{x<0}{\iff} x=-1$ $g'(x)=\frac{4x}{\left(x^2+2\right)\ln 3}$

Assim, $g'(-1)=\frac{-4}{3\ln 3}=-\frac{4}{\ln 3^3}=-\frac{4}{\ln 27}$.

Página 76

6.1. $f'(0)=m_t=\frac{3-0}{0-(-3)}=1$

6.2. O ponto A de coordenadas $(0,3)$, pertence à reta t, então $t: y=x+3$.

6.3. $g(-5)=\sqrt{25-9}=4$, então o ponto de tangência da reta r com o gráfico de g tem de coordenadas $(-5,4)$.

$g'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-9\right)^{-\frac{1}{2}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$; $m_r=g'(-5)=\frac{-5}{\sqrt{(-5)^2-9}}=-\frac{5}{4}$, então $4=-5\times\left(-\frac{5}{4}\right)+b \iff b=-\frac{9}{4}$

$r: y=-\frac{5}{4}x-\frac{9}{4}$. Assim: $\begin{cases}y=x+3\\ y=-\frac{5}{4}x-\frac{9}{4}\end{cases} \iff \begin{cases}y=x+3\\ 4(x+3)=-5x-9\end{cases} \iff \begin{cases}y=x+3\\ 9x=-21\end{cases} \iff \begin{cases}y=\frac{2}{3}\\ x=-\frac{7}{3}\end{cases}$

As retas r e t intersetam-se no ponto de coordenadas $\left(-\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)$.

7.1. $g(x)=0 \iff \ln(x+3)=0 \iff x+3=1 \iff x=-2$, logo $B(-2,0)$

$g'(x)=\frac{1}{x+3}$ e $m_r=g'(-2)=\frac{1}{-2+3}=1$

7.2. $f'(x)=e^{x-1}$

Seja a a abcissa do ponto A, sabe-se que $f'(a)=m_r \iff e^{a-1}=1 \iff a-1=0 \iff a=1$. Logo, $A(1,3)$.

8. $f'(x)=\frac{2ax}{ax^2}=\frac{2}{x}$ e $m=f'\left(e^2\right)=\frac{2}{e^2}$

$f\left(e^2\right)=\frac{2}{e^2}\times e^2+3 \iff \ln\left(ae^4\right)=2+3 \iff ae^4=e^5 \iff a=e$. Assim, $m=\frac{2}{e^2}$ e $a=e$.

Página 77

9. $f'(x)=-3\cos\left(\frac{x^2}{4}\right)+(-3x)\times\left(\frac{2x}{4}\right)\times\left(-\sin\left(\frac{x^2}{4}\right)\right)=-3\cos\left(\frac{x^2}{4}\right)+\frac{3}{2}x^2\sin\left(\frac{x^2}{4}\right)$ $m_t=f'(0)=-3\times 1+0=-3$.

$f(0)=2$

$t: y=-3x+b$ e passa no ponto de coordenadas $(0,2)$.

Então, $t: y=-3x+2$.

t interseta o eixo Ox no ponto P, de coordenadas $\left(\frac{2}{3},0\right)$, e o eixo Oy no ponto Q, de coordenadas $(0,2)$.

Assim, $A_{[OPQ]}=\frac{2\times\frac{2}{3}}{2}=\frac{2}{3}$.

10. Opção **(D)**

$g'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$ $h(1)=f(1)\times g(1)=-4\times e^0=-4$

$h'(1)=f'(1)\times g(1)+f(1)\times g'(1)=-4\times e^0+(-4)\times e^0=-8$

O declive da reta tangente é -8, e o ponto de coordenadas $(1,-4)$ pertence à reta, então: $-4=-8\times 1+b \iff b=4$

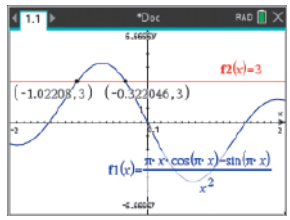
$y=-8x+4$

11. Opção **(C)**

$f'(x) = -e^{x}$ e $g'(x) = -\frac{1}{x}$

$f'(x_A) = g'(x_B) \iff -e^{x_A} = -\frac{1}{x_B} \iff e^{x_A} = \frac{1}{x_B} \iff x_A = \ln\left(\frac{1}{x_B}\right) \iff x_A = -\ln(x_B)$

12. $f'(x) = 3 \iff \frac{\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x^2} = 3$, ou seja, $x \approx -0{,}322$



Ficha 3

Página 78

1.1. $g'(x) = \frac{1}{2}(4-x)^{-\frac{1}{2}} \times (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$;

$m_t = g'(3) = -\frac{1}{2\sqrt{4-3}} = -\frac{1}{2}$

Como $g(3) = \sqrt{4-3} = 1$, então $D(3, 1)$.

$D \in t$, então $1 = -\frac{1}{2} \times 3 + b \iff b = \frac{5}{2}$, concluindo-se que $t: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ e $A\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

1.2. $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$

$f'(x) = 0 \iff e^{-x}(2x - x^2) = 0 \iff e^{-x} = 0 \vee 2x - x^2 = 0 \iff x = 0 \vee x = 2$

$f(0) = 4$ é mínimo; $f(2) = 4e^{-2} + 4$ é máximo (relativo).

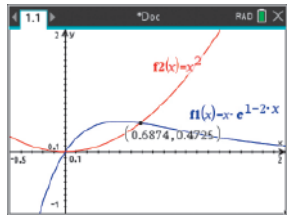
x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
f	↘	4	↗	$4e^{-2}+4$	↘

1.3. $f(0) = 4$, então $C(0, 4)$ e $f(2) = 4e^{-2} + 4$, então $B(2, 4e^{-2} + 4)$. Então, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times x_B}{2} = \frac{1{,}5 \times 2}{2} = \frac{3}{2}$.

Página 79

2.1. $g(x) = x^2 \iff xe^{1-2x} = x^2$

$x \approx 0{,}69$



2.2. $g'(x) = e^{1-2x} + x \times (-2) \times e^{1-2x} = e^{1-2x}(1 - 2x)$

2.3. $g'(x) = 0 \iff (1-2x)e^{1-2x} = 0 \iff 1 - 2x = 0 \vee e^{1-2x} = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2}$, ou seja, para $x = \frac{1}{2}$, a medida da área do retângulo é máxima e igual a $\frac{1}{2}$.

As coordendadas do ponto P são $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−
g	↗	$\frac{1}{2}$	↘

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

3.1. $d(x) = f(x) - g(x) = \ln(5-x) + 3 - \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) = 3 + \ln\left((5-x)(x-1)\right) = 3 + \ln\left(-x^2 + 6x - 5\right)$

3.2. $d'(x) = \frac{-2x+6}{-x^2+6x-5}$

$d'(x) = 0 \iff \frac{-2x+6}{-x^2+6x-5} = 0 \wedge 1 < x < 5 \iff -2x+6 = 0 \wedge -x^2+6x-5 \neq 0 \wedge 1 < x < 5 \iff x = 3$

$\overline{AB}$ é máxima para $x = 3$, ou seja, $d(3) = 3 + \ln 4$.

A distância máxima entre A e B é $3 + \ln 4$.

x	1,1		3		4,9
$d'(x)$		+	0	–	
d		↗	$d(3)$	↘	

Página 80

4.1. $f(0) = 1 + e + \frac{1}{e} \approx 4{,}1$

A distância do ponto O ao ponto A é, aproximadamente, 4,1 m.

4.2. $f'(x) = -0{,}12e^{1-0{,}12x} + 0{,}12e^{0{,}12x-1} = 0{,}12\left(-e^{1-0{,}12x} + e^{0{,}12x-1}\right)$

$0{,}12\left(-e^{1-012x} + e^{0{,}12x-1}\right) = 0 \iff e^{0{,}12x-1} = e^{1-0{,}12x} \iff 0{,}12x - 1 = 1 - 0{,}12x \iff 0{,}24x = 2 \iff x = \frac{25}{3}$

$\overline{OP} \approx 8{,}33$ m

x	0		8,(3)		20
$f'(x)$		–	0	+	
f		↘	$f(8{,}(3))$	↗	

5.1. 15 min = 0,25 h

$T(9{,}25) = 10 + 2 \times 9{,}25e^{-0{,}075 \times 9{,}25} \approx 19{,}2$, ou seja, 19,2 °C.

5.2. $T'(t) = 2e^{-0{,}075t} + 2t \times (-0{,}075)\, e^{-0{,}075t} = e^{-0{,}075t}(2 - 0{,}15t)$

$e^{-0{,}075t}(2 - 0{,}15t) = 0 \iff e^{-0{,}075t} = 0 \vee 2 - 0{,}15t = 0 \iff t = 13{,}(3)$, ou seja, $t \approx 13{,}33$.

Como $0{,}33 \times 60 \approx 20$, então a temperatura atingiu o valor máximo às 13 horas e 20 minutos.

t	0		13,(3)		24
$T'(x)$		+	0	–	
T		↗	$T(13{,}(3))$	↘	

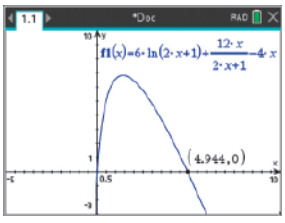
Página 81

6.1. $g(a) = \frac{2a \times f(a)}{2} = \frac{2a \times \left(6\ln(2a+1) - 2a\right)}{2} = 6a\ln(2a+1) - 2a^2$

6.2. $g'(a) = 6\ln(2a+1) + 6a \times \frac{2}{2a+1} - 4a = 6\ln(2a+1) + \frac{12a}{2a+1} - 4a$

$6\ln(2a+1) + \frac{12a}{2a+1} - 4a = 0$; $a \approx 4{,}94$; $g(4{,}94) \approx 22$

A medida da área máxima é 22.



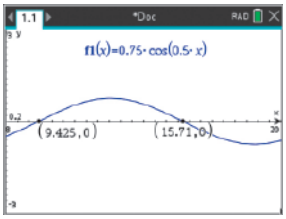
a	0		4,94		8
$g'(x)$		+	0	–	
g		↗	$g(4{,}94)$	↘	

7.1. $f'(x) = 1{,}5 \times 0{,}5\cos(0{,}5x) = 0{,}75\cos(0{,}5x)$

$0{,}75\cos(0{,}5x) = 0$ e $8 < x < 20$, as soluções são $x_1 \approx 9{,}425$ e $x_2 \approx 15{,}71$.

$x_2 \approx 15{,}71$

Como $0{,}71 \times 60 \approx 43$ min, então o cais atinge a profundidade máxima às 15:43.



x	8		9,425		15,71		20
$f'(x)$		–	0	+	0	–	
f		↘	$f(9{,}425)$	↗	$f(15{,}71)$	↘	

7.2. $f(9{,}425) \approx 14{,}5$ representa a profundidade mínima e $f(15{,}71) \approx 17{,}5$ representa a profundidade máxima.

Então, a profundidade do cais varia entre 14,5 m e 17,5 m.

Ficha 4

Página 82

1.1. $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x+1}$

$f''(x) = 2 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$D_{f''} =]-1, +\infty[$

1.2. $f'(x) = x^2 - 2x$

$f''(x) = 2x - 2$

$D_{f''} = \mathbb{R}$

1.3. $f'(x) = e^x(x-1)^2 + 2e^x(x-1) = e^x(x^2 - 2x + 1 + 2x - 2) = e^x(x^2 - 1)$

$f''(x) = e^x(x^2 - 1) + 2xe^x = e^x(x^2 + 2x - 1)$

$D_{f''} = \mathbb{R}$

1.4. $f'(x) = \log x + \dfrac{x}{x \ln 10} = \log x + \dfrac{1}{\ln 10}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$

$D_{f''} = \mathbb{R}^+$

1.5. $f'(x) = \sin(2x) + 2x\cos(2x)$

$f''(x) = 2\cos(2x) + 2\cos(2x) - 4x\sin(2x) = 4\cos(2x) - 4x\sin(2x)$

$D_{f''} = \mathbb{R}$

1.6. $f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x\ln x + x$

$f''(x) = 2\ln x + 2x \times \dfrac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 3$

$D_{f''} = \mathbb{R}^+$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

Página 83

2. Opção **(D)**

$f''(-3)>0$; $f''(0)<0$; $f''(4)>0$; $f''(0)\times f''(4)<0$

3. Opção **(B)**

$f'(x)=3ax^2+2bx$; $f''(x)=6ax+2b$

O gráfico de f'' é uma reta com declive $6a$ e ordenada na origem $2b$.

Por observação do gráfico de f'' : $6a<0 \iff a<0$ e $2b>0 \iff b>0$

4.1. $f'(x)=x^3-3x^2$ e $f'(x)=0 \iff x^3-3x^2=0 \iff x^2(x-3)=0 \iff x=0 \vee x=3$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

Monotonia: f é decrescente em $]-\infty, 3[$ e é crescente em $]3, +\infty[$.

$f(3)=\frac{81}{4}-27-2=-\frac{35}{4}$ é mínimo de f, logo as coordenadas do ponto A são $\left(3, -\frac{35}{4}\right)$.

4.2. $f''(x)=3x^2-6x$ e $f''(x)=0 \iff 3x^2-6x=0 \iff x=0 \vee x=2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$f(0)$	$\cap$	$f(2)$	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$ e em $]2, +\infty[$ e a concavidade voltada para baixo em $]0, 2[$.

Os pontos de inflexão do gráfico de f são os pontos B e C de coordenadas $(2, -6)$ e $(0, -2)$, respetivamente.

Página 84

5.1. $f'(x)=\dfrac{\frac{4}{x}\times x-1-4\ln x}{x^2}=\dfrac{3-4\ln x}{x^2}$

$f''(x)=\dfrac{-\frac{4}{x}\times x^2-2x(3-4\ln x)}{x^4}=\dfrac{-10+8\ln x}{x^3}$

x	0		$e^{\frac{5}{4}}$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
f		$\cap$	$f\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$	$\cup$

$\dfrac{-10+8\ln x}{x^3}=0 \wedge x>0 \iff -10+8\ln x=0 \wedge x>0 \iff x=e^{\frac{5}{4}}$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0, e^{\frac{5}{4}}\right[$ e a concavidade voltada para cima em $\left]e^{\frac{5}{4}}, +\infty\right[$.

O gráfico de f tem um ponto de inflexão de abcissa $x=e^{\frac{5}{4}}$.

5.2. $f'(x)=2e^{\frac{1}{2}x}+xe^{\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}(2+x)$ $\qquad f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(2+x)+e^{\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}\left(2+\frac{x}{2}\right)$

$e^{\frac{1}{2}x}\left(2+\frac{x}{2}\right)=0 \iff e^{\frac{1}{2}x}=0 \vee 2+\frac{x}{2}=0 \iff x=-4$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$	$f(-4)$	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -4[$ e a concavidade voltada para cima em $]-4, +\infty[$.

O gráfico de f tem um ponto de inflexão de abcissa $x=-4$.

5.3. $f'(x)=\ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}$

$f''(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{4x\left(x^2+1\right)-2x^2(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{4x^3+4x-4x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x^3+6x}{\left(x^2+1\right)^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	–	0	+
f	$\cap$	$f(0)$	$\cup$

$\dfrac{2x^3+6x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \iff 2x^3+6x=0 \wedge \left(x^2+1\right)^2\neq 0 \iff x=0 \vee x^2=-3 \iff x=0$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e a concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$.

O gráfico de f tem um ponto de inflexão de abcissa $x=0$.

6.

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f''(x)$	+	+	+	0	–	–	–
$f'(x)$	–	0	+	+	+	0	–
$f'(x)\times f''(x)$	–	0	+	0	–	0	+

$x\in]-\infty, 1[\cup]2, 3[$

Página 85

7.1.

x	$-\infty$	0		2		6	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	+	0	–	0	+
f	$\cup$		$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

A afirmação é falsa, uma vez que, em $x=0$, o sinal da função f'' não varia, não existindo, assim, um ponto de inflexão.

7.2.

x	$-\infty$	0		2		6	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	+	0	–	0	+
f'	$\nearrow$		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A afirmação é verdadeira, uma vez que, no intervalo $]-\infty, 2[$, como a função f'' é positiva, então a função f' é crescente, logo $f'(-1)<f'(1)$, ou seja, $m_{t_1}<m_{t_2}$.

8.1. $f'(x)=8xe^{-x}-4\left(x^2+1\right)e^{-x}$

$f''(x)=8e^{-x}-8xe^{-x}-8xe^{-x}+4\left(x^2+1\right)e^{-x}=e^{-x}\left(12-16x+4x^2\right)$

$e^{-x}\left(12-16x+4x^2\right)=0 \iff e^{-x}=0 \vee 12-16x+4x^2=0 \iff x=1 \vee x=3$

$f'(1)=8e^{-1}-4\times 2e^{-1}=0$

Ou seja, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto A é 0.

8.2. $f(3)=4\times 10e^{-3}=40e^{-3}$, ou seja, B tem coordenadas $\left(3, 40e^{-3}\right)$.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
f	$\cup$	$f(1)$	$\cap$	$f(3)$	$\cup$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

9. $f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-4x(x^2+1)^2-2(-2x^2+2)(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}=\dfrac{(x^2+1)(-4x^3-4x+8x^3-8x)}{(x^2+1)^4}=\dfrac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$

$\dfrac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}=0 \iff 4x^3-12x=0 \wedge (x^2+1)^3\neq 0 \iff x=0 \vee x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}$

$f(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $f(-\sqrt{3})=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, então, $P\left(-\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $Q\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

A medida da área do retângulo é: $2\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0.		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	–	0	+	0	–	0	+
f	$\cap$	$f(-\sqrt{3})$	$\cup$	$f(0)$	$\cap$	$f(\sqrt{3})$	$\cup$

Ficha 5

Página 86

1. $f(1)=\log_2(x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(\log_2(x+1))=1$ e $\lim\limits_{x\to 1^-}(2^x)=2$ Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, f é descontínua em $x=1$.

2.1. $f_A(35)=0{,}3\times 35-2{,}25=8{,}25$ e $f_B(35)=0{,}25\times 35=8{,}75$. Empresa A

2.2. Os ramos de ambas as funções são definidos por funções polinomiais, sendo contínuas em $\mathbb{R}$, logo são contínuas em qualquer intervalo aberto.

Na função f_A, em $x=15$ há mudança de ramo:

$f_A(15)=0{,}15\times 15=2{,}25$, $\lim\limits_{x\to 15^-}(0{,}15x)=2{,}25$ e $\lim\limits_{x\to 15^+}(0{,}3x-2{,}25)=2{,}25$

f_A é contínua em $x=15$.

Como $f_B(30)=0$, $\lim\limits_{x\to 30^-} f_B(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to 30^+}(0{,}25x)=7{,}5$. f_B é descontínua em $x=30$.

Logo, f_A é contínua e f_B é descontínua.

3. Opção **(C)**

$f(2)=2^2-2=2$ $\lim\limits_{x\to 2^-}(2^{x-k})=2 \iff 2^{2-k}=2 \iff 2-k=1 \iff k=1$

Página 87

4.1. Afirmação verdadeira

Funções polinomiais e funções exponenciais são contínuas em $\mathbb{R}$, assim como o produto e a soma entre elas.

4.2. Afirmação falsa

Basta observar que $1\notin D_{\frac{f}{g}}$.

5.1. $f(2)=2-4=-2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-2$ e $\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^2\log_3(x+1))=-4$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, f é descontínua em $x=2$.

5.2. Se $x\in]-1, 2[$, $f(x)=-x^2\log_3(x+1)$.

A função f, no intervalo $]-1, 2[$, é contínua por ser o produto de funções contínuas nesse intervalo.

6.1. Se $25\,000 \leqslant x \leqslant 29\,397$, $f(x) = 0{,}177\ 05 \times 23\,089 + 0{,}311 \times (x - 23089) = 0{,}311x - 3092{,}77$

Se $29\,397 < x \leqslant 30\,000$, $f(x) = 0{,}20\ 579 \times 29\,397 + 0{,}349 \times (x - 29\,397) = 0{,}349x - 4209{,}94$

6.2. $f(30\,000) - f(25\,000) = 0{,}349 \times 30\,000 - 4209{,}94 - (0{,}311 \times 25\,000 - 3092{,}77) = 1577{,}83$ e representa o valor a mais do IRS anual que o António terá de pagar se o seu vencimento coletável passar de 25 000 € para 30 000 €.

6.3. Os ramos da função são definidos por funções polinomiais, sendo contínuas em $\mathbb{R}$, logo são contínuas em qualquer intervalo aberto.

Em $x = 29\,397$, há mudança de ramo: $\lim\limits_{x \to 29\,397^-} f(x) = 6049{,}697$ e $\lim\limits_{x \to 29\,397^+} f(x) = 6049{,}613$, logo a função é descontínua em $x = 29\,397$.

Assim, f não é contínua.

Ficha 6

Página 88

1.1. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 4) = (-2)^2 - 4 = 0$

1.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2x) = 1 - 2 \times (+\infty) = -\infty$

1.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1)^2 = (-\infty - 1)^2 = +\infty$

1.4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2 - 4} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

1.5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1 - 2x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

1.6. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

1.7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - 2x}{(x - 1)^2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

1.8. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$

1.9. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{1 - 2x} = \dfrac{0}{-3} = 0$

1.10. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

2.1. **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Página 89

2.2. **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{x(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x} = \dfrac{2}{1} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{x(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

3.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2x - x^2}{x^3 - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x} = \dfrac{-1}{+\infty} = 0$

3.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + 1}{2x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{2x^2} = \dfrac{3}{2}$

3.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 + 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^2 = +\infty$

3.4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x + x^3}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(2 - x)(2 + x)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x(x - 2)(2 + x)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (-x(2 + x)) = -2 \times 4 = -8$

3.5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x}{5x^2 - x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

3.6. $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x + 1}{x^2 - 1}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x - 1} = -\dfrac{1}{2}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

4.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(2x-1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$

Então, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x-1}=+\infty$.

4.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+1}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^2+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$

Então, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+1}=0$.

4.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)^2-e^x}{x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{((x+1)^2-e^x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+2-e^x}{1}=1$

Então, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)^2-e^x}{x}=1$.

4.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\tan x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1}=1$

Então, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$.

4.5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{3^x-3}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)'}{(3^x-3)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{3^x\ln 3}=\dfrac{1}{3\ln 3}$

Então, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{3^x-3}=\dfrac{1}{3\ln 3}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

Então, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3}=+\infty$.

Página 90

5. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin(2x)}{x}=\dfrac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(\sin(2x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2\cos(2x)}{1}=2$.

Então, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin(2x)}{x}=2$.

Como f é contínua, então $\lim\limits_{x\to0^+}(ax+b)=2 \iff b=2$.

$f(4)=0 \iff 4a+2=0 \iff a=-\dfrac{1}{2}$. Assim, $f(10)=-\dfrac{1}{2}\times10+2=-3$.

6. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{e^{2x}-1-4x}{x}\right)=\dfrac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(e^{2x}-4x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2e^{2x}-4}{1}=-2$. Então, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{2x}-1-4x}{x}=-2$.

$\lim\limits_{x\to0^-}(kx+2)=-2 \iff 2=-2$.

Afirmação falsa. Qualquer que seja o valor de k, a função é descontínua.

7.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{e^x-1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}$

7.2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{x}\sin x+\cos x\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(2\times\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\right)=2\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\cos x=2\times1+1=3$

7.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\ln(x+1)}{x^3}=1\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

7.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{-3}e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$

7.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x x^{-2}}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^x}{x^2}=+\infty$

7.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin x}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{4}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=0-\dfrac{1}{4}\times1=-\dfrac{1}{4}$

8. Opção **(A)**

$k=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-3e^x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-3(e^x-1)}{x}=-3\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=-3\times1=-3$

ESPMA12CAD © Porto Editora

9.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}=\dfrac{\infty}{\infty}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2)'}{(\ln(x+1))'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x(x+1)}{1}=+\infty$.

Então, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}=+\infty$.

9.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4e^x-4}{3\ln(x+1)}=\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{4}{3}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{1}=\dfrac{4}{3}$

9.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{xe^x}=\dfrac{\infty}{\infty}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(x+1))'}{(xe^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x+1)(e^x+xe^x)}=0$.

Então, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{xe^x}=0$.

Página 91

10. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cos x-1}{x}=\dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(\cos x-1)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\sin x}{1}=0$.

Então, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=\dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(e^{-x}-1)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-e^{-x}}{1}=-1$.

Então, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-1$.

Como $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, conclui-se que f é descontínua em $x=0$, qualquer que seja o valor de k.

11.1. $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-(2+\ln x)}{x^2}=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}=-\dfrac{1+\ln x}{x^2}$

11.2. $f'(x)=0\iff-\dfrac{1+\ln x}{x^2}=0\wedge x>0\iff-(1+\ln x)=0\wedge x>0\iff\ln x=-1\wedge x>0\iff x=e^{-1}$

x	0		e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–
f		↗	e	↘

Como $f(e^{-1})=\dfrac{2+\ln e^{-1}}{e^{-1}}=e$, então M tem coordenadas (e^{-1}, e).

11.3. **a)** $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2+\ln x}{x}=\dfrac{-\infty}{0^+}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\ln x}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2+\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Então, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\ln x}{x}=0$.

12. $f(2)=2^{-2}\times2^2=2^0=1$; $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-2}{e^{x-2}-1}=\dfrac{0}{0}$; $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x-2)'}{(e^{x-2}-1)'}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{e^{x-2}}=1$. Então, $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-2}{e^{x-2}-1}=1$.

$\lim\limits_{x\to2^+}(x^{-2}2^x)=2^0=1$

Como $f(2)=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$, conclui-se que a função f é contínua em $x=2$.

13. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{\ln x-\ln k}{x^2-k^2}=\dfrac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{(\ln x-\ln k)'}{(x^2-k^2)'}=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{1}{2k^2}$. Então, $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{\ln x-\ln k}{x^2-k^2}=\dfrac{1}{2k^2}$.

$\dfrac{1}{2k^2}=2\wedge k>0\iff4k^2=1\wedge k>0\iff k=\dfrac{1}{2}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

Ficha 7

Página 92

1.1. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

1.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

1.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

1.4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = -3$

1.5. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

1.6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x + 3\right) = 0$

2.1. $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{3x}{x+2} = \dfrac{-6}{0^-} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3}$; $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

As retas definidas pelas equações $x = -2$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico de f.

2.2. $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{x^2+2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ e $b = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{x+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{1+\frac{2}{x}} = \dfrac{3}{1+0} = 3$,

então $y = 3$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f.

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2-x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ e $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$,

então $y = x + 1$ é a equação da assíntota não vertical ao gráfico de f.

Página 93

3.1. $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-2}{x^3+2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3-2}{x^2+2} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2-2x}{x^2+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{x} = \dfrac{-2}{+\infty} = 0$

Assíntota oblíqua ao gráfico de f: reta de equação $y = x$.

3.2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x + 2\ln x\right) = 0 + 2 \times (-\infty) = -\infty$

Assíntota vertical ao gráfico de f: a reta de equação $x = 0$.

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x} = 1 + 0 = 1$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + 2\ln x - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\ln x\right) = +\infty$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

3.3. $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{3e^x}{x+3} = \dfrac{3e^{-3}}{0^-} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{3e^x}{x+3} = \dfrac{3e^{-3}}{0^+} = +\infty$

Então, $x = -3$ é a equação da assíntota vertical ao gráfico de f.

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3e^x}{x^2+3x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3e^x}{2x+3} = \dfrac{\infty}{\infty}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3e^x}{2} = \dfrac{+\infty}{2} = +\infty$. Então, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3e^x}{x^2+3x} = +\infty$.

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3e^x}{x^2+3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{3e^x}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3e^x}{x+3} = \dfrac{3e^{-\infty}}{-\infty} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

Então, $y = 0$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f.

3.4. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3+1}{x^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x + e^{2-x}\right) = e^2$

Então, $x = 0$ é a equação da assíntota vertical ao gráfico de f.

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+1}{x^3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{2-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2-x}}{x}=1+\dfrac{0}{+\infty}=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\mathrm{e}^{2-x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2-x}=0$

Então, $y=x$ é a equação da assíntota não vertical ao gráfico de f, quando $x\longrightarrow-\infty$ e $x\longrightarrow+\infty$.

4.1. $m=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2-1{,}5\mathrm{e}^{-t}}{t}=\dfrac{2-0}{+\infty}=0$ e $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-1{,}5\mathrm{e}^{-t}\right)=2$.

Então, o gráfico de f_1 admite uma assíntota horizontal de equação $y=2$. À medida que o tempo passa, a medida do raio de nódoa tende para 2 cm.

$m=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{3{,}5-3\mathrm{e}^{-0{,}2t}}{t}=\dfrac{3{,}5-0}{+\infty}=0$ e $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3{,}5-3\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)=3{,}5$.

Então, o gráfico de f_2 admite uma assíntota horizontal de equação $y=3{,}5$. À medida que o tempo passa, a medida do raio de nódoa tende para 3,5 cm.

4.2. $f_1'(t)=\left(2-1{,}5\mathrm{e}^{-t}\right)'=1{,}5\mathrm{e}^{-t}$, $f_1'(t)>0$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$. A função f_1 é crescente.

$f_2'(t)=\left(3{,}5-3\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)'=0{,}6\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, $f_2'(t)>0$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$. A função f_2 é crescente.

Ambas as funções são crescentes. A soma dos raios dos círculos que representam as nódoas tendem para 2 cm + 3,5 cm = 5,5 cm, que é inferior à distância entre os centros dos círculos que é igual a 7 cm.

Ficha 8

Página 94

1.1. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2-2x\neq0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:x(x-2)\neq0\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{0,2\right\}$

1.2. A função não é contínua em $x=2$, uma vez que $2\notin D_f$.

1.3. $\lim\limits_{x\to2^-}\left(1+\dfrac{2x-4}{x^2-2x}\right)=1+\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-4}{x^2-2x}=1+\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2(x-2)}{x(x-2)}=1+\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2}{x}=1+\dfrac{2}{2}=2$

$\lim\limits_{x\to2^+}\left(1+\dfrac{2x-4}{x^2-2x}\right)=\ldots=1+\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x-4}{x^2-2x}=2$

$\lim\limits_{x\to0^-}\left(1+\dfrac{2x-4}{x^2-2x}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(1+\dfrac{2x-4}{x(x-2)}\right)=1+\dfrac{-4}{0^+}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{2x-4}{x^2-2x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{2x-4}{x(x-2)}\right)=1+\dfrac{-4}{0^-}=+\infty$,
então $x=0$ é a equação da assíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2x-4}{x^2-2x}\right)=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=1+0=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=1$

A reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal quando $x\longrightarrow+\infty$ e quando $x\longrightarrow-\infty$.

2.1. $f(x)=0\iff(x-1)\mathrm{e}^{-x}=0\iff x-1=0\vee\underbrace{\mathrm{e}^{-x}=0}_{\text{impossível}}\iff x=1$

2.2. $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}-(x-1)\mathrm{e}^{-x}=(2-x)\mathrm{e}^{-x}$

$f'(x)=0\iff2-x=0\vee\mathrm{e}^{-x}=0\iff x=2$

f é crescente em $]-\infty,2[$ e decrescente em $]2,+\infty[$, admitindo um máximo em $x=2$. O valor máximo é $f(2)=\mathrm{e}^{-2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–
f	↗	e^{-2}	↘

ESPMA12CAD © Porto Editora

2.3. $f''(x) = -e^{-x} - (2-x)e^{-x} = (x-3)e^{-x}$

$f''(x) = 0 \iff x-3=0 \vee e^{-x}=0 \iff x=3$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 3[$ e a concavidade voltada para cima em $]3, +\infty[$, existindo um ponto de inflexão do gráfico de f de coordenadas $(3, f(3)) = (3, 2e^{-3})$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$	$2e^{-3}$	$\cup$

ESPMA12CAD © Porto Editora

Página 95

3.1. **a)** $f(x)=0 \iff \ln(x^2+1)=0 \iff x^2+1=e^0 \iff x^2=0 \iff x=0$

b) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. $f'(x)=0 \iff \dfrac{2x}{x^2+1}=0 \iff 2x=0 \wedge x^2+1\neq 0 \iff x=0$

f é decrescente em $]-\infty, 0[$ e crescente em $]0, +\infty[$, admitindo um mínimo em $x=0$, cujo valor é $f(0)=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

c) $f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=0 \iff \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=0 \iff -2x^2+2=0 \iff x=-1 \vee x=1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	$\ln 2$	$\cup$	$\ln 2$	$\cap$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ e a concavidade voltada para cima em $]-1, 1[$. O gráfico de f tem dois pontos de inflexão de coordenadas $(-1, \ln 2)$ e $(1, \ln 2)$.

3.2. O domínio da função f é $\mathbb{R}$ e a função é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, não existem assíntotas verticais ao gráfico.

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(x^2+1))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$. Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}=0$.

(O mesmo acontece quando $x\longrightarrow-\infty$). $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x^2+1)-0)=+\infty$ (o mesmo acontece quando $x\longrightarrow-\infty$).

Conclui-se que não existem assíntotas ao gráfico de f.

4.1. f', primeira derivada de f, admite um mínimo para x, abcissa de P. Ou seja, $f''(x)=0$.

$f''(x)=0 \iff \dfrac{20\ln x-30}{x^3}=0 \iff 20\ln x-30=0 \wedge x>0 \iff \ln x=\dfrac{30}{20} \wedge x>0 \iff x=e^{\frac{3}{2}} \iff x=\sqrt{e^3}$

4.2. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, \sqrt{e^3}[$ e a concavidade voltada para cima em $]\sqrt{e^3}, +\infty[$, sendo o ponto de abcissa $\sqrt{e^3}$ um ponto de inflexão (o ponto P).

x	0		$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
f		$\cap$	$f(\sqrt{e^3})$	$\cup$

5.1. Opção **(D)**

$r: y=mx+b$, com $m>0$ e $b>0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=0$

5.2. $b=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln(1+e^x)+2)=\ln 1+2=2$, então $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.

Ficha 9

Página 96

1.1. A função f é contínua em $\mathbb{R}$. Como $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, então f é contínua em $[0, 1]$.

$f(0) = -2$ e $f(1) = -\frac{1}{2}$.

Como $f(0) < -1 < f(1)$ e f é contínua em $[0, 1]$, conclui-se, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos uma solução da equação no intervalo $]0, 1[$.

1.2. Opção **(C)**

$f(1) = -\frac{1}{2}$ e $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{26}$, logo $f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ e f é contínua em $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, de onde se conclui, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, que f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]1, \frac{3}{2}\right[$.

2.1. $f(0) = \frac{1}{0-1} = -1$; $f(2) = \frac{2+2}{2} = 2$

2.2. Para $x < 1$, tem-se que $f(x) < 0$.

Para $x \geqslant 1$: $\frac{x+2}{x} = 0 \wedge x \geqslant 1 \iff x + 2 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \geqslant 1 \iff x = -2 \wedge x \geqslant 1$. A equação é impossível.

Conclui-se que f não tem zeros.

2.3. Os resultados anteriores não contrariam o Teorema de Bolzano-Cauchy, já que f não é contínua em $[0, 2]$.

A função é descontínua em $x = 1$, pois $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

Página 97

3.1. f é contínua em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, +\infty[$.

$f(-1) = (-1)^3 - 2 \times (-1) = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (1 - \ln(x+2)) = 1$

Como $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+} f(x)$, conclui-se que a função f é contínua em $x = -1$.

Assim, f é contínua em $\mathbb{R}$.

3.2. **a)** f é contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{2} + 2\right) \approx 0{,}084$ e $f(1) = 1 - \ln(1+2) \approx -0{,}099$.

Como $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$, conclui-se, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

b) f é contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{8}$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(-\frac{1}{2} + 2\right) \approx 0{,}5945$

Como $f\left(-\frac{3}{2}\right) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, conclui-se, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$.

4.1. $g(x) = \frac{x \times xe^{2-x}}{2} = \frac{x^2 e^{2-x}}{2} = \frac{x^2 \left(e^{x-2}\right)^{-1}}{2} = \frac{x^2}{2e^{x-2}}$

ESPMA12CAD © Porto Editora

ESPMA12CAD © Porto Editora

4.2. Pretende-se mostrar que a equação $g(x)=1$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]4,5[$.

g é contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $[4,5]$.

$g(4)\approx 1{,}0827$ e $g(5)\approx 0{,}6223$

Como $g(4)<1<g(5)$ e g é contínua em $[4,5]$, conclui-se, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $g(x)=1$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]4,5[$. Essa solução é a abcissa do ponto P.

Página 98

5.1. $f'(x)=-3x^2$

$f'(x)=0 \iff -3x^2=0 \iff x=0$

f é contínua em $\mathbb{R}$ e decrescente em todo o seu domínio.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	–
f	↘	$f(0)$	↘

5.2. $f(x)=x+4 \iff 2-x^3=x+4 \iff -x^3-x-2=0$.

Seja a função h definida por $h(x)=-x^3-x-2$.

A função h é contínua em $\mathbb{R}$. Como $[-2,0]\subset\mathbb{R}$, conclui-se que h é contínua em $[-2,0]$.

$h(-2)=8$ e $h(0)=-2$. Como $h(-2)\times h(0)<0$, conclui-se, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que h tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-2,0[$, ou seja, a equação $f(x)=x+4$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]-2,0[$. Como f é decrescente em todo o seu domínio (alínea **5.1.**), essa solução é única.

5.3. $f(x)=g(x) \iff 2-x^3-2x\log_2\left(\frac{x}{4}\right)=0$

Seja h a função definida por $h(x)=2-x^3-2x\log_2\left(\frac{x}{4}\right)$. h é contínua em $\mathbb{R}^+$. Como $\left[\frac{3}{2},2\right]\subset\mathbb{R}^+$, conclui-se que h é contínua em $\left[\frac{3}{2},2\right]$.

$h\left(\frac{3}{2}\right)\approx 2{,}8701$ e $h(2)=-2$. Como $h\left(\frac{3}{2}\right)\times h(2)<0$, conclui-se, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que h tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]\frac{3}{2},2\right[$, ou seja, a equação $f(x)=g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{3}{2},2\right[$. Como f é decrescente, essa solução é a abcissa do ponto P.

6.1. $x-2^x=-3 \iff x-2^x+3=0$, sendo $f(x)=x-2^x+3$.

6.2. f é contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $[2,3]$.

$f(2)=1$ e $f(3)=-2$.

Como $f(2)\times f(3)<0$, e é contínua em $[2,3]$, conclui-se, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $f(x)=0$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]2,3[$.

6.3. **a)** Opção **(D)**

Nota: $6{,}5\times 10^{-2}=0{,}065>0{,}0625$

Página 99

b)

$]a,b[$	$f(a)$	$f(b)$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$\lvert b-a\rvert$
]2,437 50 ; 2,453 13[	0,020 48	−0,022 90	−0,001 12	0,015 60

$\frac{a+b}{2}=\frac{2{,}4375+2{,}46875}{2}\approx 2{,}45313$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\approx -0{,}0229$

7. Seja $f(x)=3+2x-x^3$ e c um zero de f.

$f\left(\frac{3}{2}\right)=2{,}625$ e $f(2)=-1$. Como $f\left(\frac{3}{2}\right)\times f(2)<0$, conclui-se que $c\in\left]\frac{3}{2},\,2\right[$ e $\left|2-\frac{3}{2}\right|=0{,}5$.

$m_1=\frac{1{,}5+2}{2}=1{,}75$ e $f(1{,}75)\approx 1{,}1406$. Como $f(1{,}75)\times f(2)<0$, conclui-se que $c\in\,]1{,}75\,;\,2[$ e $|2-1{,}75|=0{,}25$.

$m_2=\frac{1{,}75+2}{2}=1{,}875$ e $f(1{,}875)\approx 1{,}582$. Como $f(1{,}875)\times f(2)<0$, conclui-se que $c\in\,]1{,}875\,;\,2[$ e $|2-1{,}875|=0{,}125$.

$c\in\,]1{,}875\,;\,2[$

8.1. Seja B o ponto do gráfico de f com a mesma abcissa de A. $f(1)=-3$, então as coordenadas do ponto B são $(1,\,-3)$.

$f'(x)=3x^2+1$ e $f'(1)=4$, então a reta tangente ao gráfico de f no ponto B tem equação: $y=4x+b$. Como B pertence a essa reta, $-3=4+b \iff b=-7$.

Então, $y=4x-7$.

A reta interseta o eixo Ox em $4x-7=0 \iff x=\frac{7}{4}$, então $x_1=\frac{7}{4}=1{,}75$.

8.2. $x_2=1{,}75-\frac{f(1{,}75)}{f'(1{,}75)}=1{,}75-\frac{2{,}109375}{10{,}1875}\approx 1{,}54$

9. Seja $f(x)=e^x-2x-3$. Pretende-se determinar um valor aproximado do zero de f que pertence ao intervalo $]1,\,2[$.

Recorrendo à tecnologia para aplicar o Método Newton-Raphson, obtém-se os valores aproximados da tabela.

x_i	1	4,17663	3,32475	2,62133	2,15244	1,955501	1,924626	1,923939	1,923939

$x\approx 1{,}9239$

ESPMA12CAD © Porto Editora