## Tema 1: Primitivas. Integrais definidos

### Página 6 – Tarefa inicial

1. $g(x) = f(x) + 1$ e $h(x) = f(x) + 3$

1.1. $y = -0{,}3x + 2 \rightarrow$ Equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 0.

Seja *t* a reta tangente ao gráfico de *h* no ponto de abcissa 0.

$m_t = h'(0) = f'(0) = -0{,}3$

$y = -0{,}3x + b$

O ponto de coordenadas $(0, 5)$ pertence à reta *t*, logo tem-se $b = 5$.

**Cálculo auxiliar:**

- $h'(x) = (f(x) + 3)' = f'(x) + 0 = f'(x)$
- $f(0) = -0{,}3 \times 0 + 2 = 2$
- $h(0) = f(0) + 3 = 2 + 3 = 5$

*t*: $y = -0{,}3x + 5$

1.2. $g'(x) = (f(x) + 1)' = f'(x) + 0 = f'(x)$

$h'(x) = (f(x) + 3)' = f'(x) + 0 = f'(x)$

Então, $f'(x) = g'(x) = h'(x)$, ou seja, as funções derivadas de *f*, *g* e *h* são iguais.

Isto acontece porque os gráficos de *g* e *h* obtêm-se a partir do de *f* através de translações verticais.

2. $f'(x) = -3x^2 + 4x - 3$; $D_f = \mathbb{R}$

2.1. $(-x^3 + 2x^2 + 3x + 17)' = -3x^2 + 4x + 3$

A opção correta é a **(B)**.

2.2. $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 4$, por exemplo

2.3. É possível definir uma infinidade de funções que admitem $f'(x)$ como expressão da respetiva função derivada.

3. $f'(x) = 7$, $g'(x) = 3x + 4$, $h'(x) = 3x^2$ e $j'(x) = e^x + 2$

3.1. Por exemplo, $f(x) = 7x + 1$

3.2. Por exemplo, $g(x) = \frac{3x^2}{2} + 4x$.

3.3. Por exemplo, $h(x) = x^3 - 5$.

3.4. Por exemplo, $j(x) = e^x + 2x + 3$.

### Página 7

1.1. $F'(x) = \left(x^2 + \frac{1}{7}\right)' = 2x = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, *F* é uma primitiva de *f* em $\mathbb{R}$.

1.2. $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + \pi\right)' = \frac{4x^3}{4} + 0 = x^3 = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, *F* é uma primitiva de *f* em $\mathbb{R}$.

1.3. $F'(x) = \left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)' = \frac{3\cos(3x)}{3} = \cos(3x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, *F* é uma primitiva de *f* em $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = 8$

$\int f(x)\,dx = \int 8\,dx = 8x + C, \ C \in \mathbb{R}$

As primitivas de *f* são do tipo $F(x) = 8x + C$.

Pretende-se determinar a primitiva de *f* que passa pelo ponto de coordenadas $(-1, 2)$.

$F(-1) = 2 \Leftrightarrow 8 \times (-1) + C = 2 \Leftrightarrow C = 10$

A primitiva pedida é $F(x) = 8x + 10$.

3. $g(x) = \cos x$; $D_g = ]0, 2\pi[$

$\int g(x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + C, \ C \in \mathbb{R}$

$G(x) = \sin x + C$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$-1 + C \leq \sin x + C \leq 1 + C$

Valor máximo é 3 $\rightarrow 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2$

Então, $G(x) = \sin x + 2$.

### Página 8 – Tarefa 1

1. $f(x) = 5x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^3$

$D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$

**1.1.** $F_1$, $F_2$ e $F_3$ $\rightarrow$ primitivas de $f$

Por exemplo, $F_1(x)=\frac{5x^2}{2}$, $F_2(x)=\frac{5x^2}{2}-4$ e

$F_3(x)=\frac{5x^2}{2}+1$.

**1.2.** $\int g(x)\,dx=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$

As primitivas de $g$ são do tipo $G(x)=\frac{x^3}{3}+C$.

Sendo $G$ uma função polinomial do 3.º grau, então a opção correta é a **(B)**.

**1.3.** $\int h(x)\,dx=\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}+C$

A opção correta é a **(D)**.

**2.**

| $f(x)$ | $Pf=F(x)+C$, com $C\in\mathbb{R}$ |
|---|---|
| $f(x)=x^0=1$ | $x+C$ |
| $f(x)=x$ | $\frac{x^2}{2}+C$ |
| $f(x)=x^2$ | $\frac{x^3}{3}+C$ |
| $f(x)=x^3$ | $\frac{x^4}{4}+C$ |
| $f(x)=x^4$ | $\frac{x^5}{5}+C$ |
| $f(x)=x^5$ | $\frac{x^6}{6}+C$ |
| $f(x)=x^6$ | $\frac{x^7}{7}+C$ |
| $f(x)=x^\alpha$, com $\alpha\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ $(x\neq 0 \text{ se } \alpha<-1)$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ |

**3.1.** $f(x)=e^x$

$P_f=e^x+C;\ C\in\mathbb{R}$

**3.2.** $f(x)=\cos x$

$P_f=\sin x+C;\ C\in\mathbb{R}$

**3.3.** $f(x)=\sin x$

$Pf=-\cos x+C;\ C\in\mathbb{R}$

**Página 9**

**4.** Sendo $x>0$, então:

**4.1.** $\int x^7\,dx=\frac{x^8}{8}+C;\ C\in\mathbb{R}$

**4.2.** $\int x^{-3}\,dx=\frac{x^2}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C;\ C\in\mathbb{R}$

**4.3.** $\int x^{-5}\,dx=\frac{x^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{x^4}+C;\ C\in\mathbb{R}$

**4.4.** $\int\frac{1}{x^4}\,dx=\int x^{-4}\,dx=\frac{x^{-3}}{-3}+C=-\frac{1}{3x^3}+C;\ C\in\mathbb{R}$

**4.5.** $\int\frac{1}{x}\,dx=\ln(|x|)+C;\ C\in\mathbb{R}$

**5.** $f(x)=x^{-3};\ D_f=\mathbb{R}^+$

$\int x^{-3}\,dx=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$

Então, $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+C$.

Como $A\left(1,\frac{5}{2}\right)$ pertence ao gráfico de $F$, tem-se:

$F(1)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}+C=\frac{5}{2}\Leftrightarrow C=3$

Assim, $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+3$.

$F\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}+3=-2+3=1$

**Página 10**

**6.** O ponto $A$, de coordenadas $(\ln 2,1)$, pertence aos gráficos das funções $g$, $h$ e $i$.

Pretende-se saber qual das funções $g$, $h$ e $i$ é uma primitiva de $f$.

$\int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$

Então, $F(x)=e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Como o ponto $A$ pertence ao gráfico de $f$, tem-se:

$F(\ln 2)=1\Leftrightarrow e^{\ln 2}+C=1\Leftrightarrow 2+C=1\Leftrightarrow C=-1$

Assim, $F(x)=e^x-1$.

Donde se conclui que a função que é uma primitiva de *f* é a função *g*.

$F(0)=e^0-1=0$ e $g(0)=0$.

**7.** $D_g=[-\pi,\pi]$ e $g(x)=\sin x$

$\int g(x)\,dx=\int \sin x\,dx=-\cos x+C,\ C\in\mathbb{R}$

Então, $G(x)=-\cos x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$G(0)=1\Leftrightarrow -\cos 0+C=1\Leftrightarrow -1+C=1\Leftrightarrow C=2$

Assim, $G(x)=-\cos x+2$ e

$G\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+2=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$.

## Página 11

**8.1.** $\int(2x+3)\,dx=\int 2x\,dx+\int 3\,dx=x^2+3x+C;\ C\in\mathbb{R}$

**8.2.** $\int\left(\frac{x^3}{2}-3x+1\right)dx=\int\frac{x^3}{2}\,dx-3\int x\,dx+\int 1\,dx=$

$=\frac{x^4}{8}-\frac{3x^2}{2}+x+C,\ C\in\mathbb{R}$

**8.3.** $\int\left(e^x-5x\right)dx=\int e^x\,dx-5\int x\,dx=e^x-\frac{5x^2}{2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

**8.4.** $\int\left(\frac{1}{x^2}-\sin x\right)dx=\int x^{-2}\,dx-\int\sin x\,dx$

$=\frac{x^{-1}}{-1}-(-\cos x)+C=-\frac{1}{x}+\cos x+C;\ C\in\mathbb{R}$

**8.5.** $\int\left(2\cos x+3e^x\right)dx=2\int\cos x\,dx+3\int e^x\,dx=$

$=2\sin x+3e^x+C;\ C\in\mathbb{R}$

**8.6.** $\int\left(x^2(x-1)\right)dx=\int\left(x^3-x^2\right)dx=\int x^3\,dx-\int x^2\,dx=$

$=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+C;\ C\in\mathbb{R}$

**8.7.** $\int\left(\frac{2}{x^3}+x^3\right)dx=\int 2x^{-3}\,dx+\int x^3\,dx=$

$=2\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^4}{4}+C=-\frac{1}{x^2}+\frac{x^4}{4}+C;\ C\in\mathbb{R}$

**8.8.** $\int\left(3x-\frac{\cos x}{2}\right)dx=3\int x\,dx-\frac{1}{2}\int\cos x\,dx$

$=3\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C=\frac{3x^2}{2}-\frac{\sin x}{2}+C;\ C\in\mathbb{R}$

## Página 12 – Pratica

**9.1.** $\int f(x)\,dx=\int 12x^2\,dx=12\int x^2\,dx=12\frac{x^3}{3}+C=4x^3+C$

A opção correta é a **(C)**.

**9.2.** $\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{x^3}\,dx=\int x^{-3}\,dx=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$

A opção correta é a **(B)**.

**9.3.** $\int(1-2\sin x)\,dx=\int 1\,dx-2\int\sin x\,dx=x-2(-\cos x)+C=$

$=x+2\cos x+C$

A opção correta é a **(D)**.

**9.4.** $\int f(x)\,dx=\int\left(1-e^{4x}\right)dx=\int 1\,dx-\int e^{4x}\,dx=x-\frac{e^{4x}}{4}+C$

A opção correta é a **(D)**.

**9.5.** $\int f(x)\,dx=\int\left(x^3-e^{2x}\right)dx=\int x^3\,dx-\int e^{2x}\,dx=$

$=\frac{x^4}{4}-\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{x^4-2e^{2x}}{4}+C$

A opção correta é a **(A)**.

**10.** **(I)** $\left(1+x+\frac{e^{2x}}{2}\right)'=1+\frac{2e^{2x}}{2}=1+e^{2x}$

**(II)** $\left(x+e^{2x}\right)'=1+2e^{2x}$

**(III)** $\left(\frac{2x+e^{2x}}{2}\right)'=\frac{2+2e^{2x}}{2}=1+e^{2x}$

**(IV)** $\left(\frac{x+2e^{2x}}{2}\right)'=\frac{1+4e^{2x}}{2}=\frac{1}{2}+2e^{2x}$

As duas opções que podem corresponder as expressões de duas primitivas de *f* são **(I)** e **(III)** porque $\left(1+x+\frac{e^{2x}}{2}\right)'=\left(\frac{2x+e^{2x}}{2}\right)'$.

**11.** $D_f=]0,+\infty[$ e $f(x)=\frac{1}{x}$

**11.1.** $\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx=\ln(|x|)+C$

Então, $F(x)=\ln(|x|)+C$.

Como o ponto *A*, de coordenadas $(e^2,3)$, pertence ao gráfico de *f*, tem-se:

$F(e^2)=3\Leftrightarrow\ln(e^2)+C=3\Leftrightarrow 2+C=3\Leftrightarrow C=1$

Assim, $F(x)=\ln(|x|)+1$.

Logo, $y_B=F(4)=\ln 4+1=\ln 4+\ln e=\ln(4e)$.

**11.2.** $C(x, 2)$; $x > 0$ pertence ao gráfico de *F*, então tem-se:

$F(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(|x|) + 1 = 2 \Leftrightarrow \ln(|x|) = 1 \Leftrightarrow |x| = \mathrm{e} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \mathrm{e} \vee x = -\mathrm{e}$

Como $x > 0$, então $x = \mathrm{e}$.

$C(\mathrm{e}, 2)$

$f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

As coordenadas do ponto do gráfico de *f* que tem abcissa igual à do ponto *C* são $\left(\mathrm{e}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

## Página 13 – Pratica

**12.1.** $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 4x + 2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(5 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x =$

$= \displaystyle\int 5\,\mathrm{d}x - 4\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 2\int x^{-2}\,\mathrm{d}x = 5x - 4\ln(|x|) + 2\frac{x^{-1}}{-1} + C =$

$= 5x - 4\ln(|x|) - \dfrac{2}{x} + C,\ C \in \mathbb{R}$

**12.2.** $\displaystyle\int \frac{9x^2 - 3x + 1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(9x - 3 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x =$

$= 9\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x - \int 3\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{9x^2}{2} - 3x + \ln(|x|) + C,\ C \in \mathbb{R}$

**12.3.** $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}x^{-4}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int x^{-4}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{\mathrm{e}}{3x^3} + C$

**12.4.** $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{x+1}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^x + C =$

$= \mathrm{e}^{x+1} + C,\ C \in \mathbb{R}$

**12.5.** $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} - 2\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - 2\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x =$

$= \ln(|x|) - 2\mathrm{e}^x + C,\ C \in \mathbb{R}$

**12.6.** $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^2\left(x^2 - 1\right)\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2\int \left(x^2 - 1\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2\left(\int x^2\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x\right) =$

$= \mathrm{e}^2\left(\dfrac{x^3}{3} - x + C\right) = \dfrac{\mathrm{e}^2 x^3}{3} - \mathrm{e}^2 x + C,\ C \in \mathbb{R}$

**12.7.** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x+3}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+3} + C,\ C \in \mathbb{R}$

**12.8.** $\displaystyle\int \left(2 - 5\mathrm{e}^{x+2}\right)\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{d}x - 5\int \mathrm{e}^{x+2}\,\mathrm{d}x =$

$= 2x - 5\mathrm{e}^{x+2} + C,\ C \in \mathbb{R}$

**13.** $D_f = D_g = [0, 2\pi[$; $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$

**13.1. a)** $\displaystyle\int \left(2f(x)\right)\mathrm{d}x = 2\int \sin x\,\mathrm{d}x = 2(-\cos x) + C =$

$= -2\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$

**b)** $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3}g(x)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$

**13.2.** $h(x) = f(x) + g(x)$

$\displaystyle\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(f(x) + g(x)\right)\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x =$

$= \displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$

Então, $H(x) = -\cos x + \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Como o ponto *A*, de coordenadas $\left(\dfrac{\pi}{4}, 3\right)$,

pertence ao gráfico de *H*, tem-se:

$H\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3 \Leftrightarrow -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + C = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + C = 3 \Leftrightarrow C = 3$

Assim, $H(x) = -\cos x + \sin x + 3$.

$B(\pi, h(\pi))$ e $C(\pi, H(\pi))$

$h(\pi) = f(\pi) + g(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = 0 - 1 = -1$

$H(\pi) = -\cos\pi + \sin\pi + 3 = 1 + 0 + 3 = 4$

Então, $B(\pi, -1)$ e $C(\pi, 4)$.

Donde se conclui que $\overline{BC} = 5$.

## Página 14

**14.** $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$

**14.1.** $f(2) = \dfrac{2}{2} + 2 = 3$ e $f(0) = 2$

$A_{\text{trapézio}} = \dfrac{f(0) + f(2)}{2} = \dfrac{2 + 3}{2} \times 2 = 5$

**14.2.** $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(5) + f(0)}{2} \times 5 = \frac{4{,}5 + 2}{2} \times 5 = 16{,}25$

**14.3.** $\displaystyle\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(5) + f(2)}{2} \times (5 - 2) = 11{,}25$

### Página 15 – Tarefa 2

$f(x) = x^4 e^{-x}$

**1.** Amplitude do intervalo $[2, 8]$: $8 - 2 = 6$

Pretende-se dividir o intervalo $[2, 8]$ em 10 intervalos de igual amplitude.

A amplitude de cada um desses intervalos é $6 : 10$, ou seja, 0,6.

| Intervalo | | Valor médio $t$ | Altura do retângulo $f(t)$ | Área $\int f(t)\,dt$ |
|---|---|---|---|---|
| Extremo inferior | Extremo superior | | | |
| 2 | 2,6 | 2,3 | 2,806 | 1,6836 |
| 2,6 | 3,2 | 2,9 | 3,892 | 2,3352 |
| 3,2 | 3,8 | 3,5 | 4,531 | 2,7186 |
| 3,8 | 4,4 | 4,1 | 4,683 | 2,8098 |
| 4,4 | 5 | 4,7 | 4,438 | 2,6628 |
| 5 | 5,6 | 5,3 | 3,939 | 2,3634 |
| 5,6 | 6,2 | 5,9 | 3,319 | 1,9914 |
| 6,2 | 6,8 | 6,5 | 2,684 | 1,6104 |
| 6,8 | 7,4 | 7,1 | 2,097 | 1,2582 |
| 7,4 | 8 | 7,7 | 1,592 | 0,9552 |
| **Valor aproximado de $\int_2^8 f(t)\,dt$** | | | | 20,3886 |

**2.1.** Dos valores apresentados, a melhor aproximação do integral $\int_2^8 f(t)\,dt$ é 20,345.

A opção correta é a **(B)**.

**2.2.** Adaptando o programa em Python, conclui-se que $\int_1^6 \left(\frac{x^3+2}{x}\right) dx \approx 75{,}25$.

### Página 16

**15.** $\int_1^x f(t)\,dt = 4x^3 - 3x^2 - 1$

**15.1.** $f(x) = \left(4x^3 - 3x^2 - 1\right)' = 12x^2 - 6x$

A opção correta é a **(C)**.

**15.2. a)** $\int_1^3 f(t)\,dt = 4 \times 3^3 - 3 \times 3^2 - 1 = 80$

**b)** $f(2) = 12 \times 2^2 - 6 \times 2 = 36$

### Página 17

**16.1.** $\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$

**16.2.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - (-\cos 0) =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

**17.1.** $\int_1^6 (3x-1)\,dx = \left[\frac{3x^2}{2} - x\right]_1^6 = \left(\frac{3 \times 6^2}{2} - 6\right) - \left(\frac{3 \times 1^2}{2} - 1\right) = \frac{95}{2}$

**17.2.** $\int_2^5 \left((2x-1)^2\right) dx = \int_2^5 \left(4x^2 - 4x + 1\right) dx =$

$= \left[\frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x\right]_2^5 = \left(\frac{4 \times 5^3}{3} - 2 \times 5^2 + 5\right) - \left(\frac{4 \times 2^3}{3} - 2 \times 2^2 + 2\right)$

$= 117$

**17.3.** $\int_1^6 \left((x-2)(x+2)\right) dx = \int_1^6 \left(x^2 - 4\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_1^6 =$

$= \left(\frac{6^3}{3} - 4 \times 6\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 4 \times 1\right) = \frac{587}{3}$

**17.4.** $\int_1^3 \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^3 \left(x^{-2}\right) dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 =$

$= \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{2}{3}$

**18.** Seja $A$ a área da região colorida.

$A = \int_{\frac{1}{2}}^3 \left(3 - \frac{2}{3}x\right) dx = \left[3x - \frac{x^2}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^3 =$

$= \left(3 \times 3 - \frac{3^2}{3}\right) - \left(3 \times \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3}\right) = \frac{55}{12}$

### Página 18

**19.** $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = -x + 7$

**19.1.** $A$: ponto de interseção dos gráficos de $f$ e $g$, de abcissa positiva.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = -x + 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$

Como $x_A > 0$, então $x_A = 2$.

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$. Logo, $A(2, 5)$.

**19.2.** $\text{Área} = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^5 g(x)\,dx =$

$= \int_1^2 \left(x^2+1\right) dx + \int_2^5 (-x+7)\,dx$

$= \int_1^2 x^2\,dx + \int_1^2 1\,dx - \int_2^5 x\,dx + \int_2^5 7\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + [x]_1^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5 + [7x]_2^5$

$= \left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) + (2-1) - \left(\frac{25}{2}-\frac{4}{2}\right) + (35-14)$

$= \frac{83}{6}$

**20.1.** $\int_{0,5}^5 \left(0{,}2x^2 + \frac{3x}{5}\right) dx = 0{,}2\int_{0,5}^5 x^2\,dx + \frac{3}{5}\int_{0,5}^5 x\,dx =$

$= 0{,}2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0,5}^5 + 0{,}6\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0,5}^5$

$= 0{,}2\left(\frac{5^3}{3}-\frac{0{,}5^3}{3}\right) + 0{,}6\left(\frac{5^2}{2}-\frac{0{,}5^2}{2}\right)$

$= 15{,}75$

**20.2.** $\int_1^4 \left(\frac{3}{2}x-1\right) dx = \frac{3}{2}\int_1^4 x\,dx - \int_1^4 1\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 - [x]_1^4 =$

$= \frac{3}{2}\left(8-\frac{1}{2}\right) - (4-1) = \frac{33}{4}$

**20.3.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + 3\cos x)\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx + 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$

$= 2[-\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + 3[\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 3\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 2\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2} + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

**20.4.** $\int_1^2 \left((2x+1)(2x-1)\right) dx = 2\int_1^2 \left(4x^2-1\right) dx =$

$= 4\int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 1\,dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - [x]_1^2 =$

$= 4\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) - (2-1)$

$= \frac{28}{3} - 1 = \frac{25}{3}$

**20.5.** $\int_0^{\ln 8} \left(e^{x+1}\right) dx = \int_0^{\ln 8} \left(e^x \times e\right) dx = e\int_0^{\ln 8} e^x\,dx = e\left[e^x\right]_0^{\ln 8} =$

$= e\left(e^{\ln 8} - e^0\right) = e(8-1) = 7e$

**Página 19**

**21.** $F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{5}{3}x^3 + 8x - 7$, $G(x) = 1 + \ln\left(x^2+5\right)$ e

$H(x) = 3^{2x} + 4$

**21.1. a)** $F'(x) = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{5}{3}x^3 + 8x - 7\right)' = \frac{4x^3}{2} - \frac{15}{3}x^2 + 8 =$

$= 2x^3 - 5x^2 + 8 = f(x)$

Logo, $F$ é uma primitiva da função $f$.

**b)** $G'(x) = \left(1 + \ln\left(x^2+5\right)\right)' = 0 + \frac{2x}{x^2+5} = \frac{2x}{x^2+5} = g(x)$

Logo, $G$ é uma primitiva de $g$.

**c)** $H'(x) = \left(3^{2x}+4\right)' = 3^{2x} \times (2x)' \times \ln 3 + 0 = 3^{2x} \times 2 \times \ln 3$

$= 3^{2x} \times \ln\left(3^2\right) = 3^{2x} \times \ln 9 = h(x)$

Logo, $H$ é uma primitiva de $h$.

**21.2. a)** $\int_{-1}^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^3 \left(2x^3 - 5x^2 + 8\right) dx =$

$= 2\int_{-1}^3 x^3\,dx - 5\int_{-1}^3 x^2\,dx + \int_{-1}^3 8\,dx$

$= 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^3 - 5\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^3 + [8x]_{-1}^3$

$= 2\left(\frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) - 5\left(\frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) + (24 - (-8))$

$= \frac{76}{3}$

**b)** $\int_1^2 g(x)\,dx = \int_1^2 \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \left[1 + \ln\left(x^2+5\right)\right]_1^2 =$

$= (1 + \ln 9) - (1 + \ln 6)$

$= \ln 9 - \ln 6 = \ln\frac{9}{6} = \ln 1{,}5$

**c)** $\int_{-1}^0 h(x)\,dx = \int_{-1}^0 \left(3^{2x} \times \ln 9\right) dx = \left[3^{2x} + 4\right]_{-1}^0 =$

$= (1+4) - \left(3^{-2}+4\right) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

**22.** $f(x) = -0{,}02x^3 + 0{,}25x^2 - 0{,}75x + 2$

Comprimento do painel: 8 metros

Seja $A$ área da parte da figura que fica abaixo da curva.

$$A=\int_0^8 f(x)\,dx=\int_0^8\left(-0{,}02x^3+0{,}25x^2-0{,}75x+2\right)dx=$$
$$=-0{,}02\int_0^8 x^3\,dx+0{,}25\int_0^8 x^2\,dx-0{,}75\int_0^8 x\,dx+\int_0^8 2\,dx$$
$$=-0{,}02\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^8+0{,}25\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^8-0{,}75\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^8+\left[2x\right]_0^8$$
$$=-0{,}02\left(\frac{8^4}{4}-0\right)+0{,}25\left(\frac{8^3}{3}-0\right)-0{,}75\left(\frac{8^2}{2}-0\right)+$$
$$+(16-0)=\frac{1064}{75}\approx 14{,}19$$

A área da parte da figura que fica abaixo da curva é, aproximadamente, igual a $14{,}19\ m^2$.

**23.** $f(x)=3+\cos x;\ D_f=\mathbb{R}$

**23.1.** Como $(3x+\sin x)'=3+\cos x$, conclui-se que é na opção **(D)** que está representada uma primitiva de *f*.

**23.2.** Seja *A* a área da região colorida da figura.

$$A=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}(3+\cos x)\,dx=\left[3x+\sin x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}=$$
$$=(3\pi+\sin\pi)-\left(-\pi+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=3\pi+0+\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=4\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 13{,}43$$

A área da região colorida da figura é, aproximadamente, 13,43.

**Página 20 – Pratica**

**24.1.** $\int_0^1\left(1+x^6\right)dx=\int_0^1 1\,dx+\int_0^1 x^6\,dx=\left[x\right]_0^1+\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1=$

$$=(1-0)+\left(\frac{1^7}{7}-0\right)=1+\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$$

**24.2.** $\int_1^3\left((3-x)(3+x)\right)dx=\int_1^3\left(9-x^2\right)dx=$

$$=\int_1^3 9\,dx-\int_1^3 x^2\,dx=\left[9x\right]_1^3-\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$
$$=(27-9)-\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right)=18-\frac{26}{3}=\frac{28}{3}$$

**24.3.** $\int_e^{e^4}\left(\frac{1}{x}\right)dx=\left[\ln\left(|x|\right)\right]_e^{e^4}=\ln\left(e^4\right)-\ln e=4-1=3$

**24.4.** $\int_{0,5}^5\left(0{,}3x^2+\frac{2x-1}{5}\right)dx=$

$$=0{,}3\int_{0,5}^5 x^2\,dx+\frac{2}{5}\int_{0,5}^5 x\,dx-\int_{0,5}^5\frac{1}{5}\,dx=$$
$$=0{,}3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0,5}^5+\frac{2}{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0,5}^5-\left[\frac{1}{5}x\right]_{0,5}^5$$
$$=0{,}3\left(\frac{5^3}{3}-\frac{0{,}5^3}{3}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{5^2}{2}-\frac{0{,}5^2}{2}\right)-(1-0{,}1)=16{,}5375$$

**24.5.** $\int_{-1}^2(2-x)^2\,dx=\int_{-1}^2\left(4-4x+x^2\right)dx=$

$$=\int_{-1}^2 4\,dx-4\int_{-1}^2 x\,dx+\int_{-1}^2 x^2\,dx=\left[4x\right]_{-1}^2-4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2+\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2$$
$$=(8+4)-4\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right)=9$$

**24.6.** $\int_{\ln 2}^{\ln 5}\left(e^x\right)dx=\left[e^x\right]_{\ln 2}^{\ln 5}=e^{\ln 5}-e^{\ln 2}=5-2=3$

**24.7.** $\int_1^3\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^3 x^2\,dx-\int_1^3 x^{-2}\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3-\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=8$$

**24.8.** $\int_1^4\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx=2\int_1^4\frac{1}{x}\,dx+3\int_1^4 x^{-2}\,dx=$

$$=2\left[\ln\left(|x|\right)\right]_1^4+3\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^4=2(\ln 4-\ln 1)+3\left(-\frac{1}{4}+1\right)$$
$$=2\ln 4+\frac{9}{4}=\ln 16+\frac{9}{4}$$

**25.1.** $\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^5\left(0{,}5x^2-2x+3\right)dx=$

$$=0{,}5\int_0^5 x^2\,dx-2\int_0^5 x\,dx+\int_0^5 3\,dx=0{,}5\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5-2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5+\left[3x\right]_0^5$$
$$=0{,}5\left(\frac{125}{3}-0\right)-2\left(\frac{25}{2}-0\right)+(15-0)=\frac{65}{6}\approx 10{,}83$$

A área da região colorida é, aproximadamente, igual a 10,83.

**25.2.** $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(x^3-3x+2\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^2=$

$$=\left(\frac{2^4}{4}-\frac{3\times 2^2}{2}+4\right)-0=4-6+4=2$$

A área da região colorida é igual a 2.

**25.3.** $\int_e^{e^2}\left(\frac{2}{x}\right)dx=2\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x}\right)dx=2\left[\ln\left(|x|\right)\right]_e^{e^2}=2\left[\ln\left(e^2\right)-\ln e\right]=$

$$=2(2-1)=2$$

A área da região colorida é igual a 2.

**Página 21 – Pratica**

**26.** $f(x) = -x + 2$ e $g(x) = 4 - x^2$

**26.1.** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x + 2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$f(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

Como a abcissa do ponto *A* é inferior à abcissa do ponto *B*, então $x_A = -1$ e $x_B = 2$.

$f(-1) = 3$ e $f(2) = 0$

Assim, $A(-1, 3)$ e $B(2, 0)$.

**26.2.** $\int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{2} (4 - x^2 + x - 2)\,dx =$

$= \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,dx = \left[ -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2}$

$= \left( -\dfrac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left( \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - 2 \right) = -\dfrac{8}{3} + 6 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$

A área da região colorida da figura é 4,5.

**27.** $f(x) = x^2 - 4x + 5$ e $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

**27.1.** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = -x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$

$f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 5 = 2$

$f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 2$

Os gráficos de *f* e *g* intersetam-se nos pontos de coordenadas $(1, 2)$ e $(3, 2)$.

**27.2.** $\int_{1}^{3} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{1}^{3} (-x^2 + 4x - 1 - x^2 + 4x - 5)\,dx$

$= \int_{1}^{3} (-2x^2 + 8x - 6)\,dx = \left[ -\dfrac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x \right]_{1}^{3}$

$= (-18 + 36 - 18) - \left( -\dfrac{2}{3} + 4 - 6 \right) = \dfrac{8}{3}$

A área da região colorida da figura é $\dfrac{8}{3}$.

**28.** $y = 6x - 4$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 1. Logo,

$g'(1) = 6$.

$g(1) = 6 \times 1 - 4 = 2$

$g''(x) = 6x - 2$

$\int g''(x)\,dx = \int (6x - 2)\,dx = 3x^2 - 2x + C,\ C \in \mathbb{R}$

Então, $g'(x) = 3x^2 - 2x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Como $g'(1) = 6$, tem-se:

$3 \times 1^2 - 2 \times 1 + C = 6 \Leftrightarrow C = 5$

Assim, $g'(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

$\int g'(x)\,dx = \int (3x^2 - 2x + 5)\,dx = x^3 - x^2 + 5x + d,\ d \in \mathbb{R}$

Então, $g(x) = x^3 - x^2 + 5x + d,\ d \in \mathbb{R}$.

Como $g(1) = 2$:

$1^3 - 1^2 + 5 \times 1 + d = 2 \Leftrightarrow d = -3$

Assim, $g(x) = x^3 - x^2 + 5x - 3$.

**29.** $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}6x^2 + 0{,}7x + 3{,}2$

$A(2, 0)$ e $B(7, 0)$

**29.1.** $A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC}$

$\overline{AB} = 7 - 2 = 5$

$\overline{BC} = f(7) - 0 = 0{,}1 \times 7^3 - 0{,}6 \times 7^2 + 0{,}7 \times 7 + 3{,}2 = 13$

Então, $A_{[ABCD]} = 5 \times 13 = 65$.

A área do retângulo $[ABCD]$ é 65 m$^2$.

**29.2.** $A_{\text{relvado}} = A_{[ABCD]} - A_{\substack{\text{zona} \\ \text{flores}}} = 65 - \int_2^7 f(x)\,dx$

$\int_2^7 f(x)\,dx = \int_2^7 (0{,}1x^3 - 0{,}6x^2 + 0{,}7x + 3{,}2)\,dx =$

$= \left[ 0{,}1\dfrac{x^4}{4} - 0{,}6\dfrac{x^3}{3} + 0{,}7\dfrac{x^2}{2} + 3{,}2x \right]_2^7$

$= \left( \dfrac{7^4}{40} - 0{,}2 \times 7^3 + 0{,}35 \times 7^2 + 3{,}2 \times 7 \right) -$

$- \left( \dfrac{2^4}{40} - 0{,}2 \times 2^3 + 0{,}35 \times 2^2 + 3{,}2 \times 2 \right) = 24{,}375$

$A_{\text{relvado}} = 65 - 24{,}375 = 40{,}625$

A área do relvado é igual a 40,625 m$^2$.

**30.** $f(x) = -x^2 - ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$

- 1 é um zero de *f* se $f(1) = 0$

$f(1) = 0 \Leftrightarrow -1^2 - a \times 1 + b = 0 \Leftrightarrow -1 - a + b = 0$

- $\int_0^1 f(x)\,dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(-x^2 - ax + b\right) dx = 4 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \left[-\frac{x^3}{3} - a\frac{x^2}{2} + bx\right]_0^1 = 4 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a + b\right) - 0 = 4$

  $\Leftrightarrow b = \frac{13}{3} + \frac{1}{2}a$

- Então, tem-se:

  $\begin{cases} -1 - a + b = 0 \\ b = \frac{13}{3} + \frac{1}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ a + 1 = \frac{13}{3} + \frac{1}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \frac{1}{2}a = \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{23}{3} \\ a = \frac{20}{3} \end{cases}$

**Conclusão:** $a = \frac{20}{3}$ e $b = \frac{23}{3}$

**Página 22 – Consolida**

**1.** $F(x) = x^2 \ln x + 3$

$F'(x) = \left(x^2 \ln x + 3\right)' = \left(x^2 \ln x\right)' + (3)' =$

$= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} + 0 = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1)$

A opção correta é a **(A)**.

**2.1.** $\int g(x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Seja $G$ uma primitiva de $g$.

Então, $G(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Pretende-se determinar a expressão da primitiva de $g$ que passa no ponto $(1, 0)$.

$G(1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\pi}\cos\pi + C = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\pi} \times (-1) + C = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = -\frac{1}{\pi}$

Então, $G(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) - \frac{1}{\pi}$.

**2.2.** $g(x) = \left(G(x)\right)' = \left(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) - \frac{1}{\pi}\right)' =$

$= -\frac{1}{\pi}\left(-\pi \sin(\pi x)\right) - 0 = \sin(\pi x)$

**3.** $f(x) = \frac{1}{x};\ x > 0$

$\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln\left(|x|\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Então, $F(x) = \ln\left(|x|\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Como $P\left(e^2, 5\right)$ pertence ao gráfico de $F$, tem-se:

$F\left(e^2\right) = 5 \Leftrightarrow \ln\left(e^2\right) + C = 5 \Leftrightarrow 2 + C = 5 \Leftrightarrow C = 3$

Assim, $F(x) = \ln\left(|x|\right) + 3$.

**4.** $g(x) = e^x$; $G$: primitiva de $g$

**4.1.** $\int g(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$

Então, $G(x) = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Como $\ln 5$ é o zero da função $G$, tem-se:

$G(\ln 5) = 0 \Leftrightarrow e^{\ln 5} + C = 0 \Leftrightarrow 5 + C = 0 \Leftrightarrow C = -5$

Assim, $G(x) = e^x - 5$.

**4.2.** $G(x) = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$

Como o ponto $(\ln 3, 1)$ pertence ao gráfico de $g$:

$G(\ln 3) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln 3} + C = 1 \Leftrightarrow 3 + C = 1 \Leftrightarrow C = -2$

Assim, $G(x) = e^x - 2$.

**5.** $f(x) = \frac{1}{x}$ e $D_f = \mathbb{R}^+$

$g(x) = \frac{1}{x}$ e $D_g = \mathbb{R}^-$

**5.1.** $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln\left(|x|\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Então, $F(x) = \ln\left(|x|\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Como o gráfico de $F$ passa no ponto $A(e, 5)$:

$F(e) = 5 \Leftrightarrow \ln e + C = 5 \Leftrightarrow 1 + C = 5 \Leftrightarrow C = 4$

Assim, $F(x) = \ln\left(|x|\right) + 4 \underset{x>0}{=} \ln x + 4$.

**5.2.** $\int g(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln\left(|x|\right) + C =$

$\underset{x<0}{=} \ln(-x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Então, $G(x) = \ln(-x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Como o gráfico de $G$ passa no ponto $B\left(-\frac{1}{e}, -2\right)$:

$G\left(-\frac{1}{e}\right) = -2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{e}\right) + C = -2 \Leftrightarrow -1 + C = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = -1$

Assim, $G(x) = \ln(-x) - 1$.

**6.1.** $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5$ e $f(2) = 7$

$\int (4x^3 - 6x^2 + 5)\,dx = x^4 - 2x^3 + 5x + C,\ C \in \mathbb{R}$

Então, $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

$f(2) = 7 \Leftrightarrow 16 - 16 + 10 + C = 7 \Leftrightarrow C = -3$

Assim, $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 3$.

**6.2.** $f'(x) = e^x + e$ e $f(0) = 3$

$\int (e^x + e)\,dx = e^x + ex + C,\ C \in \mathbb{R}$

Então, $f(x) = e^x + ex + C,\ C \in \mathbb{R}$.

$f(0) = 3 \Leftrightarrow 1 + 0 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2$

Assim, $f(x) = e^x + ex + 2$.

**6.3.** $f'(x) = \sin x$ e $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$

Então, $f(x) = -\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + C = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{3}{2}$

Assim, $f(x) = -\cos x + \frac{3}{2}$.

**7.1.** $\int (8x^3 + 2x)\,dx = 8\int x^3\,dx + 2\int x\,dx =$

$= 8\left(\frac{x^4}{4}\right) + 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + C = 2x^4 + x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$

**7.2.** $\int \left(\frac{6}{x^3} - \frac{2}{x}\right) dx = 6\int x^{-3}\,dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx =$

$= 6\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) - 2\ln(|x|) + C = -3x^{-2} - 2\ln(|x|) + C$

$= -\frac{3}{x^2} - 2\ln(|x|) + C,\ C \in \mathbb{R}$

**7.3.** $\int (e^{x+2})\,dx = \int (e^x \times e^2)\,dx = e^2 \int e^x\,dx = e^2(e^x) + C =$

$= e^{x+2} + C,\ C \in \mathbb{R}$

**7.4.** $\int \left(\frac{4}{x} - \cos x\right) dx = 4\int \frac{1}{x}\,dx - \int \cos x\,dx =$

$= 4\ln(|x|) - \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$

**7.5.** $\int (2\sin x - 5\cos x)\,dx = 2\int \sin x\,dx - 5\int \cos x\,dx =$

$= 2(-\cos x) - 5(\sin x) + C = -2\cos x - 5\sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$

**7.6.** $\int \left(\frac{3}{x^5}\right) dx = \int (3x^{-5})\,dx = 3\int x^{-5}\,dx =$

$= 3\left(\frac{x^{-4}}{4}\right) + C = -\frac{3}{4x^4} + C$

$= 6x^{\frac{1}{2}} + C = 6\sqrt{x} + C,\ C \in \mathbb{R}$

**8.** As funções *G*, *H* e *I* são primitivas da função *f*.

Logo, $G'(x) = H'(x) = I'(x) = f(x)$

As retas *r*, *s* e *t* são tangentes, respetivamente, aos gráficos de *G*, *H* e *I* no ponto de abcissa *a*.

Assim, $m_r = G'(a)$, $m_s = H'(a)$ e $m_t = I'(a)$, ou seja, $m_r = f(a)$, $m_s = f(a)$ e $m_t = f(a)$.

Logo, $m_r = m_s = m_t$.

Donde se conclui que as retas *r*, *s* e *t* são necessariamente paralelas.

**Página 23 – Consolida**

**9.** $F(x) = 1 + 3x - \cos x,\ D_F = \mathbb{R}$

*F* é uma primitiva de *f*.

**9.1.** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = \left[1 + 3x - \cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} =$

$= \left(1 + 6\pi - \cos(2\pi)\right) - \left(1 + \frac{3\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= 1 + 6\pi - 1 - 1 - \frac{3\pi}{2} - 0 = \frac{9\pi}{2} - 1$

**9.2.** $f(x) = F'(x) = (1 + 3x - \cos x)' = 3 + \sin x$

**10.** $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$

Seja *A* a área da região colorida da figura.

$A = \int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2\,dx =$

$= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \left(\frac{2}{3} - 0\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

**11.** $f(x) = -x^2 + 4x$ e $g(x) = x^2$; $D_f = D_g = \mathbb{R}$

**11.1.** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4x = x^2 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(-2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$A(2, g(2))$

$g(2) = 2^2 = 4$

Assim, $A(2, 4)$.

**11.2.** $\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^2 (-x^2 + 4x - x^2)\,dx =$

$= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\,dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 =$

$= \left(-\frac{16}{3} + 8\right) - 0 = \frac{8}{3}$

A área da região sombreada é igual a $\frac{8}{3}$.

**12.** $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x + 6$

**12.1.** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$

$f(2) = 2^2 = 4$ e $f(-3) = (-3)^2 = 9$

Os gráficos das funções *f* e *g* intersetam-se nos pontos de coordenadas $(-3, 9)$ e $(2, 4)$.

**12.2. a)** $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^6 g(x)\,dx =$

$= \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^6 (-x + 6)\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^2}{2} + 6x\right]_2^6 =$

$= \frac{8}{3} - 0 + \left(-\frac{6^2}{2} + 36\right) - \left(-\frac{2^2}{2} + 12\right)$

$= \frac{8}{3} + 18 - 10$

$= \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}$

A área da região sombreada da figura é $\frac{32}{3}$.

**b)** $\int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^2 (-x + 6 - x^2)\,dx =$

$= \left[-\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(-2 + 12 - \frac{8}{3}\right) - 0$

$= 10 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}$

A área da região sombreada da figura é $\frac{22}{3}$.

**13.** $f(x) = a(6x - x^2);\ a \in \mathbb{R}^+$

$\int_0^6 f(x)\,dx = 72 \Leftrightarrow \int_0^6 (a(6x - x^2))\,dx = 72 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\int_0^6 (6x - x^2)\,dx = 72 \Leftrightarrow a\left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 72$

$\Leftrightarrow a\left[\left(108 - \frac{216}{3}\right) - 0\right] = 72$

$\Leftrightarrow 36a = 72 \Leftrightarrow a = 2$

**14.** $f(x) = x^2$

*t*: reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A* de abcissa 2.

$f'(x) = 2x$ | $A(2, f(2))$

$m_t = f'(2) = 4$ | $f(2) = 2^2 = 4$, logo $A(2, 4)$

*t*: $y = 4x + b$

Como $A \in t$, tem-se:

$4 = 4 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -4$

*t*: $y = 4x - 4$

Ponto de interseção da reta *t* com o eixo $Ox$:

$0 = 4x - 4 \Leftrightarrow x = 1$

Ponto de coordenadas $(1, 0)$.

Área da região sombreada:

$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 (f(x) - (4x - 4))\,dx =$

$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_1^2$

$= \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left[\left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right)\right]$

$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

A área da região sombreada da figura é igual a $\frac{2}{3}$.

## Página 24 – Avalia: Parte 1 – Verificação rápida

**1.** $f(x) = 2x^3;\ D_f = \mathbb{R}$

*F* é uma primitiva de *f* e $F(\sqrt{2}) = 0$.

$\int f(x)\,dx = \int (2x^3)\,dx = \frac{x^4}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}$

Então, $F(x) = \frac{x^4}{2} + C;\ C \in \mathbb{R}$.

Como *F* se anula em $\sqrt{2}$, tem-se:

$$F\left(\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{2}+C=0 \Leftrightarrow 2+C=0 \Leftrightarrow C=-2$$

Assim, $F(x)=\frac{x^4}{2}-2$.

A opção correta é a **(C)**.

**2.**

- *f* é contínua e primitimável em $\mathbb{R}^+$
- *F* é uma primitiva de *f*, sendo $F(x)=\frac{x^2-x-2}{x+2}$.

$$f(x)=F'(x)=\left(\frac{x^2-x-2}{x+2}\right)'=$$
$$=\frac{(2x-1)(x+2)-\left(x^2-x-2\right)\times 1}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{2x^2+4x-x-2-x^2+x+2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

Logo, $f(1)=\frac{1+4}{(1+2)^2}=\frac{5}{9}$.

A opção correta é a **(D)**.

**3.** $D_f=]2,+\infty[$

$$f(x)=\int_2^x\left(9t^2-4t^3\right)\,\mathrm{d}t=\left[3t^3-t^4\right]_2^x=$$
$$=\left(3x^3-x^4\right)-\left(3\times 2^3-2^4\right)=3x^3-x^4-8$$

$$f'(x)=9x^2-4x^3$$

A opção correta é a **(C)**.

**4.** *G* é uma primitiva de *g*.

$G(x)=2\sqrt{2+x}$

Seja *A* a área da região sombreada da figura.

$$A=\int_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x=\left[G(x)\right]_{-1}^2=G(2)-G(-1)=$$
$$=2\sqrt{4}-2\sqrt{1}=2$$

A opção correta é a **(B)**.

**5.** **I:** $\int k\,\mathrm{d}x=kx+C,\ C\in\mathbb{R}$

**II:** $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\text{Sendo } F\\ \text{uma primitiva}\\ \text{de } f}}{=} \left[F(x)\right]_a^a=F(a)-F(a)=0$

**III:** *F* é uma primitiva de *f* e $F(x)=x^2-x$

$$\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[x^2-x\right]_3^5=\left(5^2-5\right)-\left(3^2-3\right)=$$
$$=20-6=14$$

Assim, a correspondência correta é a seguinte:

**I – b)** ; **II – a)** ; **III – b)**

**Página 25 – Avalia: Parte 2 – Questões de desenvolvimento**

**1.1.**

- $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)$
- $f(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

$$F'(x)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)\right)'=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(2\cos(2x))=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))=f(x)$$

Como $F'(x)=f(x)$, conclui-se que *F* é uma primitiva de *f*.

**1.2.** $F(x)=-\frac{1}{\ln x}$; $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$

$$F'(x)=\left(-\frac{1}{\ln x}\right)'=-\frac{0\times\ln x-1\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=-\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=$$
$$=\frac{1}{x\ln^2 x}=f(x)$$

Como $F'(x)=f(x)$, conclui-se que *F* é uma primitiva de *f*.

**2.1.** $\int\frac{x^3-2}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x^3}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}x-2\int x^{-2}\,\mathrm{d}x=$

$$=\frac{x^2}{2}-2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)+C=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$$

**2.2.** $\int(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x=\int\sin x\,\mathrm{d}x+\int\cos x\,\mathrm{d}x=$

$$=-\cos x+\sin x+C,\ C\in\mathbb{R}$$

**3.** $D_f=\mathbb{R}^+$ e $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

**3.1.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1}{x}\,\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln(|x|)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

*F*: primitiva de *f*

Então, $F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln(|x|)+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Sendo, $F(1)=0$, tem-se:

$$\frac{1^2}{2}+\ln 1+C=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+C=0 \Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$$

Assim, $F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln(|x|)-\frac{1}{2}$.

**3.2.** $\int_1^e f(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+\ln(|x|)\right]_1^e=\left(\frac{e^2}{2}+\ln e\right)-\left(\frac{1^2}{2}+\ln 1\right)=$

$$=\frac{e^2}{2}+1-\frac{1}{2}-0=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{e^2+1}{2}$$

**4.** $f(x)=x+\sin x$ e $g(x)=2+\cos x$

**4.1.** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(x+\sin x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=$

$$=\left(\frac{9\pi^2}{8}-0\right)-\left(\frac{\pi^2}{8}-0\right)=\pi^2$$

A medida da área da região do plano delimitada pelo gráfico de *f*, pelo eixo das abcissas e pelas retas $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{3\pi}{2}$ é $\pi^2$.

**4.2.** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} g(x)\,dx=$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(x+\sin x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(2+\cos x)\,dx$$

$$=\pi^2-[2x+\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\pi^2-\left[\left(3\pi+\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)-\left(\pi+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$=\pi^2-(3\pi-1)+(\pi+1)=\pi^2-3\pi+1+\pi+1=\pi^2-2\pi+2$$

A medida da área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções *f* e *g* e pelas retas $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{3\pi}{2}$ é $\pi^2-2\pi+2$.

**5.1.** $\int f(x)\,dx=\int\left(8-\frac{x^2}{3}\right)dx=\int 8\,dx-\int\frac{x^2}{3}\,dx=$

$$=8x-\frac{1}{3}\times\frac{x^3}{3}=8x-\frac{x^3}{9},\ C\in\mathbb{R}$$

**5.2.** $C(0,8)$

$$3\times 8-\int_0^3 f(x)\,dx=24-\left[8x-\frac{x^3}{9}\right]_0^3=$$

$$=24-\left(24-\frac{27}{9}\right)=3$$

A medida da área da região colorida é 3.

**Página 29 – Para Saber +**

**1.** Pretende-se determinar $\int(x^3\ln x)\,dx$, aplicando o método de primitivação por partes.

**I.** $u(x)=\ln x$; $u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=x^3$; $v(x)=\frac{x^4}{4}$

**II.** $\int(x^3\ln x)\,dx=\ln x\times\frac{x^4}{4}-\int\left(\frac{x^4}{4}\times\frac{1}{x}\right)dx$

Então: $\int(x^3\ln x)\,dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\int\frac{x^3}{4}\,dx=$

$$=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C,\ C\in\mathbb{R}$$

**2.1.** $\int(4xe^x)\,dx$

Sejam *u* e *v* funções tais que:

- $u(x)=4x$, logo $u'(x)=4$.
- $v'(x)=e^x$, logo $v(x)=e^x$.

Aplicando a fórmula de integração por partes:

$$\int(4xe^x)\,dx=4xe^x-\int(e^x\times 4)\,dx=$$
$$=4xe^x-4e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$$

**2.2.** $\int(5x\cos(3x))\,dx$

Sejam *u* e *v* funções tais que:

- $u(x)=5x$, logo $u'(x)=5$.
- $v'(x)=\cos(3x)$, logo $v(x)=\frac{1}{3}\sin(3x)$.

Aplicando a fórmula de integração por partes:

$$\int(5x\cos(3x))\,dx=$$
$$=5x\times\frac{1}{3}\sin(3x)-\int\left(\frac{1}{3}\sin(3x)\times 5\right)dx$$
$$=\frac{5}{3}x\sin(3x)-\frac{5}{3}\int\sin(3x)\,dx$$
$$=\frac{5}{3}x\sin(3x)-\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)+C$$
$$=\frac{5}{3}x\sin(3x)+\frac{5}{9}\cos(3x)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

**2.3.** $\int(x\ln x)\,dx$

Sejam *u* e *v* funções, tais que:

- $u(x)=\ln x$, logo $u'(x)=\frac{1}{x}$.
- $v'(x)=x$, logo $v(x)=\frac{x^2}{2}$.

Aplicando a fórmula de integração por partes:

$$\int (x\ln x)\,\mathrm{d}x = \ln x \times \frac{x^2}{2} - \int\left(\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C,\ C\in\mathbb{R}$$

**2.4.** $\int (3x\sin(2x))\,\mathrm{d}x$

Sejam *u* e *v* funções, tais que:

- $u(x) = 3x$, logo $u'(x) = 3$.
- $v'(x) = \sin(2x)$, logo $v(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$.

Aplicando a fórmula de integração por partes:

$$\int (3x\sin(2x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= 3x\times\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\times 3\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{2}\int\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C$$

$$= -\frac{3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x) + C,\ C\in\mathbb{R}$$

**2.5.** $\int (x^2\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$

Sejam *u* e *v* funções tais que:

- $u(x) = x^2$, logo $u'(x) = 2x$.
- $v'(x) = \mathrm{e}^x$, logo $v(x) = \mathrm{e}^x$.

Aplicando a fórmula de integração por partes:

$$\int (x^2\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int(\mathrm{e}^x\times 2x)\,\mathrm{d}x \quad (\boldsymbol{a})$$

Considerando $u_1(x) = 2x$ e $v_1'(x) = \mathrm{e}^x$, então

$u_1'(x) = 2$ e $v_1(x) = \mathrm{e}^x$.

Voltando a aplicar a fórmula de integração por partes:

$$(\boldsymbol{a}) = x^2\mathrm{e}^x - \left(2x\mathrm{e}^x - \int(\mathrm{e}^x\times 2)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C,\ C\in\mathbb{R}$$

**2.6.** $\int\left(\left(x^2+3x-4\right)\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$

Sejam *u* e *v* funções tais que:

- $u(x) = x^2+3x-4$, logo $u'(x) = 2x+3$.
- $v'(x) = \mathrm{e}^x$, logo $v(x) = \mathrm{e}^x$.

Aplicando a fórmula de integração por partes:

$$\int\left(\left(x^2+3x-4\right)\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left(x^2+3x-4\right)\mathrm{e}^x - \int\left(\mathrm{e}^x\times(2x+3)\right)\mathrm{d}x \quad (\boldsymbol{a})$$

Considerando $u_1(x) = 2x+3$ e $v_1'(x) = \mathrm{e}^x$, então

$u_1'(x) = 2$ e $v_1(x) = \mathrm{e}^x$.

Voltando a aplicar a fórmula de integração por partes, tem-se:

$$(\boldsymbol{a}) = \left(x^2+3x-4\right)\mathrm{e}^x - \left((2x+3)\mathrm{e}^x - \int\left(\mathrm{e}^x\times 2\right)\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \left(x^2+3x-4\right)\mathrm{e}^x - (2x+3)\mathrm{e}^x + 2\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^x\left(x^2+3x-4-2x-3\right) + 2\mathrm{e}^x + C$$

$$= \mathrm{e}^x\left(x^2+x-7\right) + 2\mathrm{e}^x + C = \mathrm{e}^x\left(x^2+x-5\right) + C,\ C\in\mathbb{R}$$

**3.** $D_f = ]1, +\infty[$ e $f(x) = x(x-1)^{-3}$

**3.1.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(x(x-1)^{-3}\right)\mathrm{d}x$

Sejam *u* e *v* funções tais que:

- $u(x) = x$, logo $u'(x) = 1$.
- $v'(x) = (x-1)^{-3}$, logo $v(x) = \frac{(x-1)^{-2}}{-2}$.

Aplicando a fórmula de integração por partes:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(x(x-1)^{-3}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= x\times\frac{(x-1)^{-2}}{-2} - \int\left(\frac{(x-1)^{-2}}{-2}\times 1\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x}{2}(x-1)^{-2} + \frac{1}{2}\int(x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x}{2}(x-1)^{-2} + \frac{1}{2}\times\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C$$

$$= -\frac{x}{2}(x-1)^{-2} - \frac{1}{2}(x-1)^{-1} + C,\ C\in\mathbb{R}$$

**3.2.** A área delimitada pelo gráfico de *f*, pelo eixo $Ox$ e pelas retas de equações $x=2$ e $x=4$ é dada por $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \underset{3.1.)}{=} \left[-\frac{x}{2}(x-1)^{-2} - \frac{1}{2}(x-1)^{-1}\right]_2^4 =$$

$$= \left(-\frac{4}{2}(4-1)^{-2} - \frac{1}{2}(4-1)^{-1}\right) - \left(-\frac{2}{2}(2-1)^{-2} - \frac{1}{2}(2-1)^{-1}\right)$$

$$= -\frac{2}{9} - \frac{1}{6} - \left(-1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{9} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = -\frac{4}{18} - \frac{3}{18} + \frac{27}{18} = \frac{20}{18}$$

$$= \frac{10}{9}$$