Propostas de resolução

Questões tipo exame

Tema de revisão: Números complexos

Página 2

1. Opção **(A)**

$w=|w|e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$; $w^4=|w|^4e^{i(-\pi)}$, então: $-iw^4=e^{i\frac{3\pi}{2}}\times|w|^4e^{i(-\pi)}=|w|^4e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right)}=|w|^4e^{i\frac{\pi}{2}}$, cujo afixo corresponde ao ponto A.

2. Opção **(A)**

$|z|=\sqrt{1+3}=2$

Seja θ argumento de z. Então, $\tan\theta=-\sqrt{3}$, com $\theta\in 2.^{o}\,Q$.

Assim, por exemplo, $\theta=\frac{2\pi}{3}$, pelo que $z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Sendo w o número complexo pedido, $w=2e^{i\frac{2\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}+i$.

3. $z=\frac{2-2i}{1-i}+2i^{23}=\frac{2(1-i)}{1-i}+2i^3=2-2i$. Então, $|z|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

Seja θ argumento de z. Então, $\tan\theta=\frac{-2}{2}=-1$, com $\theta\in 4.^{o}\,Q$.

Assim, por exemplo, $\theta=-\frac{\pi}{4}$. Logo, $z=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

As restantes raízes cúbicas de w são: $z_2=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ e $z_3=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

4. $w^3+w\overline{w}=1+i \iff w^3+|w|^2=1+i \iff \left(-e^{i\theta}\right)^3+1=1+i \iff -e^{i(3\theta)}=i \iff e^{i(3\theta+\pi)}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

Daqui resulta que $3\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, ou seja, $\theta=\frac{-\pi+4k\pi}{6}$, $k\in\{0,\,1,\,2\}$

Como $\theta=\left]\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right[$, basta fazer $k=2$ e tem-se $\theta=\frac{7\pi}{6}$.

Página 3

5. O ponto A é afixo do número complexo $z_A=2i$, então: $z=(z_A)^5=(2i)^5=32i^5=32i$

$i^{14}=i^2=-1$, então: $i^{14}z=-32i=32e^{i\frac{3\pi}{2}}$

6. Opção **(B)**

Seja o ponto C, de coordenadas $(x,\,y)$, o centro da circunferência circunscrita ao triângulo $[PQR]$.

$$\begin{cases}|z_C-z_R|=|z_C-z_P|\\|z_C-z_R|=|z_C-z_Q|\end{cases}\iff\begin{cases}\sqrt{x^2+(y-8)^2}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}\\\sqrt{x^2+(y-8)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-7)^2}\end{cases}\iff\begin{cases}x^2+y^2-16y+64=x^2-16x+16+y^2\\x^2+y^2-16y+64=x^2-6x+9+y^2-14y+49\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}y=x+3\\y=3x+3\end{cases}\iff\begin{cases}y=3\\x=0\end{cases}$$

Assim, $z_C=3i$.

7. Opção **(C)**

$w=|w|e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Como $|w|=|z|$ e $A\hat{O}B=\frac{2\pi}{9}$, então $z=|w|e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-2\times\frac{2\pi}{9}\right)}=|w|e^{i\frac{11\pi}{36}}$.

$$\frac{z}{w}=\frac{|w|e^{i\frac{11\pi}{36}}}{|w|e^{i\frac{3\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{11\pi}{36}-\frac{3\pi}{4}\right)}=e^{i\left(-\frac{4\pi}{9}\right)}=e^{i\frac{14\pi}{9}}$$

ESPMA11CAD © Porto Editora

ESPMA11CAD © Porto Editora

Tema de revisão: Probabilidade

Página 4

1.1. Sejam os acontecimentos:

- L : "o bombom é de chocolate de leite"
- N : "o bombom é de chocolate negro;
- R : "o bombom tem recheio"

	L	N	
R		0,3	0,5
$\overline{R}$		0,1	0,5
	0,6	0,4	1

Pretende-se calcular $P(L \cap \overline{R})$.

Sabe-se que $P(L) = 0{,}6$; $P(R) = P(\overline{R})$ e $P(R|N) = \frac{3}{4}$. Então:

$P(N) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $P(R) = P(\overline{R}) = \frac{1}{2}$; $\frac{P(R \cap N)}{P(N)} = \frac{3}{4} \iff P(R \cap N) = \frac{3}{4} \times 0{,}4 = 0{,}3$

Conclui-se que $P(\overline{R} \cap N) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$. Assim, $P(L \cap \overline{R}) = 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$, logo $P(L \cap \overline{R}) = \frac{2}{5}$.

1.2. Seja n o número total de bombons.

Como 6 são de chocolate negro, então $n - 6$ são de chocolate de leite.

$P(\text{"retirar um bombom de cada tipo"}) = 0{,}38 \iff$

$\iff \frac{2 \times 6 \times (n-6)}{n \times (n-1)} = 0{,}38 \iff \frac{2 \times 6 \times (n-6)}{n \times (n-1)} = 0{,}38 \iff$

$\iff 0{,}38n^2 - 0{,}38n - 12n + 72 = 0 \iff 0{,}38n^2 - 12{,}38n + 72 = 0$

$n = 25 \vee n \approx 7{,}58$

Conclui-se que havia 25 bombons na caixa.

2.1. Opção **(B)**

Obter, no máximo, três bolas azuis é o mesmo que obter, pelo menos, uma bola vermelha, ou seja, são todos os conjuntos, exceto os que são compostos exclusivamente por bolas azuis:

${}^{21}C_4 - {}^{7}C_4 = 5950$

Página 5

2.2. $P(\overline{C} \mid (A \cap B))$ é a probabilidade de a terceira bola extraída não ser azul (ou seja, ser vermelha), sabendo a primeira bola extraída era vermelha e a segunda era azul.

Para a terceira extração, tem-se:

- número de casos possíveis: $21 - 2 = 19$
- número de casos favoráveis: $14 - 1 = 13$

Desta forma, $P(\overline{C} \mid (A \cap B)) = \frac{13}{19}$.

3.1. Opção **(C)**

Há 3 chocolates com a letra I, 2 chocolates com a letra L e 1 chocolate com a letra G.

Assim, o número de sequências nas condições pedidas é $3 \times 2 \times 1 \times 3! = 36$.

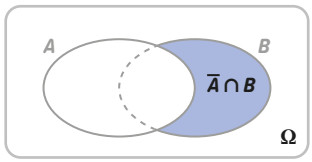
3.2. Opção **(D)**

Há cinco linhas para escolher uma. Os cinco chocolates com imagens de bolo de aniversário colocados na linha podem permutar entre si de $5!$ maneiras.

Dos restantes 20 "lugares" são escolhidos 9 para distribuir as restantes nove imagens diferentes: ${}^{20}A_9$

Página 6

4. Opção **(D)**



$P(A) = P(A \cup B) - P(\overline{A} \cap B) = 0{,}85 - 0{,}65 = 0{,}2$

Então, $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

5.1. Opção **(A)**

Exatamente duas com número par significa que uma é ímpar e duas são pares (IPP ou PIP ou PPI, sendo P uma bola com número par e I uma bola com número ímpar).

$P = \dfrac{3 \times 2^2 \times 3}{5^3} = \dfrac{36}{125} = 0{,}288$

5.2. Esquema:

$\underline{5}\ \underbrace{_\ _\ _}_{3!}\ \underbrace{_}_{\substack{2 \\ \text{ou} \\ 4}}$ ou $\underline{4}\ \underbrace{_\ _\ _}_{3!}\ \underline{2}$

$1 \times 3! \times 2$ $\qquad$ $1 \times 3! \times 1$

Número total de possibilidades nas condições pedidas é dado por: $1 \times 3! \times 2 + 1 \times 3! \times 1 = 18$

6. $P(X > 3 | X < 6) = \dfrac{P(X > 3 \cap X < 6)}{P(X < 6)} = \dfrac{P(X = 4) + P(X = 5)}{P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 5)} = \dfrac{\frac{7}{20}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{7}{8}$

Página 7

7. Tabela de distribuição de probabilidades de X:

x_i	0	1	4	9
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$\mu = \dfrac{3}{8} \times 1 + \dfrac{1}{4} \times 4 + \dfrac{1}{8} \times 9 = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

Quadrado da diferença entre os números que ocorrem em cada dado:

	1	**2**	**3**	**4**
1	0	1	4	9
2	1	0	1	4
3	4	1	0	1
4	9	4	1	0

8. Opção **(B)**

$\begin{cases} \frac{3}{4} + a + b + a = 1 \\ a + 2b + 4a = 9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2a = \frac{1}{4} \\ 2b = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = \frac{1}{4} \\ b = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{16} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$

9. Opção **(B)**

10. Seja X a variável aleatória "tempo de vida de uma lâmpada LED de determinado tipo, em milhares de horas".

Recorre-se à calculadora e obtém-se: $P(X > 50) = 0{,}5 - P(40 < X < 50) \approx 0{,}02275$

$P(X > 5) \times 2000 \approx 46$

Espera-se que, aproximadamente, 46 lâmpadas tenham uma duração superior a 50 000 horas.

ESPMA11CAD © Porto Editora

ESPMA11CAD © Porto Editora

Tema de revisão: Funções

Página 8

1. $g(x)=0 \iff -1+\log_2(x-2)=0 \iff \log_2(x-2)=1 \iff x-2=2 \iff x=4$, logo $A(4,0)$.

$f(4)=1+2^2=5$ e $f(0)=2$, logo $C(4,5)$ e $D(0,2)$.

$g(x)=2 \iff -1+\log_2(x-2)=2 \iff \log_2(x-2)=3 \iff x-2=8 \wedge x>2 \iff x=10$. Então, $B(10,2)$

$A_{[ABC]}=\dfrac{5\times(10-4)}{2}=15$

2. $\begin{cases} f(2)=-3 \\ f(4)=3 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{a^2}{2}+b=-3 \\ \dfrac{a^4}{2}+b=3 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=-6-2b \\ (-6-2b)^2=6-2b \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=-6-2b \\ b=-5 \vee b=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=4 \\ b=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} a^2=-3 \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \vee a=-2 \\ b=-5 \end{cases}$

Como $a>0$, então $a=2$ e $b=-5$

3. Opção **(B)**

$\dfrac{1}{2}-\log_a b=\dfrac{1}{2}-\log_{b^{\frac{1}{2}}} b=\dfrac{1}{2}-\log_{b^{\frac{1}{2}}}\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$

4.1. $f(x)=\log_3\left(\dfrac{x^3}{9}\right)-\log_3 x^2=3\log_3 x-\log_3 9-2\log_3 x=-2+\log_3 x$

4.2. $f(x)=-5 \iff -2+\log_3 x=-5 \iff \log_3 x=-3 \iff x=3^{-3} \wedge x>0 \iff x=\dfrac{1}{27}$

Página 9

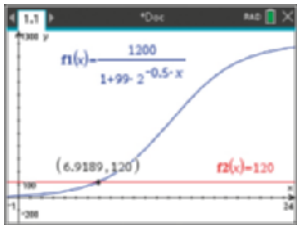
5. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-a>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>a\}$, então $a=-1$.

$f(7)=0 \iff b-2\log_4(7+1)=0 \iff b=\log_4\left(8^2\right) \iff b=3$

Assim, $a=-1$ e $b=3$.

6.1. $I_0=\dfrac{1200}{1+99\times 2^0}=12$, então a equação é $\dfrac{1200}{1+99\times 2^{-0,5t}}=120$

$t\approx 7$, ou seja, de acordo com o modelo, ao fim de, aproximadamente, sete dias, o número de infetados é dez vezes maior do que I_0.



6.2. $I=\dfrac{1200}{1+99\times 2^{-0,5t}} \iff I\left(1+99\times 2^{-0,5t}\right)=1200 \iff 2^{-0,5t}=\dfrac{1200-I}{99I} \iff$

$\iff -0,5t=\log_2\left(\dfrac{1200-I}{99I}\right) \iff t=\log_2\left(\dfrac{99I}{1200-I}\right)^2$

7. Opção **(B)**

$(g\circ f)(x)=0 \iff g(f(x))=0 \iff f(x)=3 \iff x=2$

Página 10

8.1. $(f\circ g)(-4)=f(g(-4))=f(\log_3(1+8))=f(2)=\dfrac{1}{4}$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$1-x$	+	+	+	0	−
$2x$	−	0	+	+	+
$\dfrac{1-x}{2x}$	−	n.d.	+	0	−

8.2. Opção **(C)**

$D_{g\circ f}=\left\{x: x\neq 0 \wedge \dfrac{1}{2x}<\dfrac{1}{2}\right\}$. Repara que $\dfrac{1}{2x}<\dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2}<0 \iff \dfrac{1-x}{2x}<0$, ou seja, $x\in\left]-\infty, 0\right[\cup\left]1, +\infty\right[$.

9. Opção **(D)**

$y=(x-1)^2-2 \wedge x<1 \iff (x-1)^2=y+2 \wedge x<1 \iff \left(x=1-\sqrt{y+2} \vee x=1+\sqrt{y+2}\right) \wedge x<1 \iff x=1-\sqrt{y+2}$

$g^{-1}(x)=1-\sqrt{x+2}$

10. Opção **(B)**

$f'(x)\times f''(x)\geqslant 0 \iff x\in[0,1]\cup[2,+\infty[$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$(f'\times f'')(x)$	−	0	+	0	−	0	+

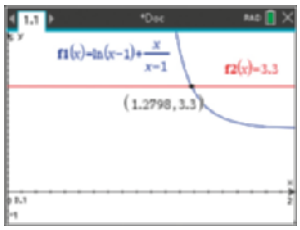
11.1. Opção **(C)**

11.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{e^{x-1}-1}=\dfrac{0}{0}$. Verifica-se que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-2)'}{\left(e^{x-1}-1\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{e^{x-1}}=2$. Então, pela regra de L'Hôpital, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

Página 11

12. $f'(x)=\ln(x-1)+\dfrac{x}{x-1}$ e $f'(b)=3{,}3 \iff \ln(b-1)+\dfrac{b}{b-1}=3{,}3$

Recorrendo à calculadora: $b\approx 1{,}28$



13.1. $f(0)=0-\ln 1=0$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln(x+1))=0$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=e^{-\infty}=0$

Como $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, conclui-se que a função é contínua em $x=0$.

13.2. Seja $y=b$ a equação da assíntota horizontal. Tem-se: $b=\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=e^0=1$, ou seja, $y=1$.

14.1. $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$; $f''(x)=2-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^2-1}{x^2}$

$f''(x)=0 \iff \dfrac{2x^2-1}{x^2}=0 \wedge x>0 \iff 2x^2-1=0 \wedge x>0 \iff x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+
f		$\cap$	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, concavidade voltada para cima em $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ e um ponto de inflexão de abcissa $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Página 12

14.2. Seja g a função definida por $g(x)=x^2+\ln(x)-2x-3$.

Pretende-se mostrar que g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]2,3[$.

A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$. Como $[2,3]\subset\mathbb{R}^+$, então g é contínua em $[2,3]$.

$g(2)<0$ e $g(3)>0$, então $g(2)\times g(3)<0$.

Conclui-se, assim, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]2,3[$, ou seja, a equação $f(x)=2x+3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]2,3[$.

ESPMA11CAD © Porto Editora

ESPMA11CAD © Porto Editora

15.1. $g(x)=\dfrac{x\times f(x)}{2}=\dfrac{x}{2}(4x-6)e^{2-x}=(2x^2-3x)e^{2-x}$

15.2. $g'(x)=(4x-3)e^{2-x}-(2x^2-3x)e^{2-x}=(4x-3-2x^2+3x)e^{2-x}=(-2x^2+7x-3)e^{2-x}$

$g'(x)=0 \iff (-2x^2+7x-3)e^{2-x}=0 \wedge \dfrac{3}{2}<x<5 \iff -2x^2+7x-3=0 \wedge \dfrac{3}{2}<x<5$

$\iff \left(x=\dfrac{1}{2} \vee x=3\right) \wedge \dfrac{3}{2}<x<5 \iff x=3$

x	$\frac{3}{2}$		3		5
$g'(x)$		+	0	–	
$g(x)$		↗	$g(3)$	↘	

O triângulo tem medida da área máxima quando o ponto P tem abcissa igual a 3.

16.1. $f(1)=\dfrac{1-1}{1}=0$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln\left((x-1)^2+k\right)\right)=0 \iff \ln(0+k)=0 \iff \ln k=0 \iff k=e^0 \iff k=1$

Página 13

16.2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-1}{x^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3-1}{x^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$; $x=0$ é a equação da assíntota vertical.

Seja $y=mx+b$ a equação da assíntota oblíqua. $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-1}{x^3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3-1-x^3}{x^2}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)=0$

$y=x$ é uma equação da assíntota oblíqua.

17. Como $f''(x)\leqslant 0 \iff x\leqslant 1$, conclui-se que f'' não muda de sinal em $]-\infty, 1[$, pelo que o ponto de abcissa -1 não pode ser ponto de inflexão. Assim, a afirmação **I** é falsa.

Como $f''(x)\leqslant 0 \iff x\leqslant 1$, conclui-se que $f''(x)>0 \iff x>1$. Então, $f''(2)>0$, ou seja, o declive da reta tangente ao gráfico de f' no ponto de abcissa 2 é positivo. Assim, a afirmação **II** é falsa.

18.1. A função f é contínua em $\mathbb{R}$. Como $[0, 1]\subset\mathbb{R}$, então f é contínua em $[0, 1]$.

$f(0)<0$ e $f(1)>0$, então $f(0)\times f(1)<0$. Conclui-se, assim, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, 1[$.

18.2. Opção **(D)**

$b-a=0{,}25-0=0{,}25<0{,}3$, mas $f(0)<0$ e $f(0{,}25)<0$, ou seja, $f(0)\times f(0{,}25)>0$. Neste caso, o zero não pertence ao intervalo.

$b-a=0{,}5-0{,}25=0{,}25<0{,}3$ e $f(0{,}25)\times f(0{,}5)<0$.

18.3. $f(1)=1$, logo o ponto B, ponto do gráfico de f com abcissa 1, tem coordenadas $(1, 1)$.

$f'(x)=1+e^{x-1}$ e $f'(1)=1+e^{1-1}=2$, então a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é $y=2x+b$. O ponto B pertence à reta tangente, pelo que $1=2+b \iff b=-1$, ou seja, $y=2x-1$, que interseta o eixo Ox em $x=0{,}5$, pois $0=2x-1 \iff x=0{,}5$.

Tema de revisão: Geometria

Página 14

1.1. Opção **(D)**

V é o ponto de interseção das três medianas ($[PT]$, $[RS]$ e $[QU]$) do triângulo $[PQR]$, logo é o seu baricentro.

1.2. Como V é o baricentro do triângulo, sabe-se que $\overline{RV}=\dfrac{2}{3}\overline{RS}$. Então, $\overline{VS}=\dfrac{1}{2}\overline{RV} \iff \overline{RV}=5$.

Como $\overline{RV}=\overline{TV}=5$ e $\overline{PV}=\dfrac{2}{3}\overline{PT}$, então $\overline{PV}=2\overline{TV} \iff \overline{PV}=2\times 5 \iff \overline{PV}=10$.

1.3. Sabe-se que $\overline{RV}=\overline{TV}=5$ e $5+5+\overline{RT}=16$. Logo, $\overline{RT}=6$. A altura, h, em relação a $[RT]$ do triângulo $[RVT]$ é dada por:

$h^2+3^2=5^2 \iff h=4$, então $A_{[RVT]}=\dfrac{6\times 4}{2}=12$.

$A_{[POR]}=6\times A_{[RVT]}=6\times 12=72$

2. **I.** Os quatro pontos notáveis não são colineares, logo o triângulo $[ABC]$ não é isósceles.

II. Dois dos pontos notáveis localizam-se no exterior do triângulo $[ABC]$, logo o triângulo é obtusângulo.

III. A reta de Euler de um triângulo passa pelo ortocentro, baricentro e circuncentro, de onde se conclui que P_4 não é o circuncentro e, por isso, não é o centro da circunferência circunscrita do triângulo $[ABC]$.

3. Opção **(C)**

$\overline{OC}=2\times 4{,}25=8{,}5=\dfrac{17}{2}$

$\overline{OB}=\dfrac{2}{3}\overline{OC}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{17}{2}=\dfrac{17}{3}$

Página 15

4.1. $A(\alpha)=\dfrac{\overline{RO}+\overline{QP}}{2}\times\overline{OP}=\dfrac{\tan\alpha+\sin\alpha}{2}\times\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\cos\alpha+\sin\alpha\times\cos\alpha\right)=\dfrac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)=\dfrac{1}{2}\sin\alpha(1+\cos\alpha)$

4.2. $A_{[OQR]}=\dfrac{\tan\alpha\times\cos\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{2}$

Pela fórmula fundamental da trigonometria: $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \iff \sin^2\alpha=1-\dfrac{9}{16} \iff \sin\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Como $\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, então $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Assim, $A_{[OQR]}=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

5. Opção **(B)**

Seja $[CP]$ a altura do triângulo relativamente a $[AB]$: $\sin 60°=\dfrac{\overline{CP}}{2} \iff \overline{CP}=\sqrt{3}$. Também $\cos 60°=\dfrac{\overline{PB}}{2} \iff \overline{PB}=1$.

Então, $\tan\alpha=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{AP}} \iff \tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\overline{AP}} \iff \overline{AP}=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\alpha}$. Assim, $\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PB}=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\alpha}+1$.

6. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(B\hat{A}C)$

Como a circunferência tem raio igual a 4, então $\|\overrightarrow{AB}\|=8$.

O triângulo $[ABC]$ é retângulo no vértice C, então $C\hat{A}B=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ e $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

$\sin\alpha=\dfrac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} \iff \|\overrightarrow{AC}\|=8\sin\alpha$

Assim, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8\times 8\sin\alpha\times\sin\alpha \iff 16=64\sin^2\alpha \iff \sin\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{16}{64}} \iff \sin\alpha=\pm\dfrac{1}{2}$.

Como α é um ângulo agudo, $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$, de onde se conclui que $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

Página 16

7. Como α é um ângulo agudo e $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, então $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

Seja s a reta de equação $y=mx+b$. Então, $m=\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=-\tan\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Como $(0,2)\in s$, então $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$ é uma equação de s.

Coordenadas de *P*: $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2=0 \iff x=2\sqrt{3}$, ou seja, $P\left(2\sqrt{3},0\right)$.

Coordenadas de *Q*: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2 \iff \dfrac{5\sqrt{3}}{6}x=2 \iff x=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$ e $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{5}=\dfrac{6}{5}$, ou seja, $Q\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{5},\dfrac{6}{5}\right)$.

$A_{[OPQ]}=\dfrac{2\sqrt{3}\times 6}{2\times 5}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

ESPMA11CAD © Porto Editora

ESPMA11CAD © Porto Editora

8.1. Como a reta AB é perpendicular ao plano EBC, um vetor normal ao plano EBC poderá ser um vetor diretor da reta AB, ou seja, $\vec{d}(-1, 2, 2)$.
A equação do plano EBC é do tipo $-x+2y+2z=d$.
Como $B \in EBC$: $-1+2\times1+2\times0=d \iff d=1$ $\qquad EBC: -x+2y+2z=1$

8.2. O ponto A tem coordenadas $(x, y, -x)$ e A pertence à reta AB, é do tipo $(3-k, -3+2k, -4+2k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Assim, o ponto A tem coordenadas $(2, -1, -2)$.

$A\hat{D}B = (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB})$; $\cos(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) = \dfrac{\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}}{\|\overrightarrow{DA}\|\times\|\overrightarrow{DB}\|}$; $\overrightarrow{DA} = A-D = (2, -1, -2)-(6, -3, 2) = (-4, 2, -4)$

$\overrightarrow{DB} = B-D = (1, 1, 0)-(6, -3, 2) = (-5, 4, -2)$; $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} = (-4, 2, -4)\cdot(-5, 4, -2) = 20+8+8 = 36$

$\|\overrightarrow{DA}\| = \sqrt{16+4+16} = 6$; $\|\overrightarrow{DB}\| = \sqrt{25+16+4} = \sqrt{45}$, pelo que $\cos(\overrightarrow{DA}\,\hat{}\,\overrightarrow{DB}) = \dfrac{36}{6\times\sqrt{45}}$.

Conclui-se que $(\overrightarrow{DA}\,\hat{}\,\overrightarrow{DB}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{36}{6\times\sqrt{45}}\right) \approx 26{,}6°$.

Página 17

9.1. Opção **(C)**

O prisma $[ABCDEFGH]$ é reto, logo as suas arestas laterais são perpendiculares às arestas das bases. Assim, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG} = 0$.

9.2. Opção **(B)**

O ponto médio, M, de $[AH]$ é o centro da superfície esférica e tem coordenadas: $\left(\dfrac{2+7}{2}, \dfrac{6}{2}, \dfrac{1{,}5}{2}\right) = (4{,}5; 3; 0{,}75)$.

O raio da superfície esférica é dado por $\overline{AM} = \|\overrightarrow{AM}\|$.

$\overrightarrow{AM} = M-A = (4{,}5; 3; 0{,}75)-(2, 0, 0) = (2{,}5; 3; 0{,}75)$

$\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{(2{,}5)^2+3^2+(0{,}75)^2} = \sqrt{15{,}8125}$

9.3. A reta CG é perpendicular ao plano ABC, logo o vetor de coordenadas $(2, 2, 0)$ é normal a ABC.
Assim, a equação do plano ABC é $2x+2y=d$. Como $A \in ABC$, $2\times2+2\times0=d \iff d=4$. Então, $ABC: 2x+2y=4$.
A reta HD é paralela à reta CG, então uma sua equação é: $(x, y, z) = (7; 6; 1{,}5)+k(2, 2, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.
Logo, as coordenadas do ponto D são do tipo $(7+2k, 6+2k, 1{,}5)$, $k \in \mathbb{R}$.
Como D pertence ao plano ABC, então $2(7+2k)+2(6+2k)=4 \iff 4k=2-13 \iff k=-2{,}75$.
Assim, as coordenadas do ponto D são: $(7+2\times(-2{,}75); 6+2\times(-2{,}75); 1{,}5)$, ou seja, $(1{,}5; 0{,}5; 1{,}5)$.

Tema de revisão: Sucessões

Página 18

1. Opção **(C)**

$u_9 = 2\times u_8-4 \iff 260 = 2\times u_8-4 \iff u_8 = 132$; $u_8 = 2\times u_7-4 \iff 132 = 2\times u_7-4 \iff u_7 = 68$

2. $u_{10} = u_4+(10-4)r \iff 8 = 5+6r \iff r = \dfrac{1}{2}$; $u_n = u_4+(n-4)\times\dfrac{1}{2} \iff u_n = 5+\dfrac{1}{2}n-2 \iff u_n = \dfrac{1}{2}n+3$

3. $\begin{cases}u_{12}=3u_3\\u_{15}-u_9=12\end{cases} \iff \begin{cases}u_1+11r=3(u_1+2r)\\u_1+14r-(u_1+8r)=12\end{cases} \iff \begin{cases}u_1-3u_1=6r-11r\\6r=12\end{cases} \iff \begin{cases}-2u_1=-5\times2\\r=2\end{cases} \iff \begin{cases}u_1=5\\r=2\end{cases}$

$u_n = u_1+(n-1)\times r = 5+2n-2 = 2n+3$, então $u_k = 2k+3 \iff 103 = 2k+3 \iff k = 50$

4. $S_{10} = \dfrac{u_1+u_{10}}{2}\times10 \iff \dfrac{15}{4} = \dfrac{u_1+u_1+9\times\frac{1}{4}}{2}\times10 \iff \dfrac{15}{4} = \left(2u_1+\dfrac{9}{4}\right)\times5 \iff -\dfrac{15}{2} = 10u_1 \iff u_1 = -\dfrac{3}{4}$

$u_n = u_1+(n-1)\times r = -\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}n-\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}n-1$. Assim, $u_4 = \dfrac{1}{4}\times4-1 \iff u_4 = 0$.

5. A linha poligonal tem 50 segmentos de reta verticais e 50 segmentos de reta horizontais.

O comprimento total dos segmentos de reta verticais é dado por $50 \times \overline{OA}$.

O comprimento de cada segmento de reta horizontal segue uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $1{,}5$ e razão 2, então $S_{50} = \dfrac{1{,}5 + 1{,}5 + (50-1)\times 2}{2} \times 50 = 2525$. Assim, $2525 + 50\overline{OA} = 2575 \iff \overline{OA} = 1$, ou seja, 1 cm.

Página 19

6. O número de quilómetros que o Gil corre em cada dia de treino segue uma progressão aritmética (t_n) de razão $1{,}5$.

$t_7 = t_1 + 1{,}5 \times 6 \iff 13 = t_1 + 9 \iff t_1 = 4 \qquad t_n = 4 + (n-1)\times 1{,}5 \iff t_n = 1{,}5n + 2{,}5$

$S_n = \dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n \iff 332{,}5 = \dfrac{4 + 1{,}5n + 2{,}5}{2} \times n \iff 1{,}5n^2 + 6{,}5n - 665 = 0 \iff n = 19 \vee n = -\dfrac{70}{3}$. Logo, $n = 19$.

7. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{2-2(n+1)}}{2^{2-2n}} = \dfrac{2^{2-2n-2}}{2^{2-2n}} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

8. Opção **(A)**

$u_6 = u_3 \times r^{6-3} \iff 32 = \dfrac{1}{2} \times r^3 \iff r^3 = 64 \iff r = 4$; $u_6 = u_4 \times r^{6-4} \iff 32 = u_4 \times 4^2 \iff u_4 = \dfrac{32}{16} \iff u_4 = 2$

9. $S_4 = u_1 \times \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4}{1 - \frac{3}{4}} \iff 175 = u_1 \times \dfrac{175}{64} \iff u_1 = 64$; $u_n = u_1 \times r^{n-1} = 64 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$; $u_4 = 64 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{4-1} = 27$

10. O comprimento da circunferência inicial é 8π; o das semicircunferências acrescentadas na 2.ª composição é 4π; o das semicircunferências acrescentadas na 3.ª composição é 2π,...

Ou seja, o comprimento das semicircunferências que se acrescentam em cada composição são os termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 8π e razão $\dfrac{1}{2}$.

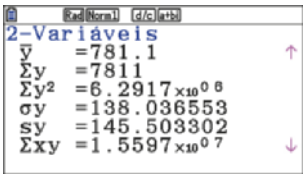
O comprimento da linha total da 10.ª composição é: $S_{10} = 8\pi \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 8\pi \times \dfrac{1023}{512}$, ou seja, $S_{10} \approx 50$.

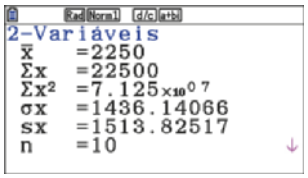
Tema de revisão: Estatística

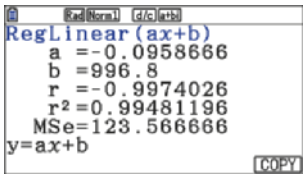
Página 20

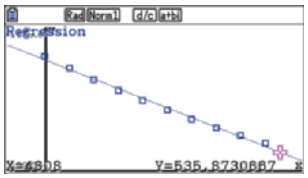
1. **I – b)**; **II – c)**; **III – b)**; **IV – a)**

Utilizando a calculadora:





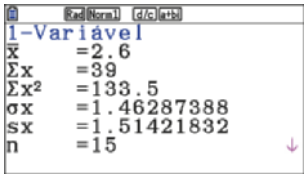




Página 21

2. **I – a)**; **II – c)**; **III – c)**; **IV – b)**

Utilizando a calculadora, para a turma A, a média é $2{,}6$ (inferior à dos restantes alunos do 12.º ano) e o desvio-padrão, $1{,}5$ (superior ao dos restantes alunos do 12.º ano).



A mediana dos tempos apresentados pelos alunos que não pertencem à turma A é 2.

Como nenhum aluno referiu exatamente 2 horas, significa que metade destes alunos dedica menos de 2 horas às redes sociais, ou seja, 55 alunos.

Na turma A, 5 alunos indicaram um valor inferior a 2 horas, então $\dfrac{55+5}{125} = 48\%$ dos alunos do 12.º ano dedicam menos de 2 horas, por dia, às redes sociais.

ESPMA11CAD © Porto Editora

ESPMA11CAD © Porto Editora

Tema de revisão: Modelos Matemáticos para a Cidadania

Página 22

1. A primeira preferência mais votada é Roma com $5+3=8$ votos.

Pelo método estabelecido: $L=6\times5+6\times3+5\times3+3\times1=66$;

$R=6\times3+6\times1+5\times5+3\times5=64$ $\quad$ $P=6\times1+6\times5+5\times1+3\times3=50$

O destino vencedor é Londres. O destino selecionado não respeita a primeira preferência mais votada.

2.1.

Divisores	10.º	11.º	12.º	9.º
1	88	85	80	21
2	44	42,2	40	10,5
3	29,(3)	28,(3)	26,(6)	7
4	22	21,25	20	5,25
5	17,6	17	16	4,2

De acordo com o método de Hondt, deverão ser atribuídos quatro convites ao 10.º ano, três ao 11.º ano e três ao 12.º ano.

2.2. O último convite atribuído foi ao 10.º ano e corresponde ao quociente 22. Se o número de alunos matriculados no 9.º ano fosse 22, então seria atribuído o 10.º convite ao 9.º ano, uma vez que, segundo o método de Hondt, em caso de empate, o convite será atribuído ao ano de escolaridade que tem menos alunos matriculados.

Seria necessário apenas mais 1 aluno matriculado no 9.º ano.

Página 23

3. Vencimento bruto (€): 2400; subsídio de refeição (€): $22\times6=132$

Desconto da S.S. (€): $0{,}11\times2400=264$; desconto do IRS (€): $0{,}2277\times2400-289{,}47-2\times42{,}86\approx171$

Vencimento líquido (€): $2400+132-264-171=2097$. O salário líquido da Amélia no mês de abril é 2097 €.

4. $0{,}30\times50\,000=15\,000$; $C_{10}=50\,000\times\left(1+\frac{0{,}028}{4}\right)^{40}=66\,091{,}9897$; $66\,091{,}9897-50\,000=16\,091{,}9897$

Como $16\,091{,}9897>15\,000$, então a previsão do Gonçalo está correta.

5. Valor, em euros, da quantia pedida a devolver por mês: $5000:(12\times4)\approx104{,}17$

Modalidade A: Valor de juros a pagar por ano: $5000\times0{,}1=500$; valor de juros por mês: $500:12\approx41{,}67$; mensalidade a pagar: $104{,}17+41{,}67=145{,}84$.

Modalidade B: Valor de juros a pagar: $0{,}072\times5000+2\times0{,}09\times5000+0{,}15\times5000=2010$;
valor de juros a pagar por mês: $2010:(4\times12)=41{,}875$; mensalidade a pagar: $104{,}17+41{,}875=146{,}045$

A modalidade A proporciona uma mensalidade de menor valor.

Tema de revisão: Temas opcionais

Página 24

1. $\int_0^1 2x^2\,dx+\int_1^2\left(x+x^{-2}\right)dx=\left[2\times\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right]_1^2=2\times\frac{1}{3}-0+2-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$

2. $A=\begin{bmatrix}4&2&5\\3&1&2\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}800\\350\\120\end{bmatrix}$. Então, $A\times C=\begin{bmatrix}4&2&5\\3&1&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}800\\350\\120\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4500\\2990\end{bmatrix}$.

4500 representa o custo do equipamento informático adquirido para a Escola 1 e 2990 representa o custo do equipamento para a escola 2.

Assim, o custo total do equipamento adquirido pelo agrupamento de escolas é 7490 €.

3. $\left[202-2{,}576\times\frac{19}{\sqrt{90}};\ 202+2{,}576\times\frac{19}{\sqrt{90}}\right]\approx[196{,}84;\ 207{,}16]$

Tema de revisão: Temas opcionais

Página 25

1.1. A função g é uma primitiva de f, logo $g(x) = -\cos x + C$.

$g(0) = 0 \iff -\cos 0 + C = 0 \iff C = 1$, logo $g(x) = -\cos x + 1$.

1.2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [x - \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) - \left[\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\sin 0)\right] =$

$= 1 - \frac{\pi}{2} + 1 \approx 0{,}43$

2. $E = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} - 1 \end{bmatrix}$

Assim, as coordenadas do ponto E são $\left(-2 - \sqrt{3},\ 2\sqrt{3} - 1\right)$.

3. $\hat{p} = \frac{27}{300} = 0{,}09$, então: $\left[0{,}09 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}09\,(1 - 0{,}09)}{300}};\ 0{,}09 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}09\,(1 - 0{,}09)}{300}}\right] \approx [0{,}06\ ;\ 0{,}12]$.

Conclui-se que a administração tem motivos para duvidar do artigo, já que a proporção de 15% referida na revista, está fora do intervalo de confiança obtido, cujo limite superior é cerca de 12%.

ESPMA11CAD © Porto Editora

ESPMA11CAD © Porto Editora

TEMA OPCIONAL: PRIMITIVAS IMEDIATAS E INTEGRAIS DEFINIDOS

Ficha 1

Página 3

1.1. $F'(x) = 6x + 10$, logo, $F'(x) \neq f(x)$. Então, F não é uma primitiva de f.

1.2. $F'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} = f(x)$. Então, F é uma primitiva de f.

1.3. $F'(x) = \sin x - \left(-x^{-2}\right) = \sin x + \frac{1}{x^2} = f(x)$. Então, F é uma primitiva de f.

1.4. $F'(x) = \frac{1}{2}\left(3e^{3x} - 2x\right) = \frac{3e^{3x}}{2} - x$, logo $F'(x) \neq f(x)$. Então, F não é uma primitiva de f.

2. **(C)**

$G(x) = \ln(|x|) + C$, com $C \in \mathbb{R}$

$G\left(-e^3\right) = 1 \iff \ln\left(\left|-e^3\right|\right) + C = 1 \iff \ln\left(e^3\right) + C = 1 \iff C = -2$

Então, $G(x) = \ln(|x|) - 2$.

3.1 $H'(x) = 5k^2x^4 + 3(1-k)x^2 + 5$

Para H ser uma primitiva de f, deve verificar-se $H'(x) = h(x)$, ou seja:

$5k^2x^4 + 3(1-k)x^2 + 5 = 20x^4 + 9x^2 + 5 \iff 5k^2 = 20 \wedge 3(1-k) = 9 \iff k^2 = 4 \wedge 1 - k = 3 \iff$

$\iff (k = 2 \vee k = -2) \wedge k = -2 \iff k = -2$

3.1. $\int h(x)\,dx = 20\frac{x^5}{5} + 9\frac{x^3}{3} + 5x + C = 4x^5 + 3x^3 + 5x + C$, com $C \in \mathbb{R}$

Como $H_2(-1) = 4 \iff -4 - 3 - 5 + C = 4 \iff C = 16$, então $H_2(x) = 4x^5 + 3x^3 + 5x + 16$.

4. $g(x) = \int (3x^2 - 4x)\,dx = x^3 - 2x^2 + C$, com $C \in \mathbb{R}$

Como o ponto de coordenadas $(-1, 2)$ pertence ao gráfico de g, então:

$g(-1) = 2 \iff -1 - 2 + C = 2 \iff C = 5$

Assim, $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5$.

Página 4

5.1. $F(x) = -\cos x + C$, com $C \in \mathbb{R}$

$F(0) = -\frac{7}{2} \iff -\cos 0 + C = -\frac{7}{2} \iff -1 + C = -\frac{7}{2} \iff C = -\frac{5}{2}$

$F(x) = -\cos x - \frac{5}{2}$

5.2. $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} = -2$. As coordenadas do ponto B são $\left(\frac{2\pi}{3}, F\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, ou seja, $\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$, pelo que a ordenada é -2.

6. **(D)**

$F(x) = 4\frac{x^2}{2} + C = 2x^2 + C$, com $C \in \mathbb{R}$

$F\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \iff 2 \times \frac{1}{4} + C = 2 \iff C = 2 - \frac{1}{2} \iff C = \frac{3}{2}$

Então, $F(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}$, que corresponde à expressão analítica da função representada na opção **(D)**.

7. **(A)**

$(3\sin x + \cos(2x) + C)' = 3\cos x - 2\sin(2x)$

8. **(B)**

$\int f(x)\,dx = \int \left(9x^2 - 12x + 4\right) dx = 9\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^2}{2} + 4x + C = 3x^3 - 6x^2 + 4x + C$, com $C \in \mathbb{R}$

Para $C = -10$, obtém-se $F(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 10$ e verifica-se que $F'(x) = f(x)$.

9.1. $\int \left(x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 6\right) dx = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{3} \times \frac{x^4}{4} + 6x + C = \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{6} + 6x + C$, com $C \in \mathbb{R}$

9.2. $\int \left(2e^x - 8x^3\right) dx = 2e^x - 8\frac{x^4}{4} + C = 2e^x - 2x^4 + C$, com $C \in \mathbb{R}$

9.3. $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2\right) dx = \int \left(x^{-2} - x^2\right) dx = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^3}{3} + C = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} + C$, com $C \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

9.4. $\int \left(\frac{1}{x} + 7e^x\right) dx = \ln\left(|x|\right) + 7e^x + C$, com $C \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$

9.5. $\int (\cos x + 2\sin x)\,dx = \sin x - 2\cos x + C$, com $C \in \mathbb{R}$

9.6. $\int (2x - 5)^2\,dx = \int \left(4x^2 - 20x + 25\right) dx = \frac{4x^3}{3} - 10x^2 + 25x + C$, com $C \in \mathbb{R}$

10. **(B)**

$F(x) = -\cos x + 2$

Ficha 2

Página 7

1.1.

a) $F'(x) = \left(3x^4 - x^2 + x - 11\right)' = 12x^3 - 2x + 1 = f(x)$

Então, F é uma primitiva de f.

b) $G'(x) = \left(3 + \ln\left(x^2 + 3\right)\right)' = \frac{\left(x^2 + 3\right)'}{x^2 + 3} = \frac{2x}{x^2 + 3} = g(x)$

Então, G é uma primitiva de g.

1.2.

a) $\int_{-2}^{3} \left(12x^3 - 2x + 1\right) dx = \left[F(x)\right]_{-2}^{3} = \left[3x^4 - x^2 + x - 11\right]_{-2}^{3} = F(3) - F(-2) = 3 \times 3^4 - 3^2 + 3 - 11 - \left(3 \times (-2)^4 - (-2)^2 - 2 - 11\right) = 195$

b) $\int_1^e \frac{2x}{x^2 + 3}\,dx = \left[G(x)\right]_1^e = \left[3 + \ln\left(x^2 + 3\right)\right]_1^e = 3 + \ln\left(e^2 + 3\right) - 3 - \ln\left(1^2 + 3\right) = \ln\left(e^2 + 3\right) - \ln 4 = \ln\frac{e^2 + 3}{4}$

2.1. $\int_1^2 \left(x^3 + x^4 + x^5\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{5} + \frac{2^6}{6} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 20{,}45$

2.2. $\int_0^5 \left(e^{x-5}\right) dx = \int_0^5 \left(\frac{e^x}{e^5}\right) dx = \frac{1}{e^5}\left[e^x\right]_0^5 = \frac{e^5 - 1}{e^5}$

2.3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (5\sin x)\,dx = 5\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 5\left(-\cos\frac{\pi}{3} - (-\cos 0)\right) = -\frac{5}{2} + 5 = \frac{5}{2}$

3. $\int_{e^2}^{10} \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[x^2 + \ln x\right]_{e^2}^{10} = 100 + \ln\left(e^{10}\right) - e^4 - \ln\left(e^2\right) = 100 + \ln 10 - e^4 - 2 \approx 45{,}70$

ESPMA11CAD © Porto Editora

ESPMA11CAD © Porto Editora

Página 8

4. A medida da área da região sombreada é dada por:

$\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_{e}^{e^2} = \ln\left(e^2\right) - \ln e = 2 - 1 = 1$, como se pretendia mostrar.

5.1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (2 - 2\cos x)\,dx = [2x - 2\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = 4\pi - 2\sin(2\pi) - \left(\pi - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4\pi - \pi + 2 = 3\pi + 2 \approx 11{,}425$

5.2. $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{4}} (2 - 2\cos x)\,dx = [2x - 2\sin x]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{4}} = \frac{7\pi}{2} - 2\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) - \left(\frac{4\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$= \frac{7\pi}{2} + \sqrt{2} - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{13\pi}{6} + \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 9{,}953$

6.1. $f(a) = 0 \iff e - e^{a-4} = 0 \iff e^{a-4} = e \iff a - 4 = \ln e \iff a = 5$

O valor de a é 5.

6.2. $\int_0^5 \left(e - e^{x-4}\right)dx - \int_0^5 \left(0{,}08x^2 - 0{,}8x + 2\right)dx = \left[ex - \frac{e^x}{e^4}\right]_0^5 - \left[\frac{0{,}08x^3}{3} - 0{,}4x^2 + 2x\right]_0^5 = 5e + \frac{1}{e^4} - \frac{10}{3} \approx 10{,}276$

Página 9

7.1. $g\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 4 - \frac{7\pi}{6} - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 4 - \frac{7\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}2$

A ordenada de B é, aproximadamente, 1,2.

7.2. $\int_0^{\frac{7\pi}{6}} (4 - x - \cos x)\,dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - \sin x\right]_0^{\frac{7\pi}{6}} = \frac{14\pi}{3} - \frac{49\pi^2}{72} - \sin\frac{7\pi}{6} = \frac{14\pi}{3} - \frac{49\pi^2}{72} + \frac{1}{2} \approx 8{,}444$

7.3.

a) $h(x) = 0 \iff -\frac{2}{\pi}x + 2 = 0 \iff -2x = -2\pi \iff x = \pi$

$g(\pi) = 4 - \pi - \cos\pi = 5 - \pi$

As coordenadas dos pontos D e C são, respetivamente, $(\pi,\ 0)$ e $(\pi,\ 5 - \pi)$.

b) $\int_0^{\pi} (4 - x - \cos x)\,dx - \int_0^{\pi} \left(-\frac{2}{\pi}x + 2\right)dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - \sin x\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{x^2}{\pi} + 2x\right]_0^{\pi} = \frac{6\pi - \pi^2}{2}$

8. $f'(x) = \int \left(-3x^2 + 8\right)dx = -x^3 + 8x + C$, com $C \in \mathbb{R}$

$f'(2) = 4 \iff -2^3 + 8 \times 2 + C = 4 \iff C = -4$

Então, $f(x) = \int \left(-x^3 + 8x - 4\right)dx = -\frac{x^4}{4} + 4x^2 - 4x + C_2$.

O ponto $(2,\ f(2))$ pertence à reta tangente, logo:

$f(2) = 5 \iff -4 + 16 - 8 + C_2 = 5 \iff C_2 = 1$

Assim, $\int_1^3 f(x)\,dx = \left[-\frac{x^5}{20} + \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x\right]_1^3 \approx 8{,}57$.

TEMA OPCIONAL: MATRIZES

Ficha 1

Página 10

1.1. Cada linha da matriz corresponde a um dos dias e apresenta as temperaturas mínima e máxima registadas nesse dia. A primeira coluna representa as temperaturas mínimas e a segunda coluna, as temperaturas máximas.

1.2. $a_{32} = 43$ e significa que no terceiro dia a temperatura máxima foi $43\ ^\circ C$.

1.3. $\frac{37 + 40 + 43}{3} = 40$. Nos três dias considerados, a média das temperaturas máximas por dia foi $40\ ^\circ C$.

1.4. Matriz retangular

2.1. $38 + 40 + 25 = 103$
No primeiro dia, foram vendidas 103 *T-shirts*.

2.2. $40 + 53 = 93$
Foram vendidas 93 *T-shirts* de tamanho M.

Página 11

3.1. $H = \begin{bmatrix} 45 & 25 & 0 \\ 35 & 30 & 0 \\ 30 & 20 & 3 \\ 20 & 32 & 7 \end{bmatrix}$

3.2.

a) $(45 + 35 + 30 + 20) \times 85 = 11\,050$

Se todos os quartos *Standard* estiverem ocupados, a receita correspondente a esses quartos é $11\,050\ €$.

b) $h_{31} \times 85 + h_{32} \times 120 + h_{33} \times 180 = 30 \times 85 + 20 \times 120 + 3 \times 180 = 5490$

Se o piso 3 estiver todo ocupado, a receita nesse piso é $5490\ €$.

4.1. $a_{23} = 8 - (-1 - 3) = 12$; $a_{11} = 8 - (3 + 4) = 1$
Assim, $a_{23} - a_{11} = 11$.

4.2. • $a_{11} = 1$
• $a_{23} = 1$
• $1 \times a_{22} \times (-3) = 3 \iff a_{22} = -1$
• $a_{32} = 8 - (6 - 1) = 3$
Assim:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & 12 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

Página 12

5.1. A matriz P representa o número de bilhetes de plateia vendidos para cada um dos três dias.
A matriz B representa o número de bilhetes de balcão vendidos para cada um dos três dias.

5.2.
$\begin{bmatrix} 120 + 84 \\ 135 + 100 \\ 92 + 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 204 \\ 235 \\ 165 \end{bmatrix}$

5.3. **a)** $\begin{bmatrix} 3000 \\ 3375 \\ 2300 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1680 \\ 2000 \\ 1460 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 4680 \\ 5375 \\ 3760 \end{bmatrix}$

ESPMA11CAD © Porto Editora

ESPMA11CAD © Porto Editora

6.1.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

6.2. **a)** $a_{13}=4$

Houve quatro treinos em que a Ana obteve 1 ponto.

b) $a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{41}=6$

Houve seis treinos em que os 3 pontos foram para algum dos quatro amigos.

c) $a_{21}+a_{22}+a_{23}=6$.

Houve seis treinos em que o Bernardo recebeu pontos.

Página 13

7.1. $P=\begin{bmatrix}15\times 80 & 20\times 50 & 8\times 65\\ 22\times 80 & 18\times 50 & 14\times 65\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1200 & 1000 & 520\\ 1760 & 900 & 910\end{bmatrix}$

7.2. $R=\begin{bmatrix}15\times 125 & 20\times 90 & 8\times 100\\ 22\times 125 & 18\times 90 & 14\times 100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1875 & 1800 & 800\\ 2750 & 1620 & 1400\end{bmatrix}$

7.3. $l_{ij}=r_{ij}-p_{ij}$, pelo que $L=\begin{bmatrix}675 & 800 & 280\\ 990 & 720 & 490\end{bmatrix}$.

8. Basta considerar $k=0{,}8$. $C=\begin{bmatrix}1624 & 1680\\ 2080 & 2560\\ 1200 & 840\\ 800 & 800\end{bmatrix}$

Ficha 2

Página 14

1.1. $C=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 1 & 5 & -2\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 0 & 3\\ 1 & 7 & -2\\ 3 & 2 & -2\end{bmatrix}$

1.2. $A+C=B \iff C=B-A$

$$C=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 1 & 5 & -2\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0 & -3\\ -1 & -7 & 2\\ -3 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

1.3. $C=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 1 & 5 & -2\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 1 & 5 & -2\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & 0 & 6\\ 2 & -14 & -4\\ 6 & 4 & 2\end{bmatrix}$

2.1. $A\times B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+3+0\\ 1+12+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 13\end{bmatrix}$

2.2 $C\times A=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 9 & 20\\ 7 & -1 & 4\\ 6 & -6 & -4\end{bmatrix}$

2.3. $A\times C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & -5\\ 17 & -15\end{bmatrix}$

Página 15

3.1. **a)** $\begin{bmatrix}63 & 85\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}15\\ 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1795\end{bmatrix}$

Representa a receita obtida com a venda de bilhetes do tipo A: Criança/Sénior.

b) $[42 \quad 50] \times \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix} = [1640]$

Representa a receita obtida com a venda de bilhetes do tipo B: Adultos.

3.2. $(1{,}4 \times [105 \quad 135]) \times \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = [147 \quad 189] \times \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = [5985]$

Assim, conclui-se que a receita total obtida com a venda de todos os bilhetes foi 5985 €.

4. $A \times B = C \iff \begin{bmatrix} 2 & a_{12} & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ c_{21} \\ 10 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 4 + a_{12} - 3b_{31} \\ 8 - 1 + b_{31} \\ 2 + 3 + 5b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ c_{21} \\ 10 \end{bmatrix} \iff$

$\iff \begin{cases} 4 + a_{12} - 3b_{31} = 8 \\ 7 + b_{31} = c_{21} \\ 5 + 5b_{31} = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{12} = 7 \\ c_{21} = 8 \\ b_{31} = 1 \end{cases}$

Daqui resulta que $a_{12} + b_{31} + c_{21} = 16$.

Ficha 3

Página 16

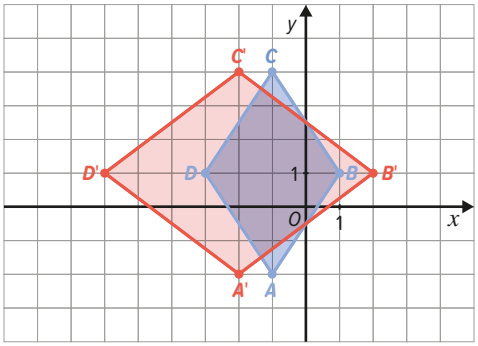
1.1. $A' = A + T = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ As coordenadas do vértice A' são $(7, 5)$.

1.2. $B' = B + T \iff \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \iff B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ As coordenadas do vértice B são $(2, 3)$.

Página 17

2.1. $A(-1, -2)$, $B(1, 1)$, $C(-1, 4)$ e $D(-3, 1)$.

2.2.



3.1. $\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2{,}5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2{,}5x + y \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x = -6 \\ 2{,}5x + y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -6 \\ y = 17 \end{cases}$

O ponto de F_1 tem coordenadas $(-6, 17)$.

3.2. As duas figuras têm área igual. Então, a medida da área de cada uma das duas figuras é 9, sendo $4{,}5$ metade da medida da área da figura F_1.

4. Matriz da rotação: $\begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Matriz da reflexão de eixo Ox: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Matriz da transformação, composta da reflexão seguida da rotação: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

ESPMA11CAD © Porto Editora

ESPMA11CAD © Porto Editora

TEMA OPCIONAL: INTRODUÇÃO À INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

Ficha 1

Página 19

1. **(C)**

2.1. Estima-se que o valor médio seja 35 minutos.

2.2. Como a amostra tem dimensão 50, que é superior a 30, o Teorema do Limite Central permite afirmar que a distribuição de amostragem da média pode ser aproximada por uma distribuição normal.

2.3. $\mu = 35$; $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{6}{\sqrt{50}} \approx 0{,}85$

A distribuição de amostragem segue o modelo normal $N(35\,;\ 0{,}85)$.

3. **I – b)**; **II – c)**; **III – a)**; **IV – b)**

Ficha 2

Página 20

1. $z = 1{,}96$ (para 95% de confiança)

Intervalo de confiança:

$$\left[\bar{x} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[3{,}5 - 1{,}96 \times \frac{0{,}4}{\sqrt{144}}\,;\ 3{,}5 + 1{,}96 \times \frac{0{,}4}{\sqrt{144}}\right] \approx [3{,}43\,;\ 3{,}57]$$

Página 21

2.1. $\hat{p} = \dfrac{160}{200} = 0{,}8$. Germinaram 80% dos feijões.

2.2 $\left[0{,}8 - 1{,}96 \times \sqrt{\dfrac{0{,}8 \times 0{,}2}{n}}\,;\ 0{,}8 + 1{,}96 \times \sqrt{\dfrac{0{,}8 \times 0{,}2}{n}}\right] \approx [0{,}745\,;\ 0{,}855]$

Interpretação: A probabilidade de o intervalo $[0{,}745\,;\ 0{,}855]$ incluir a proporção populacional é 95%.

2.3. $E = 1{,}96 \times \sqrt{\dfrac{0{,}8 \times 0{,}2}{n}}$, ou seja, metade da amplitude do intervalo: $E = \dfrac{0{,}855 - 0{,}745}{2} = 0{,}055$

2.4. Como $0{,}85 \in [0{,}745\,;\ 0{,}855]$, os dados da amostra são compatíveis com a afirmação.

3.1. **I – a)**; **II – c)**; **III – a)**; **IV – b)**

3.2. $\hat{p} = \dfrac{15}{40} = 0{,}375$; $z = 1{,}645$; $\left[0{,}375 - 1{,}645 \times \sqrt{\dfrac{0{,}375 \times 0{,}625}{40}}\,;\ 0{,}375 + 1{,}645 \times \sqrt{\dfrac{0{,}375 \times 0{,}625}{40}}\right] \approx [0{,}25\,;\ 0{,}50]$

Página 22

4.1. **(D)**

Margem de erro: $\dfrac{0{,}384 - 0{,}325}{2} = \dfrac{0{,}059}{2} = 0{,}0295$

4.2. **(B)**

$[0{,}325\,;\ 0{,}384] \cap [0{,}338\,;\ 0{,}411] \neq \{\ \}$

5.1. $\left[0{,}4625 - 1{,}645 \times \sqrt{\dfrac{0{,}4625 \times (1 - 0{,}4625)}{400}}\,;\ 0{,}4625 + 1{,}645 \times \sqrt{\dfrac{0{,}4625 \times (1 - 0{,}4625)}{400}}\right] \approx [0{,}421\,;\ 0{,}504]$

5.2. Há 90% de probabilidade de o intervalo $[0{,}421\,;\ 0{,}504]$ incluir a proporção de funcionários de toda a empresa que tencionam passar férias no estrangeiro.

6. **I – b)**; **II – c)**; **III – a)**; **IV – b)**; **V – c)**

Página 23

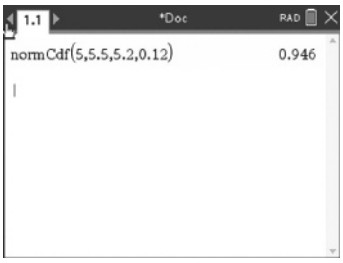
7.1. **(D)**

Note-se que a dimensão da amostra é maior do que 30. Pelo Teorema de Limite Central, $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,84}{\sqrt{49}} = 0,12$.

7.2. **(A)**

7.3. $P\left(5 \leqslant \bar{X} \leqslant 5,5\right) = 0,946 = 94,6\%$





7.4. $\left[5,2 - 1,96 \times \frac{0,84}{\sqrt{49}};\ 5,2 + 1,96 \times \frac{0,84}{\sqrt{49}}\right] \approx [4,9648\ ;\ 5,4352]$

8. Proporção amostral: $\hat{p} = \frac{0,7559 + 0,8041}{2} = 0,78$

Margem de erro: $\hat{p} = \frac{0,8041 - 0,7559}{2} = 0,0241$

$1,645\sqrt{\frac{0,78(1-0,78)}{n}} = 0,0241 \iff \sqrt{\frac{0,1716}{n}} = \frac{0,0241}{1,645} \iff \frac{0,1716}{n} = \left(\frac{0,0241}{1,645}\right)^2$

Assim, $n \approx 800$.

A amostra é de dimensão 800.

ESPMA11CAD © Porto Editora