Propostas de resolução do manual

Tema 1: Matrizes

Página 32 – Tarefa inicial

1.1. A 1.ª linha representa o número de passageiros que viajaram na segunda-feira.

1.2. A 2.ª linha representa o número de passageiros que viajaram na quarta-feira.

1.3. A 3.ª linha representa o número de passageiros que viajaram na sexta-feira.

1.4. A 1.ª coluna representa o número de passageiros que partiram do Porto.

1.5. A 2.ª coluna representa o número de passageiros que partiram de Coimbra.

2.1. O elemento da 3.ª linha e da 2.ª coluna é 15 e, no contexto apresentado, representa o número de passageiros que partiram na sexta-feira de Coimbra.

2.2. A soma dos elementos da 2.ª linha é 41 $(25+16)$.

No contexto apresentado representa o número total de passageiros que partiram na quarta-feira, de Coimbra e do Porto.

2.3. A soma dos elementos da 1.ª coluna é 87 $(30+25+32)$

No contexto apresentado representa o número total de passageiros que partiram do Porto na segunda-feira, na quarta-feira e na sexta-feira.

3.1. $87\times 24=2088$. O valor apurado, durante a semana, com a venda de bilhetes dos passageiros que partiram do Porto foi de 2088 €.

3.2. De Coimbra partiram 43 $(12+16+15)$ passageiros.

$43\times 13=559$; $2088+559=2647$

O valor apurado, durante a semana, com a venda de bilhetes nas três ligações do Porto a Lisboa foi de 2647 €.

Página 33

1. $A=\begin{bmatrix}5 & 3 & 7\\ 2 & 1 & 5\\ 6 & 9 & 4\\ 4 & 7 & 8\end{bmatrix}$

1.1. **a)** A dimensão da matriz é 4×3 (4 por 3).

b) O número de elementos da matriz é 12 (4×3).

1.2. **a)** $a_{32}=9$

b) $a_{23}=5$

c) $a_{42}=7$

2.1. $M=\begin{bmatrix}81 & 70 & 95\\ 50 & 53 & 74\end{bmatrix}$

2.2. $\overline{x}_{1.^{o}\text{ semestre}}=\dfrac{81+70+95}{3}=82\ (82\%)$

$\overline{x}_{2.^{o}\text{ semestre}}=\dfrac{50+53+74}{3}=59\ (59\%)$

S_1 : 82%

S_2 : 59%

Página 34 – Tarefa 1

1.1. $A=\begin{bmatrix}42 & 53 & 27\\ 35 & 26 & 30\\ 27 & 41 & 40\end{bmatrix}$

1.2. **a)** Dimensão da matriz: 3×3 (3 por 3).

b) Número de elementos da matriz: 9

1.3. **a)** $a_{31}=27$

No contexto apresentado representa o número de limonadas de maracujá que foram vendidas, no dia de lançamento, na Loja Norte.

b) $a_{13}=27$

No contexto apresentado representa o número de hambúrgueres especiais que foram vendidos, no dia de lançamento, na Loja Sul.

c) $a_{22}=26$

No contexto apresentado representa o número de *wraps* de frango que foram vendidos, no dia de lançamento, na Loja Centro.

2.1. $B=\begin{bmatrix}42 & 53 & 27\\ 35 & 26 & 30\end{bmatrix}$

2.2. **a)** $42+53+27=122$

A soma dos elementos da primeira coluna é 122 e, no contexto apresentado, representa o

número de hambúrgueres especiais vendidos, no dia de lançamento, nas três lojas da cadeia alimentar.

b) Soma dos elementos da 2.ª coluna:

$35+26+30=91$

Soma dos elementos da 1.ª coluna: 122

$91-122=-31$

A diferença entre a soma dos elementos da 2.ª coluna e a soma dos elementos da 1.ª coluna é -31 e, no contexto apresentado, representa a diferença entre o número de *wraps* de frango e de hambúrgueres especiais vendidos, no dia de lançamento, nas três lojas da cadeia alimentar.

2.3. Loja Norte: $42+35=77$

Loja Centro: $53+26=79$

Loja Sul: $27+30=57$

Relativamente a novos produtos na área da comida, a loja que efetuou maior número de vendas foi a Loja Centro e a que efetuou menor número de vendas foi a Loja Sul.

3.1. $L=\begin{bmatrix}27 & 41 & 40\end{bmatrix}$

3.2. $C=\begin{bmatrix}53\\26\\41\end{bmatrix}$

4. $D=\begin{bmatrix}13 & 0 & 0\\0 & 23 & 0\\0 & 0 & 18\end{bmatrix}$

Da análise da matriz D, e relativamente à venda de novos produtos, constata-se que nas primeiras duas horas a Loja Norte só vendeu hambúrguer especial (13), a Loja Centro só vendeu *wrap* de frango (23) e a Loja Sul só vendeu limonada de Maracujá (18). O que nos leva a afirmar que, nas primeiras duas horas, os clientes da Loja Norte aderiram ao hambúrguer especial, os clientes da Loja Centro aderiram ao *wrap* de frango e os clientes da Loja Sul aderiram à limonada de Maracujá.

Página 35

3. $N=\begin{bmatrix}18 & 17 & 14\\12 & 13 & 10\\11 & 9 & 15\\16 & 19 & 17\end{bmatrix}$

3.1. N é uma matriz retangular.

3.2. **a)** $B=\begin{bmatrix}12 & 13 & 10\end{bmatrix}$

B é uma matriz linha.

b) $P=\begin{bmatrix}17\\13\\9\\19\end{bmatrix}$

P é uma matriz coluna.

c) $C=\begin{bmatrix}18 & 17 & 14\\12 & 13 & 10\\11 & 9 & 15\end{bmatrix}$

C é uma matriz quadrada.

d) $M=\begin{bmatrix}18 & 0 & 0\\0 & 13 & 0\\0 & 0 & 15\end{bmatrix}$

M é uma matriz diagonal.

Página 36

4.1. **a)** A matriz A representa as quantidades de cada ingrediente utilizadas nas duas fornadas diárias.

b) A matriz P representa o preço, em euros, do quilo de cada um dos ingredientes.

c) $5\times2+4\times10$ representa o custo, em euros, dos ingredientes utilizados na fornada da manhã.

d) $3\times2+2,4\times10$ representa o custo, em euros, dos ingredientes utilizados na fornada da tarde.

4.2. $50+30$ representa o custo, em euros, dos ingredientes utilizados nas duas fornadas (manhã e tarde).

Página 37 – Tarefa 2

1.1. $v_{11}+v_{12}=27+45=72$

Significa que na 1.ª sessão foram vendidos no total 72 bilhetes (com desconto e normais).

1.2. $v_{32}+v_{31}=63-22=41$

Significa que na 3.ª sessão (1.ª sessão da noite) foram vendidos mais 41 bilhetes normais do que com desconto.

1.3. $v_{11}+v_{21}+v_{31}+v_{41}=27+15+22+17=81$

Significa que no total das quatro sessões foram vendidos 81 bilhetes com desconto.

2.1. **a)** A matriz D representa o número de bilhetes com desconto vendidos em cada uma das quatro sessões.

b) A matriz N representa o número de bilhetes normais vendidos em cada uma das quatro sessões.

c) A matriz $5D$ representa o valor, em euros, obtido na venda dos bilhetes com desconto em cada uma das quatro sessões.

d) A matriz $8N$ representa o valor, em euros, obtido na venda dos bilhetes normais em cada uma das quatro sessões.

2.2. **a)** R representa o valor, em euros, obtido na venda dos dois tipos de bilhetes (com desconto e normais) em cada uma das quatro sessões.

b) $R=\begin{bmatrix}5\times27+8\times45\\5\times15+8\times76\\5\times22+8\times63\\5\times17+8\times82\end{bmatrix}$, ou seja, $R=\begin{bmatrix}495\\683\\614\\741\end{bmatrix}$

c) $495+683+614+741=2533$

O resultado da venda de bilhetes nas quatro sessões foi $2533\,€$.

Página 38 - Pratica

5.1. $A=\begin{bmatrix}250&250&6\\140&80&8\end{bmatrix}$

5.2. **a)** $a_{12}=250$

Significa a quantidade de farinha (em g) utilizada na receita I.

b) $a_{23}=8$

Significa o número de ovos utilizados na receita II.

c) $a_{21}=140$

Significa a quantidade de açúcar (em g) utilizada na receita II.

6. A matriz retangular P, de dimensão 2×4, que traduz a informação apresentada na tabela é a seguinte:

$$P=\begin{bmatrix}12&9&16&14\\15&14&8&12\end{bmatrix}$$

6.1. A soma dos elementos da 1.ª linha da matriz representa o número de raparigas nas quatro turmas do 12.º ano.

6.2. A soma dos elementos da 2.ª coluna da matriz representa o número de alunos da turma T_2 do 12.º ano.

6.3. $a_{21}-a_{11}=3\rightarrow$ indica que a turma T_1 tem mais 3 rapazes do que raparigas.

6.4. $a_{21}-a_{13}=-8\rightarrow$ indica que a turma T_3 tem menos 8 rapazes do que raparigas.

7. $A=\begin{bmatrix}2&1\\4&-2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&6&3\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}2&7\end{bmatrix}$

$D=\begin{bmatrix}0&0&4\\0&3&0\\7&0&0\end{bmatrix}$ $E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $F=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

7.1. Matriz de ordem 2: A

7.2. Matriz identidade: E

7.3. Matriz linha: C

7.4. Matriz coluna: F

8. Os elementos da diagonal principal de uma matriz identidade são iguais a 1. Se a soma dos elementos da diagonal principal é igual a 6, então a matriz é de ordem 6.

Assim sendo, tem 36 (6×6) elementos e desses há 30 $(36-6)$ que são iguais a 0 (zero).

A opção correta é a **(C)**.

Página 39

9. Para garantir o *stock* desejado terão de ser encomendados 3 blusões do tamanho S, 4 camisas do tamanho S, 8 blusões do tamanho M, 6 camisas do tamanho M, 2 blusões do tamanho L, 4 camisas do tamanho L, 1 blusão do tamanho XL e 0 camisas do tamanho XL.

Seja A a matriz que representa a encomenda dos artigos.

$$B=\begin{bmatrix}3 & 8 & 2 & 1\\ 4 & 6 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

10. Há três tipos de bilhetes, referentes ao setor 1, Setor 2 e Setor 3.

Seja D a matriz que representa a distribuição dos espectadores por setor.

Como D é uma matriz diagonal, então é do tipo

$$D=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}.$$

Sabe-se que:

- O elemento que corresponde à interseção das duas diagonais é 92, ou seja, $b=92$.
- O primeiro e último elementos da diagonal principal são iguais, ou seja, $a=c$.
- A soma dos elementos da diagonal principal é igual a 200, ou seja, $a+b+c=200$.

Então, tem-se:

$a+92+a=200 \Leftrightarrow 2a=108 \Leftrightarrow a=54$

Logo, $D=\begin{bmatrix}54 & 0 & 0\\ 0 & 92 & 0\\ 0 & 0 & 54\end{bmatrix}$.

Percentagem de espectadores em cada um dos setores.

- **Setor 1:** $\frac{54}{200}\times 100\%=27\%$
- **Setor 2:** $\frac{92}{200}\times 100\%=46\%$
- **Setor 3:** 27%

Tema 2: Operações com matrizes de números reais

Página 40 – Tarefa inicial

1. **Matriz *C***

1.ª linha: $2\times 2+2\times 1{,}5+1\times 1=8$

2.ª linha: $3\times 2+0\times 1{,}5+2\times 1=8$

3.ª linha: $1\times 2+2\times 1{,}5+1\times 1=6$

4.ª linha: $3\times 2+2\times 1{,}5+2\times 1=11$

2.1. Cada linha da matriz C representa o preço, em euros, de cada um dos quatro ramos que a florista preparou.

2.2. A soma dos elementos da coluna da matriz C representa o preço, em euros, dos quatro ramos que a florista preparou.

Página 41

11.1. $C=A+B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 6\\ 7 & 3\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}2+1 & 5+1\\ 0+2 & 3+6\\ -1+7 & 1+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 9\\ 6 & 4\end{bmatrix}$

11.2. $C=A+A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}2+2 & 5+5\\ 0+0 & 3+3\\ -1+(-1) & 1+1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4 & 10\\ 0 & 6\\ -2 & 2\end{bmatrix}$

11.3. $C=B+B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 6\\ 7 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 6\\ 7 & 3\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}1+1 & 1+1\\ 2+2 & 6+6\\ 7+7 & 3+3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 4 & 12\\ 14 & 6\end{bmatrix}$

12. $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & a\\ 3 & b & 1\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix}$

- $A+B=C$
- $b_{13}=2$ e $b_{22}=3$

12.1. $a_{13}+b_{13}=c_{13} \Leftrightarrow a+2=3 \Leftrightarrow a=1$

$-1+4+1=4$

A soma dos elementos da primeira linha da matriz A é 4.

12.2. $a_{22}+b_{22}=c_{22} \Leftrightarrow b+3=5 \Leftrightarrow b=2$

$4+2=6$

A soma dos elementos da segunda coluna da matriz A é 6.

12.3. $a_{11}+b_{11}=c_{11} \Leftrightarrow -1+b_{11}=2 \Leftrightarrow b_{11}=3$

$a_{21}+b_{21}=c_{21} \Leftrightarrow 3+b_{21}=1 \Leftrightarrow b_{21}=-2$

$b_{11}+b_{21}=3+(-2)=1$

A soma dos elementos da primeira coluna da matriz B é 1.

Página 42

13.1. $-A=-\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}-2 & -5\\ -3 & -1\\ 0 & -4\end{bmatrix}$

13.2. Seja E a matriz pedida.

$$B+E=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1\\0\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1+a\\0+b\\3+c\\1+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Então:

$-1+a=1 \wedge b=1 \wedge 3+c=1 \wedge 1+d=1$

$\Leftrightarrow a=2 \wedge b=1 \wedge c=-2 \wedge d=0$

Logo, $E=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\\0\end{bmatrix}$.

13.3. $A+D+A=O$, sendo O a matriz nula.

$\Leftrightarrow A+A+D=O$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}2 & 5\\3 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 5\\3 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}+D=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}4 & 10\\6 & 2\\0 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12}\\d_{21} & d_{22}\\d_{31} & d_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}_{(\text{Nota 1})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}4+d_{11} & 10+d_{12}\\6+d_{21} & 2+d_{22}\\0+d_{31} & 8+d_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Então, tem-se:

$4+d_{11}=0 \wedge 10+d_{12}=0 \wedge 6+d_{21}=0 \wedge d_{31}=0$
$\wedge 8+d_{32}=0$

$\Leftrightarrow d_{11}=-4 \wedge d_{12}=-10 \wedge d_{21}=-6 \wedge d_{22}=-2 \wedge d_{31}=0$
$\wedge d_{32}=-8$

Logo, $D=\begin{bmatrix}-4 & -10\\-6 & -2\\0 & -8\end{bmatrix}$.

Nota 1: Repara que D é a matriz simétrica da matriz $A+A$.

14. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\\1 & -2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\3 & 2\\-2 & 0\end{bmatrix}$

$A+C+B=O$ O: matriz nula

$\Leftrightarrow A+B+C=O \Leftrightarrow C=-(A+B)$

$$\Leftrightarrow C=-\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\\1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\3 & 2\\-2 & 0\end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow C=-\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 5\\-1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C=\begin{bmatrix}-1 & -2\\-3 & -5\\1 & 2\end{bmatrix}$$

Página 43

15.1. $C=A-B=A+(-B)$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 4 & 0\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\-1 & -2 & 1\\0 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\2 & 2 & 1\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

15.2. $C=B-A=B+(-A)$

$$C=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\1 & 2 & -1\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\-3 & -4 & 0\\0 & -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\-2 & -2 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

15.3. I_3 : Matriz identidade de ordem 3

$$A-C=I_3 \Leftrightarrow A-I_3=C \Leftrightarrow A+(-I_3)=C$$

$$C=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&4&0\\0&1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\3&3&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

16. $V=\begin{bmatrix}13&8\\15&10\\27&20\end{bmatrix}$

A matriz V representa o número de vendas, em cada uma de três semanas, s_1, s_2 e s_3, de dois produtos A e B.

A matriz D representa o total de vendas de cada produto nas duas primeiras semanas.

$$D=\begin{bmatrix}13+15&8+10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28&18\end{bmatrix}$$

A matriz T representa as vendas de cada um dos produtos na terceira semana.

$$T=\begin{bmatrix}27&20\end{bmatrix}$$

$$T-D=T+(-D)=\begin{bmatrix}27&20\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-28&-18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\end{bmatrix}$$

No contexto apresentado, -1 indica que na terceira semana foi vendida menos uma unidade do produto A relativamente às duas primeiras semanas e 2 indica que na terceira semana foram vendidas mais duas unidades do produto B relativamente às duas primeiras semanas.

Página 44

17. $A=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&5&3\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&-1\end{bmatrix}$

17.1. $A+2B=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&5&3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&-1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&5&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\times2&2\times0&2\times1\\2\times1&2\times3&2\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&5&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&0&2\\2&6&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3&6\\4&11&1\end{bmatrix}$$

17.2. $-2B-A=-2\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&3&4\\2&5&3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-2\times2&-2\times0&-2\times1\\-2\times1&-2\times3&-2\times(-1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-3&-4\\-2&-5&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4&0&-2\\-2&-6&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-3&-4\\-2&-5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-3&-6\\-4&-11&-1\end{bmatrix}$$

18.1. Seja C a matriz que representa os preços dos produtos, P_1 e P_2, nas lojas A e B, se tiverem um desconto de 25%.

$100\%-25\%=75\%\ \ (0,75)$

Então, $C=0,75\times A=0,75\times\begin{bmatrix}20&14\\24&10\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0,75\times20&0,75\times14\\0,75\times24&0,75\times10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&10,5\\18&7,5\end{bmatrix}$$

18.2. Seja D a matriz que representa os preços dos produtos, P_1 e P_2, nas lojas A e B, se tiverem um aumento de 10%.

$100\%+10\%=110\%\ \ (1,10)$

Então,

$$D=1,10\times A=1,10\times\begin{bmatrix}20&14\\24&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,10\times20&1,10\times14\\1,10\times24&1,10\times10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}22&15,4\\26,4&11\end{bmatrix}$$

Página 45

19. $A=\begin{bmatrix}3&1&2\end{bmatrix}$

$$B=\begin{bmatrix}5\\7\\3\end{bmatrix}$$

19.1. a) A matriz A representa quantidade de cada um dos três artigos (bloco de notas, calculadora e esferográfica) que a Inês comprou.

b) A matriz B representa o preço, em euros, de cada unidade dos artigos (bloco de notas, calculadora e esferográfica) que a Inês comprou.

19.2. $C = A \times B =$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 5 + 1 \times 7 + 2 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 \end{bmatrix}$$

O único elemento da matriz C é 28 e representa o preço total, em euros, dos artigos que a Inês comprou.

19.3. $D = B \times A = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 3 & 5 \times 1 & 5 \times 2 \\ 7 \times 3 & 7 \times & 7 \times 2 \\ 3 \times 3 & 3 \times & 3 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 21 & 7 & 14 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$15 + 7 + 6 = 28$

A soma dos elementos da diagonal principal representa o preço total, em euros, dos artigos que a Inês comprou.

Página 46

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;

$C = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

20.1. Não existe uma matriz que seja o resultado de $B \times A$, porque o número de colunas da matriz B não é igual ao número de linhas da matriz A.

20.2. a) O produto $A \times B$ é possível porque o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 3 \times 1 + 5 \times 3 & 1 \times 4 + 3 \times 0 + 5 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 9 \end{bmatrix}$$

b) O produto $C \times A$ não é possível porque o número de colunas da matriz C não é igual ao número de linhas da matriz A.

c) O produto $B \times C$ é possível porque o número de colunas da matriz B é igual ao número de linhas da matriz C.

$$B \times C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 7 + 4 \times 2 & 2 \times 4 + 4 \times 5 \\ 1 \times 7 + 0 \times 2 & 1 \times 4 + 0 \times 5 \\ 3 \times 7 + 1 \times 2 & 3 \times 4 + 1 \times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 7 & 4 \\ 23 & 17 \end{bmatrix}$$

d) O produto $D \times C$ não é possível porque o número de colunas da matriz D não é igual ao número de linhas da matriz C.

e) O produto $B \times D$ é possível porque o número de colunas da matriz B é igual ao número de linhas da matriz D.

$$B \times D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 4 \times 5 & 2 \times 4 + 4 \times 0 & 2 \times 1 + 4 \times 3 \\ 1 \times 2 + 0 \times 5 & 1 \times 4 + 0 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 3 \\ 3 \times 2 + 1 \times 5 & 3 \times 4 + 1 \times 0 & 3 \times 1 + 1 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 8 & 14 \\ 2 & 4 & 1 \\ 11 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

f) O produto $C \times D$ é possível porque o número de colunas da matriz C é igual ao número de linhas da matriz D.

$$C \times D = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \times 2 + 4 \times 5 & 7 \times 4 + 4 \times 0 & 7 \times 1 + 4 \times 3 \\ 2 \times 2 + 5 \times 5 & 2 \times 4 + 5 \times 0 & 2 \times 1 + 5 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 34 & 28 & 19 \\ 29 & 8 & 17 \end{bmatrix}$$

g) O produto $C \times B$ não é possível porque o número de colunas da matriz C não é igual ao número de linhas da matriz B.

Página 47 – Tarefa 5

1.1. $E = A \times B$ e $F = B \times A$

Como A é uma matriz de dimensão 3×2 e B é uma matriz de dimensão 2×3, então E é uma matriz de dimensão 3×3 e F é uma matriz de dimensão 2×2. Logo, $E \neq F$.

1.2. $E \neq F$, por **1.1.**, ou seja, $A \times B \neq B \times A$.
Logo, a multiplicação de matrizes não é comutativa.

1.3. $C \times D = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 5\times1+3\times2 & 5\times4+3\times7 \\ 6\times1+2\times2 & 6\times4+2\times7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 11 & 41 \\ 10 & 38 \end{bmatrix}$

$D \times C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1\times5+4\times6 & 1\times3+4\times2 \\ 2\times5+7\times6 & 2\times3+7\times2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 29 & 11 \\ 52 & 20 \end{bmatrix}$

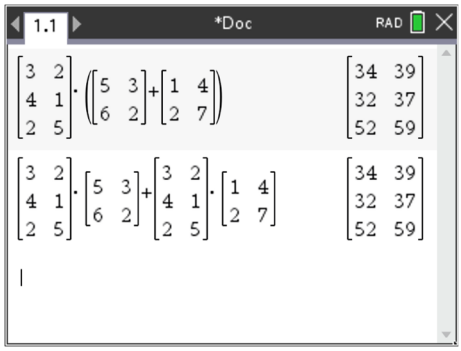
Donde se conclui que $C \times D \neq D \times C$.

2.1. **a)** $A \times (C + D)$ representa uma matriz de dimensão 3×2

b) Não é possível adicionar as matrizes A e C porque têm dimensões diferentes.
Logo, $B \times (A + C)$ não representa uma matriz.

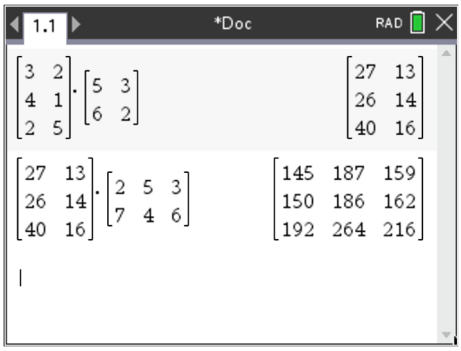
c) $(A \times C) \times B$ representa uma matriz de dimensão 3×3.

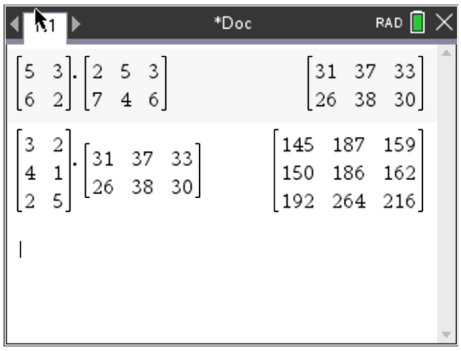
2.2. **a)** Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que
$A \times (C + D) = (A \times C) + (A \times D)$.

b) Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:





Donde se conclui que $(A \times C) \times B = A \times (C \times B)$.

3. $k \in \mathbb{R}$

- $k(C \times D) = k \begin{bmatrix} 11 & 41 \\ 10 & 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11k & 41k \\ 10k & 38k \end{bmatrix}$
- $(kC) \times D = \begin{bmatrix} 5k & 3k \\ 6k & 2k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 5k+6k & 20k+21k \\ 6k+4k & 24k+14k \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 11k & 41k \\ 10k & 38k \end{bmatrix}$

- $C \times (kD) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k & 4k \\ 2k & 7k \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 5k+6k & 20k+21k \\ 6k+4k & 24k+14k \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 11k & 41k \\ 10k & 38k \end{bmatrix}$

Donde se conclui que
$k(C \times D) = (kC) \times D = C \times (kD)$

Página 48 – Pratica

21. $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 4 & 1 & -5\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3 & -2 & -3\\ 2 & 7 & 4\end{bmatrix}$;

$C=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$

21.1. a) $A+B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 4 & 1 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -2 & -3\\ 2 & 7 & 4\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 6 & 8 & -1\end{bmatrix}$

b) $B-A=\begin{bmatrix}3 & -2 & -3\\ 2 & 7 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 4 & 1 & -5\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}3 & -2 & -3\\ 2 & 7 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -3 & -2\\ -4 & -1 & 5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4 & -5 & -5\\ -2 & 6 & 9\end{bmatrix}$

c) $C\times B=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -2 & -3\\ 2 & 7 & 4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}5\times3-3\times2 & 5\times(-2)-3\times7 & 5\times(-3)-3\times4\\ -2\times3+4\times2 & -2\times(-2)+4\times7 & -2\times(-3)+4\times4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9 & -31 & -27\\ 2 & 32 & 22\end{bmatrix}$

21.2. $D=C\times A=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 4 & 1 & -5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}5\times(-1)+(-3)\times4 & 5\times3-3\times1 & 5\times2-3\times(-5)\\ -2\times(-1)+4\times4 & -2\times3+4\times1 & -2\times2+4\times(-5)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-17 & 12 & 25\\ 18 & -2 & -24\end{bmatrix}$

Matriz simétrica de D:

$-D=\begin{bmatrix}17 & -12 & -25\\ -18 & 2 & 24\end{bmatrix}$

22.1. $T=T_1+T_2=$

$=\begin{bmatrix}30 & 20\\ 35 & 25\\ 40 & 45\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15 & 28\\ 20 & 25\\ 30 & 20\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}45 & 48\\ 55 & 50\\ 70 & 65\end{bmatrix}$

a) Soma dos elementos da primeira linha de T:

$45+48=93$

Representa o número de bilhetes que foram distribuídos pelos alunos do 2.º Ciclo nas duas semanas.

b) Soma dos elementos da segunda coluna de T:

$48+50+65=163$

Representa o número de bilhetes do tipo balcão (B) que foram distribuídos aos alunos das escolas da localidade nas duas semanas.

22.2. a) $S=T_2-T_1$

$s_{12}=28-20=8$

Significa que na 2.ª semana foram distribuídos mais 8 bilhetes do tipo balcão (B) aos alunos do 2.º ciclo do que na 1.ª semana.

b) $s_{21}=20-35=-15$

Significa que na 2.ª semana foram distribuídos menos 15 bilhetes do tipo plateia (P) aos alunos do 3.º ciclo do que na 1.ª semana.

c) $s_{22}=25-25=0$

Significa que na 1.ª e na 2.ª semana foram distribuídos o mesmo número de bilhetes do tipo balcão (B) aos alunos do 3.º ciclo.

23.1. a) $A\times B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 7\\ 1 & 4 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}2\times2-3\times(-1)+7\times1\\ 1\times2+4\times(-1)+(-1)\times1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}14\\ -3\end{bmatrix}$

b) $B\times C=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 5 & 1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}2\times2 & 2\times5 & 2\times1\\ -1\times2 & -1\times5 & -1\times1\\ 1\times2 & 1\times5 & 1\times1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4 & 10 & 2\\ -2 & -5 & -1\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}$

$D-B\times C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 10 & 2\\ -2 & -5 & -1\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -10 & -2\\ 2 & 5 & 1\\ -2 & -5 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -10 & 1\\ 1 & 6 & 3\\ -2 & -2 & -3\end{bmatrix}$

c) $C\times D=\begin{bmatrix}2 & 5 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2\times2+5\times(-1)+1\times0 & 2\times0+5\times1+1\times3 & 2\times3+5\times2+1\times(-2)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1 & 8 & 14\end{bmatrix}$

23.2. a) A é uma matriz de dimensão 2×3 e $B\times C$ é uma matriz de dimensão 3×3.

$A+B\times C$ não representa uma matriz porque as matrizes A e $B\times C$ têm dimensões diferentes.

b) $A\times D$ é uma matriz de dimensão 2×3 e A é uma matriz de dimensão 2×3, logo $(A\times D)-A$ representa uma matriz de dimensão 2×3.

Página 49 – Pratica

24.1. $-2A=-2\times\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -6 & 2\\ -2 & -8 & 0\end{bmatrix}$

$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$C\times(-2A)=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-4 & -6 & 2\\ -2 & -8 & 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4\times(-4)+1\times(-2) & 4\times(-6)+1\times(-8) & 4\times2+1\times0\\ -1\times(-4)+3\times(-2) & -1\times(-6)+3\times(-8) & -1\times2+3\times0\\ 1\times(-4)+2\times(-2) & 1\times(-6)+2\times(-8) & 1\times2+2\times0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-18 & -32 & 8\\ -2 & -18 & -2\\ -8 & -22 & 2\end{bmatrix}$

Então,

$C\times(-2A)+I_3=\begin{bmatrix}-18 & -32 & 8\\ -2 & -18 & -2\\ -8 & -22 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}-17 & -32 & 8\\ -2 & -17 & -2\\ -8 & -22 & 3\end{bmatrix}$

24.2. a) $(A\times C)-B$ é uma matriz de dimensão 2×2

b) $C\times(B\times A)$ é uma matriz de dimensão 3×3

25. $A=\begin{bmatrix}a & 2\\ 1 & b\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -1 & b\\ a & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a & -a & ab+2\\ 1+ab & -1 & 2b\end{bmatrix}$

Sabendo que $A\times B==\begin{bmatrix}-6 & 2 & -4\\ -5 & -1 & 6\end{bmatrix}$:

$\begin{cases}3a=6\\ -a=2\\ ab+2=-4\\ 1+ab=-5\\ 2b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=3\end{cases}$

$a=-2$ e $b=3$

Tema 3: Aplicações às transformações geométricas

Página 50 – Tarefa inicial

1. $\overline{OB}=1$

$B\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, ou seja, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

A opção correta é a **(D)**.

2. $A=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}\rightarrow$

$\rightarrow$ representa as coordenadas do ponto B

Página 51

26.1. $A'=A+T=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

26.2. $B'=B+T=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 0\end{bmatrix}$

26.3. $C'=C+T$, logo $C=C'-T$.

$C=\begin{bmatrix}0\\ -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 0\end{bmatrix}$

27. $U=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ e $A=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$A=B+U$, logo $B=A-U$.

$$B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$$

Página 52

28. $A(3,-1)$, $B(0,2)$ e $C(-2,-3)$

$$A=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \text{ e } C=\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}$$

Matriz de transformação: $T=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$$A'=T\times A=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}$$

$$B'=T\times B=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$$

$$C'=T\times C=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$$

Então, $A'(6,1)$, $B'(0,-2)$ e $C'(-4,3)$.

29. $T=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$

Seja $P(x,y)$, então $P=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

$$P'=T\times P=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x\\2y\end{bmatrix}$$

$P'(3x,2y)$

P' é a imagem de P por T.

A abscissa triplicou e a ordenada duplicou.

Página 53 – Tarefa 4

1. (Se $a=1$ a figura na horizontal mantém as dimensões)

$P(x,y)\rightarrow P'(1x,by)$

1.1. Fica invariante.

1.2. Na vertical sofre uma contração de fator *b*.

1.3. Na vertical sofre um alongamento de fator *b*.

1.4. A figura mantém as dimensões e sofre uma reflexão de eixo Ox.

1.5. A figura sofre uma reflexão de eixo Ox seguida de uma contração de fator $|b|$.

1.6. A figura sofre uma reflexão de eixo Ox seguida de um alongamento na vertical de fator $|b|$.

2. (Se $b=1$ a figura na vertical mantém as dimensões)

$P(x,y)\rightarrow P'(ax,1y)$

2.1. Fica invariante.

2.2. Na horizontal sofre uma contração de fator *a*.

2.3. Na vertical sofre um alongamento de fator *a*.

2.4. A figura sofre uma reflexão de eixo Oy.

2.5. A figura sofre uma reflexão de eixo Oy seguida de uma contração na horizontal de fator $|a|$.

2.6. A figura sofre uma reflexão de eixo Oy seguida de um alongamento na horizontal de fator $|a|$.

3. Por observação da figura transformada verifica-se que teve alongamento na horizontal $a>1$ (de fator 4) e alongamento na vertical $b>1$ (de fator 2).

Opção **(A)**

Página 54 – Tarefa 5

1. Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer do quadrado $[ABCD]$.

1.1. a) $P'=S\times P=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\y\end{bmatrix}$

Assim, as abcissas duplicam e as ordenadas mantêm-se. Não mantém a forma (usar recurso).

b) $P'=S\times P=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\2y\end{bmatrix}$

As abcissas mantêm-se e as ordenadas duplicam. Não mantém a forma (usar recurso).

c) $P' = S \times P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y \end{bmatrix}$

As abcissas triplicam e as ordenadas duplicam. Não mantém a forma (usar recurso).

d) $P' = S \times P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5x \\ 1,5y \end{bmatrix}$

Assim, as abcissas reduzem-se a metade e as ordenadas multiplicam por 1,5. Não mantém a forma (usar recurso).

1.2. a) $P' = S \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Assim, as abcissas e as ordenadas mantêm-se. Mantém a forma.

b) $P' = S \times P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$

Assim, as abcissas e as ordenadas duplicam. Mantém a forma.

c) $P' = S \times P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5x \\ 0,5y \end{bmatrix}$

Assim, as abcissas e as ordenadas reduzem-se a metade. Mantém a forma.

d) $P' = S \times P = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x \\ -3y \end{bmatrix}$

Assim, as abcissas e as ordenadas passam para o triplo em sentido oposto. Mantém a forma.

2. $A(3, 3)$, $F(-2, -2)$ e $O(0, 0)$

O quadrado $[ABCD]$ tem lado 6 e o quadrado $[EFGH]$ tem lado 4.

2.1. A matriz de transformação que aplica o quadrado $[ABCD]$ no quadrado $[EFGH]$ é $S = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

As abcissas e as ordenadas reduzem para $\frac{2}{3}$ das iniciais.

2.2. A matriz de transformação que aplica o quadrado $[EFGH]$ no quadrado $[ABCD]$ é $S = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

As abcissas e as ordenadas ampliam para $\frac{3}{2}$ das iniciais.

Página 55

30. $P(-2, 1) \rightarrow$ representado por $P = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

30.1. a) $P' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $P'(1, 1)$

b) $P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$; $P'(-2, 5)$

30.2. $Q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

P é imagem de q pela transformação de matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$.

$P = T \times Q$

$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0,5x + y \end{bmatrix}$

Então, $x = -2 \wedge 0,5x + y = 1$, ou seja,

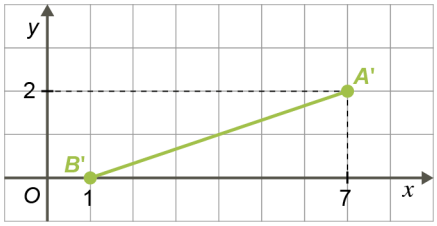
$x = -2 \wedge y = 2$.

Logo, $Q = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

31. $[AB]$, sendo $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

31.1. $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

$B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



31.2. a) $[AB]$ e $[A'B']$ não são paralelos.

b) $[AB]$ e $[A'B']$ não têm o mesmo comprimento $\left(\overline{A'B'} > \overline{AB}\right)$.

Página 56 – Tarefa 6

1.1. Cada ponto da figura original sofre um deslocamento (para a direita) mantendo a ordenada.

1.2. Cada ponto da figura original sofre um deslocamento (para a esquerda) mantendo a ordenada.

2.1. Cada ponto da figura original sofre um deslocamento (para cima) mantendo a ordenada.

2.2. Cada ponto da figura original sofre um deslocamento (para baixo) mantendo a ordenada.

3. $(2, 4) \rightarrow (2, 1)$

Manteve a abcissa então a matriz de transformação é o tipo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2b+4 \end{bmatrix}$$

Então $2b + 4 = 1 \Leftrightarrow b = -\frac{3}{2}$.

Opção **(D)**

Página 57 – Tarefa 7

1. Seja P, de coordenadas, (x, y) um ponto qualquer do quadrado $[OABC]$.

1.1. $P' = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1,5y \\ y \end{bmatrix}$

Cada ponto da figura original sofre um deslocamento paralelo a Ox e de amplitude proporcional à ordenada. Não mantém a forma.

1.2. $P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 3x+y \end{bmatrix}$

Cada ponto da figura original sofre um deslocamento paralelo a Oy e de amplitude proporcional à abcissa. Não mantém a forma.

1.3. $P' = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+0,5y \\ y \end{bmatrix}$

Cada ponto da figura original sofre um deslocamento paralelo a Ox e de amplitude proporcional à ordenada. Não mantém a forma.

1.4. $P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1,8 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1,8x+y \end{bmatrix}$

Cada ponto da figura original sofre um deslocamento paralelo a Oy e de amplitude proporcional à abcissa. Não mantém a forma.

2. $A(0, 3)$; $B(2, 0)$ e $C(4, 3)$

$[A'B'C']$ é a imagem de $[ABC]$ pela matriz de transformação $T = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $k \in \mathbb{R}$.

2.1. $k = 1,5$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A'(4,5; 3)$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$B'(2; 0)$

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$C'(8,5; 3)$

$$A_{[ABC]} = \frac{(4-0)\times 3}{2} = 6$$

$$A_{[A'B'C']} = \frac{(8,5-4,5)\times 3}{2} = 6$$

Os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ têm a mesma área.

As áreas são iguais.

2.2. $k = 0,5$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

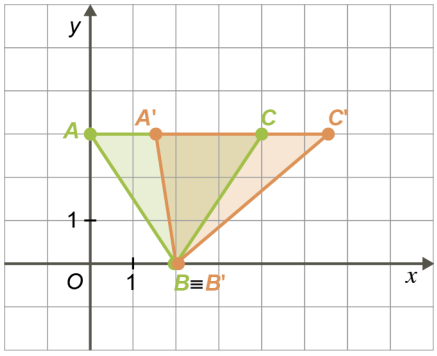
$A'(1{,}5;\ 3)$

$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$B'(2;\ 0)$

$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}5 \\ 3 \end{bmatrix}$

$C'(5{,}5;\ 3)$



$A_{[ABC]} = 6$

$A_{[A'B'C']} = \dfrac{(5{,}5 - 1{,}5) \times 3}{2} = 6$

As áreas são iguais.

Página 58

32. $A(4, -2)$

32.1. *A'* é a imagem de *A* pela rotação de centro *O* e amplitude $\frac{\pi}{2}$.

$A' = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Então, $A'(2, 4)$.

32.2. *A'* é a imagem de *A* pela rotação de centro *O* e amplitude $\frac{3\pi}{2}$.

$A' = \begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{2} & -\sin\frac{3\pi}{2} \\ \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$

Então, $A'(-2, -4)$.

32.3. *A'* é a amplitude de *A* pela rotação de centro *O* e amplitude $\frac{\pi}{4}$.

$A' = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Então, $A'(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

32.4. *A'* é a imagem de *A* pela rotação de centro *O* e amplitude $\frac{\pi}{6}$.

$A' = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} + 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Então, $A'(2\sqrt{3} + 1, 2 - \sqrt{3})$.

33. $B(-1, 2)$

33.1. $B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Então, $B'(2, 1)$.

33.2. $B' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 \end{bmatrix}$

Então, $B'\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$.

34. $[ABCDEF]$ é um hexágono regular. $A(\sqrt{3}, 1)$

Matriz de transformação:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B = R \times A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = R \times B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = R \times C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$E = R \times D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$F = R \times E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Então:

$B(0, 2)$, $C(-\sqrt{3}, 1)$, $D(-\sqrt{3}, -1)$, $E(0, -2)$ e $F(\sqrt{3}, -1)$.

Página 59 – Tarefa 8

1. $A(1, 2)$ e $B(3, 1)$

1.1. a) $B' = R_{Ox} \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $B'' = R_{Oy} \times B' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

1.2. a) $B = R_{Oy} \times R_{Ox} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1\times1+0\times0 & -1\times0+0\times(-1) \\ 0\times1+1\times0 & 0\times0+1\times(-1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) Seja *B'''* a imagem de *B* pela transformação *C*.

$B''' = C \times B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$B''' = B''$

A imagem de *B* pela transformação *C* é *B''*.

Página 60

35.1. $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

e $T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

35.2. a) Para obter a matriz que representa a imagem do ponto *A* pela translação de vetor $\vec{t}$ basta somar a matriz *A* com a matriz *T*.

b) Para obter a matriz que representa a imagem de *B* pela translação de vetor $\vec{t}$ basta somar a matriz *B* com a matriz *T*.

c) Para obter a matriz que representa o ponto cuja imagem é *C* basta somar a matriz *C* com a simétrica da matriz *T*.

d) Para obter a matriz que representa o ponto cuja imagem é *A* basta somar a matriz *A* com a simétrica da matriz *T*.

36. $P=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\rightarrow P'=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ tal que:

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

36.1. A transformação geométrica é uma translação de vetor $\vec{t}(3,-1)$.

36.2. $A(1,2)$ e é a imagem de P pela translação de vetor $\vec{t}(3,-1)$.

$A=P+\vec{t}$, logo $P=A-\vec{t}$.

$$P=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$

As coordenadas do ponto P são $(-2,3)$.

A opção correta é a **(C)**.

37. $P_{[ABCD]}=2AB+2AD=2\times20+2\times10=60$

Ou seja, 60 m.

37.1. $P'=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\times P=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\y\end{bmatrix}$

As abcissas duplicam e as ordenadas mantêm-se. Então:

$P[A'B'C'D']=2\times40+2\times10=100$

Ou seja, 100 m.

37.2. $P'=\begin{bmatrix}1&0\\0&0{,}5\end{bmatrix}\times P=\begin{bmatrix}1&0\\0&0{,}5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0{,}5y\end{bmatrix}$

As abcissas mantêm-se e as ordenadas passam a metade. Então:

$P_{[A'B'C'D']}=2\times20+2\times5=50$

Ou seja, 50 m.

37.3. $P'=\begin{bmatrix}0{,}5&0\\0&0{,}5\end{bmatrix}\times P=\begin{bmatrix}0{,}5&0\\0&0{,}5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}5x\\0{,}5y\end{bmatrix}$

As abcissas e as ordenadas passam a metade.

Então, $P_{[A'B'C'D']}=2\times10\times2\times5=30$ m.

37.4. $P'=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\times P=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\3y\end{bmatrix}$

As abcissas mantêm-se e as ordenadas triplicam.

Então, $P_{[A'B'C'D']}=2\times20\times2\times30=100$.

Ou seja, 100 m.

Página 61 – Pratica

38. Cisalhamento de matriz $C=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$

38.1. a) $P(3,2)$

$$P'=C\times P=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}$$

Então, $P'(3,8)$.

b) $Q(-1,2)$

$$Q'=C\times Q=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

Então, $Q'(-1,0)$.

38.2. $P'=C\times P$

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\2x+y\end{bmatrix}$$

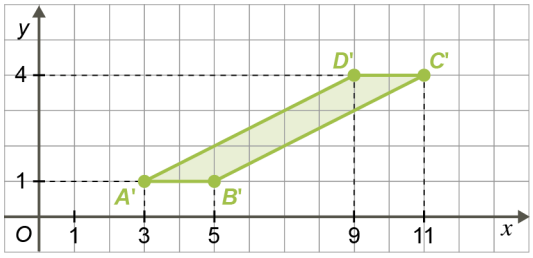
Então, $x'=x$ e $y'=2x+y$.

39.1. Seja P, de coordenadas (x,y), um ponto do retângulo $[ABCD]$ e P', de coordenadas (x',y'), a respetiva imagem.

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y\\y\end{bmatrix}$$

Como $A=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$, então

$A'=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, $B'=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$, $C'=\begin{bmatrix}11\\4\end{bmatrix}$ e $D'=\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}$.

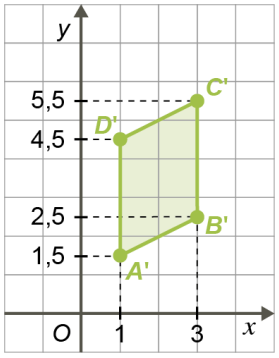


39.2. Seja P, de coordenadas (x,y), um ponto do retângulo $[ABCD]$ e P', de coordenadas (x',y'), a respetiva imagem.

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0{,}5&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0{,}5x+y\end{bmatrix}$$

Como $A=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$, então

$A'=\begin{bmatrix}1\\1{,}5\end{bmatrix}$, $B'=\begin{bmatrix}3\\2{,}5\end{bmatrix}$, $C'=\begin{bmatrix}3\\5{,}5\end{bmatrix}$ e $D'=\begin{bmatrix}1\\4{,}5\end{bmatrix}$.



40.1. $H(2,0)$

Sendo $[ABDEFH]$ um hexágono regular, então sabe-se que A é imagem de H pela rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{3}$.

Matriz de rotação:

$$R=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$A=R\times H=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

Então, $A\left(1,\sqrt{3}\right)$.

40.2. Sendo $[ACEG]$ um quadrado, então sabe-se que C é imagem de A pela rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{2}$.

Matriz de rotação:

$$R=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$C=R\times A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}$$

Então, $C\left(-\sqrt{3},1\right)$.

41. Cisalhamento de matriz $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$

Rotação de matriz $R=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$

Seja A' a imagem do ponto $A(2,1)$, pela rotação seguida do cisalhamento.

$$T=C\times R=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A'=T\times A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$$

Então, $A'(-3,-2)$.

42.1. $$R=\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3}\\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$R_{Ox}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

$$T=R_{Ox}\times R=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

42.2. $$P'=T\times P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\sqrt{3}-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

A imagem do ponto P, de coordenadas $(2,-1)$, por T é o ponto P', de coordenadas $\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$.

Página 62 – Consolida

1.1. **a)** Por exemplo, $A=\begin{bmatrix}354\\283\\742\end{bmatrix}$.

No contexto apresentado, representa o número de turistas que chegaram às três cidades (Braga, Vila Real e Porto) no mês de agosto do passado verão, por intermédio da agência.

b) Por exemplo, $B=\begin{bmatrix}246 & 354 & 217\end{bmatrix}$.

No contexto apresentado, representa o número de turistas que chegaram a Braga nos meses de julho, agosto e setembro, do passado verão, por intermédio da agência.

c) Por exemplo, $C=\begin{bmatrix}354 & 217\\283 & 432\\742 & 485\end{bmatrix}$.

No contexto apresentado, representa o número de turistas que chegaram às três cidades (Braga, Vila Real e Porto) nos meses de agosto e de setembro, do passado verão, por intermédio da agência.

1.2. **a)** $t_{31}=538$

b) $t_{23}=432$

2. Vamos começar por representar o número de ligações diárias dos aeroportos da Ilha A para os aeroportos da Ilha B através de uma tabela.

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	1	0
A_2	0	0	1

Seja M a matriz que resulta da tabela.

$M=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

3.1. A diferença entre a soma dos elementos da primeira coluna e a soma dos elementos da segunda coluna da matriz representa o dinheiro gasto no primeiro trimestre do ano.

3.2. $\frac{325}{1548}\times 100\%\approx 21\%$

Em março foi economizado, aproximadamente, 21% do valor ganho.

4.1. $A=\begin{bmatrix}18 & 23 & 20 & 25 & 22\end{bmatrix}$

$J=\begin{bmatrix}12 & 15 & 18 & 21 & 35\end{bmatrix}$

4.2. Seja T a matriz que apresenta o número de clientes em cada um dos cinco dias.

$T=\begin{bmatrix}30 & 38 & 38 & 46 & 57\end{bmatrix}$

4.3. Seja M a matriz pedida.

$M=\begin{bmatrix}-6 & -8 & -2 & -4 & 13\end{bmatrix}$

5. $A+B$ é uma matriz quadrada com 16 elementos. $16=4\times 4$, logo $A+B$ é uma matriz de dimensão 4×4.

Matriz identidade da mesma ordem: I_4

$I_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

A soma dos elementos da matriz I_4 é 4.

A opção correta é a **(A)**.

Página 63 – Consolida

6.1. **a)** $0{,}5\times E=0{,}5\times\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 0\\4 & 2\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}0{,}5\times(-1) & 0{,}5\times 1\\0{,}5\times 2 & 0{,}5\times 0\\0{,}5\times 4 & 0{,}5\times 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-0{,}5 & -0{,}5\\1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$

b) $-2\times B=-2\times\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}-2\times 3 & -2\times 1 & -2\times 2\\-2\times 1 & -2\times 0 & -2\times(-1)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-6 & -2 & -4\\-2 & 0 & 2\end{bmatrix}$

6.2. Como só podemos adicionar matrizes de mesma ordem, as matrizes escolhidas foram B e D.

$$S = B + D =$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A soma de todos os elementos da matriz S é 5

A opção correta é a **(A)**.

7.1. $A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2\times(-1)+1\times 1 & 2\times 1+1\times 3 & 2\times 2+1\times(-2) \\ 0\times(-1)+3\times 1 & 0\times 1+3\times 3 & 0\times 2+3\times(-2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

7.2. $B \times A$ não é possível porque o número de colunas da matriz B não é igual ao número de linhas da matriz A.

7.3. $A \times B + B =$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 4 & 12 & -8 \end{bmatrix}$$

7.4. $B \times C =$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1\times 4+1\times 1+2\times 2 \\ 1\times 4+3\times 1-2\times 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

7.5. $C \times B$ não é possível porque o número de colunas da matriz C não é igual ao número de linhas da matriz B.

7.6.

- $A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} =$
$$= \begin{bmatrix} 2\times 2+1\times 0 & 2\times 1+1\times 3 \\ 0\times 2+3\times 0 & 0\times 1+3\times 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

- $2A = 2 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} =$
$$= \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 1 \\ 2\times 0 & 2\times 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Então:

$$A \times A - 2A =$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8.1. $A(2, 0)$ e $B(0, 3)$

Numa translação de vetor $\vec{t}$, ã imagem de O é o ponto médio de $[AB]$.

$M_{[AB]}\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$, ou seja, $M_{[AB]}\left(1, \frac{3}{2}\right)$

$$\vec{t} = \overrightarrow{OM} = M - O = \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

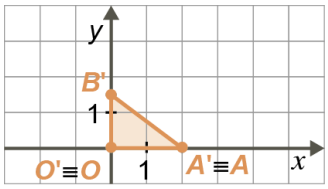
$$P' = P + T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y+\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Então, $P'\left(x+1, y+\frac{3}{2}\right)$.

8.2. **a)** $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \times A =$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \times B =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$$

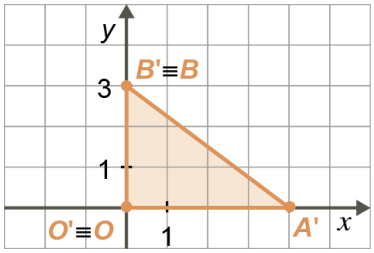
$$O' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \times O =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



b) $A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$O' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times O = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



9. Seja P, de coordenadas (x, y), um ponto do quadrado $[ABCD]$ e P', de coordenadas (x', y'), a imagem de P pela transformação de matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 3y \end{bmatrix}$

$x' = x \wedge y' = 3y$

Donde se conclui que: $A_{[A'B'C'D']} = 3 \times 12 = 36$

A opção correta é a **(D)**.

10. $A(1, 2)$, $B(-3, 1)$ e $C(0, 3)$

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 3 \end{bmatrix}$

Então, $A'(2, 2)$, $B'(-2{,}5; 1)$ e $C'(1{,}5; 3)$.

11. Seja $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

$P' = T \times P$

$\begin{bmatrix} x \\ \frac{x}{2} + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ \frac{x}{2} + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$

Então, $x = ax + by \wedge \frac{x}{2} + y = cx + dy$.

Donde se conclui que $a = 1$, $b = 0$, $c = 0{,}5$ e $d = 1$.

Assim, $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$.

12.1. Rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{6}$

$R = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

12.2. a) Seja $T = R \times R_{Oy}$.

$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

Seja P' a imagem de P pela transformação T.

$P' = T \times P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{3}}{2} - 1 \\ -\frac{5}{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Então, $P'\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2} - 1, -\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right)$.

b) Seja $T_1 = R_{Oy} \times R$.

$T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

Seja P'' a imagem de P pela transformação T_1

$P'' = T_1 \times P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \frac{5}{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Então, $P''\left(1 - \frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} + \sqrt{3}\right)$.

Página 64 – Avalia: Parte 1 – Verificação rápida

1. A opção correta é a **(C)** porque ao multiplicar a matriz A por 2 cada um dos elementos da matriz duplica. Logo, a soma dos elementos da matriz duplica.

2. R tem dimensão $m \times n$.

S tem dimensão $n \times p$.

T tem dimensão $p \times p$.

Sabe-se que o produto de duas matrizes, A e B, só é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

Assim, a expressão possível é a $R \times (S \times T)$

Opção: **(B)**

3. T é a transformação geométrica que a cada ponto $P(x, y)$, do plano, faz corresponder o ponto $P'\left(2x, \frac{y}{2}\right)$. Então, a matriz de transformação T é $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ pois $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 0{,}5y \end{bmatrix}$.

Opção: **(A)**

4. **I.** A tem dimensão 2×2.

$-B$ tem dimensão 2×1.

Logo, $D = A \times (-B)$ tem dimensão 2×1.

Assim, a matriz D tem 1 coluna.

I – b)

II. $D = A \times (-B) =$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times (-3) - 1 \times (-2) \\ 1 \times (-3) + 3 \times (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

A soma dos elementos de D é -13 $\left(-4 + (-9)\right)$.

II – a)

III. $E = A - C$

$e_{21} = a_{21} - c_{21} = 1 - 4 = -3$

III – c)

IV. $E = A - C =$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

A soma dos elementos da diagonal principal é 5 $(3 + 2)$.

IV – a)

Conclusão: A correspondência correta é a seguinte: **I – b)** ; **II – a)** ; **III – c)** ; **IV – a)**

Página 65 – Avalia: Parte 2 – Questões de desenvolvimento

1. **Etapa 1:**

- O número de alunos participantes é representado pela seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

- O custo por aluno, em cada intercâmbio, é representado pela seguinte equação matriz coluna:

$$P = \begin{bmatrix} 400 \\ 350 \\ 280 \end{bmatrix}$$

Etapa 2:

$$A \times P = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 400 \\ 350 \\ 280 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 400 + 3 \times 350 + 6 \times 280 \\ 2 \times 400 + 7 \times 350 + 3 \times 280 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4730 \\ 4090 \end{bmatrix}$$

4730 representa o preço total, em euros, pago pelo conjunto dos alunos da turma T_1 que participaram nos intercâmbios e 4090 representa o preço total, em euros, pago pelo conjunto dos alunos da turma T_2 que participaram nos intercâmbios.

Etapa 3:

$4730 + 4090 = 8820$

O custo total, suportado pelos alunos participantes, foi 8820 €.

2. $[ABDF]$ é um quadrado e $[ACE]$ é um triângulo equilátero.

$A(2, 0) \rightarrow$ vértice comum do triângulo e do quadrado.

- R_1: Rotação de centro O, que transforma A em C
- R_2: Rotação de centro O, que transforma B em C

2.1. **a)** Sendo $[ACE]$ um triângulo equilátero, então a amplitude da rotação R_1 é $\frac{2\pi}{3}$.

Assim, a matriz de transformação da rotação R_1 é:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) A amplitude da rotação R_2 é $\frac{\pi}{6}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$.

Assim, a matriz de transformação da rotação R_2 é:

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

2.2. Seja *D'* a imagem de *D* pela rotação R_2.

$$D' = R_2 \times D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Então, $D'\left(-\sqrt{3}, -1\right)$.

Página 69 – Para Saber +

1.1.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

- Representar o sistema por uma matriz:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

- Multiplicar a 2.ª linha por -2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

- Substituir a 2.ª linha pela soma da 1.ª com a 2.ª linha:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

- Multiplicar a 2.ª linha por $\frac{1}{5}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right]$$

- Multiplicar a 1.ª linha por $\frac{1}{2}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right]$$

- Substituir a 1.ª linha pela soma da 1.ª com a 2.ª multiplicada por $-\frac{1}{2}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right]$$

Solução: $(x, y) = \left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$

1.2.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

- Representar o sistema por uma matriz:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

- Multiplicar a 2.ª linha por 3:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

- Substituir a 2.ª linha pela soma da 1.ª com a 2.ª linha:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 \end{array}\right]$$

- Multiplicar a 1.ª linha por $\frac{1}{3}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 11 \end{array}\right]$$

- Substituir a 1.ª linha pela soma da 1.ª com a 2.ª multiplicada por $\frac{2}{3}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 11 \end{array}\right]$$

Solução: $(x, y) = (9, 11)$

1.3.

$$\begin{cases} 2x-4=5y-3z \\ 5x+y-7z=11 \\ x-2y=3-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y+3z=4 \\ 5x+y-7z=11 \\ x-2y+z=3 \end{cases}$$

- Representar o sistema por uma matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -7 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

- Trocar a 1.ª linha com a 3.ª linha:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -7 & 11 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

- Multiplicar a 2.ª linha por $-\frac{1}{5}$ e a 3.ª linha por $-\frac{1}{2}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{11}{5} \\ -1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{array}\right]$$

- Substituir a 2.ª linha pela soma da 1.ª com a 2.ª linha e substituir a 3.ª linha pela soma da 1.ª com a 3.ª linha:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{11}{5} & \frac{12}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

- Multiplicar a 3.ª linha por 2 e, em seguida, trocar a 2.ª com a 3.ª linha:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{12}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right]$$

- Substituir a 3.ª linha pela soma da 3.ª linha com a 2.ª linha multiplicada por $\frac{11}{5}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{26}{5} \end{array}\right]$$

- Multiplicar a 3.ª linha por 5:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 26 \end{array}\right]$$

- Substituir a 1.ª linha pela soma da 1.ª linha com a 2.ª linha multiplicada por 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 26 \end{array}\right]$$

- Substituir a 2.ª linha pela soma da 2.ª linha com a 3.ª linha e substituir a 1.ª linha pela soma da 1.ª linha com a 3.ª linha:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 26 \end{array}\right]$$

Solução: $(x, y, z) = (33, 28, 26)$

1.4.

$$\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ -3x+2y+z=-4 \\ x+y-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -3x+2y+z=-4 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$$

- Representar o sistema por uma matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

- Multiplicar a 2.ª linha por $\frac{1}{3}$ e a 3.ª linha por -1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Substituir a 2.ª linha pela soma da 1.ª linha com a 2.ª linha e substituir a 3.ª linha pela soma da 1.ª linha com a 3.ª linha:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

- Multiplicar a 3.ª linha por $\frac{1}{2}$ e multiplicar a 2.ª linha por $\frac{3}{5}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

- Substituir a 1.ª linha pela soma da 1.ª linha com a 2.ª linha multiplicada por -1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

- Substituir a 2.ª linha pela soma da 2.ª linha com a 3.ª linha multiplicada por $-\frac{4}{5}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

- Substituir a 1.ª linha pela soma da 1.ª linha com a 3.ª linha multiplicada por $-\frac{1}{5}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Solução: $(x, y, z) = \left(\frac{13}{10}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{2}\right)$