Resoluções da unidade 1 do manual

Tema 1: Números complexos na forma algébrica

Página 8 – Recorda e Aplica

1. Por exemplo:

1.1. $n=-1$

1.2. $n=\frac{1}{2}$

1.3. $n=\sqrt{2}$

2.1. $x^2+x=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$

2.2. $2x^2+1=x \Leftrightarrow 2x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{4}$

Equação impossível

2.3. $x(x+6)=-9 \Leftrightarrow x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow x=-3$

2.4. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x}{4} \Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}=\frac{x}{4} \Leftrightarrow 4x^2+4x+1=x$

$\Leftrightarrow 4x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{8}$

Equação impossível

3.1. $(x+5)^2-1=0 \Leftrightarrow x^2+10x+25-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+10x+24=0$

$b^2-4ac=10^2-4\times1\times24=4$

A equação tem duas soluções, porque

$b^2-4ac>0$.

3.2. $\left(x-\sqrt{5}\right)^2+3=0 \Leftrightarrow x^2-2\sqrt{5}x+5+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2\sqrt{5}x+8=0$

$b^2-4ac=\left(-2\sqrt{5}\right)^2-4\times1\times8=-12$

A equação tem zero soluções, porque

$b^2-4ac<0$.

3.3. $-3x^2+6x-3=0$

$b^2-4ac=6^2-4\times(-3)\times(-3)=0$

A equação tem uma solução, porque $b^2-4ac=0$.

4. $x^3-3x^2+4=0$

Como -1 é uma solução:

	1	−3	0	4
−1		−1	4	−4
	1	−4	4	0

$x^3-3x^2+4=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-4x+4\right)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$

Página 9 – Recorda e Aplica

5.

Ponto	Coordenadas da imagem do ponto pela:		
	reflexão de eixo Ox	reflexão de eixo Oy	meia-volta de origem O
$A(3,2)$	$(3,-2)$	$(-3,2)$	$(-3,-2)$
$B(-5,0)$	$(-5,0)$	$(5,0)$	$(5,0)$
$C(-1,-3)$	$(-1,3)$	$(1,-3)$	$(1,3)$
$D(0,-2)$	$(0,2)$	$(0,-2)$	$(0,2)$

6.1. $x_P=\frac{3}{5}$ e $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$, então $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{4}{5} \vee \sin\alpha=-\frac{4}{5}$

Como α é um ângulo agudo, $\sin\alpha>0$. Logo,

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

Conclusão: $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ e $\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

6.2. $y_Q=\frac{1}{2}$ e $Q(\cos\beta,\sin\beta)$, então $\sin\beta=\frac{1}{2}$.

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2\beta=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\beta=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \cos\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como $90^\circ < \beta < 180^\circ$, $\cos\beta < 0$. Logo,

$\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Conclusão: $\sin\beta = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\tan\beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6.3. $y_R = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ e $R(\cos\theta, \sin\theta)$, então $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \vee \cos\theta = -\frac{2}{3}$

Como $270^\circ < \theta < 360^\circ$, então $\cos\theta > 0$. Logo,

$\cos\theta = \frac{2}{3}$.

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

Conclusão: $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\theta = \frac{2}{3}$ e $\tan\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Página 10

1. $x^3 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 6x + 4$; $m = 6$ e $n = 4$

2.1. $x_0 = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}}$; $m = 6$ e $n = 4$

$x_0 = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}$

2.2. Na expressão que representa x_0 aparecem raízes quadradas de números negativos que não têm significado em $\mathbb{R}$.

3. Sendo $i^2 = -1$, então $\sqrt{-4} = \sqrt{4\times(-1)} = \sqrt{4i^2} = 2i$.

Logo, $x_0 = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}$

Página 11

1.1. $\sqrt{-9} = \sqrt{9\times(-1)} = \sqrt{9}\times\sqrt{-1} = 3i$

1.2. $\sqrt{-75} = \sqrt{75i} = 5\sqrt{3}\,i$

1.3. $i\sqrt{-4} = i\times\sqrt{4i} = i\times 2i = 2i^2 = 2\times(-1) = -2$

2.

z	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Im}(z)$
$-2+i$	-2	1
$3-i$	3	-1
$8i$	0	8
$-1+3i$	-1	3
7	7	0
$2i$	0	2
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$\sqrt{2}-5i$	$\sqrt{2}$	-5

3.1. $bi = \sqrt{3}i \Leftrightarrow b = \sqrt{3}$

$\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = -\sqrt{3}$

$z = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

3.2. $bi = -2i \Leftrightarrow b = -2$

$\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = -7 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) - 2 = -7 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = -5$

$z = -5 - 2i$

4. $t = -3 + 5i$ e $s = -6i$

$z = k - 1 + (k^2 + 1)i$, com $k \in \mathbb{R}$

4.1. $z = s \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(s) \wedge \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(s) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k - 1 = 0 \wedge k^2 + 1 = -6 \Leftrightarrow k = 1 \wedge k^2 = -7$

Impossível

Não existe um valor de k para o qual $z = s$.

4.2. $z = t \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(t) \wedge \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k - 1 = -3 \wedge k^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow k = -2 \wedge k^2 = 4$

$\Leftrightarrow k = -2 \wedge (k = 2 \vee k = -2) \Leftrightarrow k = -2$

Página 12

5. $z = -2 + 5i$

5.1. $\mathrm{Re}(z) = -2$

5.2. $\text{Im}(z) = 5$

5.3. Parte imaginária: 5i

6. $z = k - 2 + (k+1)\text{i},\ k \in \mathbb{R}$

6.1. z é um imaginário real, logo:

$\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -1$

6.2. z é um imaginário puro, logo:

$\text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) \neq 0 \Leftrightarrow k - 2 = 0 \wedge k + 1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 2 \wedge k \neq -1 \Leftrightarrow k = 2$

7. $z = \frac{2}{3} - 5\text{i}$ e $t = -2 + \frac{1}{5}\text{i}$

7.1. $\text{Im}(s) = -\text{Re}(z) \Leftrightarrow \text{Im}(s) = -\frac{2}{3}$

Como s é imaginário puro, então $\text{Re}(s) = 0$.

Logo, $s = -\frac{2}{3}\text{i}$.

7.2. $\text{Re}(s) = \text{Im}(t) \Leftrightarrow \text{Re}(s) = \frac{1}{5}$

Como s é um número real, então $\text{Im}(s) = 0$.

Logo, $s = \frac{1}{5}$.

8.1. $z^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -5 \Leftrightarrow z = \sqrt{-5} \vee z = -\sqrt{-5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{5}\text{i} \vee z = -\sqrt{5}\text{i}$

8.2. $2z^2 = -18 \Leftrightarrow z^2 = -9 \Leftrightarrow z = \sqrt{-9} \vee z = -\sqrt{-9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 3\text{i} \vee z = -3\text{i}$

8.3. $4z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow z = \sqrt{-\frac{1}{4}} \vee z = -\sqrt{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\text{i} \vee z = -\frac{1}{2}\text{i}$

8.4. $(z-3)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z - 3 = \sqrt{-2} \vee z - 3 = -\sqrt{-2}$

$\Leftrightarrow z = 3 + \sqrt{2}\text{i} \vee z = 3 - \sqrt{2}\text{i}$

8.5. $z^2 - z = -1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{3}\text{i}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i} \vee z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$

Página 13

1. **A:** $-z^2 - z = -2 \Leftrightarrow -z^2 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow z = 1 \vee z = -2$

B: $z^2 + 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}\text{i}}{2} \Leftrightarrow z = 1 + \sqrt{5}\text{i} \vee z = 1 - \sqrt{5}\text{i}$

C: $2z^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \sqrt{-4} \vee z = -\sqrt{-4}$

$\Leftrightarrow z = 2\text{i} \vee z = -2\text{i}$

D: $3z^2 - 3z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{6} \Leftrightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{3}\text{i}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\text{i} \vee z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\text{i}$

E: $-z^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \sqrt{-1} \vee z = -\sqrt{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \text{i} \vee z = -\text{i}$

Assim, conclui-se que:

I – b); **II – c)**; **III – b)**; **IV – a)**

2.1. Por exemplo, sem a importação da biblioteca *cmath*:

```
print ("ax^2+bx+c=0")

a=float(input("a=  "))
b=float(input("b=  "))
c=float(input("c=  "))

import math
delta=b**2-4*a*c

if delta==0:
    x1=-b/(2*a)
    print(" A equação tem uma solução:  ",x1)

elif delta>0:
    x1=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
    x2=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    print(" A equação tem duas soluções reais: ",x1, " e ", x2)

else:
    x=-b/(2*a)
    y=(math.sqrt(-delta))/(2*a)

    print(f" A equação tem duas soluções não reais: {x}+{y}i  e  {x}-{y}i")
```

Por exemplo, com a importação da biblioteca *cmath*:

```
print ("ax^2+bx+c=0")

a=float(input("a=  "))
b=float(input("b=  "))
c=float(input("c=  "))

import cmath

delta=b**2-4*a*c

if delta==0:
    x1=-b/(2*a)
    print(" A equação tem uma solução:  ",x1)

else:
    x1=(-b+cmath.sqrt(delta))/(2*a)
    x2=(-b-cmath.sqrt(delta))/(2*a)
    print(" A equação tem duas soluções: ",x1, " e ", x2)
```

2.2. **a)** Aplicando o programa, conclui-se que as soluções da equação $x^2-2x+10=0$ são $x=1+3\text{i} \vee x=1-3\text{i}$.

b) Aplicando o programa, conclui-se que a solução da equação $4x^2+4x+1=0$ é $x=-\frac{1}{2}$.

c) Aplicando o programa, conclui-se que as soluções da equação $4x^2-12x+25=0$ são $x=\frac{3}{2}+2\text{i} \vee x=\frac{3}{2}-2\text{i}$.

Página 14 – Pratica

9.1. Se $\text{Re}(z)=4$ e $\text{Im}(z)=-7$, então $z=4-7\text{i}$.

9.2. Se $\text{Re}(z)=-1$ e $\text{Im}(z)=1$, então $z=-1+\text{i}$.

9.3. $z=\sqrt{-81} \Leftrightarrow z=\sqrt{81}\text{i} \Leftrightarrow z=9\text{i}$

9.4. $z=\sqrt{-8} \Leftrightarrow z=\sqrt{8}\text{i} \Leftrightarrow z=2\sqrt{2}\,\text{i}$

9.5. Se $\text{Re}(z)=\pi$ e $\text{Im}(z)=0$, então $z=\pi$.

9.6. Se $\text{Re}(z)=0$ e $\text{Im}(z)=-\sqrt{3}$, então $z=-\sqrt{3}\text{i}$.

10. $z=k+4+(5-k)\text{i},\ k\in\mathbb{R}$ e $t=-2+\frac{1}{5}\text{i}$

10.1. $\text{Re}(z)=-2 \wedge \text{Im}(z)=11 \Leftrightarrow k+4=-2 \wedge 5-k=11$

$\Leftrightarrow k=-6 \wedge k=-6 \Leftrightarrow k=-6$

10.2. $\text{Re}(z)<0 \wedge \text{Im}(z)\geq 2 \Leftrightarrow k+4<0 \wedge 5-k\geq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k<-4 \wedge k\leq 3 \Leftrightarrow k<-4 \Leftrightarrow k\in\left]-\infty,-4\right[$

10.3. z é um número real, logo:

$\text{Im}(z)=0 \Leftrightarrow 5-k=0 \Leftrightarrow k=5$

10.4. z é um imaginário puro, logo:

$\text{Re}(z)=0 \wedge \text{Im}(z)\neq 0 \Leftrightarrow k+4=0 \wedge 5-k\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-4 \wedge k\neq 5 \Leftrightarrow k=-4$

11. $z_1=3-m+5\text{i}$, $z_2=2m+(6-m)\text{i}$ e

$z_3=2m^2+(2m+8)\text{i}$, com $m\in\mathbb{R}$

11.1. $z_1=z_2 \Leftrightarrow \text{Re}(z_1)=\text{Re}(z_2) \wedge \text{Im}(z_1)=\text{Im}(z_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-m=2m \wedge 5=6-m \Leftrightarrow m=1 \wedge m=1 \Leftrightarrow m=1$

11.2. $z_1=z_3 \Leftrightarrow \text{Re}(z_1)=\text{Re}(z_3) \wedge \text{Im}(z_1)=\text{Im}(z_3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-m=2m^2 \wedge 5=2m+8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2m^2-m+3=0 \wedge m=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \left(m=1 \vee m=-\frac{3}{2}\right) \wedge m=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}$

12. $z=1-k+(k^2-9)\text{i},\ k\in\mathbb{R}$

12.1. z é um imaginário puro, logo:

$\text{Re}(z)=0 \wedge \text{Im}(z)\neq 0 \Leftrightarrow 1-k=0 \wedge k^2-9\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=1 \wedge k\neq 3 \Leftrightarrow k=1$

12.2. z é um número real, logo:

$\text{Im}(z)=0 \Leftrightarrow k^2-9=0 \Leftrightarrow k=3 \vee k=-3$

12.3. z é um número real positivo, logo:

$\text{Re}(z)>0 \wedge \text{Im}(z)=0 \Leftrightarrow 1-k>0 \wedge k^2-9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k<1 \wedge (k=3 \vee k=-3) \Leftrightarrow k=-3$

12.4. z é um número real negativo, logo:

$\text{Re}(z)<0 \wedge \text{Im}(z)=0 \Leftrightarrow 1-k<0 \wedge k^2-9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k>1 \wedge (k=3 \vee k=-3) \Leftrightarrow k=3$

Página 15 – Pratica

13.

	Número de soluções no conjunto:			
Equação	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$z^2=3z$	2	2	2	2
$z^2+2=0$	0	0	0	2
$(z^2+7)(2z-1)=0$	0	1	1	3
$9z^3+4z=0$	1	1	1	3

Cálculos auxiliares:

$z^2=3z \Leftrightarrow z^2-3z=0 \Leftrightarrow z(z-3)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee z=3$

$z^2+2=0 \Leftrightarrow z^2=-2 \rightarrow$ Impossível em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Em $\mathbb{C}$: $z^2=-2 \Leftrightarrow z=\sqrt{-2} \vee z=-\sqrt{-2}\text{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{2}\text{i} \vee z=-\sqrt{2}\text{i}$

$(z^2+7)(2z-1)=0 \Leftrightarrow z^2+7=0 \vee 2z-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2=-7 \vee z=\frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}\right)$

$z^2=-7 \rightarrow$ Impossível em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Em $\mathbb{C}$: $z^2=-7 \Leftrightarrow z=\sqrt{-7} \vee z=-\sqrt{-7}\text{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{7}\text{i} \vee z=-\sqrt{7}\text{i}$

$9z^3+4z=0 \Leftrightarrow z\left(9z^2+4\right)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee z^2=-\frac{4}{9}$

$z^2=-\frac{4}{9} \rightarrow$ Impossível em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Em $\mathbb{C}$: $z^2=-\frac{4}{9} \Leftrightarrow z=\sqrt{-\frac{4}{9}} \vee z=-\sqrt{-\frac{4}{9}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{2}{3}\text{i} \vee z=-\frac{2}{3}\text{i}$

14.1. $4z^2+27=0 \Leftrightarrow z^2=-\frac{27}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{-\frac{27}{4}} \vee z=-\sqrt{-\frac{27}{4}} \Leftrightarrow z=\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i} \vee z=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}$

14.2. $9z^2+25=0 \Leftrightarrow z^2=-\frac{25}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{-\frac{25}{9}} \vee z=-\sqrt{-\frac{25}{9}} \Leftrightarrow z=\frac{5}{3}\text{i} \vee z=-\frac{5}{3}\text{i}$

14.3. $16z^2+9=0 \Leftrightarrow z^2=-\frac{9}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{-\frac{9}{16}} \vee z=-\sqrt{-\frac{9}{16}}$

$\Leftrightarrow z=\frac{3}{4}\text{i} \vee z=-\frac{3}{4}\text{i}$

14.4. $4z^3+32z=0 \Leftrightarrow 4z\left(z^2+8\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z^2=-8$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\sqrt{-8} \vee z=-\sqrt{-8}$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=2\sqrt{2}\text{i} \vee z=-2\sqrt{2}\text{i}$

15.1. $z^2+4z+8=0 \Leftrightarrow z=\frac{-4\pm\sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{-4\pm 4\text{i}}{2}$

$\Leftrightarrow z=-2+2\text{i} \vee z=-2-2\text{i}$

15.2. $(z+1)^2+1=0 \Leftrightarrow (z+1)^2=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z+1=\sqrt{-1} \vee z+1=-\sqrt{-1} \Leftrightarrow z+1=\text{i} \vee z+1=-\text{i}$

$\Leftrightarrow z=-1+\text{i} \vee z=-1-\text{i}$

15.3. $(z-4)^2+49=0 \Leftrightarrow (z-4)^2=-49 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-4=\sqrt{-49} \vee z-4=-\sqrt{-49}$

$\Leftrightarrow z-4=7\text{i} \vee z-4=-7\text{i} \Leftrightarrow z=4+7\text{i} \vee z=4-7\text{i}$

15.4. $50+(z-1)^2=0 \Leftrightarrow (z-1)^2=-50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-1=\sqrt{-50} \vee z-1=-\sqrt{-50}$

$\Leftrightarrow z-1=5\sqrt{2}\text{i} \vee z-1=-5\sqrt{2}\text{i}$

$\Leftrightarrow z=1+5\sqrt{2}\text{i} \vee z=1-5\sqrt{2}\text{i}$

15.5. $z^2+4z+13=0 \Leftrightarrow z=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{-4\pm 6\text{i}}{2}$

$\Leftrightarrow z=-2+3\text{i} \vee z=-2-3\text{i}$

15.6. $z^2-8z+21=0 \Leftrightarrow z=\frac{8\pm\sqrt{-20}}{2} \Leftrightarrow$

$z=\frac{8\pm 2\sqrt{5}\text{i}}{2}$

$\Leftrightarrow z=4+\sqrt{5}\text{i} \vee z=4-\sqrt{5}\text{i}$

16.1. $\left(z^2+5\right)\left(z^2-9z+21\right)=0$

$\Leftrightarrow z^2+5=0 \vee z^2-9z+21=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2=-5 \vee z=\frac{9\pm\sqrt{-3}}{2}$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{-5} \vee z=-\sqrt{-5} \vee z=\frac{9\pm\sqrt{3}\text{i}}{1}$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{5}\text{i} \vee z=-\sqrt{5}\text{i} \vee z=\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{i} \vee z=\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$

16.2. $z^3-5z^2+16z-30=0$, sabendo que 3 é uma solução.

	1	−5	16	−30
3		3	−6	30
	1	−2	10	0

$z^3-5z^2+16z-30=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-3)\left(z^2-2z+10\right)=0$

$\Leftrightarrow z-3=0 \vee z^2-2z+10=0$

$\Leftrightarrow z=3 \vee z=\frac{2\pm\sqrt{-36}}{2}$

$\Leftrightarrow z=3 \vee z=\frac{2\pm 6\text{i}}{2}$

$\Leftrightarrow z=3 \vee z=1+3\text{i} \vee z=1-3\text{i}$

16.3. $2z^4+3z^2-20=0 \Leftrightarrow 2\left(z^2\right)^2+3z^2-20=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2=\dfrac{-3\pm\sqrt{169}}{4} \Leftrightarrow z^2=\dfrac{-3\pm 13}{4}$

$\Leftrightarrow z^2=\dfrac{10}{4} \vee z^2=-4$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{\dfrac{5}{2}} \vee z=-\sqrt{\dfrac{5}{2}} \vee z=2\text{i} \vee z=-2\text{i}$

17. $z^2-10z+29=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{10\pm\sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{10\pm 4\text{i}}{2} \Leftrightarrow z=5+2\text{i} \vee z=5-2\text{i}$

$t=2k-1+\left(\dfrac{k-9}{3}\right)\text{i}$, $k\in\mathbb{R}$ é uma das soluções

Então, tem-se:

$2k-1=5 \wedge \left(\dfrac{k-9}{3}=2 \vee \dfrac{k-9}{3}=-2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=3 \wedge (k=15 \vee k=3) \Leftrightarrow k=3$

Página 16

18.1. a) O afixo de $-1+3\text{i}$ é o ponto de coordenadas $(-1, 3)$, ou seja, é o ponto *B*.

b) O afixo de $-\text{i}$ é o ponto de coordenadas $(0, -1)$, ou seja, é o ponto *E*.

18.2. a) Sendo $H(1, 2)$, então o número complexo cujo afixo é o ponto *H* é $1+2\text{i}$.

b) Sendo $C(-3, 0)$, então o número complexo cujo afixo é o ponto *C* é -3.

18.3. a) Os pontos *F* e *G* têm a mesma abcissa, logo correspondem a afixos de números complexos que têm igual parte real.

b) Por exemplo, os pontos *D* e *E* têm a mesma ordenada, logo correspondem a afixos de números complexos que têm igual parte imaginária.

19. $\text{Re}(z)-\text{Im}(z)=2$

Seja $z=x+y\text{i}$

$x-y=2 \Leftrightarrow x=y+2$

$z=y+2+y\text{i}$, $y\in\mathbb{R}$

19.1. O afixo de *z* pertence ao 3.º quadrante se:

$y+2<0 \wedge y<0 \Leftrightarrow y<-2 \wedge y<0 \Leftrightarrow y<-2$

Por exemplo, se $y=-3$, então $z=-1-3\text{i}$.

19.2. O afixo de *z* pertence ao 4.º quadrante se:

$y+2>0 \wedge y<0 \Leftrightarrow y>-2 \wedge y<0$

Por exemplo, se $y=-1$, então $z=1-\text{i}$.

Página 17 – Pratica

20. $z_1=-4+5\text{i}$, $z_2=-3-7\text{i}$, $z_3=-8\text{i}$ e $z_4=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\text{i}$

20.1. O afixo de z_2 é o ponto de coordenadas $(-3, -7)$ que se situa no 3.º quadrante.
A opção correta é a **(B)**.

20.2. O número complexo $z_3=-8\text{i}$ é um imaginário puro, porque $\text{Re}(z_3)=0$ e $\text{Im}(z_3)\neq 0$.

A opção correta é a **(C)**.

20.3. O afixo de z_4 é o ponto de coordenadas $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{3}\right)$ que pertence ao 4.º quadrante.
A opção correta é a **(D)**.

21.1. a) O afixo do número complexo $z=2-\text{i}$ é o ponto de coordenadas $(2, -1)$, ou seja, é o ponto *H*.

b) Como $\text{Im}(z)=-2$, então o afixo de *z* é um ponto cuja ordenada é -2. Logo, só pode ser o ponto *C*.

c) Como $\text{Re}(z)=0$, então o afixo é um ponto cuja abcissa é 0. Assim, só pode ser o ponto *C*.

d) Se $\text{Re}(z)<0 \wedge \text{Im}(z)<0$, então o afixo de *z* situa-se no 3.º quadrante ou na parte negativa do eixo real. Assim, poderão ser os pontos *D* e *E*.

e) Como $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)$, então o afixo de *z* é um ponto cuja abcissa é igual à ordenada. Assim, só pode ser o ponto *E*.

f) Como $\text{Im}(z)<\text{Re}(z)$, então o afixo de *z* é um ponto cuja ordenada é inferior à abcissa. Assim, poderão ser os pontos *C* e *H*.

21.2. a) Os pontos que representam números

complexos com a mesma parte real são: *E* e *F*; *B* e *G*.

b) Os pontos que representam números complexos com a mesma parte imaginária são *B* e *F*.

c) Os pontos que representam números complexos com partes reais simétricas são *A* e *H*.

21.3. No 2.º quadrante estão assinalados os pontos $A(-2, 3)$ e $F(-3, 5)$ que correspondem aos números complexos $z_A = -2 + 3\text{i}$ e $z_F = -3 + 5\text{i}$.

22. $z = 3k - 5 + (2k - 1)\text{i},\ k \in \mathbb{R}$

22.1. A imagem geométrica de *z* é um ponto do 2.º quadrante se:

$$\text{Re}(z) < 0 \wedge \text{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow 3k - 5 > 0 \wedge 2k - 1 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k < \frac{5}{3} \wedge k > \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \in \left]\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right[$$

22.2. A imagem geométrica de *z* é um ponto do eixo real se:

$$\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow 2k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

22.3. A imagem geométrica de *z* é um ponto pertencente à reta paralela ao eixo real e que passa no afixo de $w = 4 - 3\text{i}$ se:

$$\text{Im}(z) = -3 \Leftrightarrow 2k - 1 = -3 \Leftrightarrow k = -1$$

22.4. A imagem geométrica de *z* é um ponto que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se:

$$\text{Im}(z) = \text{Re}(z) \Leftrightarrow 2k - 1 = 3k - 5 \Leftrightarrow k = 4$$

23. Seja $z = x + y\text{i}$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \text{Re}(z) = (\text{Im}(z))^2 \\ \text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ y^2 + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ y = -3 \vee y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$
$$z = 9 - 3\text{i} \vee z = 4 + 2\text{i}$$

Como o afixo de *z* pertence ao 4.º quadrante, sabe-se que $\text{Re}(z) > 0 \wedge \text{Im}(z) < 0$. Assim, pode-se concluir que $z = 9 - 3\text{i}$.

Página 18

24.1. $\overline{-3 + \text{i}} = -3 - \text{i}$

24.2. $|-3 + \text{i}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

24.3. $|5\text{i}| = 5$

24.4. $\overline{-\sqrt{3}\,\text{i}} = \sqrt{3}\,\text{i}$

24.5. $|-\sqrt{3}\,\text{i}| = \sqrt{3}$

24.6. $\overline{6} = 6$

24.7. $|-2 - \text{i}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

25.1. Sendo $A\left(-3, -\frac{5}{2}\right)$ o afixo de *z*, então $z = -3 - \frac{5}{2}\text{i}$.

25.2. Como *B* é o afixo de $t = 1 + 2\text{i}$, então $B(1, 2)$.

25.3. a) $|z| = \sqrt{(-3)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$$\overline{z} = \overline{-3 - \frac{5}{2}\text{i}} = -3 + \frac{5}{2}\text{i}$$

b) $|t| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$; $\overline{t} = \overline{1 + 2\text{i}} = 1 - 2\text{i}$

Página 19 – Tarefa 2

1.1. **Equação A:**

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 3x + 2) = 0$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 4 \times 1 \times 2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

	1	2	−1	−2
1		1	3	2
	1	3	2	0

Equação B:

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x - 3) = 0$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

	1	1	−5	3
1		1	2	−3
	1	2	−3	0

Equação C:

$x^3-3x^2+3x-1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+1)=0$

$x^2-2x+1=0 \rightarrow \Delta = 4-4\times1\times1=0$

$\Leftrightarrow x=1$

	1	−3	3	−1
1		1	−2	1
	1	−2	1	0

Equação	Equação na forma: $(x-1)(ax^2+bx+c)=0$	Sinal de Δ
$x^3+2x^2-x-2=0$	$(x-1)(x^2+3x+2)=0$	$\Delta>0$
$x^3+x^2-5x+3=0$	$(x-1)(x^2+2x-3)=0$	$\Delta>0$
$x^3-3x^2+3x-1=0$	$(x-1)(x^2-2x+1)=0$	$\Delta=0$

Soluções distintas em $\mathbb{R}$	Soluções distintas em $\mathbb{C}$
1, −1 e −2	1, −1 e −2
1 e −3	1 e −3
1	1

1.2. No caso de $\Delta \geq 0$, obteve-se 3, 2 ou 1 soluções distintas em $\mathbb{C}$. Não, nenhuma delas é solução não real.

2.1. **Equação D:**

$x^3-2x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+1)=0$

$x^2+1=0 \rightarrow \Delta = 0-4\times1\times1=-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=-1 \Leftrightarrow x=\text{i} \vee x=-\text{i}$

	1	−2	1	−2
2		2	0	2
	1	0	1	0

Equação E:

$x^3-6x^2+13x-10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-4x+5)=0$

$x^2-4x+5=0 \rightarrow \Delta = 16-4\times1\times5=-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm2\text{i}}{2} \Leftrightarrow x=2+x \vee x=2-\text{i}$

	1	−6	13	−10
2		2	−8	10
	1	−4	5	0

Equação F:

$-x^3+4x^2-9x+10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)(-x^2+2x-5)=0$

$-x^2+2x-5=0 \rightarrow \Delta = 4-4\times(-1)\times(-5)=-16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{-16}}{-2} \Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm4\text{i}}{-2} \Leftrightarrow x=1-2\text{i} \vee x=1+2\text{i}$

	−1	4	−9	10
2		−2	4	−10
	−1	2	−5	0

Equação	Equação na forma: $(x-2)(ax^2+bx+c)=0$	Sinal de Δ
$x^3-2x^2+x-2=0$	$(x-2)(x^2+1)=0$	$\Delta<0$
$x^3-6x^2+13x-10=0$	$(x-2)(x^2-4x+5)=0$	$\Delta<0$
$-x^3+4x^2-9x+10=0$	$(x-2)(-x^2+2x-5)=0$	$\Delta<0$

Soluções distintas em $\mathbb{R}$	Soluções distintas em $\mathbb{C}$
2	2, i e −i
2	2, 2+i e 2−i
2	2, 1+2i e 1−2i

2.2. No caso de $\Delta < 0$, obtiveram-se três soluções distintas em $\mathbb{C}$. As soluções complexas não reais são duas e são conjugadas uma da outra.

Página 20 – Pratica

26.1. Seja $z=x+y\text{i}$.

$\text{Re}(z)=-2$ e $\text{Re}(z)+\text{Im}(z)=5 \Leftrightarrow$

$x=-2 \wedge x-y=5 \Leftrightarrow x=-2 \wedge -2-y=5$

$\Leftrightarrow x=-2 \wedge y=-7$

$z=-2-7\text{i}$

$\overline{z}=-2+7\text{i}$ e $|z|=\sqrt{(-2)^2+(-7)^2}=\sqrt{53}$

26.2. Seja $z = x + y\text{i}$.

$\text{Re}(z) \times \text{Im}(z) = -4$ e $\text{Im}(\overline{z}) = 2$

$x \times y = -4 \wedge -y = 2 \Leftrightarrow x \times (-2) = -4 \wedge y = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \wedge y = -2$

$z = 2 - 2\text{i}$

$\overline{z} = 2 + 2\text{i}$ e $|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

26.3. Seja $z = x + y\text{i}$.

$\text{Re}(\overline{z}) + \text{Re}(z) = 6$ e $\text{Im}(z) - \text{Im}(\overline{z}) = -1$

$x + x = 6 \wedge y - (-y) = -1 \Leftrightarrow x = 3 \wedge y = -\frac{1}{2}$

$z = 3 - \frac{1}{2}\text{i}$

$\overline{z} = 3 + \frac{1}{2}\text{i}$ e $|z| = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$

26.4. Seja $z = x + y\text{i}$.

$\text{Re}(z) + \text{Im}(\overline{z}) = -5$ e $2\text{Re}(z) = 3\text{Im}(\overline{z})$

$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + y \\ 2x = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + y \\ 2(-5 + y) = -3y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + y \\ 5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

Então, $z = -3 + 2\text{i}$.

$\overline{z} = -3 - 2\text{i}$ e $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

27.1. Seja $z = x + y\text{i}$, então $\text{Re}(z) = 2 \Leftrightarrow x = 2$.

$|z| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2^2 + y^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{4 + y^2} = 3 \Leftrightarrow 4 + y^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 = 5 \Leftrightarrow y = \sqrt{5} \vee y = -\sqrt{5}$

Como o afixo de z pertence ao 4.º quadrante, sabe-se que $y < 0$. Então, $y = -\sqrt{5}$.

Donde se conclui que $z = 2 - \sqrt{5}\text{i}$.

27.2. Seja $z = x + y\text{i}$.

$\text{Im}(z) = -1 \Leftrightarrow y = -1$

$|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (-1)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

Como o afixo de z pertence ao 3.º quadrante, sabe-se que $x < 0$. Então, $x = -\sqrt{3}$.

Donde se conclui que $z = -\sqrt{3} - \text{i}$.

27.3. Seja $z = x + y\text{i}$.

$\text{Im}(z) = 3 \Leftrightarrow y = 3$

$|z| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 9 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$

Como o afixo de z pertence ao 2.º quadrante, sabe-se que $x < 0$. Então, $x = -\sqrt{7}$.

Donde se conclui que $z = -\sqrt{7} + 3\text{i}$.

28.1. a) Seja $z = x + y\text{i}$.

$\overline{z} = x - y\text{i}$ e $\overline{(\overline{z})} = x + y\text{i} = z$

b) Seja $z = x + y\text{i}$, então $\overline{z} = x - y\text{i}$.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Assim, $|z| = |\overline{z}|$.

28.2. $z = -\sqrt{2} - \sqrt{5}\,\text{i}$

Por exemplo, $w = -\sqrt{2} + \sqrt{5}\,\text{i}$.

O afixo de w pertence ao 2.º quadrante e $|w| = |z|$, pois $w = \overline{z}$.

Página 21 – Pratica

29.1. $\text{Im}(z) = \text{Im}(w) \rightarrow$ os afixos de z e w têm a mesma ordenada, logo serão os pontos A e B (não necessariamente por esta ordem).

Como $\text{Re}(z) > 0$, conclui-se que o afixo de z é o ponto B e, consequentemente, o afixo de w é o ponto A.

a) Como o afixo de z pertence ao 1.º quadrante, então o afixo de $\overline{z}$ pertence ao 4.º quadrante.

b) O afixo de w pertence ao 2.º quadrante.

c) O afixo de $\overline{w}$ pertence ao 3.º quadrante.

29.2. $|3 - 2\text{i}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

30. $z_A = -\sqrt{12} - 2\text{i}$

30.1. $|z_A| = \left|-\sqrt{12} - 2\text{i}\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{12}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$

30.2. $z_B = \sqrt{12} - 2\text{i}$; $z_C = \sqrt{12} + 2\text{i}$; $z_D = -\sqrt{12} + 2\text{i}$

31.1. $(z - 3)^2 + 4z = 0 \Leftrightarrow z^2 - 6z + 9 + 4z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 9 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{-32}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}\text{i}}{2}$

$\Leftrightarrow z_A = 1 + 2\sqrt{2}\text{i} \vee z = 1 - 2\sqrt{2}\text{i}$

Como A e B são simétricos em relação ao eixo real e a ordenada de A é positiva, conclui-se que $z_A = 1 + 2\sqrt{2}\,\text{i}$ e $z_B = 1 - 2\sqrt{2}\,\text{i}$.

31.2. $|z_A| = |z_B| = \sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{9} = 3$

32. $w = 3 + 2\text{i}$

Designando por D o afixo de w, então $D(3, 2)$.

Como D é a imagem de C pela reflexão de eixo real, então $C(3, -2)$.

Como C é a imagem de B pela reflexão de eixo imaginário, então $B(-3, -2)$.

Sendo B o afixo de $\overline{z}$, então $\overline{z} = -3 - 2\text{i}$ e, consequentemente, $z = -3 + 2\text{i}$.

$z = -3 + 2\text{i}; |z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

33. $z = a + b\text{i}$, sendo $ab > 0$.

$ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

O afixo de z pertence ao 1.º ou ao 3.º quadrante.

33.1. Como o afixo de z pertence ao 1.º ou ao 3.º quadrante, então a imagem geométrica de $\overline{z}$ pertence ao 4.º ou ao 2.º quadrante.
Então, não existe um número complexo z nas condições indicadas, cuja imagem geométrica de $\overline{z}$ pertença ao 3.º quadrante.

33.2. Se uma equação do 2.º grau foi impossível em $\mathbb{R}$, então é possível em $\mathbb{C}$ e as suas soluções são números complexos conjugados.
Assim, as soluções, em $\mathbb{C}$, de uma equação do 2.º grau não podem ser do tipo $z = a + b\text{i}$, $ab > 0$, pois as suas imagens geométricas pertencem ao 1.º ou 3.º quadrante.

Página 22

34. $z = \frac{1}{2} - \text{i}$ e $w = -5 + \frac{3}{2}\text{i}$

34.1. $z - w = \frac{1}{2} - \text{i} - \left(-5 + \frac{3}{2}\text{i}\right) = \frac{1}{2} - \text{i} + 5 - \frac{3}{2}\text{i} = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}\text{i}$

34.2. $z + \overline{w} = \frac{1}{2} - \text{i} + \left(-5 - \frac{3}{2}\text{i}\right) = -\frac{9}{2} - \frac{5}{2}\text{i}$

34.3. $-z - w = -\left(\frac{1}{2} - \text{i}\right) - \left(-5 + \frac{3}{2}\text{i}\right) = -\frac{1}{2} + \text{i} + 5 - \frac{3}{2}\text{i} =$

$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\text{i}$

34.4. $\overline{z} + w = \frac{1}{2} + \text{i} + \left(-5 + \frac{3}{2}\text{i}\right) = -\frac{9}{2} + \frac{5}{2}\text{i}$

35.1. Seja $z = a + b\text{i}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então, $\overline{z} = a - b\text{i}$.

$z + \overline{z} = a + b\text{i} + a - b\text{i} = 2a + 0\text{i}$

$z + \overline{z}$ é um número real, porque $\text{Im}(z + \overline{z}) = 0$.

35.2. $z - \overline{z} = a + b\text{i} - (a - b\text{i}) = a + b\text{i} - a + b\text{i} = 2b\text{i}$

$z - \overline{z}$ é um imaginário puro, porque $\text{Re}(z - \overline{z}) = 0$.

36. $z_1 = -1 + 4\text{i}$ e $z_2 = -3 - \text{i}$

36.1. $x - y\text{i} = -z_1 + \text{i} \Leftrightarrow x - y\text{i} = 1 - 4\text{i} + \text{i} \Leftrightarrow x - y\text{i} = 1 - 3\text{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \wedge -y = -3 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 3$

36.2. $2x - y\text{i} = z_1 + \overline{z}_2 \Leftrightarrow 2x - y\text{i} = -1 + 4\text{i} + (-3 + \text{i}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - y\text{i} = -4 + 5\text{i} \Leftrightarrow 2x = -4 \wedge -y = 5$
$\Leftrightarrow x = -2 \wedge y = -5$

36.3. $x + 3y\text{i} = \overline{z_2 - z_1} \Leftrightarrow x + 3y\text{i} = \overline{-3 - \text{i} - (-1 + 4\text{i})}$

$\Leftrightarrow x + 3y\text{i} = \overline{-3 - \text{i} + 1 - 4\text{i}} \Leftrightarrow x + 3y\text{i} = \overline{-2 - 5\text{i}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + 3y\text{i} = -2 + 5\text{i}$
$\Leftrightarrow x = -2 \wedge 3y = 5$
$\Leftrightarrow x = -2 \wedge y = \frac{5}{3}$

37. Sejam $z = a + b\text{i}$ e $w = c + d\text{i}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

37.1. $\overline{z + w} = \overline{a + b\text{i} + c + d\text{i}} = \overline{(a + c) + (b + d)\text{i}} =$

$= (a + c) - (b + d)\text{i}$

$\overline{z} + \overline{w} = \overline{a + b\text{i}} + \overline{c + d\text{i}} = a - b\text{i} + c - d\text{i} = (a + c) - (b + d)\text{i}$

Então, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

37.2. $\overline{z - w} = \overline{a + b\text{i} - (c + d\text{i})} = \overline{a + b\text{i} - c - d\text{i}}$

$= \overline{(a - c) + (b - d)\text{i}} = (a - c) - (b - d)\text{i}$

$\overline{z} - \overline{w} = \overline{a + b\text{i}} - \overline{c + d\text{i}} = a - b\text{i} - (c - d\text{i}) = a - b\text{i} - c + d\text{i}$
$= (a - c) - (b - d)\text{i}$

Então, $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$.

Página 23 – Tarefa 3

1.1. $2 + 5\text{i}$

1.2. $8 + \text{i}$

2.1. $z = -3 + 2\text{i} \rightarrow A(-3, 2)$

$w = 5 + 3\text{i} \rightarrow B(5, 3)$

$z+w=(-3+2\mathrm{i})+(5+3\mathrm{i})=2+5\mathrm{i}\rightarrow C(2,5)$

$\overrightarrow{OA}=A-O=(-3,2)-(0,0)=(-3,2)$

$\overrightarrow{OB}=B-O=(5,3)-(0,0)=(5,3)$

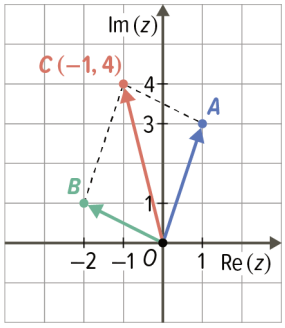
$\overrightarrow{OC}=C-O=(2,5)-(0,0)=(2,5)$

2.2. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(-3,2)+(5,3)=(2,5)$

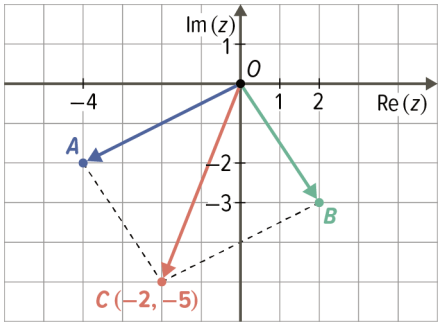
$O+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(0,0)+(2,5)=(2,5)=C$

Então, $C=O+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

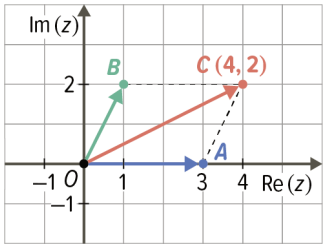
3.1.



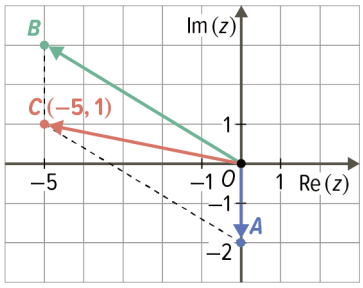
3.2.



3.3.



3.4.



Página 24

38.1. $(2-3\mathrm{i})\times 2\mathrm{i}=4\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2=4\mathrm{i}+6=6+4\mathrm{i}$

38.2. $(-4+\mathrm{i})\times(1-3\mathrm{i})=-4+12\mathrm{i}+\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2=-4+13\mathrm{i}+3$

$=-1+13\mathrm{i}$

38.3. $-3+\mathrm{i}\times(2-4\mathrm{i})=-3+2\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2=-3+2\mathrm{i}+4=1+2\mathrm{i}$

38.4. $3\mathrm{i}\times(5-\mathrm{i})-9\mathrm{i}=15\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2-9\mathrm{i}=3+6\mathrm{i}$

38.5. $6-5\mathrm{i}\times(2\mathrm{i})=6-10\mathrm{i}^2=6+10=16$

39. A é o afixo do número complexo $z=2-\mathrm{i}$.

$-z=-(2-\mathrm{i})=-2+\mathrm{i}\rightarrow E$

$\mathrm{i}z=\mathrm{i}(2-\mathrm{i})=2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=1+2\mathrm{i}\rightarrow C$

$-2z=-2(2-\mathrm{i})=-4+2\mathrm{i}\rightarrow B$

$-\mathrm{i}z=-(1+2\mathrm{i})=-1-2\mathrm{i}\rightarrow D$

Número complexo	Afixo
z	A
$-z$	E
$\mathrm{i}z$	C
$-2z$	B
$-\mathrm{i}z$	D

40. $z=-2-\mathrm{i}$ e $w=4-3\mathrm{i}$

40.1. $z\times\overline{z}=(-2-\mathrm{i})\times(-2+\mathrm{i})=(-2)^2+(-1)^2=5$

40.2. $w\times\overline{w}=(4-3\mathrm{i})\times(4+3\mathrm{i})=4^2+(-3)^2=25$

Página 25

41. $z\times\overline{z}=|z|^2$, logo $z\times\overline{z}$ é um número real não negativo.

A única opção que pode representar $z\times\overline{z}$ é a **(D)**.

42.1. Como o afixo de z pertence ao 1.º quadrante e o afixo de $\mathrm{i}z$ é a imagem do afixo de z pela rotação de centro O e amplitude 90º, então o afixo de $\mathrm{i}z$ pertence ao 2.º quadrante.

42.2. Como o afixo que z pertence ao 1.º quadrante, o afixo de $\overline{z}$ pertence ao 4.º quadrante (imagem do afixo de z pela reflexão de eixo real).

O afixo de $2\overline{z}$ é a imagem do afixo de $\overline{z}$ pela homotetia de centro O e razão 2, logo o afixo de $2\overline{z}$ pertence ao 4.º quadrante.

42.3. Como o afixo de $\overline{z}$ pertence ao 4.º quadrante e o afixo de $i\overline{z}$ é a imagem do afixo de $\overline{z}$ pela rotação de centro O e amplitude 90º, então o afixo de $i\overline{z}$ pertence ao 1.º quadrante.

43.

Número complexo	Quadrante a que pertence o afixo
z	2.º
iz	3.º
$2z$	2.º
$\overline{z}$	3.º
$-\sqrt{7}z$	4.º

44. Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$z \times w = (a+bi)\times(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$
$= (ac - bd) + (ad + bc)i$

$\overline{z \times w} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{z} \times \overline{w} = (a-bi)\times(c-di) =$
$= ac - adi - bci + bdi^2$
$= (ac - bd) + (-ad - bd)i$
$= (ac - bd) - (ad + bd)i$

Então, $\overline{z \times w} = \overline{z} \times \overline{w}$.

Página 26 – Tarefa 4

1. $z_A = 2 + i$ e $z_B = 3 - 2i$

1.1. $iz_A = i(2+i) + 2i + i^2 = -1 + 2i$

A': afixo de iz_A

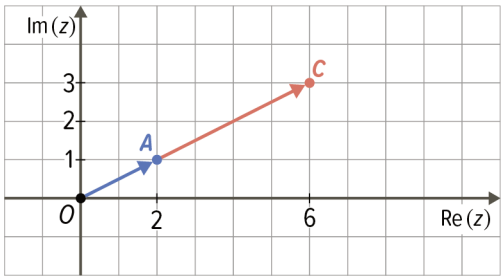
$A'(-1, 2)$

1.2. **a)** $z_B \times z_A = (3-2i)\times(2+i) = 6 + 3i - 4i \underbrace{-2i^2}_{+2} = 8 - i$

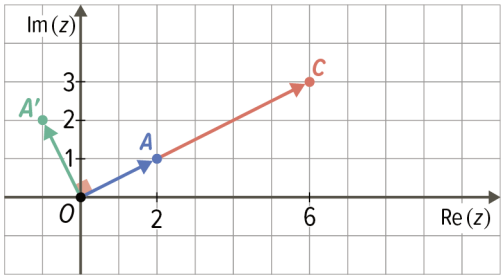
$3z_A - 2iz_A = 3(2+i) - 2i(2+i) = 6 + 3i - 4i \underbrace{-2i^2}_{+2}$
$= 8 - i$

Logo, $z_B \times z_A = 3z_A - 2iz_A$.

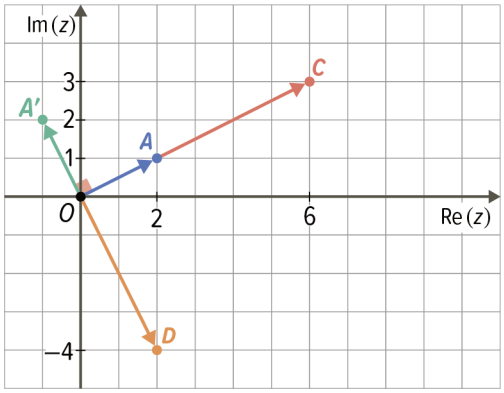
b1)



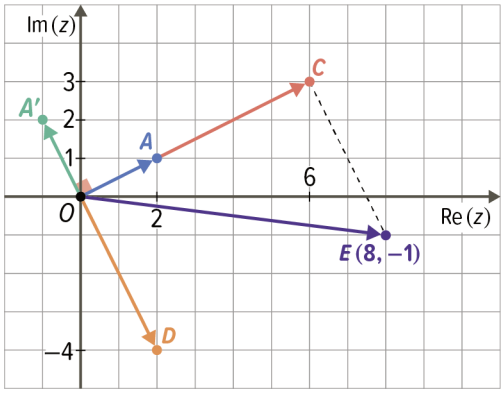
b2)



b3)



b4)



1.3. **a)** $\overrightarrow{OC} = 3 \times \overrightarrow{OA}$

b) $\overrightarrow{OD} = -2 \times \overrightarrow{OA'}$

c) $E = O + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

1.4. $E(8, -1)$

2. $z_A = -2+i \qquad A(-2, 1)$

$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}(A-O) = \frac{3}{2}((-2,1)-(0,0)) =$

$= \frac{3}{2}(-2,1) = \left(-3, \frac{3}{2}\right)$

$C\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

$iz_A = i(-2+i) = -2i+i^2 = -1-2i$

$B(-1, -2)$

Como O é o ponto médio de $[BD]$ então B e D são simétricos em relação à origem. Logo, $D(1, 2)$.

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \left(-3, \frac{3}{2}\right) + (1, 2) = \left(-2, \frac{7}{2}\right)$

$z_E = -2 + \frac{7}{2}i$

Sendo $w = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$w \times z_A = z_E \Leftrightarrow (a+bi)(-2+i) = -2+\frac{7}{2}i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2a+ai-2bi+bi^2 = -2+\frac{7}{2}i$

$\Leftrightarrow (-2a-b)+(a-2b)i = -2+\frac{7}{2}i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b=-2 \\ a-2b=\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-2a \\ a-2(2-2a)=\frac{7}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---------} \\ a-4+4a=\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=\frac{3}{2} \end{cases}$

Então, $w = \frac{3}{2} - i$.

3.1. Sabe-se que $iz_A = z_B$, logo $z_A = -iz_B$.

$w = -i$

3.2. Sabe-se que $z_C = -2z_B$, logo $z_B = -\frac{1}{2}z_C$.

$w = -\frac{1}{2}$

3.3. $z_A = -iz_B = -i\left(-\frac{1}{2}z_C\right) = \frac{1}{2}iz_C$

Logo, $z_C = -2iz_A$.

$w = -2i$

Página 27

45.1. $z = i$; $|z|^2 = 0^2+1^2 = 1$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{i} = \frac{1}{1}\times(-i) = -i$

45.2. $z = -3i$; $|z|^2 = 0^2+(-3)^2 = 9$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{-3i} = \frac{1}{9}\times(3i) = \frac{1}{3}i$

45.3. $z = 5+i$; $|z|^2 = 5^2+1^2 = 26$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{5+i} = \frac{1}{26}\times(5-i) = \frac{5}{26}-\frac{1}{26}i$

45.4. $z = -4+2i$; $|z|^2 = (-4)^2+2^2 = 20$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{-4+2i} = \frac{1}{20}\times(-4-2i) = -\frac{1}{5}-\frac{1}{10}i$

45.5. $z = -1+3i$; $|z|^2 = (-1)^2+3^2 = 10$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{-1+3i} = \frac{1}{10}\times(-1-3i) = -\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$

46. $z = -3+i$, $w = -6i$ e $t = -2-4i$

46.1. $\frac{z}{w} = \frac{-3+i}{-6i} = \frac{(-3+i)(6i)}{(-6i)(6i)} = \frac{-18i+\overbrace{6i^2}^{-6}}{36} = -\frac{1}{6}-\frac{1}{2}i$

46.2. $\frac{t}{z} = \frac{-2-4i}{-3+i} = \frac{(-2-4i)(-3-i)}{(-3+i)(-3+i)} = \frac{6+2i+12i+4i^2}{(-3)^2+1^2} =$

$= \frac{2+14i}{10} = \frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$

46.3. $\frac{i}{t} = \frac{i}{-2+4i} = \frac{i(-2-4i)}{(-2+4i)(-2-4i)} = \frac{-2i-4i^2}{(-2^2)+4^2} =$

$= \frac{4-2i}{20} = \frac{1}{5}-\frac{1}{10}i$

46.4. $\frac{t+\overline{w}}{\overline{z}} = \frac{-2-4i+6i}{-3-i} = \frac{-2+2i}{-3-i} = \frac{(-2+2i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)} =$

$= \frac{6-2i-6i+2i^2}{(-3)^2+(-1)^2} = \frac{4-8i}{10} = \frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$

47.1. $z = \frac{1+i}{3-4i} = \frac{(1+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i+3i+4i^2}{3^2+(-4)^2} =$

$= \frac{-1+7i}{25} = -\frac{1}{25}+\frac{7}{25}i$

$\overline{z} = -\frac{1}{25}-\frac{7}{25}i$

47.2. $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{25}\right)^2 + \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$

Página 28

48. $z = k + 2 - 2k^2\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}$

48.1. Se $k = -1$, então $z = -1 + 2 - 2 \times (-1)^2\,\mathrm{i}$, ou seja,

$z = 1 - 2\mathrm{i}$.

$$\frac{\mathrm{i}}{z} = \frac{\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1^2+(-2)^2} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$$

48.2. $$\frac{z}{\mathrm{i}} = \frac{k+2-2k^2\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{(k+2-2k^2\mathrm{i}) \times (-\mathrm{i})}{\underbrace{\mathrm{i} \times (-\mathrm{i})}_{1}} =$$

$$= -(k+2)\mathrm{i} + 2k^2\mathrm{i}^2 = -2k^2 + (-k-2)\mathrm{i}$$

$$\frac{z}{\mathrm{i}} = -2 - 3\mathrm{i} \Leftrightarrow -2k^2 + (-k-2)\mathrm{i} = -2 - 3\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2k^2 = -2 \\ -k-2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 = 1 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \vee k = -1 \\ k = 1 \end{cases}$$

$k = 1$

49. $$z = 7 + 4\mathrm{i} - \frac{8\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 7 + 4\mathrm{i} - \frac{8\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} =$$

$$= 7 + 4\mathrm{i} - \frac{8\mathrm{i} - 8\mathrm{i}^2}{1^2+1^2} = 7 + 4\mathrm{i} - (4 + 4\mathrm{i}) = 7 + 4\mathrm{i} - 4 - 4\mathrm{i} = 3$$

Como $\mathrm{Im}(z) = 0$, conclui-se que z é um número real, ou seja, $z \in \mathbb{R}$.

50.1. Se o afixo de $\frac{1}{z}$ pertence ao 3.º quadrante, então o afixo de $\overline{z}$ também pertence ao 3.º quadrante (pois os afixos de $\frac{1}{z}$ e de $\overline{z}$ pertencem ao mesmo quadrante).
Logo, o afixo de z pertence ao 2.º quadrante.
Assim, a afirmação é falsa.

50.2. $$z = \frac{1-3\mathrm{i}}{-2+\mathrm{i}} = \frac{(1-3\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})}{(-2+\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})} = \frac{-2-\mathrm{i}+6\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{(-2)^2+1^2} =$$

$$= \frac{-5+5\mathrm{i}}{5} = -1 + \mathrm{i}$$

$$|z| = |-1+\mathrm{i}| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{|1-3\mathrm{i}|}{|-2+\mathrm{i}|} = \frac{\sqrt{1^2+(-3)^2}}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

Então, $|z| = \frac{|1-3\mathrm{i}|}{|-2+\mathrm{i}|}$.

A afirmação é verdadeira.

Página 29 – Tarefa 5

1.1. $-2z_B \rightarrow$ homotetia de centro O e razão -2.

Se o afixo de z_B pertence ao 1.º quadrante, então o afixo de $-2z_B$ pertence ao 3.º quadrante.

1.2. $\mathrm{i}z_B \rightarrow$ rotação de centro O e amplitude 90º.

Se o afixo de z_B pertence ao 1.º quadrante, então o afixo de $\mathrm{i}z_B$ pertence ao 2.º quadrante.

1.3. $\frac{1}{2}z_B \rightarrow$ homotetia de centro O e razão $\frac{1}{2}$

$-z_C \rightarrow$ reflexão de centro O

$\frac{1}{2}z_B - z_C \rightarrow$ translação de vetor $\overrightarrow{CO}$

Então, o afixo do número complexo $\frac{1}{2}z_B - z_C$ pertence ao 1.º quadrante.

1.4. $\left(\overline{-z_A}\right) \rightarrow$ reflexão de centro O (afixo fica no 3.º quadrante) seguida de uma reflexão segundo o eixo real (afixo fica no 2.º quadrante)

O afixo do número complexo $\left(\overline{-z_A}\right)$ pertence ao 2.º quadrante.

1.5. $z_A + z_B \rightarrow$ corresponde geometricamente à soma dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$, $D \in$ 1.º quadrante

$\mathrm{i}(z_A + z_B) \rightarrow$ rotação de centro O e amplitude 90º

O afixo de $\mathrm{i}(z_A + z_B)$ pertence ao 2.º quadrante.

1.6. $\overline{z_C} \rightarrow$ reflexão segundo o eixo real (2.º quadrante)

$\mathrm{i}\overline{z_C} \rightarrow$ rotação de centro O e amplitude 90º (3.º quadrante)

$-\mathrm{i}\overline{z_C} \rightarrow$ reflexão de centro O (1.º quadrante)

O afixo de $-\mathrm{i}\overline{z_C}$ pertence ao 1.º quadrante.

1.7. O afixo de $\frac{1}{z_A}$ pertence ao mesmo quadrante do afixo de $\overline{z_A}$, ou seja, pertence ao 4.º quadrante.

1.8. $\overline{z_C} \rightarrow$ afixo pertence ao 2.º quadrante

$\frac{1}{\overline{z_C}} \rightarrow$ afixo pertence ao mesmo quadrante de $\overline{(\overline{z_C})}$, ou seja, de z_C (3.º quadrante)

$\frac{\mathrm{i}}{\overline{z_C}} = \mathrm{i} \times \frac{1}{\overline{z_C}} \rightarrow$ rotação de centro O e amplitude 90º

O afixo de $\frac{\mathrm{i}}{\overline{z_C}}$ pertence ao 4.º quadrante.

2. $z_A = 2+3\mathrm{i}$, $z_B = 5+\mathrm{i}$ e $z_C = -2-\mathrm{i}$

2.1. $\frac{z_A}{z_C} = \frac{2+3\mathrm{i}}{-2-\mathrm{i}} = \frac{(2+3\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})}{(-2-\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})} = \frac{-4+2\mathrm{i}-6\mathrm{i}+\overbrace{3\mathrm{i}^2}^{-3}}{(-2)^2+(-1)^2} =$

$= \frac{-7-4\mathrm{i}}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$

$\frac{z_B}{z_C} = \frac{5+\mathrm{i}}{-2-\mathrm{i}} = \frac{(5+\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})}{(-2-\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})} = \frac{-10+5\mathrm{i}-2\mathrm{i}+\overbrace{\mathrm{i}^2}^{-1}}{(-2)^2+(-1)^2} =$

$= \frac{-11+3\mathrm{i}}{5} = -\frac{11}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$

O afixo de $\frac{z_A}{z_C}$ pertence ao 3.º quadrante e o afixo de $\frac{z_B}{z_C}$ pertence ao 2.º quadrante.

2.2. A afirmação é falsa.

Em 2.1. verificou-se que os afixos de z_B e de z_C pertencem, respetivamente, aos 1.º e 3.º quadrantes e o afixo de $\frac{z_B}{z_C}$ pertence ao 2.º quadrante.

2.3. $z = k-2\mathrm{i},\ k \in \mathbb{R}$

a) $z \times z_A = (k-2\mathrm{i}) \times (2+3\mathrm{i}) = 2k+3k\mathrm{i}-4\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2 =$

$= (2k+6)+(3k-4)\mathrm{i}$

O afixo de $z \times z_A$ pertence ao 4.º quadrante se:

$\mathrm{Re}(z \times z_A) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z \times z_A) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k+6 > 0 \wedge 3k-4 < 0 \Leftrightarrow k > -3 \wedge k < \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow k \in \left]-3, \frac{4}{3}\right[$

b) $\frac{z}{z_C} = \frac{k-2\mathrm{i}}{-2-\mathrm{i}} = \frac{(k-2\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})}{(-2-\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})}$

$= \frac{-2k+k\mathrm{i}+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{(-2)^2+(-1)^2} = \frac{2-2k}{5} + \frac{k+4}{5}\mathrm{i}$

O afixo de $\frac{z}{z_C}$ pertence ao 2.º quadrante se:

$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z_C}\right) < 0 \wedge \mathrm{Im}\left(\frac{z}{z_C}\right) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2-2k}{5} < 0 \wedge \frac{k+4}{5} > 0 \Leftrightarrow k > 1 \wedge k > -4$

$\Leftrightarrow k > 1 \Leftrightarrow k \in]1, +\infty[$

Página 30 – Pratica

51. $z_1 = -\frac{3}{2}+2\mathrm{i}$, $z_2 = 4-\frac{1}{2}\mathrm{i}$, $z_3 = \frac{\mathrm{i}}{3}$

51.1. $z_1 + z_2 = \left(-\frac{3}{2}+2\mathrm{i}\right)+\left(4-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{5}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$

51.2. $z_3 - \overline{z_2} = \frac{\mathrm{i}}{3} - \left(4+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{\mathrm{i}}{3} - 4 - \frac{1}{2}\mathrm{i} = -4 - \frac{1}{6}\mathrm{i}$

51.3. $-z_1 + z_2 - z_3 = -\left(-\frac{3}{2}+2\mathrm{i}\right)+4-\frac{1}{2}\mathrm{i}-\frac{\mathrm{i}}{3} =$

$= \frac{3}{2} - 2\mathrm{i} + 4 - \frac{1}{2}\mathrm{i} - \frac{\mathrm{i}}{3} = \frac{11}{2} - \frac{17}{6}\mathrm{i}$

51.4. $z_2 - (z_1 - z_3) = 4 - \frac{1}{2}\mathrm{i} - \left(-\frac{3}{2}+2\mathrm{i}-\frac{\mathrm{i}}{3}\right) =$

$= 4 - \frac{1}{2}\mathrm{i} - \left(-\frac{3}{2}+\frac{5}{3}\mathrm{i}\right) = 4 - \frac{1}{2}\mathrm{i} + \frac{3}{2} - \frac{5}{3}\mathrm{i} = \frac{11}{2} - \frac{13}{6}\mathrm{i}$

51.5. $z_1 \times z_3 = \left(-\frac{3}{2}+2\mathrm{i}\right) \times \frac{\mathrm{i}}{3} = -\frac{1}{2}\mathrm{i} + \frac{2}{3}\mathrm{i}^2 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$

51.6. $z_3(z_1 - z_2) = \frac{\mathrm{i}}{3}\left(-\frac{3}{2}+2\mathrm{i}-\left(4-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right) =$

$= \frac{\mathrm{i}}{3}\left(-\frac{3}{2}+2\mathrm{i}-4+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{\mathrm{i}}{3}\left(-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{11}{6}\mathrm{i} + \frac{5}{6}\mathrm{i}^2$

$= -\frac{5}{6} - \frac{11}{6}\mathrm{i}$

51.7. $\frac{z_1}{\mathrm{i}} = \frac{-\frac{3}{2}+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{\left(-\frac{3}{2}+2\mathrm{i}\right)\times(-\mathrm{i})}{\underbrace{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}_{1}} = \frac{3}{2}\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 2 + \frac{3}{2}\mathrm{i}$

51.8. $\frac{2z_1 - 3z_3}{2\mathrm{i}} = \frac{2\left(-\frac{3}{2}+2\mathrm{i}\right) - 3\left(\frac{\mathrm{i}}{3}\right)}{2\mathrm{i}} = \frac{-3+4\mathrm{i}-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$

$= \frac{-3+3\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \frac{(-3+3\mathrm{i})(-2\mathrm{i})}{(2\mathrm{i})(-2\mathrm{i})} = \frac{6\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2}{4} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$

52. $z=-3+2\text{i}$, $w=\dfrac{5-2\text{i}}{1+\text{i}}$ e $t=-2-\text{i}$

52.1. $\dfrac{z}{t}=\dfrac{-3+2\text{i}}{-2-\text{i}}=\dfrac{(-3+2\text{i})(-2+\text{i})}{(-2-\text{i})(-2+\text{i})}=\dfrac{6-3\text{i}-4\text{i}+2\text{i}^2}{(-2)^2+(-1)^2}=$

$=\dfrac{4-7\text{i}}{5}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{7}{5}\text{i}$

52.2. $\overline{z}=\dfrac{t}{\text{i}}=(-3-2\text{i})\times\dfrac{-2-\text{i}}{\text{i}}=(-3-2\text{i})\times\dfrac{(-2-\text{i})\times(-\text{i})}{\underbrace{\text{i}\times(-\text{i})}_{1}}=$

$=(-3-2\text{i})\times(2\text{i}+\text{i}^2)=(-3-2\text{i})\times(-1+2\text{i})=3-6\text{i}+2\text{i}-4\text{i}^2$

$=7-4\text{i}$

52.3. $w+t=\dfrac{5-2\text{i}}{1+\text{i}}+(-2-\text{i})=\dfrac{(5-2\text{i})(1-\text{i})}{(1+\text{i})(1-\text{i})}-2-\text{i}=$

$=\dfrac{5-5\text{i}-2\text{i}+2\text{i}^2}{1^2+1^2}-2-\text{i}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}\text{i}-2-\text{i}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{9}{2}\text{i}$

52.4. $w\times\overline{t}=\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}\text{i}\right)\times(-2+\text{i})=-3+\dfrac{3}{2}\text{i}+7\text{i}-\dfrac{7}{2}\text{i}^2=$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{17}{2}\text{i}$

53. $z_A+z_B\rightarrow$ número real positivo, então:

$\overline{z_A+z_B}=z_A+z_B$

$w=\text{i}\left(\overline{z_A+z_B}\right)\rightarrow$ rotação de centro O e amplitude 90º

w é um número imaginário puro positivo.

Assim, o afixo de w pertence ao semieixo positivo imaginário.

A opção correta é a **(B)**.

54. $w=4-3\text{i}$ e $z=k+1-2k\text{i}$, $k\in\mathbb{R}$

54.1. $w+z=(4-3\text{i})+(k+1-2k\text{i})=(k+5)+(-3-2k)\text{i}$

O afixo de $w+z$ pertence ao 2.º quadrante se:

$\text{Re}(w+z)<0\wedge\text{Im}(w+z)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k+5<0\wedge-3-2k>0\Leftrightarrow k<-5\wedge k<-\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow k<-5\Leftrightarrow k\in\left]-\infty,-5\right[$

54.2. $w-z=(4-3\text{i})-(k+1-2k\text{i})=4-3\text{i}-k-1+2k\text{i}=$

$=(3-k)+(-3+2k)\text{i}$

O afixo de $w-z$ pertence ao 3.º quadrante se:

$\text{Re}(w-z)<0\wedge\text{Im}(w-z)<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-k<0\wedge-3+2k<0\Leftrightarrow\underbrace{k>3\wedge k<\dfrac{3}{2}}_{\text{Condição impossível}}$

Conclusão: Não existe nenhum valor real k para o qual o afixo de $w-z$ pertence ao 3.º quadrante.

54.3. Sendo $k=-1$, então $z=-1+1-2\times(-1)\text{i}$, ou seja,

$z=2\text{i}$

a) $wz=(4-3\text{i})\times(2\text{i})=8\text{i}-6\text{i}^2=6+8\text{i}$

O afixo wz pertence ao 1.º quadrante.

b) $\text{i}(w+z)=\text{i}(4-3\text{i}+2\text{i})=\text{i}(4-\text{i})=4\text{i}-\text{i}^2=1+4\text{i}$

O afixo de $\text{i}(w+z)$ pertence ao 1.º quadrante.

c) $\dfrac{z}{w}=\dfrac{2\text{i}}{4-3\text{i}}=\dfrac{2\text{i}(4+3\text{i})}{(4-3\text{i})(4+3\text{i})}=\dfrac{8\text{i}+6\text{i}^2}{4^2+(-3)^2}$

$=-\dfrac{6}{25}+\dfrac{8}{25}\text{i}$

O afixo de $\dfrac{z}{w}$ pertence ao 2.º quadrante.

d) $\dfrac{w}{z}=\dfrac{4-3\text{i}}{2\text{i}}=\dfrac{(4-3\text{i})(-2\text{i})}{2\text{i}(-2\text{i})}=\dfrac{-8\text{i}+6\text{i}^2}{4}=-\dfrac{3}{2}-2\text{i}$

O afixo de $\dfrac{w}{z}$ pertence ao 3.º quadrante.

55. Afixo de $z\rightarrow$ 4.º quadrante

Afixo de $\dfrac{1}{z}\rightarrow$ 1.º quadrante

Afixo de $-\dfrac{1}{z}\rightarrow$ 3.º quadrante

A opção correta é a **(D)**.

Página 31 – Pratica

56. $z=x+y\text{i}$, $x,y\in\mathbb{R}$

56.1. $2z-\overline{z}=3+2\text{i}\Leftrightarrow 2(x+y\text{i})-(x-y\text{i})=3+2\text{i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+2y\text{i}-x+y\text{i}=3+2\text{i}\Leftrightarrow x+3y\text{i}=3+2\text{i}$

$\Leftrightarrow x=3\wedge 3y=2\Leftrightarrow x=3\wedge y=\dfrac{2}{3}$

56.2. $\dfrac{\overline{z}}{\text{i}}=2z+\text{i}\Leftrightarrow\dfrac{x-y\text{i}}{\text{i}}=2(x+y\text{i})+\text{i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{(x-y\text{i})\times(-\text{i})}{\text{i}\times(-\text{i})}=2x+2y\text{i}+\text{i}\Leftrightarrow -x\text{i}-y=2x+(2y+1)\text{i}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-y=2x\\-x=2y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x\\-x=-4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{2}{3}\\x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

57. $z_1 = \dfrac{1-5\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}} = \dfrac{(1-5\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})} = \dfrac{-1-\mathrm{i}+5\mathrm{i}+5\mathrm{i}^2}{(-1)^2+1^2} =$

$= \dfrac{-6+4\mathrm{i}}{2} = -3+2\mathrm{i}$

$z_2 = \overline{z}_1 = -3-2\mathrm{i}$

O afixo de z_2 é o ponto C.

58. $P(z) = z^2 - 2z + 4$

58.1. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} \Leftrightarrow z = 1+\sqrt{3}\mathrm{i} \vee z = 1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

Então, $z_1 = 1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ e $z_2 = 1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ (por exemplo).

58.2. $(z-z_1)(z-z_2) = \left(z-\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)\right)\left(z-\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)\right) =$

$= \left(z-1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)\left(z-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$

$= z^2 - z + \cancel{\sqrt{3}z\mathrm{i}} - z + 1 \cancel{-\sqrt{3}\mathrm{i}} \cancel{-\sqrt{3}z\mathrm{i}} + \cancel{\sqrt{3}\mathrm{i}} - 3\mathrm{i}^2$

$= z^2 - 2z + 1 + 3 = z^2 - 2z + 4 = P(z)$

59. $z = 2k - 3\mathrm{i},\ k \in \mathbb{R}$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2k-3\mathrm{i}} = \dfrac{1(2k+3\mathrm{i})}{(2k-3\mathrm{i})(2k+3\mathrm{i})} = \dfrac{2k+3\mathrm{i}}{4k^2+9} =$

$= \dfrac{2k}{4k^2+9} + \dfrac{3}{4k^2+9}\mathrm{i}$

Se $k > 0$, então o afixo de $\dfrac{1}{z}$ pertence ao 1.º quadrante. Se $k < 0$, então o afixo de $\dfrac{1}{z}$ pertence ao 2.º quadrante. Logo, conclui-se que qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o afixo de $\dfrac{1}{z}$ pertence ao 1.º ou ao 2.º quadrantes.

Página 32

60.1. $z = \mathrm{i}^{72} - \mathrm{i}^{53} = \mathrm{i}^{4\times 18+0} - \mathrm{i}^{4\times 13+1} = \mathrm{i}^0 - \mathrm{i}^1 = 1-\mathrm{i}$

60.2. $z = 2\mathrm{i}^{35} + \mathrm{i}^{47} = 2\mathrm{i}^{4\times 8+3} + \mathrm{i}^{4\times 11+3} = 2\mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^3 = -2\mathrm{i} - \mathrm{i} = -3\mathrm{i}$

60.3. $z = \mathrm{i}^{101} - 5\mathrm{i}^{86} = \mathrm{i}^{4\times 25+1} - 5\mathrm{i}^{4\times 21+2} = \mathrm{i}^1 - 5\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} + 5 = 5+\mathrm{i}$

60.4. $z = \dfrac{5\mathrm{i}^{37}}{2\mathrm{i}^{48}+\mathrm{i}^{67}} = \dfrac{5\mathrm{i}^{4\times 9+1}}{2\mathrm{i}^{4\times 12+0}+\mathrm{i}^{4\times 16+3}} = \dfrac{5\mathrm{i}^1}{2\mathrm{i}^0+\mathrm{i}^3} = \dfrac{5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$

$= \dfrac{5\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \dfrac{10\mathrm{i}+5\mathrm{i}^2}{2^2+(-1)^2} = \dfrac{-5+10\mathrm{i}}{5} = -1+2\mathrm{i}$

61. $w = \left(2\mathrm{i}^{27} + \mathrm{i}^{30}\right)^2 = \left(2\mathrm{i}^{4\times 6+3} + \mathrm{i}^{4\times 7+2}\right)^2 = \left(2\mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^2\right)^2 =$

$= (-2\mathrm{i}-1)^2 = 4\mathrm{i}^2 + 4\mathrm{i} + 1 = -3+4\mathrm{i}$

$\overline{w} = -3-4\mathrm{i}$

$|w| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

62.1. $\dfrac{1}{\mathrm{i}^{15}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}^{4\times 3+3}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}^3} = \dfrac{1}{-\mathrm{i}} = \dfrac{1\times\mathrm{i}}{-\mathrm{i}\times\mathrm{i}} = \mathrm{i}$, logo i é solução da equação $\dfrac{1}{z^{15}} = \mathrm{i}$.

62.2. $2(-\mathrm{i})^6 - 3(-\mathrm{i})^7 = 2\mathrm{i}^6 - 3\left(-\mathrm{i}^7\right) = 2\mathrm{i}^6 + 3\mathrm{i}^7 =$

$= 2\mathrm{i}^{4\times 1+2} + 3\mathrm{i}^{4\times 1+3} = 2\mathrm{i}^2 + 3\mathrm{i}^3 = -2-3\mathrm{i}$, logo $-\mathrm{i}$ é solução da equação $2z^6 - 3z^7 = -2-3\mathrm{i}$.

63. $z_A = -1+2\mathrm{i}$

$B(0,-1)$, logo $z_B = -\mathrm{i}$. $C(1,0)$, logo $z_C = 1$.

$2(z_B)^{43} - (z_C)^{75} = 2(-\mathrm{i})^{43} - 1^{75} = 2(-\mathrm{i})^{43} - 1 =$

$= -2\mathrm{i}^{4\times 10+3} - 1 = -2\mathrm{i}^3 - 1 = -2(-\mathrm{i}) - 1 =$

$= 2\mathrm{i} - 1 = -1+2\mathrm{i} = z_A$

Página 33 – Tarefa 6

1. $A(5,-2)$ e $z_A = 5-2\mathrm{i}$

$B(0,3)$ e $z_B = 3\mathrm{i}$

- $\dfrac{6-\mathrm{i}}{z_B} = \dfrac{6-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}} = \dfrac{(6-\mathrm{i})(-3\mathrm{i})}{3\mathrm{i}(-3\mathrm{i})} = \dfrac{-18\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{9} = -\dfrac{1}{3} - 2\mathrm{i}$ (H)
- $\dfrac{z_A \times \overline{z}_B}{|z_B|} - 8\mathrm{i}^{19} = \dfrac{(5-2\mathrm{i})(-3\mathrm{i})}{3} - 8\mathrm{i}^{4\times 4+3} = \dfrac{-15\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2}{3} - 8\mathrm{i}^3 =$

  $= \dfrac{-6-15\mathrm{i}}{3} - 8(-\mathrm{i}) = -2-5\mathrm{i}+8\mathrm{i} = -2+3\mathrm{i}$ (E)
- $(z_A + z_B - 3)^2 - 2\mathrm{i} = (5-2\mathrm{i}+3\mathrm{i}-3)^2 - 2\mathrm{i} =$

  $= (2+\mathrm{i})^2 - 2\mathrm{i} = 4+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i} = 3+2\mathrm{i}$ (C)
- $z_A - (8-\overline{z}_B) + \dfrac{1}{z_A + 5\mathrm{i}^{30}} =$

  $= 5-5\mathrm{i} - (8-(-3\mathrm{i})) + \dfrac{1}{5-2\mathrm{i}+5\mathrm{i}^{4\times 7+2}} =$

  $= 5-2\mathrm{i}-8-3\mathrm{i} + \dfrac{1}{5-2\mathrm{i}+5\mathrm{i}^2} =$

  $= -3-5\mathrm{i} + \dfrac{1}{-2\mathrm{i}} = -3-5\mathrm{i} + \dfrac{2\mathrm{i}}{4} =$

  $= -3-5\mathrm{i} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} = -3-\dfrac{9}{2}\mathrm{i}$ (G)

- $|z_B|\left(z_A+z_B-\text{Re}(z_A)\right)^{26}=3(5-2\text{i}+3\text{i}-5)^{26}=3\text{i}^{26}=$

$=3\text{i}^{4\times6+2}=3\text{i}^2=-3$ *(F)*

- $\dfrac{7-z_A}{\text{i}^{20}+\text{i}^{51}}=\dfrac{7-(5-2\text{i})}{\text{i}^{4\times5+0}+\text{i}^{4\times12+3}}=\dfrac{7-5+2\text{i}}{\text{i}^0+\text{i}^3}=\dfrac{2+2\text{i}}{1-\text{i}}=$

$=\dfrac{(2+2\text{i})(1+\text{i})}{(1-\text{i})(1+\text{i})}=\dfrac{2+2\text{i}+2\text{i}+2\text{i}^2}{1^2+(-1)^2}=\dfrac{4\text{i}}{2}=2\text{i}$ *(D)*

Número complexo representado pela expressão	Letra que representa o afixo
$\dfrac{6-\text{i}}{z_B}$	*H*
$\dfrac{z_A\times\overline{z}_B}{z_B}-8\text{i}^{19}$	*E*
$(z_A+z_B-3)^2-2\text{i}$	*C*
$z_A-(8-\overline{z}_B)+\dfrac{1}{z_A+5\text{i}^{30}}$	*G*
$\|z_B\|\left(z_A+z_B-\text{Re}(z_A)\right)^{26}$	*F*
$\dfrac{7-z_A}{\text{i}^{20}+\text{i}^{51}}$	*D*

2.1. $w=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\text{i}$

$w^2-w+2=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\text{i}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\text{i}\right)+2=$

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\text{i}+\dfrac{7}{4}\text{i}^2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{7}}{2}\text{i}+2$

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}+2$

$=-2+2=0$

Donde se conclui que *w* é solução da equação $z^2-z+2=0$.

2.2. $w=1+\text{i}^{75}=1+\text{i}^{4\times18+3}=1+\text{i}^3=1-\text{i}$

$w^3=(1-\text{i})^3=(1-\text{i})^2(1-\text{i})=\left(1-2\text{i}+\text{i}^2\right)(1-\text{i})=$

$=-2\text{i}(1-\text{i})=-2\text{i}+2\text{i}^2=-2-2\text{i}$

$-2\overline{w}=-2(1+\text{i})=-2-2\text{i}$

$w^3=-2\overline{w}$, logo *w* é solução da equação $\left(\dfrac{z-\overline{z}}{2}\right)^7=-z$.

Página 34 – Consolida

1. $z=-3+5\text{i}$ e $w=7-\text{i}$

1.1. $\text{Re}(t)=\text{Im}(w)$ e $\text{Im}(t)=-\text{Im}(w)$

$\text{Re}(t)=-1$ e $\text{Im}(t)=1$

Logo, $t=-1+\text{i}$.

1.2. $\text{Re}(t)+\text{Im}(z)=3$ e $\text{Im}(t)=\text{Re}(z)$

$\text{Re}(t)+5=3$ e $\text{Im}(t)=-3$

$\text{Re}(t)=-2$ e $\text{Im}(t)=-3$

Logo, $t=-2-3\text{i}$.

2. $z=4k^2-5-2k\text{i},\ k\in\mathbb{R}$

2.1. Se $k=-2$, então $z=4(-2)^2-5-2\times(-2)\text{i}$, ou seja, $z=11+4\text{i}$.

$\text{Re}(z)+\text{Im}(z)=11+4=15$

2.2. $z=4+3\text{i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k^2-5-2k\text{i}=4+3\text{i}\Leftrightarrow\begin{cases}4k^2-5=4\\-2k=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k^2=\dfrac{9}{4}\\k=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{3}{2}\vee k=-\dfrac{3}{2}\\k=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow k=-\dfrac{3}{2}$

3. $w=3-2k+k^2\text{i},\ k\in\mathbb{R}$

3.1. *w* é um número real se $\text{Im}(w)=0$.

$\text{Im}(w)=0\Leftrightarrow k^2=0\Leftrightarrow k=0$

3.2. *w* é um imaginário puro se $\text{Re}(w)=0\wedge\text{Im}(w)\neq0$.

$\text{Re}(w)=0\wedge\text{Im}(w)\neq0\Leftrightarrow 3-2k=0\wedge k^2\neq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{3}{2}\wedge k\neq0\Leftrightarrow k=\dfrac{3}{2}$

3.3. $\text{Im}(w)-\text{Re}(w)=0\Leftrightarrow k^2-(3-2k)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2+2k-3=0\Leftrightarrow k=-3\vee k=1$

4.1. $z^2+64=0\Leftrightarrow z^2=-64\Leftrightarrow z=\sqrt{-64}\vee z=-\sqrt{-64}$

$\Leftrightarrow z=8\text{i}\vee z=-8\text{i}$

4.2. $z^2+20=0\Leftrightarrow z^2=-20\Leftrightarrow z=\sqrt{-20}\vee z=-\sqrt{-20}$

$\Leftrightarrow z=2\sqrt{5}\text{i}\vee z=-2\sqrt{5}\text{i}$

4.3. $3z^2+45=0 \Leftrightarrow z^2=-15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{-15} \vee z=-\sqrt{-15}$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{15}\,\mathrm{i} \vee z=-\sqrt{15}\,\mathrm{i}$

4.4. $z^2+5z+7=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-5\pm\sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \vee z=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

4.5. $z^2-3z+5=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{3\pm\sqrt{-11}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i} \vee z=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i}$

4.6. $(z+2)^2+1=0 \Leftrightarrow z^2+4z+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-4\pm\sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow z=-2+\mathrm{i} \vee z=-2-\mathrm{i}$

4.7. $z^2+\sqrt{7}z+4=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-\sqrt{7}\pm\sqrt{-9}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i} \vee z=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

5.1. $z^2-6z+10=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{6\pm\sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow z=3+\mathrm{i} \vee z=3-\mathrm{i}$

5.2. As soluções da equação são $3+\mathrm{i}$ e $3-\mathrm{i}$.

$w=k+1+\dfrac{k}{2}\mathrm{i}$ é uma das soluções da equação se:

$$\begin{cases} k+1=3 \\ \dfrac{k}{2}=1 \end{cases} \vee \begin{cases} k+1=3 \\ \dfrac{k}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=2 \end{cases} \vee \underbrace{\begin{cases} k=2 \\ k=-2 \end{cases}}_{\text{Impossível}} \Leftrightarrow k=2$$

6. $z^3+13z+34=0$; -2 é uma das soluções

	1	0	13	34
-2		-2	4	-34
	1	-2	17	0

$z^3+13z+34=0 \Leftrightarrow (z+2)\left(z^2-2z+17\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z+2=0 \vee z^2-2z+17=0$

$\Leftrightarrow z=-2 \vee z=\dfrac{2\pm\sqrt{-64}}{2}$

$\Leftrightarrow z=-2 \vee z=\dfrac{2\pm 8\mathrm{i}}{2}$

$\Leftrightarrow z=-2 \vee z=1+4\mathrm{i} \vee z=1-4\mathrm{i}$

Sejam $z_1=-2$, $z_2=1+4\mathrm{i}$ e $z_3=1-4\mathrm{i}$.

$\mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)+\mathrm{Im}(z_3)=0+4+(-4)=0$ e

$\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)+\mathrm{Re}(z_3)=-2+1+1=0$

7.1. $B(0,-2)$, $C(1,4)$ e $D(4,0)$, logo $z_B=-2\mathrm{i}$,

$z_C=1+4\mathrm{i}$ e $z_D=4$.

7.2. **a)** $z_A=-3+\mathrm{i}$

$\mathrm{Re}(w)=\mathrm{Re}(z_D)$ e $\mathrm{Im}(w)=-\mathrm{Im}(z_A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(w)=4$ e $\mathrm{Im}(w)=-1$

$w=4-\mathrm{i}$

O afixo de w pertence ao 4.º quadrante.

b) $\mathrm{Re}(w)=-\mathrm{Im}(z_C)$ e $\mathrm{Im}(w)=\mathrm{Im}(z_B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(w)=-4$ e $\mathrm{Im}(w)=-2$

$w=-4-2\mathrm{i}$

O afixo de w pertence ao 3.º quadrante.

8. $z=1-2k+\left(\dfrac{k}{2}-1\right)\mathrm{i}$, $k\in\mathbb{R}$

8.1. **a)** Se $k=-2$, então $z=1-2\times(-2)+\left(-\dfrac{2}{2}-1\right)\mathrm{i}$,

ou seja, $z=5-2\mathrm{i}$.

Assim, o afixo de z pertence ao 4.º quadrante.

b) Se $k=1$, então $z=1-2\times 1+\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\mathrm{i}$, ou seja,

$z=-1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Assim, o afixo de z pertence ao 3.º quadrante.

c) Se $k=-1$, então $z=1-2\times(-1)+\left(-\dfrac{1}{2}-1\right)\mathrm{i}$, ou

seja, $z=3-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

Assim, o afixo de z pertence ao 4.º quadrante.

8.2. **a)** O afixo de z pertence ao 2.º quadrante se:

$\mathrm{Re}(z)<0 \wedge \mathrm{Im}(z)>0 \Leftrightarrow 1-2k<0 \wedge \dfrac{k}{2}-1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k>\dfrac{1}{2} \wedge k>2 \Leftrightarrow k>2 \Leftrightarrow k\in\left]2,+\infty\right[$

b) O afixo de z pertence ao 3.º quadrante se:

$\mathrm{Re}(z)<0 \wedge \mathrm{Im}(z)<0 \Leftrightarrow 1-2k<0 \wedge \dfrac{k}{2}-1<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k>\dfrac{1}{2} \wedge k<2 \Leftrightarrow k\in\left]\dfrac{1}{2},2\right[$

c) O afixo de z pertence ao 4.º quadrante se:

$\mathrm{Re}(z)>0 \wedge \mathrm{Im}(z)<0 \Leftrightarrow 1-2k>0 \wedge \dfrac{k}{2}-1<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k<\dfrac{1}{2} \wedge k<2 \Leftrightarrow k<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow k\in\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[$

d) O afixo de z pertence ao eixo imaginário se $\text{Re}(z)=0$.

$\text{Re}(z)=0 \Leftrightarrow 1-2k=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$

e) O afixo de z pertence ao eixo real se $\text{Im}(z)=0$.

$\text{Im}(z)=0 \Leftrightarrow \frac{k}{2}-1=0 \Leftrightarrow k=2$

9. Seja $z=x+y\text{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases}\text{Re}(z)+\text{Im}(z)=-1\\ \text{Re}(z)\times\text{Im}(z)=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=-1\\ x\times y=-6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-1-x\\ x(-1-x)=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\\ -x^2-x+6=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\\ x=2 \vee x=-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-3\\ x=2\end{cases} \vee \begin{cases}y=2\\ x=-3\end{cases}$$

Então, $z=2-3\text{i}$ ou $z=-3+2\text{i}$.

Página 35 – Consolida

10. $z=3-m+(2k-5)\text{i}$, $m, k \in \mathbb{R}$

10.1. $z=\overline{w}$

$w=\frac{7}{2}-3\text{i} \Leftrightarrow 3-m+(2k-5)\text{i}=\frac{7}{2}+3\text{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-m=\frac{7}{2} \wedge 2k-5=3 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2} \wedge k=4$

10.2. $\overline{z}=2+\frac{1}{3}\text{i} \Leftrightarrow 3-m-(2k-5)\text{i}=2+\frac{1}{3}\text{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-m=2 \wedge -(2k-5)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow m=1 \wedge k=\frac{7}{3}$

11. Afixo $\overline{z} \rightarrow$ 3.º quadrante

Afixo $z \rightarrow$ 2.º quadrante

Então, $\text{Re}(z)<0 \wedge \text{Im}(z)>0$

A opção correta é a **(C)**.

12.1. a) $\overline{z}_E=z_C$ A opção correta é a **(C)**.

b) $\overline{z}_D=z_D$ A opção correta é a **(D)**.

12.2. $P_{\text{circunferência}}=8\pi \Leftrightarrow 2\pi r=8\pi \Leftrightarrow r=4$

$A(4,0)$, $B\left(\underbrace{4\cos 60^\circ}_{2}, \underbrace{4\sin 60^\circ}_{2\sqrt{3}}\right)$, $C(-2,2\sqrt{3})$,

$D(-4,0)$, $E(-2,-2\sqrt{3})$ e $F(2,-2\sqrt{3})$

Então, $z_A=4$, $z_B=2+2\sqrt{3}\text{i}$, $z_C=-2+2\sqrt{3}\text{i}$,

$z_D=-4$, $z_E=-2-2\sqrt{3}\text{i}$ e $z_F=2-2\sqrt{3}\text{i}$.

13.1. a) Sendo D o afixo de z, então o afixo de $-z$ é B.

b) Sendo D o afixo de z, então o afixo de $\overline{z}$ é A.

c) Sendo D o afixo de z, então o afixo de $-\overline{z}$ é C.

13.2. $z=6-2\text{i} \rightarrow \overline{z}=6+2\text{i}$

$|\overline{z}|=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

A opção correta é a **(D)**.

14.1. O afixo do número complexo representado pelo ponto D pertence ao 4.º quadrante, logo o afixo do simétrico desse mesmo número complexo pertence ao 2.º quadrante.

14.2. Os pontos que são afixos de um número complexo e do seu simétrico são C e E.

14.3. O afixo do número complexo representado pelo ponto A pertence ao 2.º quadrante, logo o afixo do conjugado do simétrico desse mesmo número complexo pertence ao 1.º quadrante.

Página 36 – Consolida

15. $z_1=-3+4\text{i}$ e $z_2=5-2\text{i}$

15.1. $z_1+z_2=(-3+4\text{i})+(5-2\text{i})=2+2\text{i}$

15.2. $z_1-z_2=(-3+4\text{i})-(5-2\text{i})=-3+4\text{i}-5+2\text{i}=-8+6\text{i}$

15.3. $\overline{z}_1-z_2=(-3-4\text{i})-(5-2\text{i})=-3-4\text{i}-5+2\text{i}=-8-2\text{i}$

15.4. $z_2-(z_1+2\text{i})=(5-2\text{i})-(-3+4\text{i}+2\text{i})=5-2\text{i}+3-6\text{i}=8-8\text{i}$

15.5. $\overline{z}_1+\text{i}-z_2=-3-4\text{i}+\text{i}-(5-2\text{i})=-3-3\text{i}-5+2\text{i}=-8-\text{i}$

16. $A(-3,-4)$ e $B(1,2)$, logo $z_A=-3-4\text{i}$ e $z_B=1+2\text{i}$.

16.1. a) $-z_A+\overline{z}_B=-(-3-4\text{i})+(1-2\text{i})=3+4\text{i}+1-2\text{i}=$

$=4+2\text{i}$

b) $2\text{i}-z_B+\overline{z}_A=2\text{i}-(1+2\text{i})+(-3+4\text{i})=$

$=2\text{i}-1-2\text{i}-3+4\text{i}=-4+4\text{i}$

16.2. a) $ki + z_A = ki - 3 - 4i = -3 + (k-4)i$

O afixo de $ki + z_A$ pertence ao 2.º quadrante se:

$\text{Re}(ki + z_A) < 0 \wedge \text{Im}(ki + z_A) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 < 0 \wedge k - 4 > 0 \Leftrightarrow k > 4 \Leftrightarrow k \in]4, +\infty[$

b) $k + i - (z_A + z_B) = k + i - (-3 - 4i + 1 + 2i) =$

$= k + i - (-2 - 2i) = k + i + 2 + 2i = k + 2 + 3i$

O afixo de $k + i - (z_A + z_B)$ pertence ao 1.º quadrante se:

$\text{Re}(k + i - (z_A + z_B)) > 0 \wedge \text{Im}(k + i - (z_A + z_B)) > 0$

$\Leftrightarrow k + 2 > 0 \wedge 3 > 0 \Leftrightarrow k > -2 \Leftrightarrow k \in]-2, +\infty[$

c) $\overbrace{k + z_A - (z_B - ki)}^{w} = k - 3 - 4i - (1 + 2i - ki) =$

$= k - 3 - 4i - 1 - 2i + ki = k - 4 + (k-6)i$

O afixo de w pertence ao 4.º quadrante se:

$\text{Re}(w) > 0 \wedge \text{Im}(w) < 0 \Leftrightarrow k - 4 > 0 \wedge k - 6 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k > 4 \wedge k < 6 \Leftrightarrow k \in]4, 6[$

17. $z = a + 2i,\ a \in \mathbb{R}$

Seja $w = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Im}(w) = \text{Re}(z) \Leftrightarrow y = a \\ \text{Re}(w) = -\text{Im}(z) \Leftrightarrow x = -2 \end{array}\right\} w = -2 + ai$

$|z + w| = 4 \Leftrightarrow |a + 2i + (-2 + ai)| = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |a - 2 + (a+2)i| = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (a+2)^2} = 4$

$\Leftrightarrow (a-2)^2 + (a+2)^2 = 16$

$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 + a^2 + 4a + 4 = 16$

$\Leftrightarrow 2a^2 = 8$

$\Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$

Então, $w = -2 + 2i$ ou $w = -2 - 2i$.

18.1. $3i(2 - i) = 6i - 3i^2 = 3 + 6i$

18.2. $(-1 + 2i)(2 - i) = -2 + i + 4i - 2i^2 = 5i$

18.3. $(-2 - i)(3 + 2i) = -6 - 4i - 3i - 2i^2 = -4 - 7i$

18.4. $i(2 + i)^2 = i(4 + 4i + i^2) = i(3 + 4i) = 3i + 4i^2 = -4 + 3i$

18.5. $5 - 2i\left(\frac{1}{2} - i\right) = 5 - i + 2i^2 = 3 - i$

19. $k \in \mathbb{R}$ e $z = 2 - 5i$

19.1. $(k + i)z = (k + i)(2 - 5i) = 2k - 5ki + 2i - 5i^2 =$

$= (2k + 5) + (-5k + 2)i$

$(k + i)z$ é um número real se $\text{Im}((k + i)z) = 0$.

$\text{Im}((k + i)z) = 0 \Leftrightarrow -5k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$

19.2. $(1 + ki)z = (1 + ki)(2 - 5i) = 2 - 5i + 2ki - 5ki^2 =$

$= (2 + 5k) + (-5 + 2k)i$

$\underbrace{(1 + ki)z}_{w}$ é um número imaginário puro se

$\text{Re}(w) = 0 \wedge \text{Im}(w) \neq 0$.

$2 + 5k = 0 \wedge -5 + 2k \neq 0 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{5} \wedge k \neq \frac{5}{2}$

$k = -\frac{2}{5}$

19.3. $|kz| = |z| \Leftrightarrow |k| \times |z| = |z| \underset{|z| \neq 0}{\Leftrightarrow} |k| = 1 \Leftrightarrow k = 1 \vee k = -1$

20. $(\sqrt{5} + i)i = \sqrt{5}i + i^2 = -1 + \sqrt{5}i \rightarrow$ 2.º quadrante

$(\sqrt{5} + i)(1 - \sqrt{5}i) = \sqrt{5} - 5i + i - \sqrt{5}i^2 = 2\sqrt{5} - 4i \rightarrow$

4.º quadrante

$(\sqrt{5} + i)^2 = 5 + 2\sqrt{5}i + i^2 = 4 + 2\sqrt{5}i \rightarrow$ 1.º quadrante

$(\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i) = 5 - i^2 = 6 \rightarrow$ número real positivo

A opção correta é a **(D)**.

21. $z^3\bar{z} = 15 - 20i$

$2 - i$ é solução

$(2 - i)^3 \times (\overline{2 - i}) = (2 - i)^2 \times \underline{(2 - i) \times (2 + i)} =$

$= (4 - 4i + i^2) \times \underline{(4 - i^2)} = (3 - 4i) \times 5 = 15 - 20i$

Logo, conclui-se que $2 - i$ é solução da equação.

22. O afixo de z pertence ao 4.º quadrante e o afixo de w pertence ao semieixo imaginário positivo.

22.1. O afixo de $z \times w$ pertence ao 1.º quadrante.

22.2. O afixo de $z \times \bar{w}$ pertence ao 3.º quadrante.

22.3. O afixo de $\bar{z} \times w$ pertence ao 2.º quadrante.

Página 37 – Consolida

23.1. $\frac{1}{3\mathrm{i}}=\frac{1(-3\mathrm{i})}{3\mathrm{i}(-3\mathrm{i})}=\frac{-3\mathrm{i}}{9}=-\frac{1}{3}\mathrm{i}$

23.2. $\frac{1}{3-\mathrm{i}}=\frac{1(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}=\frac{3+\mathrm{i}}{3^2+(-1)^2}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\mathrm{i}$

23.3. $\frac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{2^2+1^2}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$

23.4. $\frac{-4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{-4\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-4\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{1^2+1^2}=-2-2\mathrm{i}$

23.5. $\frac{3-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\frac{(3-2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\frac{3-6\mathrm{i}-2\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{1^2+2^2}=-\frac{1}{5}-\frac{8}{5}\mathrm{i}$

24.1. Seja $\frac{1-\mathrm{i}}{-3+2\mathrm{i}}=z$.

$z=\frac{(1-\mathrm{i})(-3-2\mathrm{i})}{(-3+2\mathrm{i})(-3-2\mathrm{i})}=\frac{-3-2\mathrm{i}+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{(-3)^2+2^2}=-\frac{5}{13}+\frac{1}{13}\mathrm{i}$

$\overline{z}=-\frac{5}{13}-\frac{1}{13}\mathrm{i}$

24.2. Seja $\frac{(1+\mathrm{i})^2}{-1+3\mathrm{i}}=z$

$z=\frac{(1+\mathrm{i})^2}{-1+3\mathrm{i}}=\frac{\left(1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2\right)(-1-3\mathrm{i})}{(-1+3\mathrm{i})(-1-3\mathrm{i})}=\frac{-2\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2}{(-1)^2+3^2}=$

$=\frac{6-2\mathrm{i}}{10}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$

$\overline{z}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$

25.1. $z=k-\mathrm{i}-\frac{k-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=k-\mathrm{i}-\frac{(k-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=$

$=k-\mathrm{i}-\frac{k-2k\mathrm{i}-\mathrm{i}+2k\mathrm{i}^2}{1^2+2^2}=k-\mathrm{i}-\frac{k-2+(-2k-1)\mathrm{i}}{5}$

$=k-\frac{k-2}{5}-\mathrm{i}-\frac{(-2k-1)}{5}\mathrm{i}=\frac{4k+2}{5}+\left(-1+\frac{2k}{5}+\frac{1}{5}\right)\mathrm{i}$

$=\frac{4k+2}{5}+\frac{2k-4}{5}\mathrm{i}$

25.2. Se $k=1$, então $z=\frac{4\times1+2}{5}+\frac{2\times1-4}{5}\mathrm{i}$, ou seja,

$z=\frac{6}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$.

$\overline{z}=\frac{6}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$

$|\overline{z}|=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{40}{25}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

25.3. Sendo $k=-1$, então $z=\frac{4\times(-1)+2}{5}+\frac{2\times(-1)-4}{5}\mathrm{i}$,

ou seja, $z=-\frac{2}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{i}$.

$\frac{1}{z}=\frac{1}{-\frac{2}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{i}}=\frac{1\left(-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i}\right)}{\left(-\frac{2}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{i}\right)\left(-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i}\right)}=$

$=\frac{-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i}}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i}}{\frac{8}{5}}=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\mathrm{i}$

26. $w=a-3\mathrm{i}$, $a\in\mathbb{R}$ e $t=\frac{w}{1-\mathrm{i}}$

$t=\frac{a-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(a-3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=$

$=\frac{a+a\mathrm{i}-3\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{1^2+(-1)^2}=\frac{a+3}{2}+\frac{a-3}{2}\mathrm{i}$

$\left(2\mathrm{Im}(t)\right)^2=2\mathrm{Re}(t)\Leftrightarrow(a-3)^2=2\left(\frac{a+3}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2-6a+9=a+3\Leftrightarrow a^2-7a+6=0\Leftrightarrow a=1\vee a=6$

Se $a=1$, então $t=2-\mathrm{i}$ (afixo no 4.º quadrante).

Se $a=6$, então $t=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$ (afixo no 1.º quadrante).

Conclusão: Como a representação geométrica de t no plano complexo é um ponto do 4.º quadrante, então $a=1$.

27.1. $\mathrm{i}^{37}\left(1-\mathrm{i}^{42}\right)=\mathrm{i}(1-(-1))=2\mathrm{i}$

Cálculo auxiliar:

$\mathrm{i}^{37}=\mathrm{i}^{4\times9+1}=\mathrm{i}^1=\mathrm{i}$; $\mathrm{i}^{42}=\mathrm{i}^{4\times10+2}=\mathrm{i}^2=-1$

27.2. $\mathrm{i}^{15}\left(1+\frac{2}{1+\mathrm{i}^{33}}\right)=-\mathrm{i}\left(1+\frac{2}{1+\mathrm{i}}\right)=-\mathrm{i}+\frac{-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$

$=-\mathrm{i}+\frac{-2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\mathrm{i}+\frac{-2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1^2+1^2}$

$=-\mathrm{i}-1-\mathrm{i}=-1-2\mathrm{i}$

Cálculo auxiliar:

$\mathrm{i}^{15}=\mathrm{i}^{4\times3+3}=\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$; $\mathrm{i}^{33}=\mathrm{i}^{4\times8+1}=\mathrm{i}^1=\mathrm{i}$

27.3. $\left(\frac{2}{\mathrm{i}^{21}}+\mathrm{i}^{13}\right)^{51}+3\mathrm{i}^{26}=\left(\frac{2}{\mathrm{i}}+\mathrm{i}\right)^{51}+3\times(-1)=\left(\frac{2(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}+\mathrm{i}\right)^{51}-3$

$(-2\mathrm{i}+\mathrm{i})^{51}-3=(-\mathrm{i})^{51}-3=-\mathrm{i}^{51}-3=-\mathrm{i}^{4\times12+3}-3=$

$=-\mathrm{i}^3-3=-(-\mathrm{i})-3=-3+\mathrm{i}$

Cálculo auxiliar:

$\mathrm{i}^{21}=\mathrm{i}^{4\times5+1}=\mathrm{i}^1=\mathrm{i}$; $\mathrm{i}^{13}=\mathrm{i}^{4\times3+1}=\mathrm{i}^1=\mathrm{i}$; $\mathrm{i}^{26}=\mathrm{i}^{4\times6+2}=\mathrm{i}^2=-1$

27.4. $\left(\frac{2i^{20}}{i^{13}+i^{17}}\right)^{39}=\left(\frac{2\times 1}{i+i}\right)^{39}=\left(\frac{2}{2i}\right)^{39}=\left(\frac{1}{i}\right)^{39}=\frac{1}{i^{39}}=\frac{1}{-i}=i$

Cálculo auxiliar:

$i^{20}=i^{4\times 5+0}=i^0=1$; $i^{13}=i^{4\times 3+1}=i^1=i$;

$i^{17}=i^{4\times 4+1}=i^1=i$; $i^{39}=i^{4\times 9+3}=i^3=-i$

28. $i^{91}+\underbrace{i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}}_{0}-i^{90}=-i-(-1)=1-i$

Cálculo auxiliar:

$i^{91}=i^{4\times 22+3}=i^3=-i$; $i^{90}=i^{4\times 22+2}=i^2=-1$

A opção correta é a **(D)**.

29.1. $z_1=-2+i\rightarrow(-2,1)$

$z_2=1-i\rightarrow(1,-1)$

$z_3=-1+3i\rightarrow(-1,3)$

Afixo	*A*	*B*	*C*
Número complexo	z_3	z_1	z_2

29.2. $z_1\times z_2=(-2+i)(1-i)=-2+2i+i-i^2=-1+3i=z_3$

a) $i\times\left(\frac{\overline{z}_3}{z_1}\right)=i\left(\frac{\overline{z_1\times z_2}}{z_1}\right)=\underbrace{i\times\overline{z}_2}_{\text{1.ºQ}}$

2.º Q (rotação de centro *O* e amplitude 90º)

O afixo de $i\left(\frac{\overline{z}_3}{z_1}\right)$ pertence ao 2.º quadrante.

b) $-\left(\frac{\overline{z}_3}{z_2}\right)=-\left(\frac{\overline{z_1\times z_2}}{z_2}\right)=\underbrace{-\overline{z}_1}_{\text{1.ºQ}}$ (3.ºQ)

O afixo de $-\left(\frac{\overline{z}_3}{z_2}\right)$ pertence ao 1.º quadrante.

30.1. $z^2+z+1=0\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\vee z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$t=\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^2=\left(\sqrt{3}i\right)^2=3i^2=-3$

30.2. $w=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=$

$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

$(iw)^n=(i\times 1)^n=i^n=\begin{cases}\pm 1 \text{ se } n \text{ é par}\\ \pm i \text{ se } n \text{ é ímpar}\end{cases}\ (n\in\mathbb{N})$

Assim, a imagem geométrica, no plano complexo, de $(iw)^n$, $n\in\mathbb{N}$, pertence ao eixo real ou ao eixo imaginário puro.

Página 38 – Avalia 1 – Parte 1 – Verificação rápida

1. $z=k^2-1+(k+1)i,\ k\in\mathbb{R}$

O afixo de *z* pertence ao 4.º quadrante se:

$\text{Re}(z)>0\wedge\text{Im}(z)<0\Leftrightarrow k^2-1>0\wedge k+1<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(k<-1\vee k>1)\wedge k<-1\Leftrightarrow k<-1\Leftrightarrow k\in\left]-\infty,-1\right[$

A opção correta é a **(C)**.

2. Se uma equação do 2.º grau é impossível em $\mathbb{R}$ e, em $\mathbb{C}$, tem duas raízes z_1 e z_2, sabe-se que essas raízes são conjugadas.

Então, $w=z_1+z_2=z_1+\overline{z}_1=2\text{Re}(z_1)$.

Donde se conclui que o afixo de *w* pertence ao eixo real.

A opção correta é a **(D)**.

3. $z=\frac{1}{2}(1+i)^2=\frac{1}{2}(1+2i+i^2)=\frac{1}{2}\times 2i=i$

$z^n=i^n$

Se $i^n=-i$, então o resto da divisão de *n* por 4 é igual a 3.

A opção correta é a **(B)**, pois $295=4\times 73+3$.

4. Afixo de *z*: *P* (2.º quadrante)

Afixo de $\underbrace{iz}_{w}$: *B* (3.º quadrante)

$t=z\times\overline{z}=|z|^2$ (número real não negativo)

Afixo de *t*: *E*

A opção correta é a **(C)**.

5. $z=-4+i$ e $w=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$

$z+w=-4+i+x+yi=(-4+x)+(1+y)i$

$z+w$ é um imaginário puro se $-4+x=0$, ou seja, $x=4$.

$w=\overline{z}\Leftrightarrow w=-4-i\qquad|w|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$

$z-w=-4+i-(x+yi)=(-4-x)+(1-y)i$

O afixo de $z-w$ pertence ao semieixo real positivo se:

$1-y=0 \wedge -4-x>0 \Leftrightarrow y=1 \wedge x<-4$

$\text{Im}(w)=y=1$

$\text{Re}(w)=x \wedge x<-4$

Assim, a correspondência é a seguinte:

I – b); **II – a)**; **III – c)**; **IV – a)**

Página 39 – Avalia 1 – Parte 2 – Questões de desenvolvimento

1. $w=2-\text{i}$ e $t=-1+2\text{i}$

1.1. $z=w\times t=(2-\text{i})(-1+2\text{i})=-2+4\text{i}+\text{i}-2\text{i}^2=5\text{i}$

O afixo de z é o ponto de coordenadas $(0,5)$.

1.2. $s=\dfrac{w}{t}$

a) $s=\dfrac{2-\text{i}}{-1+2\text{i}}=\dfrac{(2-\text{i})(-1-2\text{i})}{(-1+2\text{i})(-1-2\text{i})}=$

$=\dfrac{-2-4\text{i}+\text{i}+2\text{i}^2}{(-1)^2+2^2}=-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\text{i}$

$\overline{s}=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\text{i}$

b) $|s|=\sqrt{\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=$

$=\sqrt{\dfrac{16}{25}+\dfrac{9}{25}}=\sqrt{\dfrac{25}{25}}=1$

2. $\text{Re}(z)=\left(\text{Re}(1-\text{i})\right)^2 \Leftrightarrow \text{Re}(z)=1^2 \Leftrightarrow \text{Re}(z)=1$

$\text{Im}(z)=\text{Im}\left((1-\text{i})^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Im}(z)=\text{Im}\left(1-2\text{i}+\text{i}^2\right)$

$\Leftrightarrow \text{Im}(z)=\text{Im}(-2\text{i})$

$\Leftrightarrow \text{Im}(z)=-2$

Então, $z=1-2\text{i}$.

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1-2\text{i}}=\dfrac{1(1+2\text{i})}{(1-2\text{i})(1+2\text{i})}=$

$=\dfrac{1+2\text{i}}{1^2+(-2)^2}$

$=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\text{i}$

3.1. $z=\left(1-\dfrac{1}{\text{i}^{11}}\right)(1-3\text{i})=$

$=\left(1-\dfrac{1}{-\text{i}}\right)(1-3\text{i})=\left(1-\dfrac{1\times\text{i}}{-\text{i}\times\text{i}}\right)(1-3\text{i})$

$(1-\text{i})(1-3\text{i})=1-3\text{i}-\text{i}+3\text{i}^2=-2-4\text{i}$

$\text{Im}(z)=-4$ e $\text{Re}(z)=-2$, logo $\text{Im}(z)=2\text{Re}(z)$.

Cálculo auxiliar:

$\text{i}^{11}=\text{i}^{2\times4+3}=\text{i}^3=-\text{i}$

3.2. $w=\dfrac{\text{i}^{25}+2\text{i}^{36}}{2+\text{i}}-\dfrac{\text{i}}{1-\text{i}^{19}}=\dfrac{\text{i}+2\times1}{2+\text{i}}-\dfrac{\text{i}}{1-(-\text{i})}$

$=\dfrac{(\text{i}+2)(2-\text{i})}{(2+\text{i})(2-\text{i})}-\dfrac{\text{i}(1-\text{i})}{(1+\text{i})(1-\text{i})}$

$=\dfrac{2\text{i}-\text{i}^2+4-2\text{i}}{2^2+1^2}-\dfrac{\text{i}-\text{i}^2}{1^2+1^2}$

$=1-\dfrac{1+\text{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}$

$=\dfrac{1}{2}(1-\text{i})=\dfrac{1}{2}\left(\overline{1+\text{i}}\right)$

4. $z_1=\dfrac{-1-12\text{i}}{1+2\text{i}}=\dfrac{(-1-12\text{i})(1-2\text{i})}{(1+2\text{i})(1-2\text{i})}=$

$=\dfrac{-1+2\text{i}-12\text{i}+24\text{i}^2}{1^2+2^2}$

$=\dfrac{-25-10\text{i}}{5}=-5-2\text{i}$

Assim, $P_1(-5,-2)$.

z_1 e z_2 são números complexos conjugados, isto é, $z_2=\overline{z}_1$, ou seja, $z_2=-5+2\text{i}$

$-z_2=5-2\text{i}$

Assim, $A(5,-2)$.

$-\text{i}z_2=-\text{i}(-5+2\text{i})=5\text{i}-2\text{i}^2=2+5\text{i}$

Assim, $B(2,5)$.

$P_1(-5,-2)$; $A(5,-2)$ e $B(2,5)$

5. $z=x+y\text{i}$, $x, y\in\mathbb{R}$ e $x\neq0$ e $y\neq0$

$w=\dfrac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}=\dfrac{x+y\text{i}-(x-y\text{i})}{x+y\text{i}+x-y\text{i}}=\dfrac{2y\text{i}}{2x}=\dfrac{y}{x}\text{i}$

Como $\text{Re}(z)=0$ e $\text{Im}(z)\neq0$, conclui-se que w é um imaginário puro.

Tema 2: Números complexos na forma trigonométrica

Página 40 – Tarefa inicial

1.1. a) $\overline{OA} = |z_1| = 4$

b) $A(4\cos\alpha, 4\sin\alpha)$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{3}{5}\\ \alpha \in 1.^{\circ}\text{Q}\end{array}\right\} \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

Logo, $A\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

c) $z_1 = \frac{12}{5} + \frac{16}{5}\text{i}$

1.2. a) $\overline{OB} = |z_2| = 3$

b) $B(3\cos\beta, 3\sin\beta)$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\beta = \frac{1}{2}\\ \beta \in 2.^{\circ}\text{Q}\end{array}\right\} \cos\beta = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $B\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

c) $z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\text{i}$

2.1. O módulo de um número complexo cujo afixo pertence à circunferência é igual a 1 (distância a *O*).

2.2. Sabe-se que as coordenadas do ponto *P* são $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Sendo *P* o afixo do número complexo *z*, então $z = \cos\theta + \text{i}\sin\theta$.

Página 41

64.1. a) $3\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}} = z_C$

Cálculo auxiliar: $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

O afixo do complexo representado por $3\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$ é o ponto *C*.

b) $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = z_B$

O afixo do complexo representado por $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$ é o ponto *B*.

c) $\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{4}} = z_E$

O afixo do complexo representado por $\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{4}}$ é o ponto *E*.

64.2. a) $z_D = 3\text{e}^{\text{i}\pi}$

b) $z_F = 3\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{2}}$

64.3. a) Argumento principal de z_E: $-\frac{3\pi}{4}$

b) Argumento principal de z_G: $-\frac{\pi}{4}$

Página 42

65.

Forma algébrica	Forma trigonométrica
$\sqrt{2}\,\text{i}$	$\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$
$\sqrt{3}\,\text{i}$	$\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$
-5	$5\text{e}^{\text{i}\pi}$
-8	$8\text{e}^{\text{i}\pi}$
-7i	$7\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{2}}$
-3i	$3\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{2}}$
2	$2\text{e}^{\text{i}0}$

66.1. $2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\text{i}$

66.2. $\frac{1}{4}\text{e}^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) =$

$= \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}\text{i}$

66.3. $\text{e}^{\text{i}\frac{7\pi}{6}} = \cos\frac{7\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\text{i}$

66.4. $2\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = -1 + \sqrt{3}\,\text{i}$

67.1. $z = -1 + \text{i}$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{+1}{-1} = -1 \wedge \theta \in 2.^{\circ}\text{Q}$

Um possível valor de θ é $\pi - \frac{\pi}{4}$, ou seja, $\frac{3\pi}{4}$.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

67.2. $z = -1 - \sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \wedge \theta \in 3.º\,Q$

Um possível valor de θ é $\pi + \frac{\pi}{3}$, ou seja, $\frac{4\pi}{3}$.

Assim, $z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

67.3. $z = 3 - \sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 4.º\,Q$

Um possível valor de θ é $-\frac{\pi}{6}$.

Assim, $z = 2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

Página 43

68.1. $z = \sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{6}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{19\pi}{6} - 2\pi\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$w = 2e^{i\left(-\frac{13\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{13\pi}{3} + 3\times 2\pi\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$

68.2. $z = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{19\pi}{6}\right)} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{19\pi}{6} - 2\times 2\pi\right)} = \sqrt{3}e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$

$w = 2e^{i\left(-\frac{13\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{13\pi}{3} + 2\times 2\pi\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

69.1. $z = e^{i35\pi}$ e $w = e^{i14\pi}$

$|z| = |w| = 1$

Verificar se existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $35\pi = 14\pi + 2k\pi$

$35\pi = 14\pi + 2k\pi \Leftrightarrow 21\pi = 2k\pi \Leftrightarrow k = 10{,}5\ (\notin \mathbb{Z})$

Logo, os complexos z e w não são iguais.

69.2. $z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ e $w = 4e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}$

$|z| = |w| = 4$

Verificar se existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $\frac{5\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

$\frac{5\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow 2\pi = 2k\pi \Leftrightarrow k = 1\ (\in \mathbb{Z})$

Logo, os complexos z e w são iguais.

70.

Na forma trigonométrica	
z	$-z$
$5e^{i\frac{2\pi}{7}}$	$5e^{i\frac{9\pi}{7}}$
$e^{i\frac{9\pi}{5}}$	$e^{i\frac{4\pi}{5}}$
$3e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$3e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Página 44

71.1. $z_B = \sqrt{10}e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_A = \overline{z}_B = \sqrt{10}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$; $z_D = -z_B = \sqrt{10}e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$;

$z_C = -\overline{z}_B = \sqrt{10}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

71.2. $z_A = 6e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}$

$z_B = \overline{z}_A = 6e^{i\frac{\pi}{8}}$; $z_C = -z_A = 6e^{i\frac{7\pi}{8}}$; $z_D = -\overline{z}_A = 6e^{i\frac{9\pi}{8}}$

Página 45 – Tarefa 7

1.1. $z_2 = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 + 3\sqrt{3}i$

1.2. $z_5 = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_5 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\times\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$

1.3. $z_9 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_9 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i$

1.4. $z_{11} = 2e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$z_{11} = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$

2.1. $2e^{i9\pi} = z_7$

Argumento não negativo mínimo: π

Argumento principal: π

2.2. $6e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)} = z_2$

Argumento não negativo mínimo: $\frac{\pi}{3}$

Argumento principal: $\frac{\pi}{3}$

2.3. $4e^{i6\pi} = z_{13}$

Argumento não negativo mínimo: 0

Argumento principal: 0

2.4. $4e^{i\left(-\frac{17\pi}{6}\right)} = z_8$

Argumento não negativo mínimo: $\frac{7\pi}{6}$

Argumento principal: $-\frac{5\pi}{6}$

3.1. $\overline{z}_5 = z_8$

3.2. $z_6 + z_{13} = z_7$

3.3. $-\overline{z}_1 = z_5$

3.4. $\left(\overline{-z_4}\right) = z_2$

4.1. $z = z_1$, com $\theta \in]2\pi, 3\pi[$

$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z = 4e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)} = 4e^{i\frac{13\pi}{6}}$

4.2. $z = z_4$, com $\theta \in [-2\pi, 0[$

$z_4 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z = 6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-2\pi\right)} = 6e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$

5.1. $w = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Seja θ o argumento não negativo mínimo de *w*.

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\sqrt{3} \\ \theta \in 2.^{\circ}\text{Q}\end{array}\right\} \theta = \pi - \frac{\pi}{3}, \text{ ou seja, } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$z_4 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Assim, o argumento não negativo mínimo de *w* e z_4 são iguais.

5.2. $|w| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$ e $|z_4| = 6$

Como $|w| \neq |z_4|$, então os números complexos *w* e z_4 não são iguais.

Página 46 – Pratica

72.1. $\overline{OP} = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Opção **(B)**

72.2. $A\hat{O}P = \frac{\pi}{4}$ rad

Opção **(A)**

72.3. $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

73.1. $\overline{OA} = 2$ e $\overline{OM} = 1$

$\overline{AM} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

Assim, $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = -\sqrt{3} + i$, $z_C = -\sqrt{3} - i$ e $z_D = \sqrt{3} - i$.

73.2. $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$

$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $z_c = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$; $z_D = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

Página 47 – Pratica

74.1. a) A opção correta é a **(C)**.

$z_F = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ e $z_H = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) A opção correta é a **(D)**.

$z_E = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ e $z_F = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

c) A opção correta é a **(B)**.

$z_F = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ e $z_H = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

74.2.

$$\left.\begin{array}{l}|w| = 4 \\ \text{Argumento principal: } -\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right\} w = 4e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

74.3. $z_G = 3e^{i\frac{9\pi}{12}} = 3e^{i\frac{3\pi}{4}} = 3e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi\right)} = 3e^{i\frac{11\pi}{4}}$

A opção correta é a **(B)**.

75.1.

$$\left.\begin{array}{l}|z_B| = |z_A| = 3 \\ A\hat{O}B = \dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right\} z_B = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

A opção correta é a **(B)**.

75.2. $z_B = 3e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$$= 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2}\left(-3 + 3\sqrt{3}i\right)$$

76. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ e $z_2 = 4e^{i\frac{23\pi}{6}}$

76.1. $|z_1| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta \in 4.^{\circ}\,Q\end{array}\right\}, \text{ por exemplo, } \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$z_1 = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+4\pi\right)} = 4e^{i\frac{23\pi}{6}} = z_2$$

76.2. Argumento não negativo mínimo de z_1:

$$-\frac{\pi}{6} = 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

76.3. a) $-z_1 = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) $\overline{z}_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) $-\overline{z}_1 = 4e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = 4e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = 4e^{i\left(\frac{7\pi}{6}-2\pi\right)} = 4e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$

77. Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ (pois o afixo de z pertence ao 1.º Q)

$\text{Re}(z) - \text{Im}(z) = 1 \Leftrightarrow x - y = 1 \Leftrightarrow x = y + 1$

$|z| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2 + y^2} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 + y^2 = 25 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 24 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = -4 \vee y = 3$

Como $y \in \mathbb{R}^+$, conclui-se que $y = 3$.

Então, $z = 4 + 3i$.

Seja θ o argumento não negativo mínimo de z.

$$\tan\theta = \frac{3}{4}$$

Recorrendo à calculadora, conclui-se que $\theta \approx 0{,}644$ rad.

Assim, $z \approx 5e^{i(0{,}644)}$.

Página 48

78.1. $5e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 10e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 10e^{i\frac{11\pi}{12}}$

78.2. $\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} \times 4e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{13\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

78.3. $3e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} \times e^{i\pi} = 3e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}+\pi\right)} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{5\pi}{3}}$

78.4. $e^{i\frac{7\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{31\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

79. $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{5}}$

79.1. $2i \times \overline{z} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{2}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)} = 1e^{i\frac{\pi}{10}}$

79.2. $-6 \times z = 6e^{i\pi} \times \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{5}} = \frac{6}{2}e^{i\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right)} = 3e^{i\frac{7\pi}{5}}$

79.3. $-i \times z = e^{i\frac{3\pi}{2}} \times \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{19\pi}{10}}$

79.4. $\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right) \times z = e^{i\frac{\pi}{10}} \times \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

80. $z = \frac{2}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ e $w = 6e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

80.1. $\overline{z} \times w = \frac{2}{3}e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} \times 6e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{12}{3}e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)} = 4e^{i\left(-\frac{19\pi}{12}\right)}$

$= 4e^{i\left(-\frac{19\pi}{12}+2\pi\right)} = 4e^{i\frac{5\pi}{12}}$

80.2. $-z \times \overline{w} = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right)} \times 6e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{12}{3}e^{i\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)} = 4e^{i\left(\frac{31\pi}{12}\right)}$

$= 4e^{i\left(\frac{31\pi}{12}-2\pi\right)} = 4e^{i\frac{7\pi}{12}}$

80.3. $\overline{z} \times (-\overline{w}) = \frac{2}{3}e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} \times 6e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\right)} = \frac{12}{3}e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{7\pi}{4}\right)} = 4e^{i\frac{11\pi}{12}}$

Página 49

81.1. $z \to \overset{\text{Afixo}}{P}$; $-z \to P'$

P': simétrico de P em relação à origem

$$\underbrace{i \times (-z)}_{\substack{\text{Rotação de centro } O \\ \text{e amplitude } \frac{\pi}{2}}} \to R$$

A opção correta é a **(C)**.

81.2. $z \xrightarrow{\text{Afixo}} P \ ; \ \overline{z} \to U$

$$\underbrace{i \times \overline{z}}_{\substack{\text{rotação de centro } O \\ \text{e amplitude } \frac{\pi}{2}}} \to V$$

A opção correta é a **(A)**.

82. $z_B = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$

$$z_C = iz_B = e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{7\pi}{8}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{8}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{8}}$$

$$z_D = iz_C = e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{11\pi}{8}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{11\pi}{8}\right)} = 2e^{i\frac{15\pi}{8}}$$

$$z_A = iz_D = e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{15\pi}{8}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{15\pi}{8}\right)} = 2e^{i\frac{19\pi}{8}} = 2e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

Página 50

83. $z = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{9}}$ e $w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

83.1. $$\frac{z}{w} = \frac{\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{9}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{9}-\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{3}e^{i\left(-\frac{13\pi}{18}\right)}$$

83.2. $$\frac{i}{w} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

83.3. $$\frac{-z}{w} = \frac{e^{i\pi} \times \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{9}}}{2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{\frac{2}{3}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{9}\right)}}{2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{1}{3}e^{i\left(\frac{10\pi}{9}+\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{3}e^{i\frac{35\pi}{18}}$$

83.4. $$\frac{-2iz}{w} = \frac{2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \times \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{9}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{\frac{4}{3}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{9}\right)}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{29\pi}{18}-\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\frac{7\pi}{9}}$$

84. $z = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e $w = 2\cos\frac{\pi}{8} + 2i\sin\frac{\pi}{8}$

84.1. a) $\text{Re}(w) = 2\cos\frac{\pi}{8} \approx 1{,}85$

b) $\text{Im}(w) = 2\sin\frac{\pi}{8} \approx 0{,}77$

84.2. $$\frac{w}{z} = \frac{2\cos\frac{\pi}{8} + 2i\sin\frac{\pi}{8}}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{8}}}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{2}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{4}\right)} = 0{,}5e^{i\left(-\frac{5\pi}{8}\right)}$$

84.3. $$\frac{w}{i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{8}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{8}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{8}+2\pi\right)} = 2e^{i\frac{13\pi}{8}}$$

O argumento não negativo mínimo de $\frac{w}{i}$ é $\frac{13\pi}{8}$.

A opção correta é a **(B)**.

Página 51 – Tarefa 8

1.

Número complexo	Representação na forma trigonométrica	Argumento não negativo mínimo de z
z_A	$3e^{i0}$	0
z_B	$3e^{i\frac{\pi}{3}}$	$\frac{\pi}{3}$
z_C	$3e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{2\pi}{3}$
z_D	$3e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$\frac{5\pi}{6}$
z_E	$3e^{i\pi}$	π
z_F	$3e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$\frac{4\pi}{3}$
z_G	$3e^{i\frac{5\pi}{3}}$	$\frac{5\pi}{3}$
z_H	$3e^{i\frac{11\pi}{6}}$	$\frac{11\pi}{6}$

Argumento principal de z	$-z$	$\overline{z}$	$\frac{1}{z}$
0	$3e^{i\pi}$	$3e^{i0}$	$\frac{1}{3}e^{i0}$
$\frac{\pi}{3}$	$3e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$3e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$	$\frac{1}{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$
$\frac{2\pi}{3}$	$3e^{i\frac{5\pi}{3}}$	$3e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$	$\frac{1}{3}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$
$\frac{5\pi}{6}$	$3e^{i\frac{11\pi}{6}}$	$3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$	$\frac{1}{3}e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$
π	$3e^{i0}$	$3e^{i\pi}$	$\frac{1}{3}e^{i\pi}$
$-\frac{2\pi}{3}$	$3e^{i\frac{\pi}{3}}$	$3e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{1}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$-\frac{\pi}{3}$	$3e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$3e^{i\frac{\pi}{3}}$	$\frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$
$-\frac{\pi}{6}$	$3e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$3e^{i\frac{\pi}{6}}$	$\frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

2.1. a) $\dfrac{z_B}{z_C}=\dfrac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=$

$=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $z_E+iz_D=3e^{i\pi}+i\left(3e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)=$

$=-3+i\left(3\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)=-3+3i\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=$

$=-3-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{3}{2}i^2=-\dfrac{9}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

c) $z_G+\overline{z}_A=3e^{i\frac{5\pi}{3}}\times 3e^{i0}=9e^{i\left(\frac{5\pi}{3}+0\right)}=9e^{i\frac{5\pi}{3}}=$

$=9\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=9\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\dfrac{9}{2}-\dfrac{9\sqrt{3}}{2}i$

2.2. a) $z_B\times z_D=3e^{i\frac{\pi}{3}}\times 3e^{i\frac{5\pi}{6}}=9e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=9e^{i\frac{7\pi}{6}}$

b) $\dfrac{z_C\times\overline{z}_F}{z_A+iz_E}=\dfrac{3e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 3e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}}{3+i(-3)}=\dfrac{9e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}\right)}}{3-3i}=$

$=\dfrac{9e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}}{3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}=\dfrac{9}{3\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$

Cálculo auxiliar:

Seja $w=3-3i$.

$|w|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{-3}{3}=-1\\ \theta\in 4.^{\circ}\,Q\end{array}\right\}\ \theta=-\dfrac{\pi}{4}$, por exemplo

Assim, $w=3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

c) $\dfrac{z_B-z_E}{z_A}=\dfrac{3e^{i\frac{\pi}{3}}-3e^{i\pi}}{3}=\dfrac{3\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)-(-3)}{3}$

$=\dfrac{3\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3}{3}=\dfrac{\dfrac{9}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i}{3}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Cálculo auxiliar:

Seja $z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

$|z|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \theta\in 1.^{\circ}\,Q\end{array}\right\}\ \theta=\dfrac{\pi}{6}$, por exemplo

Assim, $z=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

d) $(1+i)\times z_H=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\times 3e^{i\frac{11\pi}{6}}=3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{11\pi}{6}\right)}=$

$=3\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{12}}=3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{25\pi}{12}-2\pi\right)}=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

Cálculo auxiliar:

Seja $t=1+i$.

$|t|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{1}{1}=1\\ \theta\in 1.^{\circ}\,Q\end{array}\right\}\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$, por exemplo

Assim, $t=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2.3. a) $\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{z_F}=\dfrac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\frac{4\pi}{3}}}=\dfrac{4}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}\right)}=\dfrac{4}{3}e^{i(-\pi)}=$

$=\dfrac{4}{3}\left(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right)=\dfrac{4}{3}(-1+0i)$

$=-\dfrac{4}{3}$ (número real negativo)

Cálculo auxiliar:

Seja $w=2+2\sqrt{3}i$

$|w|=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\\ \theta\in 1.^{\circ}\,Q\end{array}\right\}\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$, por exemplo

Assim, $w=4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) $z_B+z_D+z_F+z_H=$

$=3e^{i\frac{\pi}{3}}+3e^{i\frac{5\pi}{6}}+3e^{i\frac{4\pi}{3}}+3e^{i\frac{11\pi}{6}}=$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)+\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=$

$=0$

c) $\dfrac{-\sqrt{3}-i}{z_D}=\dfrac{2e^{i\frac{7\pi}{6}}}{3e^{i\frac{5\pi}{6}}}=\dfrac{2}{3}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)}=\dfrac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Como $\frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{z_D}$ e z_B têm o mesmo argumento não negativo mínimo e $\left|\frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{z_D}\right| < |z_B|$, conclui-se que o afixo de $\frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{z_D}$ pertence ao segmento de reta $[OB]$.

Cálculo auxiliar:

Seja $z = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

$|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta \in 3.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\} \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, por exemplo

Página 52 – Pratica

85.1. $5e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 10e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = 10e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

85.2. $3\mathrm{i} \times 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 6e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 6e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

85.3. $-4\mathrm{i} \times \frac{3}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 4e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} \times \frac{3}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 6e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = 6e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$

86.1. $w = e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} \times z_1$

O afixo de z_1 é o ponto A.

$\frac{4\pi}{5} = 2 \times \frac{2\pi}{5}$

O afixo de w é a imagem de A pela rotação de centro O e amplitude $\frac{4\pi}{5}$, ou seja, é o ponto C.

86.2. D é a imagem de A pela rotação de centro O e amplitude $\frac{6\pi}{5}$. Logo, $z_4 = e^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}} \times z_1$.

$z_4 = e^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}} \times 3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 3e^{\mathrm{i}\left(\frac{6\pi}{5}+\frac{\pi}{6}\right)} = 3e^{\mathrm{i}\frac{41\pi}{30}}$

87.1. $-5e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} \times \frac{2}{5}e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 5e^{\mathrm{i}\pi} \times e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} \times \frac{2}{5}e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} =$

$= 2e^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$

87.2. $\left(-\sqrt{3}+3\mathrm{i}\right) \times 2e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} =$

$= 4\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 4\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$

Cálculo auxiliar:

Seja $z = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

$|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \frac{3}{-\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \\ \theta \in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\} \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, por exemplo

Assim, $z = 2\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

87.3. $(-3-3\mathrm{i}) \times \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} \times \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 6e^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 6e^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{12}}$

Cálculo auxiliar:

Seja $w = -3 - 3\mathrm{i}$.

$|w| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \frac{-3}{-3} = 1 \\ \theta \in 3.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\} \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, por exemplo

Assim, $w = 3\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$.

87.4. $\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}} \times \left(4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\mathrm{i}\right) = \frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}} \times 8e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 4e^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)} = 4e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$

Cálculo auxiliar:

Seja $t = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\mathrm{i}$

$|t| = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(-4\sqrt{2}\right)^2} = 8$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \frac{-4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -1 \\ \theta \in 4.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\} \theta = -\frac{\pi}{4}$, por exemplo

Assim, $t = 8e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Página 53 – Pratica

88.1. $\frac{12e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = 6e^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = 6e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$

88.2. $\frac{3\mathrm{i}}{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \frac{3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \frac{3}{2}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

88.3. $\frac{8e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{-4\mathrm{i}} = \frac{8e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{4e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}} = 2e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)} = 2e^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)} = 2e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

89.1. $z_C = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times z_B = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times 2e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = 2e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{12}\right)} = 2e^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{6}}$

A opção correta é a **(C)**.

89.2. $z_D = \mathrm{i} \times \left(\frac{3}{2} z_C\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$

89.3. $w = \frac{z}{\mathrm{i}} = \frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

O afixo de w é o ponto A.

90.1. $\frac{-6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{7\pi}{6}\right)}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{13\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}}$

$= 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{2}-2\pi\right)} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

90.2. $\frac{-3-3\mathrm{i}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \frac{3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$

Cálculo auxiliar:

Seja $z = -3-3\mathrm{i}$

$|z| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = 3\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \frac{-3}{-3} = 1 \\ \theta \in 3.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\} \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, por exemplo

Assim, $z = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$.

90.3. $-\frac{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}}{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \frac{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}}{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)} =$

$= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{9\pi}{8}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{8}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{17\pi}{8}-2\pi\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$

91. $z_1 = -\sqrt{3}+3\mathrm{i}$, $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ e $z_3 = 2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

91.1. a) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)} = \overline{\left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}\right)} =$

$= \overline{\left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$

Cálculo auxiliar:

$|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2} = 2\sqrt{3}$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \frac{3}{-\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \\ \theta \in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\} \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, por exemplo

Assim, $z_1 = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

b) $\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)}{\overline{z_2}} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = \frac{2\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{24}}$

c) $\frac{\mathrm{i}z_2}{z_3-1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

Cálculo auxiliar:

$z_3 - 1 = 2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} - 1 = 1 - \left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

$|z_3 - 1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \\ \theta \in 4.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\} \theta = -\frac{\pi}{3}$, por exemplo

$z_3 - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

91.2. $\frac{2+\mathrm{i}z_1}{z_3} = \frac{2+\mathrm{i}\left(-\sqrt{3}+3\mathrm{i}\right)}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}} = \frac{2-\sqrt{3}\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}} = \frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}} =$

$= \frac{\left(-1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)}{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)} = \frac{-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\frac{3}{2}\mathrm{i}^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$= \frac{-2\sqrt{3}\mathrm{i}}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

Como $\mathrm{Re}\left(\frac{2+\mathrm{i}z_1}{z_3}\right) = 0 \wedge \mathrm{Im}\left(\frac{2+\mathrm{i}z_1}{z_3}\right) \neq 0$, conclui-se que $\frac{2+\mathrm{i}z_1}{z_3}$ é um imaginário puro.

92. $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ e $w = \sqrt{3}+\mathrm{i}$

92.1. $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$

$|w| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = 2$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta \in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{6}$, por exemplo

Logo, $w = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

92.2. **Na forma algébrica:**

$$\frac{z}{w}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)}{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i}+\sqrt{6}\mathrm{i}-\sqrt{2}\mathrm{i}^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i}+\sqrt{6}\mathrm{i}+\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$$

Na forma trigonométrica:

$$\frac{z}{w}=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}=1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$$

92.3. De **92.2.** conclui-se que:

$$\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$$

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=\frac{6-4\sqrt{3}+2}{4}=2-\sqrt{3}$$

Página 54

93. $z^{10}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{15}}\right)^{10}=1^{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(10\times\frac{\pi}{15}\right)}=1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

94.1. $z^{24}=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{24}=\left(\frac{1}{2}\right)^{24}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(24\times\frac{\pi}{12}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{24}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=\left(\frac{1}{2}\right)^{24}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$

Como 0π é um argumento de z^{24}, então z^{24} é um número real positivo.

94.2. $z^{18}=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{18}=\left(\frac{1}{2}\right)^{18}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(18\times\frac{\pi}{12}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{18}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$

Como $\frac{3\pi}{2}$ é um argumento de z^{18}, então z^{18} é um número imaginário puro.

95. $w=\mathrm{i}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$

95.1. a) $w=\mathrm{i}+\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}=\mathrm{i}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

b) $|w|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1}=1$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \theta\in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\}\ \theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}\text{, por exemplo}$$

$w=1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

95.2. $w^8=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^8=1^8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(8\times\frac{5\pi}{6}\right)}=1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{20\pi}{3}-6\pi\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

96. $t=\mathrm{i}^{48}-\left(2+\mathrm{i}^{27}\right)$

96.1. $\mathrm{i}^{48}=\mathrm{i}^{4\times12+0}=\mathrm{i}^0=1$

$\mathrm{i}^{27}=\mathrm{i}^{4\times6+3}=\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$

$t=1-\left(2-\mathrm{i}\right)=-1+\mathrm{i}$

$|t|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

Seja θ o argumento não negativo mínimo

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{1}{-1}=-1\\ \theta\in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\}\ \theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

Assim, $t=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

96.2. a) $t^7=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^7=\left(\sqrt{2}\right)^7\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(7\times\frac{3\pi}{4}\right)}=\left(\sqrt{2}\right)^7\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{21\pi}{4}}=$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^7\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{21\pi}{4}-4\pi\right)}=\left(\sqrt{2}\right)^7\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$$

$\frac{5\pi}{4}\in 3.^{\circ}\,\mathrm{Q}$, logo o afixo de t^7 pertence ao 3.º quadrante.

b) $t^{11}=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^{11}=\left(\sqrt{2}\right)^{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(11\times\frac{3\pi}{4}\right)}=\left(\sqrt{2}\right)^{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{33\pi}{4}}=$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{33\pi}{4}-8\pi\right)}=\left(\sqrt{2}\right)^{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

$\frac{\pi}{4}\in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q}$, logo o afixo de t^{11} pertence ao 1.º quadrante.

Página 55 – Tarefa 9

1.1. $z = 1+\sqrt{3}\mathrm{i} \rightarrow z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, sendo $\rho = |z|$ e θ o argumento não negativo mínimo

$$\rho = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \\ \theta \in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

1.2. **a)** $z^2 = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = 2^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

$$z^3 = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(3\times\frac{\pi}{3}\right)} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$$

$$z^4 = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(4\times\frac{\pi}{3}\right)} = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$$

Número complexo	Representação na forma trigonométrica	Módulo	Argumento não negativo mínimo de z
z	$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$	2	$\frac{\pi}{3}$
z^2	$4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$	4	$\frac{2\pi}{3}$
z^3	$8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$	8	π
z^4	$16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$	16	$\frac{4\pi}{3}$

b) Os módulos dos números complexos z, z^2, z^3 e z^4 estão em progressão **geométrica** de razão igual a **2**, e os argumentos não negativos mínimos estão em progressão **aritmética** de razão igual a $\frac{\pi}{3}$.

2.1. **a)** $w^7 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(7\times\frac{2\pi}{5}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{14\pi}{5}\right)} =$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^7 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{14\pi}{5}-2\pi\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$$

O afixo de w^7 pertence ao 2.º quadrante.

b) $w^{19} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^{19} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(19\times\frac{2\pi}{5}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{38\pi}{5}\right)} =$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{38\pi}{5}-6\pi\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$$

O afixo de w^{19} pertence ao 4.º quadrante.

c) $w^{13} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^{13} = \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(13\times\frac{2\pi}{5}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{26\pi}{5}\right)} =$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{26\pi}{5}-4\pi\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}}$$

O afixo de w^{13} pertence ao 3.º quadrante.

d) $w^{21} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^{21} = \left(\frac{1}{2}\right)^{21} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(21\times\frac{2\pi}{5}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{21} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{42\pi}{5}\right)} =$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{21} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{42\pi}{5}-8\pi\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{21} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$$

O afixo de w^{21} pertence ao 1.º quadrante.

2.2. $-w^n = -\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{5}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2n\pi}{5}+\pi\right)}$

$-w^n$ é um número real negativo se

$$\frac{2n\pi}{5} + \cancel{\pi} = \cancel{\pi} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 5k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

O maior valor natural de n, menor do que 28, que verifica a condição é 25.

$n = 25$

3.1. **a)** $z = -\sqrt{3} + \sqrt{3}\mathrm{i}$

$$|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -1 \\ \theta \in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q} \end{array}\right\} \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$, por exemplo

$$z = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$$

$$w = z^n = \left(\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{6}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n\times\frac{3\pi}{4}\right)};\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

O menor valor de n tal que o afixo de w pertence ao 1.º quadrante é 3, $(n = 3)$.

b) O menor valor de n tal que o afixo de w pertence ao semieixo real positivo é 8 $(n = 8)$.

c) O menor valor de n tal que o afixo de w pertence ao eixo imaginário é 2 $(n = 2)$.

3.2. $|w| = 36 \Leftrightarrow \left(\sqrt{6}\right)^n = 36 \Leftrightarrow 6^{\frac{n}{2}} = 6^2 \Leftrightarrow \frac{n}{2} = 2 \Leftrightarrow n = 4$

$$w = 36\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(4\times\frac{3\pi}{4}\right)} = 36\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi} = 36\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 36(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) =$$
$$= 36(-1+0\mathrm{i}) = -36$$

3.3. A origem do referencial e os afixos de z e de w são colineares se os argumentos de w forem da forma $\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$\frac{n3\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=1+\frac{4k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

Como $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\wedge n<18$, conclui-se que $n\in\{1,5,9,13,17\}$.

Página 56 – Tarefa 10

1.1. Rotação de centro O e amplitude $\frac{2\pi}{3}$ rad.

1.2.

	z_0	z_1	z_2
Representação na forma trigonométrica	$z_0=2e^{i\frac{\pi}{6}}$	$z_1=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$z_2=2e^{i\frac{3\pi}{2}}$
	z_0^3	z_1^3	z_1^3
Representação na forma trigonométrica	$z_0^3=8e^{i\frac{\pi}{2}}$	$z_1^3=8e^{i\frac{\pi}{2}}$	$z_2^3=8e^{i\frac{\pi}{2}}$
Representação na forma algébrica	$z_0^3=8i$	$z_1^3=8i$	$z_2^3=8i$

1.3. z_0, z_1 e z_2 são solução, em $\mathbb{C}$, da equação $z^3=8i$. Então, $a=0$ e $b=8$.

2.1. Rotação de centro O e amplitude $\frac{2\pi}{4}$ rad, ou seja, $\frac{\pi}{2}$ rad.

2.2.

z_0	z_1	z_2	z_3
$\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$\frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$\frac{1}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$
z_0^4	z_1^4	z_1^4	z_3^4
$\frac{1}{16}e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$\frac{1}{16}e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$\frac{1}{16}e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$\frac{1}{16}e^{i\frac{4\pi}{3}}$
$-\frac{1}{32}-\frac{\sqrt{3}}{32}i$	$-\frac{1}{32}-\frac{\sqrt{3}}{32}i$	$-\frac{1}{32}-\frac{\sqrt{3}}{32}i$	$-\frac{1}{32}-\frac{\sqrt{3}}{32}i$

2.3. Os números complexos z_0, z_1, z_2 e z_3 são soluções, em $\mathbb{C}$, da equação $z^4=-\frac{1}{32}-\frac{\sqrt{3}}{32}i$.

Então, $a=-\frac{1}{32}$ e $b=-\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Página 57

97.1. Como $t=\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{9}}$ é uma das raízes cúbicas de w, então $w=t^3=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{9}}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3e^{i\left(3\times\frac{5\pi}{9}\right)}=\frac{1}{8}e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Assim, $|w|=\frac{1}{8}$.

97.2. $w=\frac{1}{8}e^{i\frac{5\pi}{3}}=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$

$=\frac{1}{16}-\frac{\sqrt{3}}{16}i$

98. Como $z=2e^{i\frac{3\pi}{10}}$ é uma das raízes de índice 5 do número complexo w, então $w=z^5$.

$w=\left(2e^{i\frac{3\pi}{10}}\right)^5=2^5e^{i\left(5\times\frac{3\pi}{10}\right)}=32e^{i\frac{3\pi}{2}}=-32i$

A opção correta é a **(C)**.

99. $z=2e^{i\frac{\pi}{12}}$ e $w=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$

99.1. $z^3=\left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3=2^3e^{i\left(3\times\frac{\pi}{12}\right)}=8e^{i\frac{\pi}{4}}=8\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$

$=8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i=w$

Como $z^3=w$, então z é uma raiz cúbica de w.

99.2. $-z=-2e^{i\frac{\pi}{12}}=2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)}=2e^{i\frac{13\pi}{12}}$

$(-z)^3=\left(2e^{i\frac{13\pi}{12}}\right)^3=2^3e^{i\left(3\times\frac{13\pi}{12}\right)}=8e^{i\frac{13\pi}{4}}=8e^{i\frac{5\pi}{4}}=$

$=8\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$=-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i=-w$

Como $(-z)^3=-w$, então $-z$ é uma raiz cúbica de $-w$.

99.3. $\overline{z}=\overline{\left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)}=2e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$

$(\overline{z})^3=\left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}\right)^3=2^3e^{i\left(3\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)}=8e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=$

$=8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i=\overline{w}$

Como $(\overline{z})^3=\overline{w}$, então $\overline{z}$ é uma raiz cúbica de $\overline{w}$.

100. $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

Seja θ o argumento principal de z

$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1\\ \theta\in 4.^{\circ}\,Q\end{array}\right\}\theta=-\frac{\pi}{4}$

$z=2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$z^5=\left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^5=2^5e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}=32\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right)=$

$=32\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-16\sqrt{2}+16\sqrt{2}i=w$

Como $z^5=w$, conclui-se que z é uma raiz de índice 5 de w.

Página 58

101.1. $w_2=-32=32e^{i\pi}$

101.2. a) $z^3=w_1\Leftrightarrow\left(\rho e^{i\theta}\right)^3=\frac{1}{8}i\Leftrightarrow\rho^3e^{i(3\theta)}=\frac{1}{8}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^3=\frac{1}{8}\\ 3\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}\\ \theta=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Para $k=0\rightarrow z_0=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Para $k=1\rightarrow z_1=\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Para $k=2\rightarrow z_2=\frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

b) $z^5=w_2\Leftrightarrow\left(\rho e^{i\theta}\right)^5=32e^{i\pi}\Leftrightarrow\rho^5e^{i(5\theta)}=32e^{i\pi}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^5=32\\ 5\theta=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[5]{32}=2\\ \theta=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Para $k=0\rightarrow z_0=2e^{i\frac{\pi}{5}}$.

Para $k=1\rightarrow z_1=2e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

Para $k=2\rightarrow z_2=2e^{i\pi}$.

Para $k=3\rightarrow z_3=2e^{i\frac{7\pi}{5}}$.

Para $k=4\rightarrow z_4=2e^{i\frac{9\pi}{5}}$.

102.1. $z_0=4(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\sin\theta=\frac{1}{2}\wedge\theta\in 1.^{\circ}\,Q$, logo $\theta=\frac{\pi}{6}$ e,

consequentemente, $z_0=4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$z_1=4e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z^2=z_1\Leftrightarrow\left(\rho e^{i\theta}\right)^2=4e^{i\frac{2\pi}{3}}\Leftrightarrow\rho^2e^{i(2\theta)}=4e^{i\frac{2\pi}{3}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^2=4\\ 2\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=2\\ \theta=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Para $k=0\rightarrow z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Para $k=1\rightarrow z=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

102.2. $z_2=-z_0=4e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=4e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$z^3=z_2\Leftrightarrow\left(\rho e^{i\theta}\right)^3=4e^{i\frac{7\pi}{6}}\Leftrightarrow\rho^3e^{i(3\theta)}=4e^{i\frac{7\pi}{6}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^3=4\\ 3\theta=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[3]{4}\\ \theta=\frac{7\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Para $k=0\rightarrow z=\sqrt[3]{4}e^{i\frac{7\pi}{18}}$.

Para $k=1\rightarrow z=\sqrt[3]{4}e^{i\frac{19\pi}{18}}$.

Para $k=2\rightarrow z=\sqrt[3]{4}e^{i\frac{31\pi}{18}}$.

Página 59

103.1. Sendo $z=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ uma das raízes cúbicas de w, então as outras raízes cúbicas de w são:

$z_1=e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{17\pi}{12}}$; $z_2=e^{i\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{25\pi}{12}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$

103.2. $w=z^3=\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^3=e^{i\frac{9\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

103.3. $\sqrt{z}=\sqrt{e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\sqrt{1}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)}$, $k\in\{0,1\}$

$k=0\rightarrow e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$k=1\rightarrow e^{i\frac{11\pi}{8}}$

Os argumentos não negativos mínimos das raízes quadradas de z são $\frac{3\pi}{8}$ e $\frac{11\pi}{8}$.

104.1. $|z|=1$, como $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)$ e $A\in$ 1.º quadrante, então $z=e^{i\frac{\pi}{4}}$.

104.2. $w=1e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}\right)}=e^{i\frac{13\pi}{20}}$

O argumento não negativo mínimo de w é $\frac{13\pi}{20}$.

Página 60 – Pratica

105.1. $w^5=\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^5=e^{i\left(5\times\frac{4\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{20\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}=$

$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

105.2. $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\qquad s=-2i=2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$\tan\theta=\frac{1}{1}=1$, $\theta\in$ 1.º Q $\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$, por exemplo

$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$(1+i)s^3=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)^3=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times 8e^{i\frac{9\pi}{2}}=$

$=8\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{4}}=8\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\rightarrow$ 2.º quadrante

A opção correta é a **(B)**.

105.3. $t=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$t^6=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6e^{i\left(6\times\frac{3\pi}{4}\right)}=8e^{i\frac{9\pi}{2}}=8e^{i\frac{\pi}{2}}=\underbrace{8i}_{\text{imaginário puro}}$

A opção correta é a **(D)**.

106.1. $z^3=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3e^{i\left(3\times\frac{2\pi}{5}\right)}=\frac{1}{8}e^{i\frac{6\pi}{5}}$

O afixo de z^3 pertence ao 3.º quadrante. $|z|^3=\frac{1}{8}$

106.2. $(\overline{z})^3=\left(\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3e^{i\left(3\times\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)}=\frac{1}{8}e^{i\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}$

O afixo de $(\overline{z})^3$ pertence ao 2.º quadrante.

$|\overline{z}^3|=\frac{1}{8}$

106.3. $w=-2e^{i\frac{\pi}{5}}=2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)}=2e^{i\frac{6\pi}{5}}$

$w^2=\left(2e^{i\frac{6\pi}{5}}\right)^2=2^2e^{i\left(2\times\frac{6\pi}{5}\right)}=4e^{i\frac{12\pi}{5}}=4e^{i\frac{2\pi}{5}}$

O afixo de w^2 pertence ao 1.º quadrante. $|w^2|=4$

106.4. $iw=e^{i\frac{\pi}{2}}\times\left(2e^{i\frac{6\pi}{5}}\right)=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{6\pi}{5}\right)}=2e^{i\frac{17\pi}{10}}$

$(iw)^4=\left(2e^{i\frac{17\pi}{10}}\right)^4=2^4e^{i\left(4\times\frac{17\pi}{10}\right)}=16e^{i\frac{34\pi}{5}}=16e^{i\frac{4\pi}{5}}$

O afixo de $(iw)^4$ pertence ao 2.º quadrante.

$|(iw)^4|=16$

Página 61 – Pratica

107. $z^n=\left(e^{i\frac{3\pi}{8}}\right)^n=e^{i\frac{3n\pi}{8}}$, $n\in\mathbb{N}$

107.1. $z^n\in\mathbb{R}^-\Leftrightarrow\frac{3n\pi}{8}=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\frac{8+16k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

O menor número natural positivo que verifica a condição é 8 $(k=1)$.

107.2. $z^n\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow\frac{3n\pi}{8}=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=\frac{16k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

O menor número natural positivo que verifica a condição é 16 $(k=3)$.

107.3. O afixo de z^n pertence ao eixo imaginário se:

$\frac{3n\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=\frac{4+8k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

O menor número natural positivo que verifica a condição é 4 $(k=1)$.

107.4. O afixo de z^n pertence ao semieixo imaginário positivo se:

$\frac{3n\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=\frac{4+16k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

O menor número natural positivo que verifica a condição é 12 $(k=2)$.

108. $|z| = \frac{3}{2}$, logo $|z^4| = |z|^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$.

z^4 é um imaginário puro e $\text{Im}(z^4) > 0$.

Assim, $z^4 = \frac{81}{16}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Seja θ um argumento de z.

$z^4 = \frac{81}{16}e^{i(4\theta)}$ e $z^4 = \frac{81}{16}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Argumento não negativo mínimo de $\overline{z}$: $\frac{\pi}{8}$

$\overline{z}^2 = \left(\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = \frac{9}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$w = \overline{(z^2)} = \overline{\frac{9}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{9}{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{9}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= \frac{9}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{9\sqrt{2}}{8} - \frac{9\sqrt{2}}{8}i$

109.1. Sendo $z = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{2\pi}{9}}$ uma das raízes cúbicas de w, então as outras raízes cúbicas de w são:

$z_1 = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{8\pi}{9}}$

$z_2 = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{8\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{14\pi}{9}}$

109.2. $w = z^3 = \left(\sqrt[3]{4}e^{i\frac{2\pi}{9}}\right)^3 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\sqrt{w} = \sqrt{4e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \underbrace{\sqrt{4}}_{2}e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)},\ k \in \{0, 1\}$

Para $k = 0 \rightarrow w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \rightarrow$ 1.º quadrante

Para $k = 1 \rightarrow w_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \rightarrow$ 3.º quadrante

$w_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= -1 - \sqrt{3}i$

110.1. $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ e $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_1 \rightarrow^{\text{Afixo}} A$; $z_2 \rightarrow^{\text{Afixo}} B$

Como A e B são dois vértices consecutivos do polígono, então:

$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 24$

110.2. $z_1 = 3e^{i\pi}$

$z_1 \rightarrow$ Afixo A

$z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\frac{9\pi}{8}\right) = 3\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$

$= 3e^{i\frac{9\pi}{8}}$

$z_2 \rightarrow$ Afixo B

Como A e B são dois vértices consecutivos do polígono, então:

$\frac{9\pi}{8} - \pi = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 16$

111. $z_A = 4e^{i\pi}$, logo $z = 4e^{i\left(\pi - 2\times\frac{2\pi}{5}\right)} = 4e^{i\frac{\pi}{5}}$

$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) = 4\cos\frac{\pi}{5} + 4i\sin\frac{\pi}{5}$

$\text{Re}(z) = 4\cos\frac{\pi}{5} \approx 3{,}24$; $\text{Im}(z) = 4\sin\frac{\pi}{5} \approx 2{,}35$

Página 62

112.1. a) $(\overline{z})^2 = iz$

$(\overline{i})^2 = (-i)^2 = i^2 = -1;\ i \times i = i^2 = -1$

Como $(\overline{i})^2 = i \times i$, então i é solução da equação $(\overline{z})^2 = iz$.

b) $(\overline{z})^2 = iz$

$\left(\overline{e^{i\frac{7\pi}{6}}}\right)^2 = \left(e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}\right)^2 = e^{i\left(-\frac{7\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$i \times e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Como $\left(\overline{e^{i\frac{7\pi}{6}}}\right)^2 = i \times e^{i\frac{7\pi}{6}}$, conclui-se que $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ é solução da equação $(\overline{z})^2 = iz$.

112.2. a) $z = x + yi$

$(\overline{z})^2 = iz \Leftrightarrow (x - yi)^2 = i(x + yi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2xyi = -y + xi$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -y \\ -2xy = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 2xy + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ x(2y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ x = 0 \vee y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Se $x=0$, então $-y^2=-y$.

$-y^2=-y \Leftrightarrow y^2-y=0 \Leftrightarrow y(y-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y=0 \vee y=1$

Então, $z=0 \vee z=\mathrm{i}$.

Se $y=-\frac{1}{2}$, então $x^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

$x^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Então, $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i} \vee z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Conclusão:

$(\overline{z})^2=\mathrm{i}z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\mathrm{i} \vee z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i} \vee z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

b) $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \rightarrow \overline{z}=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)}$

$(\overline{z})^2=\mathrm{i}z \Leftrightarrow \left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)}\right)^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-2\theta)}=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2=\rho \\ -2\theta=\frac{\pi}{2}+\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho-1)=0 \\ -3\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho=0 \vee \rho=1 \\ \theta=-\frac{\pi}{6}-\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Se $\rho=0$, então $z=0$.

Se $\rho=1$, então $\theta=-\frac{\pi}{6}-\frac{2k\pi}{3},\ k\in\{0,1,2\}$.

Se $k=0$, então $\theta=-\frac{\pi}{6}$, sendo

$z=1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Se $k=1$, então $\theta=-\frac{5\pi}{6}$, sendo

$z=1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Se $k=2$, então $\theta=-\frac{3\pi}{2}$, sendo

$z=1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\mathrm{i}$.

113.1. $\mathrm{i}z^2-z=0 \Leftrightarrow z(\mathrm{i}z-1)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee z=\frac{1}{\mathrm{i}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\frac{1\times(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})} \Leftrightarrow z=0 \vee z=-\mathrm{i}$

113.2. $2z-5\mathrm{i}=z\mathrm{i} \Leftrightarrow 2z-z\mathrm{i}=5\mathrm{i} \Leftrightarrow z(2-\mathrm{i})=5\mathrm{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} \Leftrightarrow z=\frac{5\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{10\mathrm{i}-5}{4+1} \Leftrightarrow z=-1+2\mathrm{i}$

113.3. $\frac{2z}{\mathrm{i}}+\frac{\overline{z}}{\mathrm{i}^3}=1 \overset{z=x+y\mathrm{i}}{\Leftrightarrow} \frac{2(x+y\mathrm{i})}{\mathrm{i}}+\frac{x-y\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(2x+2y\mathrm{i})\times(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}+\frac{(x-y\mathrm{i})\times\mathrm{i}}{(-\mathrm{i})\times\mathrm{i}}=1$

$\Leftrightarrow -2x\mathrm{i}+2y+x\mathrm{i}+y=1 \Leftrightarrow 3y-x\mathrm{i}=1+0\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 3y=1 \wedge -x=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3} \wedge x=0$

Assim, $z=\frac{1}{3}\mathrm{i}$.

113.4. $4z^4=\frac{z}{2} \Leftrightarrow 8z^4=z$

Seja $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

$8z^4=z \Leftrightarrow 8\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^4=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow 8\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4\theta)}=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8\rho^4=\rho \\ 4\theta=\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(8\rho^3-1)=\rho \\ 3\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho=0 \vee \rho=\frac{1}{2} \\ \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Se $\rho=0$, então $z=0$.

Se $\rho=\frac{1}{2}$, então $\theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\{0,1,2\}$.

Se $k=0$, então $\theta=0$, sendo $z=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}=\frac{1}{2}$.

Se $k=1$, então $\theta=\frac{2\pi}{3}$, sendo $z=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Se $k=2$, então $\theta=\frac{4\pi}{3}$, sendo $z=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

113.5. $z^4=1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z^4=1-\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^4=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) \Leftrightarrow z^4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \Leftrightarrow z^4=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Seja $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

$z^4=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow \left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^4=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow \rho^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4\theta)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^4=1 \\ 4\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho=1 \\ \theta=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Se $k=0$, então $\theta=-\frac{\pi}{12}$, sendo $z=1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$, ou

seja, $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{23\pi}{12}}$.

Se $k=1$, então $\theta=\frac{5\pi}{12}$, sendo $z=e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

Se $k=2$, então $\theta=\frac{11\pi}{12}$, sendo $z=e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

Se $k=3$, então $\theta=\frac{17\pi}{12}$, sendo $z=e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

114. $z^3=\frac{1}{z^2},\ z\neq 0$

Seja $z=\rho e^{i\theta}$, $(\rho\neq 0)$.

$$z^3=\frac{1}{z^2}\Leftrightarrow\left(\rho e^{i\theta}\right)^3=\frac{1}{\left(\rho e^{i\theta}\right)^2}\Leftrightarrow\rho^3e^{i(3\theta)}=\frac{1e^{i0}}{\rho^2e^{i(2\theta)}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\rho^3e^{i(3\theta)}=\frac{1}{\rho^2}e^{i(-2\theta)}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^3=\frac{1}{\rho^2}\\ 3\theta=-2\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=1\\ \theta=\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases};\quad k=2\rightarrow\theta=\frac{4\pi}{5}\ \text{(2.º quadrante)}$$

Então, $w=1e^{i\frac{4\pi}{5}}=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$.

$A\left(\cos\frac{4\pi}{5};\sin\frac{4\pi}{5}\right)$; $\cos\frac{4\pi}{5}\approx-0{,}809$; $\sin\frac{4\pi}{5}\approx 0{,}588$

Donde se conclui que $A(-0{,}809;\ 0{,}588)$, aproximadamente.

Página 63 – Tarefa 11

1.1. $z_1=1+i$ e $z_2=1+2i$

Seja $z=x+yi$.

$$z\times z_1=\overline{z}+z_2\Leftrightarrow(x+yi)(1+i)=(x-yi)+1+2i\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+xi+yi-y=(x+1)+(-y+2)i$$
$$\Leftrightarrow(x-y)+(x+y)i=(x+1)+(-y+2)i$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=x+1\\ x+y=-y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ x=4\end{cases}$$

Assim, $z=4-i$.

1.2. $i^{19}=i^{4\times4+3}=i^3=-i$

$z_1\times z_2=(1+i)(1+2i)=1+2i+i-2=-1+3i$

Seja $z=\rho e^{i\theta}$.

$$z^2-2i^{19}=z_1\times z_2\Leftrightarrow\left(\rho e^{i\theta}\right)^2-2(-i)=-1+3i\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\rho^2e^{i(2\theta)}=-1+i\Leftrightarrow\rho^2e^{i(2\theta)}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^2=\sqrt{2}\\ 2\theta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[4]{2}\\ \theta=\frac{3\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$k=0\rightarrow z=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$k=1\rightarrow z=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}$

Conclusão: $z=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}\vee z=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}$

Cálculo auxiliar:

$w=-1+i$; $|w|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\frac{1}{-1}=-1\\ \theta\in 2.^{\circ}\,Q\end{array}\right\}\ \theta=\frac{3\pi}{4}\text{, por exemplo}$$

Então, $w=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

1.3. $z_3\times z^5=iz_2-i^{50}$

$|z_3|=|z_1|=|1+i|=\sqrt{2}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$, logo $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{8}$ e $z_3=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$.

$i^{50}=i^{4\times12+2}=i^2=-1$

$iz_2-i^{50}=i(1+2i)-(-1)=i-2+1=-1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Seja $z=\rho e^{i\theta}$.

$$z_3\times z^5=iz_2-i^{50}\Leftrightarrow\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}\times\left(\rho e^{i\theta}\right)^5=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}\times\rho^5e^{i(5\theta)}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow\sqrt{2}\rho^5e^{i\left(\frac{\pi}{8}+5\theta\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2}\rho^5=\sqrt{2}\\ \frac{\pi}{8}+5\theta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^5=1\\ 5\theta=\frac{5\pi}{8}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=1\\ \theta=\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Se $k=0$, então $\theta=\frac{\pi}{8}$, sendo $z=e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Se $k=1$, então $\theta=\frac{21\pi}{40}$, sendo $z=e^{i\frac{21\pi}{40}}$.

Se $k=2$, então $\theta=\frac{37\pi}{40}$, sendo $z=e^{i\frac{37\pi}{40}}$.

Se $k=3$, então $\theta=\frac{53\pi}{40}$, sendo $z=1e^{i\frac{53\pi}{40}}$.

Se $k=4$, então $\theta=\frac{69\pi}{40}$, sendo $z=e^{i\frac{69\pi}{40}}$.

2.1. $\left(\rho e^{i\theta}\right)^4=e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$z_1-z_2=1+i-(1+2i)=-i=e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$z^4 = z_1 - z_2 \overset{z=\rho e^{i\theta}}{\Leftrightarrow} \rho^4 e^{i(4\theta)} = e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Se $k = 0$, então $\theta = \frac{3\pi}{8}$, sendo $z = 1e^{i\frac{3\pi}{8}}$.

Se $k = 1$, então $\theta = \frac{7\pi}{8}$, sendo $z = 1e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Se $k = 2$, então $\theta = \frac{11\pi}{8}$, sendo $z = 1e^{i\frac{11\pi}{8}}$.

Se $k = 3$, então $\theta = \frac{15\pi}{8}$, sendo $z = 1e^{i\frac{15\pi}{8}}$.

2.2. $w = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$

O afixo de w é o ponto D (4.º quadrante).

Como D é o afixo de uma das soluções da equação, sabe-se que $w = e^{i\frac{15\pi}{8}}$.

Então, $w = \cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}$, ou seja,

$a = \cos\frac{15\pi}{8}$ e $b = \sin\frac{15\pi}{8}$.

Assim, $a \approx 0{,}92$ e $b \approx -0{,}38$.

2.3. O número complexo cujo afixo é C é $z = e^{i\frac{11\pi}{8}}$.

O argumento principal é $\frac{11\pi}{8} - 2\pi$, ou seja, $-\frac{5\pi}{8}$.

3. $iz^3 + (z_2)^2 = 5 + (z_3)^4$

$(z_2)^2 = (1+2i)^2 = 1 + 4i - 4 - 3 + 4i$

$(z_3)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^4 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i$

$iz^3 + (z_2)^2 = 5 + (z_3)^4 \Leftrightarrow iz^3 - 3 + \cancel{4i} = 5 + \cancel{4i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^3 = \frac{8}{i} \Leftrightarrow z^3 = -8i \overset{z=\rho e^{i\theta}}{\Leftrightarrow} \rho^3 e^{i(3\theta)} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Se $k = 0$, então $\theta = \frac{\pi}{2}$, sendo $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Se $k = 1$, então $\theta = \frac{7\pi}{6}$, sendo $z = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Se $k = 2$, então $\theta = \frac{11\pi}{6}$, sendo $z = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

Os conjugados das soluções da equação dada são $2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$, $2e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}$ e $2e^{i\left(-\frac{11\pi}{6}\right)}$.

$2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -2i \rightarrow B(0, -2)$

$2e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)} = 2\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= -\sqrt{3} + i \rightarrow A(-\sqrt{3}, 1)$

$2e^{i\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = 2\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= \sqrt{3} + i \rightarrow C(\sqrt{3}, 1)$

Página 64 – Consolida

1.1. O argumento principal de z_B é $-\frac{8\pi}{12}$, ou seja, $-\frac{2\pi}{3}$.

A opção correta é a **(C)**.

1.2. $z_E = -3i = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

A opção correta é a **(D)**.

1.3. **a)** $z_C = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$

b) $z_G = 3e^{i\frac{20\pi}{12}} = 3e^{i\frac{5\pi}{3}}$

c) $z_I = -3 = 3e^{i\pi}$

d) $z_F = e^{i\frac{21\pi}{12}} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$

2.1. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$; $z = re^{i\theta}$; θ: argumento principal

$r = |z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$\left.\begin{matrix} \tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \theta \in 1.º\ Q \end{matrix}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$

Então, $z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2.2. $z = 4\cos\frac{3\pi}{8} - 4i\sin\frac{3\pi}{8} =$

$= 4\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) + 4i\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = 4e^{i\left(-\frac{3\pi}{8}\right)}$

2.3. $z = -\sqrt{5} + \sqrt{15}i$ $\quad z = re^{i\theta}$; θ: argumento principal

$r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + (\sqrt{15})^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\left.\begin{matrix} \tan\theta = \frac{\sqrt{15}}{-\sqrt{5}} = -\sqrt{3} \\ \theta \in 2.º\ Q \end{matrix}\right\} \theta = \frac{2\pi}{3}$

Então, $z = 2\sqrt{5}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2.4. $z=-3\sqrt{2}\mathrm{i}=3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

2.5. $z=-\pi=\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

3. $z=w \Leftrightarrow k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{11\pi}{3}-\theta\right)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2=5 \\ \frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{3}-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\sqrt{5}\ \vee\ k=-\sqrt{5} \\ \theta=\frac{7\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$\theta=\frac{7\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge\theta\in[0,2\pi[$

Para $k=0\rightarrow\theta=\frac{7\pi}{2}\notin[0,2\pi[$.

Para $k=-1\rightarrow\theta=\frac{3\pi}{2}\in[0,2\pi[$.

Para $k=-2\rightarrow\theta=-\frac{\pi}{2}\notin[0,2\pi[$.

Conclusão: $\left(k=\sqrt{5}\ \vee\ k=-\sqrt{5}\right)\wedge\theta=\frac{3\pi}{2}$

4.1. $z_C=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right)}=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{5}}$

4.2. $z_C\rightarrow C$; $\overline{z}_C\rightarrow B$; $-\overline{z}_C\rightarrow D$

O afixo de $-\overline{z}_C$ é o vértice D.

4.3. $z_A=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$; $z_B=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)}=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$;

$z_D=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{3\pi}{5}\right)}=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$

4.4. $z_A=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}=3\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}\right)=$

$=3\cos\frac{2\pi}{5}+3\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}$

$A\left(3\cos\frac{2\pi}{5},3\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

$A_{[ABCD]}=4\times\left(\left(3\cos\frac{2\pi}{5}\right)\times\left(3\sin\frac{2\pi}{5}\right)\right)=$

$=36\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\approx 10{,}58$

5.1. $z=\cos\frac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)=$

$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{5}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{5}}$

5.2. $z=\sin\frac{\pi}{8}-\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

$\cos\frac{3\pi}{8}-\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}=\overline{\cos\frac{3\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}}=\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}}=$

$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{8}}$

5.3. $z=2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}=2+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)=$

$=2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

$|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$

θ: argumento não negativo mínimo

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta\in 4.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\}\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

Então, $z=\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$.

Página 65 – Consolida

6.1. $z_1\times z_2=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}\times\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$

Cálculo auxiliar:

Seja $z_2=1-\mathrm{i}$.

$|z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{-1}{1}=-1 \\ \theta\in 4.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\}\theta=-\frac{\pi}{4}\text{, por exemplo}$$

$z_2=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

A opção correta é a **(C)**.

6.2. $\frac{z_1}{z_3}=\frac{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}}{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}}=\frac{4}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$

A opção correta é a **(A)**.

7. $z_1=10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ e $\frac{z_1}{z_2}=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

Então, $z_2=\frac{z_1}{5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}=\frac{10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}{5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

A opção correta é a **(D)**.

8.1. $z=\overline{z}_1\times(-z_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{5}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{14\pi}{15}}$

8.2. $z=\frac{\overline{z}_2}{z_1}=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{5}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{11\pi}{15}\right)}=$

$=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{11\pi}{15}+2\pi\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{15}}$

8.3. $z=\dfrac{-\mathrm{i}z_1}{z_2}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{19\pi}{10}+\frac{\pi}{3}\right)}=$

$=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{67\pi}{30}}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{67\pi}{30}-2\pi\right)}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{30}}$

9.1. **a)** $z\times w=\left(\mathrm{i}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)\times(1+\mathrm{i})=\left(\mathrm{i}-\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)(1+\mathrm{i})$

$=\left(\mathrm{i}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

b) $z=1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

$|z|=\sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \theta\in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\}\ \theta=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$, por exemplo

Assim, $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

$w=1+\mathrm{i}$

$|w|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{1}{1}=1\\ \theta\in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\}\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$, por exemplo

$w=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

Então, $z\times w=1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\times\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$.

9.2. $\overline{z}\times w=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{13\pi}{12}\right)=$

$=\sqrt{2}\left(-\cos\dfrac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)=-\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}-\sqrt{2}\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\ (1)$

$z\times w=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}\ (2)$

De **(1)** e **(2)** conclui-se que:

$-\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}\Leftrightarrow\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{-2\sqrt{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

10.1. $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$; $z^3=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

10.2. $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$; $z^5=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\right)^5=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

10.3. $z=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$; $z^4=\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^4=\dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

10.4. $z=-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$

$z^3=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}\right)^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{2}}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$

11. $z=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$

$z^{10}=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\right)^{10}=2^{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=2^{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\rightarrow$ número real positivo

$z^{15}=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\right)^{15}=2^{15}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi}=2^{15}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\rightarrow$número real negativo

A opção correta é a **(C)**.

12.1. Seja $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, então $z^2=\rho^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}$.

Pretende-se que o afixo de z pertença ao 4.º quadrante e o afixo de z^2 ao 4.º quadrante.

Por exemplo, $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ e $z^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

12.2. Seja $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, então $z^2=\rho^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}$.

Pretende-se que o afixo de z pertença ao 4.º quadrante e o afixo de z^2 ao 3.º quadrante.

Por exemplo, $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$; $z^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

13.

Número complexo	Afixo
w	P
$2\overline{w}$	D
w^2	A
$-\overline{w}$	C
$-w^2$	B

$|\overline{w}|=|w|=2$; $|2\overline{w}|=4$;

$|w^2|=2^2=4$; $|-\overline{w}|=2$;

$|-w^2|=4$

Página 66 – Consolida

14.1. $z=-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

$$z^5=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^5=\left(\sqrt{2}\right)^5=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{4}}=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

O afixo de z^5 pertence ao 4.º quadrante.

14.2. $\mathrm{i}^7=\mathrm{i}^{4\times1+3}=\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$

$$z=\frac{\mathrm{i}^7}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{8}}$$

$$z^3=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{8}}\right)^3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{45\pi}{8}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{45\pi}{8}-6\pi\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)}$$

O afixo de z^3 pertence ao 4.º quadrante.

14.3. $z=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\dfrac{1\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)}=\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{1+3}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}=-\sqrt{3}\\ \theta\in 4.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\}\ \theta=-\frac{\pi}{3}\text{, por exemplo}$$

$$z=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z^8=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^8=\left(\frac{1}{2}\right)^8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)}=\frac{1}{256}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$$

O afixo de z^8 pertence ao 3.º quadrante.

15.1. $z=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$; $|z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \theta\in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\}\ \theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}\text{, por exemplo}$$

Assim, $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

15.2. $-z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{5\pi}{6}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$; $-z\xrightarrow{\text{Afixo}}D$

Como $(-z)^2=z^2$ e $(-z)^6=z^6$, então o ponto D (afixo de $-z$) também é vértice comum ao quadrado e ao hexágono.

15.3. $z_A=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$; $z_D=-z_A=\sqrt{3}-\mathrm{i}$

16. $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$; $w=z^n$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$; $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5n\pi}{12}}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

16.1. $w\in\mathbb{R}^-\Leftrightarrow\dfrac{5n\pi}{12}=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{12+24k}{5},\ k\in\mathbb{Z}$

O menor valor de n que verifica a condição é 12.

16.2. O afixo de w pertence a um dos eixos coordenados se:

$$\frac{5n\pi}{12}=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=\frac{6k}{5},\ k\in\mathbb{Z}$$

O menor valor de n que verifica a condição é 6.

16.3. $t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$; $|t|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\\ \theta\in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\}\ \theta=\frac{\pi}{3}\text{, por exemplo}$$

$t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

O afixo de w coincide com o afixo de t se:

$$\frac{5n\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=\frac{4+24k}{5},\ k\in\mathbb{Z}$$

O menor valor de n que verifica a condição é 20.

17.1. Se $z=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ é uma das raízes quadradas de w, então a outra raiz quadrada de w é

$$z_1=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2}\right)}=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{8}}.$$

17.2. $w=z^2=\left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^2=9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=9\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{9\sqrt{2}}{2}+\frac{9\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

18.1. $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}=\underbrace{\sqrt[3]{27}}_{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)}$, $k\in\{0,1,2\}$

Se $k=0$, então $z_0=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Se $k=1$, então $z_1=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

Se $k=2$, então $z_2=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$.

As raízes cúbicas de -27 são $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ e $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$.

18.2. $\sqrt[3]{\dfrac{\mathrm{i}}{8}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}=\underbrace{\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}}_{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)}$, $k\in\{0,1,2\}$

Se $k=0$, então $z_0=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Se $k=1$, então $z_1=\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Se $k=2$, então $z_2=\frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

As raízes cúbicas de $\frac{i}{8}$ são $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$, $\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ e $\frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

18.3. $z=-1+\sqrt{3}i \quad |z|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}\\ \theta\in 2.^{\circ}\,Q\end{array}\right\}\ \theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$, por exemplo

$z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}$$

Se $k=0$, então $z_0=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{9}}$.

Se $k=1$, então $z_1=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{8\pi}{9}}$.

Se $k=2$, então $z_2=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{14\pi}{9}}$.

As raízes cúbicas de $-1+\sqrt{3}i$ são $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{9}}$, $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{8\pi}{9}}$ e $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{14\pi}{9}}$.

18.4. $$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{9}}}=\underbrace{\sqrt[3]{8}}_{2}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{9}+2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}$$

Se $k=0$, então $z_0=2e^{i\frac{\pi}{27}}$.

Se $k=1$, então $z_1=2e^{i\frac{19\pi}{27}}$.

Se $k=2$, então $z_2=2e^{i\frac{37\pi}{27}}$.

As raízes cúbicas de $8e^{i\frac{\pi}{9}}$ são $2e^{i\frac{\pi}{27}}$, $2e^{i\frac{19\pi}{27}}$ e $2e^{i\frac{37\pi}{27}}$.

19.1. $w=(z_1)^4=\left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4=16e^{i\frac{\pi}{3}}$

$t=(z_2)^3=\left(e^{i\frac{2\pi}{9}}\right)^3=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$w\times t=16e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{2\pi}{3}}=16e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}=16e^{i\pi}=$

$=-16$ (número real negativo)

19.2. $z_1=2e^{i\frac{\pi}{12}}\rightarrow$ Afixo de z_1 pertence ao 1.º quadrante.

Os números complexos cujos afixos são do 3.º quadrante e vértices do hexágono são:

$2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)}=2e^{i\frac{13\pi}{12}}$; $2e^{i\left(\frac{13\pi}{12}+\frac{2\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{17\pi}{12}}$

20.1. a) $z=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$

$$|z|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{3}}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \theta\in 2.^{\circ}\,Q\end{array}\right\}\ \theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$, por exemplo

$z=\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) $w=i^{25}-e^{i\frac{\pi}{6}}=i^{4\times6+1}-\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$

$=i^1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=i-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

20.2. a) Como w é uma das raízes de índice 4 de s, então $s=w^4$

$$s=\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^4=e^{i\frac{10\pi}{3}}=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

b) $w=e^{i\frac{5\pi}{6}}$ é uma das raízes de índice 4 de s.

As outras raízes de índice 4 de s são:

$e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$; $e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+2\times\frac{2\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{11\pi}{6}}$;

$e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+3\times\frac{2\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{7\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

Página 67 – Consolida

21.1. a) Como A é o afixo de $z=2e^{i\frac{\pi}{12}}$, sabe-se que $\overline{OA}=2$.

Sendo $[OABC]$ um quadrado, então $\overline{AB}=\overline{OA}=2$.

Logo, $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2\Leftrightarrow\overline{OB}^2=8\Leftrightarrow\overline{OB}=2\sqrt{2}$.

$t=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $t=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=$

$=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$

21.2. $t=z_B=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Seja $[BDEFG]$ o referido pentágono.

$z_D=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{5}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{15}}$

$z_E=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{15}}$

$z_F=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{17\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{23\pi}{15}}$

$z_G=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{23\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{29\pi}{15}}$

22.1. $\left(\frac{2}{1-\mathrm{i}}\right)^2=\left(\frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right)^2=\left(\frac{2+2\mathrm{i}}{1+1}\right)^2=(1+\mathrm{i})^2=$

$=1+2\mathrm{i}-1=2\mathrm{i}$

Seja $z=x+y\mathrm{i},\ x,y\in\mathbb{R}$.

$\left(\frac{2}{1-\mathrm{i}}\right)^2-z=2\bar{z}\Leftrightarrow 2\mathrm{i}-(x+y\mathrm{i})=2(x-y\mathrm{i})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{i}-x-y\mathrm{i}=2x-2y\mathrm{i}\Leftrightarrow\begin{cases}-x=2x\\2-y=-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$

Assim, $z=-2\mathrm{i}$.

22.2. $z^4+81=0$

Seja $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Leftrightarrow\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^4=-81\Leftrightarrow\rho^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4\theta)}=81\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^4=81\\4\theta=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=3\\\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Se $k=0$, então $\theta=\frac{\pi}{4}$, sendo $z=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Se $k=1$, então $\theta=\frac{3\pi}{4}$, sendo $z=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

Se $k=2$, então $\theta=\frac{5\pi}{4}$, sendo $z=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$.

Se $k=3$, então $\theta=\frac{7\pi}{4}$, sendo $z=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$.

22.3. $-\sqrt{2}\mathrm{i}^{15}=-\sqrt{2}\mathrm{i}^{4\times3+3}=-\sqrt{2}\mathrm{i}^3=-\sqrt{2}(-\mathrm{i})=\sqrt{2}\mathrm{i}$

$\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{i}^{18}}=\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{i}^{4\times4+2}}=\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{i}^2}=\frac{\sqrt{2}}{-1}=-\sqrt{2}$

Seja $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

$z^4-\sqrt{2}\mathrm{i}^{15}=\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{i}^{18}}\Leftrightarrow\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^4+\sqrt{2}\mathrm{i}=-\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\rho^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4\theta)}=-\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}\Leftrightarrow\rho^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4\theta)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^4=2\\4\theta=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[4]{2}\\\theta=\frac{5\pi}{16}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Se $k=0$, então $\theta=\frac{5\pi}{16}$, sendo $z=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{16}}$.

Se $k=1$, então $\theta=\frac{13\pi}{4}$, sendo $z=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{16}}$.

Se $k=2$, então $\theta=\frac{21\pi}{16}$, sendo $z=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{21\pi}{16}}$.

Se $k=3$, então $\theta=\frac{29\pi}{16}$, sendo $z=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{29\pi}{16}}$.

22.4. $\left(1-\mathrm{i}^3\right)z^3=2\mathrm{i}z\Leftrightarrow\left(1-(-\mathrm{i})\right)z^3-2\mathrm{i}z=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(1+\mathrm{i})z^3-2\mathrm{i}z=0\Leftrightarrow z\left((1+\mathrm{i})z^2-2\mathrm{i}\right)=0$

$\Leftrightarrow z=0\vee z^2=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\Leftrightarrow z=0\vee z^2=\frac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$

$\Leftrightarrow z=0\vee z^2=\frac{2\mathrm{i}+2}{1+\mathrm{i}}\Leftrightarrow z=0\vee z^2=1+\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z=0\vee\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow z=0\vee\rho^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z=0\vee\left(\rho^2=\sqrt{2}\wedge 2\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow z=0\vee\left(\rho=\sqrt[4]{2}\wedge\theta=\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\vee z=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{8}}$

22.5. $\frac{z^4}{(2\mathrm{i})^3}=\sqrt{3}-\mathrm{i}^9\Leftrightarrow\frac{z^4}{8\mathrm{i}^3}=\sqrt{3}-\mathrm{i}^{2\times4+1}\Leftrightarrow\frac{z^4}{-8\mathrm{i}^3}=\sqrt{3}-\mathrm{i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^4=\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)(-8\mathrm{i})\Leftrightarrow z^4=-8-8\sqrt{3}\mathrm{i}$

Seja $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$:

$\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^4=16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\Leftrightarrow\rho^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4\theta)}=16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^4=16\\4\theta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=2\\\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Para $k=0\rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$ e $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Para $k=1\rightarrow\theta=\frac{5\pi}{6}$ e $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

Para $k=2\rightarrow\theta=\frac{4\pi}{3}$ e $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

Para $k=3\rightarrow\theta=\frac{11\pi}{6}$ e $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$.

Cálculo auxiliar:

Seja $w=-8-8\sqrt{3}\mathrm{i}$.

$|w|=\sqrt{(-8)^2+\left(-8\sqrt{3}\right)^2}=16$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\frac{-8\sqrt{3}}{-8}=\sqrt{3}\\\theta\in 3.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\}\theta=\frac{4\pi}{3}$, por exemplo

$w=16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$

22.6. $z^3-4\bar{z}=0\Leftrightarrow z^3=4\bar{z}\overset{z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\Leftrightarrow}\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3=4\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\rho^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\theta)}=4\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^3=4\rho\\3\theta=-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=0\vee\rho=2\\\theta=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Se $\rho=0$, então $z=0$.

Se $\rho=2$, então:

- Se $k=0$, $\theta=0$ e $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}=2$.
- Se $k=1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ e $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=2\mathrm{i}$.
- Se $k=2$, $\theta=\pi$ e $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-2$.
- Se $k=3$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$ e $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}=-2\mathrm{i}$.

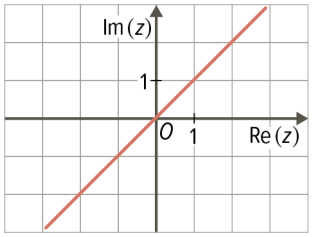
$z=0\vee z=2\vee z=2\mathrm{i}\vee z=-2\vee z=-2\mathrm{i}$

23.1. Seja $z = x + yi,\ y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i(x+yi)+(x-yi)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xi - y + x - yi = 0 \Leftrightarrow x - y + (x-y)i = 0 + 0i$

$\Leftrightarrow x - y = 0 \wedge x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$

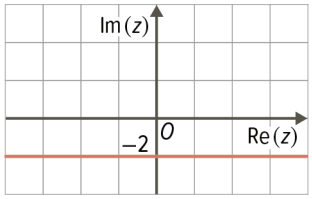
Então, $z = x + xi,\ x \in \mathbb{R}$.



23.2. Seja $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(x+yi) - (x+yi) = 2i$

$\Leftrightarrow \cancel{x} \cancel{-x} - yi = 2i \Leftrightarrow y = -2$

Então, $z = x - 2i,\ x \in \mathbb{R}$.



24. Seja $w = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$. $\text{Im}(w) > 0 \Leftrightarrow b > 0$

$\text{Re}(w) = -\sqrt{3}\,\text{Im}(w) \Leftrightarrow a = -\sqrt{3}b$

$w = -\sqrt{3}b + bi,\ b \in \mathbb{R}^+$

Seja θ o argumento principal de w.

$\tan\theta = \dfrac{b}{-\sqrt{3}b} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, logo $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.

$w = |w| e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)};\ w^2 = |w|^2 e^{i\left(-\frac{2\pi}{6}\right)} = |w|^2 e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

O argumento principal de w^2 é $-\dfrac{\pi}{3}$.

A opção correta é a **(A)**.

25. $z^4 - iz = 0 \Leftrightarrow z(z^3 - i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 = i$

$z^3 = i \Leftrightarrow z^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \overset{z=\rho e^{i\theta}}{\Leftrightarrow} (\rho e^{i\theta})^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \rho^3 e^{i(3\theta)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Para $k = 0 \rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$ e $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Para $k = 1 \rightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{6}$ e $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$..

Para $k = 2 \rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{2}$ e $z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Os simétricos das soluções não nulas da equação são:

$z_A = -e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $z_B = -e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$;

$z_C = -e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

$A(0,1)$, $B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ e $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

26. $z^4 = \dfrac{2}{\bar{z}},\ z \neq 0$. Seja $z = \rho e^{i\theta}$ e $z \neq 0$.

$z^4 = \dfrac{2}{\bar{z}} \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^4 = \dfrac{2e^{i0}}{\rho e^{i(-\theta)}} \Leftrightarrow \rho^4 e^{i(4\theta)} = \dfrac{2}{\rho} e^{i\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^4 = \dfrac{2}{\rho} \\ 4\theta = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[5]{2} \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Para $k = 0 \rightarrow \theta = 0$ e $z_0 = \sqrt[5]{2}e^{i0} = \sqrt[5]{2}$

Para $k = 1 \rightarrow \theta = \dfrac{2\pi}{3}$ e

$z_1 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt[5]{2}}{2} + \dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{3}}{2}i$

Para $k = 2 \rightarrow \theta = \dfrac{4\pi}{3}$;

$z_2 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[5]{2}\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= -\dfrac{\sqrt[5]{2}}{2} - \dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{3}}{2}i$

$z_0 + z_1 + z_2 = \sqrt[5]{2} - \dfrac{\sqrt[5]{2}}{2} + \cancel{\dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{3}}{2}i} - \dfrac{\sqrt[5]{2}}{2} - \cancel{\dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{3}}{2}i} =$

$= \sqrt[5]{2} - \dfrac{2\sqrt[5]{2}}{2} = \sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{2} = 0$

Página 68 – Avalia 2 – Parte 1 – Verificação rápida

1.1. Argumento principal de z: $-\pi + \dfrac{2\pi}{9} = -\dfrac{7\pi}{9}$

A opção correta é a **(B)**.

1.2. $z = |z| e^{i\left(-\frac{7\pi}{9}\right)}$

$z^2 = \left(|z| e^{i\left(-\frac{7\pi}{9}\right)}\right)^2 = |z|^2 e^{i\left(-\frac{14\pi}{9}\right)} = |z|^2 e^{i\frac{4\pi}{9}} \rightarrow$ 1.º Q

A opção correta é a **(D)**.

2.1. $z \overset{\text{Afixo}}{\rightarrow} A$; $iz \rightarrow C$; $-iz \rightarrow G$

A opção correta é a **(C)**.

2.2. $z_H = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{8}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$

$H\left(\cos\dfrac{\pi}{12}, \sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

$\cos\dfrac{\pi}{12} \approx 0{,}966$ e $\sin\dfrac{\pi}{12} \approx 0{,}259$

$x_H + y_H \approx 0{,}966 + 0{,}259 = 1{,}225$

A opção correta é a **(A)**.

3. **I:** $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

θ: argumento não negativo mínimo

$\left.\begin{array}{l} \tan\theta \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \\ \theta \in 4.^{\text{o}}\,\text{Q} \end{array}\right\} \theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4} \rightarrow$ **b)**

II: Argumento principal: $-\dfrac{\pi}{4} \rightarrow$ **c)**

III: $z^n = \left(2e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{4}}$

z^n é um imaginário puro se:

$\frac{7n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{2+4k}{7},\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 3 \Rightarrow n = 2 \rightarrow$ **a)**

IV: $z^2 = \left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^2 = 2 - 4i - 2 = -4i \rightarrow$ **b)**

Conclusão: I – b); II – c); III – a); IV – b)

Página 69 – Avalia 2 – Parte 2 – Questões de desenvolvimento

1.1. Como A é o afixo de $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $\overline{OA} = 2$.

Sendo $[OABC]$ um quadrado, então $\overline{AB} = \overline{OA} = 2$.

$\overline{OB}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{OB} = 2\sqrt{2}$

$w = z_B = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

1.2. $\overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BD}^2 \Leftrightarrow \overline{OD}^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{OD}^2 = 16 \Leftrightarrow \overline{OD} = 4$

$t = z_D = 4e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 + 2\sqrt{3}i$

1.3. $\frac{t}{z} = \frac{4e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$ (imaginário puro)

2.1. $z = -\cos\theta + i\sin(-\theta) = -\cos\theta + i(-\sin\theta) =$

$= -\cos\theta - i\sin\theta = -(\cos\theta + i\sin\theta) = -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

2.2. $iz = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i(\theta+\pi)} = e^{i\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)}$

iz é um imaginário puro se:

$\theta + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge \theta \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = -\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge \theta \in [0, 2\pi[$

$\Leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = \pi$

$\theta \in \{0, \pi\}$

3.1. $z_1 = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{2i} = \frac{3 + 2\sqrt{3}i - 1}{2i} = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2i} =$

$= \frac{\left(2 + 2\sqrt{3}i\right)(-2i)}{(2i)(-2i)} = \frac{-4i + 4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} - i$

$|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$

Seja θ o argumento principal de z_1

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta \in 4.^{\circ}\,Q\end{array}\right\} \theta = -\frac{\pi}{6}$

Então, $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

3.2. C: vértice do quadrado que pertence ao 3.º quadrante

$z_C = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1 - \sqrt{3}i$

Então, $C\left(-1, -\sqrt{3}\right)$.

3.3. $z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_1 - \overline{z}_2 = \sqrt{3} - i - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$= \overline{z}_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

Seja $z = \rho e^{i\theta}$.

$z^3 = z_1 - \overline{z}_2 \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^3 = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} \Leftrightarrow \rho^3 e^{i(3\theta)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho^3 = 1 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

$k = 0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{18}$ e $z = e^{i\left(-\frac{\pi}{18}\right)}$

$k = 1 \rightarrow \theta = \frac{11\pi}{18}$ e $z = e^{i\frac{11\pi}{18}}$

$k = 2 \rightarrow \theta = \frac{23\pi}{18}$ e $z = e^{i\frac{23\pi}{18}}$

Conclusão: $z = e^{i\left(-\frac{\pi}{18}\right)} \vee z = e^{i\frac{11\pi}{18}} \vee z = e^{i\frac{23\pi}{18}}$

4. $z = \cos\theta + i\sin\theta$

$\mathrm{Im}(z) = -\frac{3}{4}\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow \sin\theta = -\frac{3}{4}\cos\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \tan\theta = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta \approx -0{,}6435 + \pi \Leftrightarrow \theta \approx 2{,}50$

Calculadora: $\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) \approx -0{,}6435$

Tema 3: Conjuntos de pontos definidos por condições em $\mathbb{C}$

Página 70 – Tarefa inicial

1.1. $|z| = |z_1| \Leftrightarrow |\overline{z}| = 3 \Leftrightarrow z = z_1 \vee z = z_3$

1.2. $|z| < |z_1| \Leftrightarrow |z| < 3 \Leftrightarrow z = z_6$

1.3. $|z| = |z_2| \Leftrightarrow |z| = 5 \Leftrightarrow z = z_2 \vee z = z_4$

1.4. $|z| > |z_2| \Leftrightarrow |z| > 5 \Leftrightarrow z = z_8$

1.5. $|z_1| < |z| < |z_2| \Leftrightarrow 3 < |z| < 5$. Como o afixo de z pertence ao 2.º quadrante, então $z = z_5$.

2. A opção correta é a **(C)**.

$|z_7| > 3 \wedge |z_7| < 5;\ z_7 = |z_7| e^{i\frac{\pi}{6}}$

3. Por exemplo:

3.1. $w = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$ **3.2.** $w = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Página 71

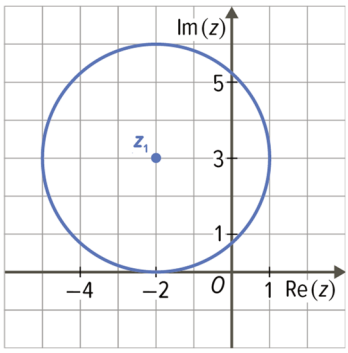
115.1. $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 1 + i$

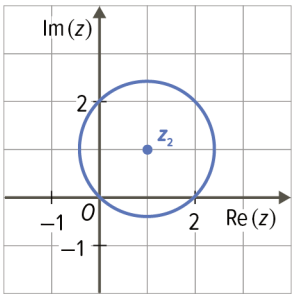
115.2. $\overline{AB} = |z_2 - z_1| = |1 + i - (-2 + 3i)| = |3 - 2i| =$

$= \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$; $P_{\text{quadrado}} = 4\overline{AB} = 4\sqrt{13}$

115.3. a) $|z - z_1| = 3$



b) $|z - z_2| = |z_2| \Leftrightarrow |z - z_2| = \sqrt{2}$



116.1. A circunferência de centro no afixo de $z_1 = -1 + 2i$ e raio 2 é definida pela condição $|z + 1 - 2i| = 2$.

116.2. A circunferência de centro no afixo de $z_1 = 4 - i$ e raio 2 é definida pela condição $|z - 4 + i| = 2$.

Página 72

117.1. $|w| = |\overline{CO}| = r$ e $|z_3 - w| = \overline{CR} = r$, logo $|w| = |z_3 - w|$.

117.2. $|z_1 - w| = \overline{CP} > r$ e $r = |w| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$,

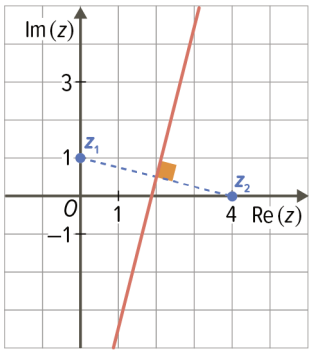
logo $|z_1 - w| > \sqrt{10}$.

117.3. $|z_2 - w| = \overline{CQ} < r$ e $r = \sqrt{10}$, logo $|z_2 - w| < \sqrt{10}$.

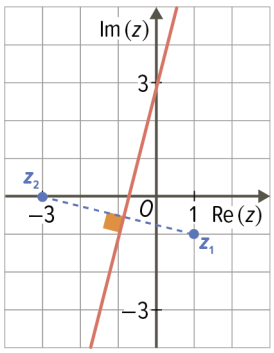
118. O conjunto de pontos da região colorida pode ser definido pela condição $|z| \leq 2 \wedge \text{Re}(z) \geq 0 \wedge \text{Im}(z) \geq 0$.

Página 73

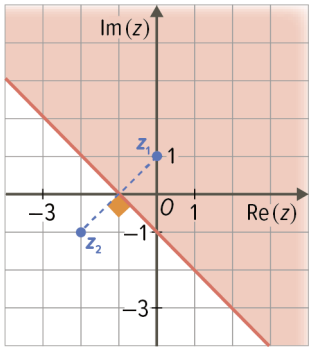
119.1.



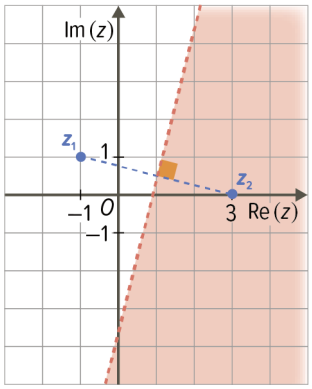
119.2.



119.3.



119.4.



120.1. $z_A = 3\text{i}$ e $z_B = -3+\text{i}$

A mediatriz de $[AB]$ é definida pela condição $|z-3\text{i}| = |z+3-\text{i}|$.

120.2. $z_A = 3\text{i}$ e $z_C = 1-2\text{i}$

A mediatriz de $[AC]$ é definida pela condição $|z-3\text{i}| = |z-1+2\text{i}|$.

120.3. $z_B = -3+\text{i}$ e $z_C = 1-2\text{i}$

O semiplano fechado definido pela mediatriz de $[BC]$, ao qual pertence o ponto A, é definido pela condição $|z+3-\text{i}| \leq |z-1+2\text{i}|$.

Página 74 – Pratica

121.1. $z_A = 1-2\text{i}$ e $z_B = 5+\text{i}$

$r = \overline{AB} = |z_B - z_A| = |5+\text{i}-(1-2\text{i})| = |4+3\text{i}|$

$= \sqrt{4^2+3^2} = 5$

A circunferência de centro A e que passa no ponto B é definida pela condição $|z-1+2\text{i}| = 5$.

121.2. $|z_3 - 1 + 2\text{i}| = |-2+2\text{i}-1+2\text{i}| = |-3+4\text{i}| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$,

logo o ponto C pertence à circunferência definida em 121.1..

122.1. $|z-z_R| < |z-z_S| \Leftrightarrow |z+3-6\text{i}| < |z-5+2\text{i}|$

A opção correta é a **(C)**, porque $|z_C+3-6\text{i}| < |z_C-5+2\text{i}|$.

$|z_C+3-6\text{i}| = |-5-3\text{i}+3-6\text{i}| = |-2-9\text{i}| =$

$= \sqrt{(-2)^2+(-9)^2} = \sqrt{85}$

$|z_C-5+2\text{i}| = |-5-3\text{i}-5+2\text{i}| = |-10-\text{i}| =$

$= \sqrt{(-10)^2+(-1)^2} = \sqrt{101}$

122.2. $\overline{RS} = |z_S - z_R| = |5-2\text{i}-(-3+6\text{i})| = |8-8\text{i}|$

$= \sqrt{8^2+(-8)^2} = 8\sqrt{2}$

C: centro da circunferência

$R(-3, 6)$ e $S(5, -2)$, logo $C\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{6-2}{2}\right)$, ou seja, $C(1, 2)$. $z_C = 1+2\text{i}$. $\overline{CR} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

$|z-1-2\text{i}| > 4\sqrt{2}$

A opção correta é a **(A)**.

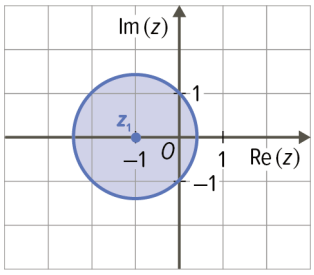
123.1. $\overline{AB} = |z_B - z_A| = |-\text{i}-(-2+\text{i})| = |2-2\text{i}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$

A opção correta é a **(D)**.

123.2. a) $\left|z - \frac{z_A+z_B}{2}\right| \leq \frac{|z_A-z_B|}{2} \Leftrightarrow |z+1| \leq 2 \Leftrightarrow$

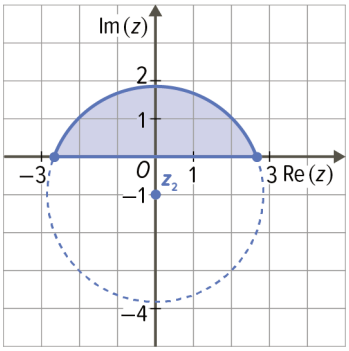
$\Leftrightarrow \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{-2+\text{i}-\text{i}}{2} = -1$

$\frac{|z_A-z_B|}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$



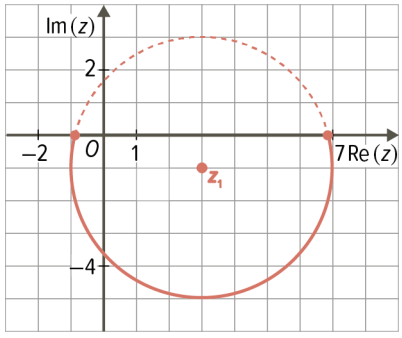
b) $|z-z_B| \leq 2\sqrt{2} \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+\text{i}| \leq 2\sqrt{2} \wedge \text{Im}(z) \geq 0$



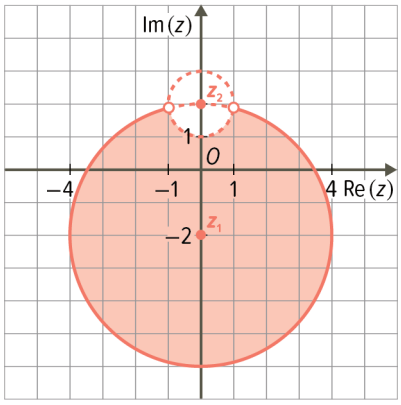
124.1. $|z-3+\text{i}| = 4 \wedge \text{Im}(z) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-(3-\text{i})| = 4 \wedge \text{Im}(z) \leq 0$



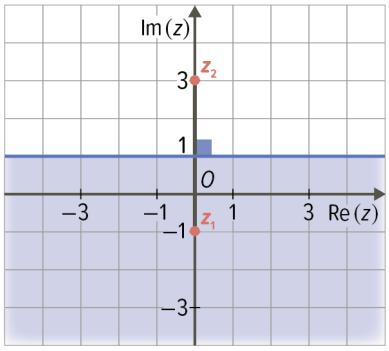
124.2. $|z+2\mathrm{i}| \leq 4 \wedge |z-2\mathrm{i}| > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-(0-2\mathrm{i})| \leq 4 \wedge |z-(0+2\mathrm{i})| > 1$



Página 75 – Pratica

125.1. $|z+\mathrm{i}| \leq |z-3\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z-(0-\mathrm{i})| \leq |z-(0+3\mathrm{i})|$

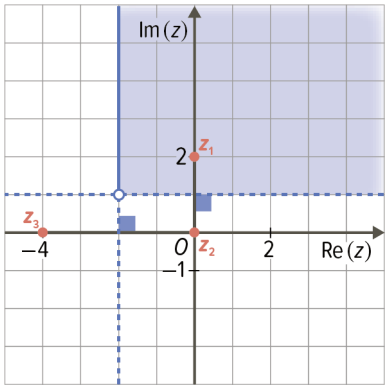


125.2. $|z-2\mathrm{i}| < |z| \leq |z+4| \Leftrightarrow$

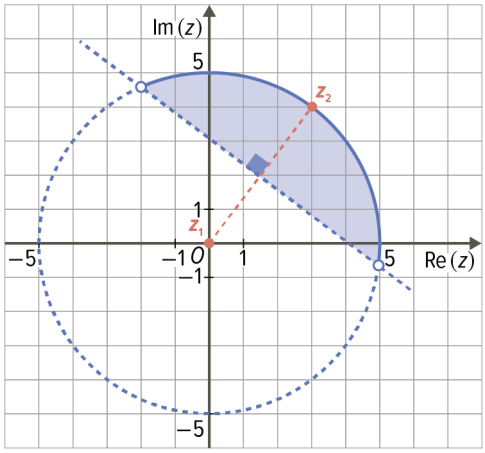
$\Leftrightarrow |z-2\mathrm{i}| < |z| \wedge |z| \leq |z+4| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-(0+2\mathrm{i})| \leq |z-(0+0\mathrm{i})| \wedge$

$\wedge |z-(0+0\mathrm{i})| \leq |z-(-4+0\mathrm{i})|$



125.3. $|z| > |z-3-4\mathrm{i}| \wedge |z| \leq 5 \Leftrightarrow |z| > |z-(3+4\mathrm{i})| \wedge |z| \leq 5$



126.1. *r*: mediatriz de $[AB]$

$z_A = -2+4\mathrm{i}$ e $z_B = 2-\mathrm{i}$

A reta *r* é definida pela condição $|z-z_B| = |z-z_A|$,

ou seja, $|z-2+\mathrm{i}| = |z+2-4\mathrm{i}|$.

s: mediatriz de $[BC]$

$z_B = 2-\mathrm{i}$ e $z_C = 5+\mathrm{i}$

A reta *s* é definida pela condição $|z-z_B| = |z-z_C|$,

ou seja, $|z-2+\mathrm{i}| = |z-5-\mathrm{i}|$.

A reta *EF* (eixo real) é definida pela condição $\mathrm{Im}(z) = 0$. Assim, o triângulo $[DEF]$ é definido pela condição:

$|z-2+\mathrm{i}| \leq |z+2-4\mathrm{i}| \wedge |z-2+\mathrm{i}| \leq |z-5-\mathrm{i}| \wedge \mathrm{Im}(z) \geq 0$

126.2. $E(x, 0);\ x<0\ ;\ z_E = x+0\mathrm{i};\ x>0$

$E \in r$, logo:

$|x+0\mathrm{i}-2+\mathrm{i}| = |x+0\mathrm{i}+2-4\mathrm{i}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+1^2} = \sqrt{(x+2)^2+(-4)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 4 + 16 \Leftrightarrow x = -\frac{15}{8}$

$z_E = -\frac{15}{8}$

$F(x, 0);\ x>0\ ;\ z_F = x+0\mathrm{i};\ x>0$

$F \in s$, logo:

$|x+0\mathrm{i}-2+\mathrm{i}| = |x+0\mathrm{i}-5-\mathrm{i}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+1^2} = \sqrt{(x-5)^2+(-1)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 10x + 25 + 1 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

$z_F = \frac{7}{2}$

$\overline{EF} = |z_F - z_E| = \left|\frac{7}{2} - \left(-\frac{15}{8}\right)\right| = \left|\frac{7}{2} + \frac{15}{8}\right| = \frac{43}{8}$

127.1. $r = \overline{AB} = |z_B - z_A| = |1+5\text{i}-(-2+\text{i})| = |3+4\text{i}| =$

$= \sqrt{3^2+4^2} = 5$

127.2. a) A circunferência de centro *A* e que passa em *B* é definida pela condição $|z - z_A| = r$, ou seja, $|z+2-\text{i}| = 5$.

b) O segmento de reta $[CD]$ é definido pela condição $|z+2-\text{i}| = |z-1-5\text{i}| \wedge |z+2-\text{i}| \leq 5$.

c) A região sombreada da figura é definida pela condição $|z+2-\text{i}| \geq |z-1-5\text{i}| \wedge |z+2-\text{i}| \leq 5$.

128.1. *C* é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo $[PQR]$, logo designa-se por circuncentro.

128.2. *C* é o ponto de interseção das retas *r* e *s*, logo pode ser caraterizado pela condição

$|z - z_R| = |z - z_Q| \wedge |z - z_P| = |z - z_Q| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-4\text{i}| = |z-5-6\text{i}| \wedge |z-3| = |z-5-6\text{i}|$

128.3. $|z-4\text{i}| = |z-5-6\text{i}| \wedge |z-3| = |z-5-6\text{i}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x+y\text{i}-4\text{i}| = |x+y\text{i}-5-6\text{i}| \wedge |x+y\text{i}-3| = |x+y\text{i}-5-6\text{i}|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2} \wedge$

$\wedge \sqrt{(x-3)^3+y^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 12y + 36 \wedge$

$\wedge x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 12y + 36$

$\Leftrightarrow 4y + 10x = 45 \wedge 4x + 12y = 52$

$\Leftrightarrow 4y + 130 - 30y = 45 \wedge x = 13 - 3y \Leftrightarrow y = \frac{85}{26} \wedge x = \frac{83}{26}$

Então, $z_C = \frac{83}{26} + \frac{85}{26}\text{i}$.

Página 76

129.1. $z_1 = 2 - 3\text{i}$

Condição que define a reta que passa no afixo de z_1 e é paralela ao:

a) eixo real: $\text{Re}(z) = 2$

b) eixo imaginário: $\text{Im}(z) = -3$

129.2. $z_2 = 4\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}} = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{i}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\text{i}$

Condição que define a reta que passa no afixo de z_2 e é paralela ao:

a) eixo real: $\text{Re}(z) = -2\sqrt{2}$

b) eixo imaginário: $\text{Im}(z) = 2\sqrt{2}$

130. Como $z_C = 2\text{e}^{\text{i}\frac{11\pi}{12}}$ e o triângulo $[ABC]$ é equilátero de centro *O*, então $z_B = 2\text{e}^{\text{i}\left(\frac{11\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{12}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} =$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{i}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\text{i}$

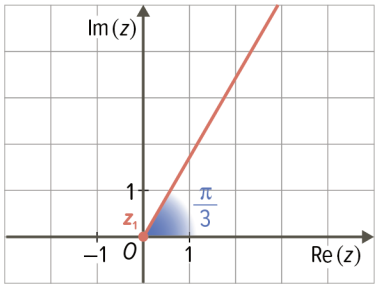
Condição que define a reta que passa em *B* e é paralela ao:

a) eixo real: $\text{Re}(z) = \sqrt{2}$

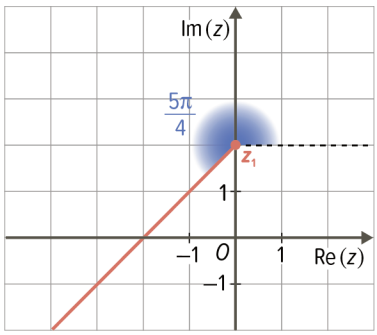
b) eixo imaginário: $\text{Im}(z) = \sqrt{2}$

Página 77

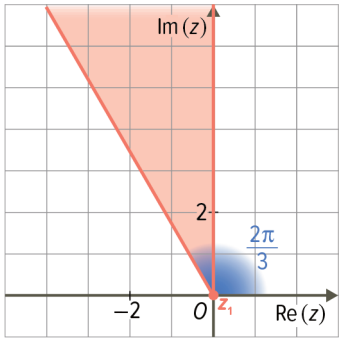
131.1. $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$



131.2. $\arg(z-2\text{i}) = \frac{5\pi}{4}$



131.3. $\frac{\pi}{2} \leq \arg(\overline{z}) = \frac{2\pi}{3}$



132.1. $z_A = 1+\mathrm{i} \quad |z_A| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \dfrac{1}{1} = 1 \\ \theta \in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}\text{, por exemplo}$$

$z_A = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$z_B = -1+\sqrt{3}\mathrm{i}\ ;\ |z_B| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \\ \theta \in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}\end{array}\right\} \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\text{, por exemplo}$$

$z_B = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

132.2. a) $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$

b) $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$

c) $\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z) \le \dfrac{2\pi}{3}$

d) $\arg(z-1-\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}$

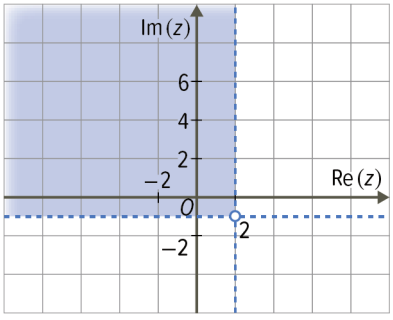
Página 78 – Pratica

133.1. $\mathrm{Re}(z) \ge 2 \wedge \mathrm{Im}(z) \ge 1$

133.2. $\mathrm{Re}(z) \ge -2 \wedge \mathrm{Re}(z) < 1$, ou seja, $-2 \le \mathrm{Re}(z) < 1$

133.3. $\mathrm{Im}(z) < -\sqrt{2} \vee \mathrm{Im}(z) \ge 1$

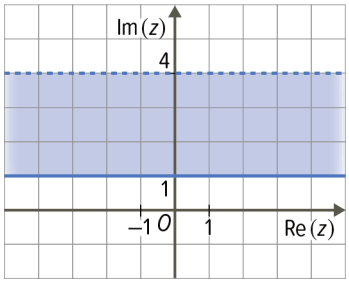
134.1. $\mathrm{Re}(z) < 2 \wedge \mathrm{Im}(z) \ge -1$



134.2. $-2 \le \mathrm{Im}(z-3\mathrm{i}) < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(x+y\mathrm{i}-3\mathrm{i}) \ge -2 \wedge \mathrm{Im}(x+y\mathrm{i}-3\mathrm{i}) < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-3 \ge -2 \wedge y-3 < 1 \Leftrightarrow y \ge 1 \wedge y < 4$



134.3. $0 \le \mathrm{Re}(z+7-4\mathrm{i}) < 3 \wedge \mathrm{Im}(z) \ge -1 \Leftrightarrow$

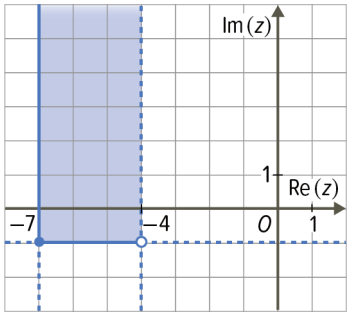
$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(x+y\mathrm{i}+7-4\mathrm{i}) \ge 0 \wedge \mathrm{Re}(x+y\mathrm{i}+7-4\mathrm{i}) < 3 \wedge$

$\wedge \mathrm{Im}(x+y\mathrm{i}) \ge -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+7 \ge 0 \wedge x+7 < 3 \wedge y \ge -1$

$\Leftrightarrow x \ge -7 \wedge x < -4 \wedge y \ge -1$

$\Leftrightarrow -7 \le x < -4 \wedge y \ge -1$

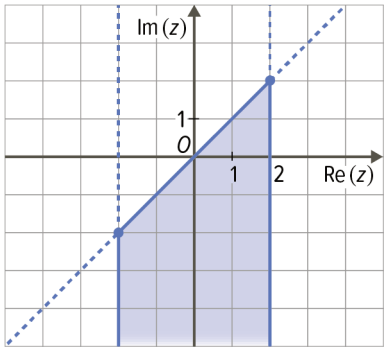


134.4. $|\mathrm{Re}(z)| \le 2 \wedge \mathrm{Im}(z) \le \mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\mathrm{Re}(x+y\mathrm{i})| \le 2 \wedge \mathrm{Im}(x+y\mathrm{i}) \le \mathrm{Re}(x+y\mathrm{i}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x| \le 2 \wedge y \le x$

$\Leftrightarrow -2 \le x \le 2 \wedge y \le x$



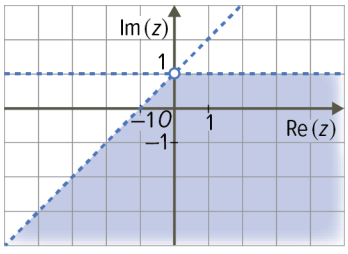
134.5. $\mathrm{Im}(z-3+2\mathrm{i}) < 3 \wedge \mathrm{Im}(\bar{z}+5) > \mathrm{Re}(-z-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(x+y\mathrm{i}-3+2\mathrm{i}) < 3 \wedge$

$\wedge \mathrm{Im}(x-y\mathrm{i}+5) > \mathrm{Re}(-x-y\mathrm{i}-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y+2 < 3 \wedge -y > -x-1$

$\Leftrightarrow y < 1 \wedge y < x+1$

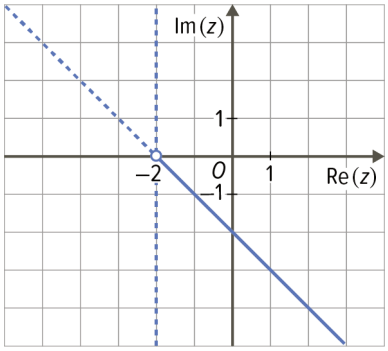


134.6. $\mathrm{Re}(z+2-\mathrm{i}) > 0 \wedge \mathrm{Im}(\bar{z}+4) = \mathrm{Re}(z+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(x+y\mathrm{i}+2-\mathrm{i}) > 0 \wedge \mathrm{Im}(x-y\mathrm{i}+4) = \mathrm{Re}(x+y\mathrm{i}+2)$

$\Leftrightarrow x+2 > 0 \wedge -y = x+2$

$\Leftrightarrow x > -2 \wedge y = -x-2$



135. $z_1 = 2 + k\text{i},\ k \in \mathbb{R}$

$z_1^2 = (2 + k\text{i})^2 = 4 + 4k\text{i} - k^2$

$|z - z_1| = |z - z_1^2| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x + y\text{i} - 2 - k\text{i}| = |x + y\text{i} - 4 - 4k\text{i} + k^2|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(x - 4 + k^2)^2 + (y - 4k)^2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-k)^2 = (x - 4 + k^2)^2 + (y - 4k)^2$

A condição representa, no plano complexo, uma reta paralela ao eixo Ox.

$(x-2)^2 = (x - 4 + k^2)^2 \Leftrightarrow -2 = -4 + k^2 \Leftrightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\sqrt{2} \vee k = \sqrt{2}$

Página 79 – Pratica

136.1. $z_2 = 4\text{i} = 4e^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$; $\overline{OB} = |z_2| = 4$

$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 \Leftrightarrow 2\overline{OA}^2 = 4^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{OA} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$

$z_1 = 2\sqrt{2}e^{\text{i}\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{i}\right) = 2 + 2\text{i}$

$z_3 = -2 + 2\text{i} = 2\sqrt{2}e^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$

136.2. a) $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

b) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

c) $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

d) $\arg(z - 4\text{i}) = \frac{3\pi}{2}$

e) $\arg(z - 2 - 2\text{i}) = \frac{3\pi}{4}$

f) $\arg(z - 2 - 2\text{i}) = \pi$

g) $\arg(z - 2 - 2\text{i}) = \frac{5\pi}{4}$

137. $z_1 = \sqrt{3} - \text{i}$

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta \in 4.^{\circ}\text{Q}\end{array}\right\} \ \theta = -\frac{\pi}{6}$

$z_2 = \text{i}z_1 \rightarrow$ Rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{2}$

A região colorida da figura é representada pela condição:

$-\frac{\pi}{6} \le \arg(z) \le -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \le \arg(z) \le \frac{\pi}{3}$

A opção correta é a **(C)**.

138.1. $\overline{AO} = |w| = 1$

$\text{Re}(t) = \text{Im}(t) \Leftrightarrow x = y$

O conjunto de pontos representado na figura é definido pela condição $|z - \text{i}| \le 1 \wedge \frac{\pi}{4} \le \arg(z) \le \frac{\pi}{2}$.

138.2. $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

O conjunto de pontos representado na figura é definido pela condição $|z| \ge 4 \wedge \frac{\pi}{3} \le \arg(z) \le \pi$.

138.3. $w = z_B = 2\text{i} = 2e^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$

$z_C = 2e^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{\text{i}\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\text{i}\right) = -\sqrt{3} - \text{i}$

$A\hat{C}B = \frac{\pi}{3}$; $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

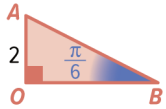
O conjunto de pontos representado na figura é definido pela condição $-\frac{2\pi}{3} \le \arg\left(z + \sqrt{3} + \text{i}\right) \le 0$.

139. $\dot{AD}$: $\arg(z - 2\text{i}) = \frac{\pi}{3}$.

Então, $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2\sqrt{3}$



Como B pertence ao eixo real, então $z_B = 2\sqrt{3}$.

Assim, a condição que define a semirreta $\dot{BA}$ é $\arg\left(z - 2\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{6}$, ou seja, $\arg\left(z - 2\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

Página 80 – Consolida

1.1. $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 + i$

1.2. $\overline{AB} = |z_B - z_A| = |-1 + i - (-4 + 5i)| = |3 - 4i| =$

$= \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\overline{AC} = |z_C - z_A| = |-5 - 2i - (-4 + 5i)| = |-1 - 7i| =$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\overline{BC} = |z_C - z_B| = |-5 - 2i - (-1 + i)| = |-4 - 3i| =$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$

$\overline{AB} = \overline{AC}$, logo o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

1.3. $P_{[ABC]} = 2\overline{AB} + \overline{AC} = 2 \times 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$

1.4. **a)** $r = \overline{BA} = 5$

$|z + 1 - i| \leq 5$

b) $|z - z_B| = |z - z_C|$, ou seja, $|z + 1 - i| = |z + 5 + 2i|$

2.1. A afirmação verdadeira é a **(B)**.

2.2. $|z - z_A| \leq |z_A - z_C| \wedge |z - z_C| \leq |z_A - z_C|$

3.1. $z_C = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= -1 + \sqrt{3}i$

3.2. Raio da circunferência menor: $|-1| = 1$

Raio da circunferência maior: $\sqrt{3}$

A região sombreada da figura pode ser definida pela condição: $1 \leq |z + 1 - \sqrt{3}i| \leq \sqrt{3}$

3.3. $w = -\sqrt{2} + i$

$|w + 1 - \sqrt{3}i| = |-\sqrt{2} + i + 1 - \sqrt{3}i| = |(1 - \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{3})i| =$

$= \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{3} + 3}$

$= \sqrt{7 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \approx 0{,}84$

Como $|w + 1 - \sqrt{3}i| < 1$, então conclui-se que o afixo de $w = -\sqrt{2} + i$ não pertence à região sombreada.

4.1. r: $|z + 2 - i| \leq |z - 3i|$

Eixo real: $\text{Im}(z) = 0$

$|z + 2 - i| \leq |z - 3i| \wedge \text{Im}(z) \geq 0$

4.2. Como é necessário que $\text{Im}(z) \geq 0$, excluem-se as opções **(C)** e **(D)**.

$|z_1 + 2 - i| = |-4 + 6i + 2 - i| = |-2 + 5i| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

$|z_1 - 3i| = |-4 + 6i - 3i| = |-4 + 3i| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

A condição $|z_1 + 2 - i| \leq |z_1 - 3i|$ é falsa.

$|z_2 + 2 - i| = |-5 + 5i + 2 - i| = |-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

A condição $|z_2 + 2 - i| \leq |z_2 - 3i| \wedge \text{Im}(z_2) \geq 0$ é verdadeira.

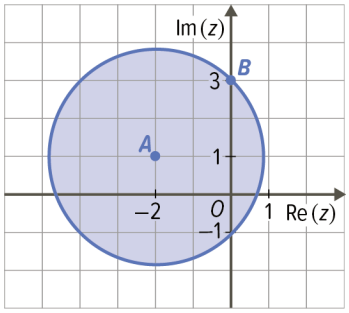
A opção correta é a **(B)**.

4.3. $|z - z_A| \leq |z_A - z_B| \Leftrightarrow |z + 2 - i| \leq |-2 + i - 3i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z + 2 - i| \leq 2\sqrt{2}$

Cálculo auxiliar:

$|-2 + i - 3i| = |-2 - 2i| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$



Página 81 – Consolida

5.1. $r_{menor} = 2$

$r_{maior} = \overline{CO} = |z_C| = |4 + 2i| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

5.2. $z_D = 2z_C = 2(4 + 2i) = 8 + 4i$

5.3. A região sombreada da figura pode ser definida pela condição $2 \leq |z - 4 - 2i| \leq 2\sqrt{5} \wedge 0 \leq \text{Im}(z) \leq 4$

6. $z_1 = -2 + i$; $z_2 = ai$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (imaginário puro)

$\text{Im}(z_2) + \text{Re}(z_1) = 0 \Leftrightarrow a + (-2) = 0 \Leftrightarrow a = 2$

Então, $z_2 = 2i$.

Mediatriz de $[AB]$: $|z - z_1| = |z - z_2|$, ou seja,

$|z + 2 - i| = |z - 2i|$

Círculo em que $[AB]$ é um diâmetro:

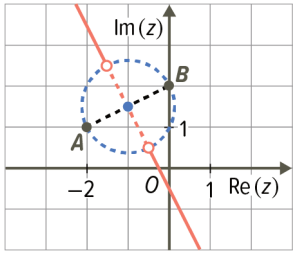
$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{|z_2 - z_1|}{2} = \frac{|2i - (-2 + i)|}{2} = \frac{|2 + i|}{2} =$

$= \frac{\sqrt{2^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\underbrace{z_C}_{\text{O afixo de } z_C \text{ é o centro}} = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{-2 + i + 2i}{2} = -1 + \frac{3}{2}i$

Condição que define o círculo: $\left|z+1-\frac{3}{2}\text{i}\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$

Assim, o conjunto de pontos que pertencem à mediatriz de $[AB]$ e não pertencem ao círculo em que $[AB]$ é um dos diâmetros é definido pela condição: $|z+2-\text{i}| = |z-2\text{i}| \wedge \left|z+1-\frac{3}{2}\text{i}\right| > \frac{\sqrt{5}}{2}$



7.1. r é a mediatriz de $[AO]$, sendo $z_A = 3-2\text{i}$.

A reta r pode ser definida pela condição $|z-3+2\text{i}| = |z|$

7.2. $\overline{OA} = |z_A| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$

$|z-3+2\text{i}| \leq |z| \wedge |z-3+2\text{i}| \leq \sqrt{13}$

8. AD: $\text{Re}(z) = -3$; BC: $\text{Re}(z) = 5$

AB: $\text{Im}(z) = -2$; CD: $\text{Im}(z) = 4$

$[ABCD]$: $-3 \leq \text{Re}(z) \leq 5 \wedge -2 \leq \text{Im}(z) \leq 4$

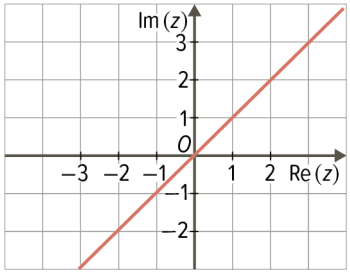
A opção correta é a **(A)**.

Página 82 – Consolida

9. $z_C = 5+3\text{i}$; $\overline{CA} = 3$ (raio da circunferência)

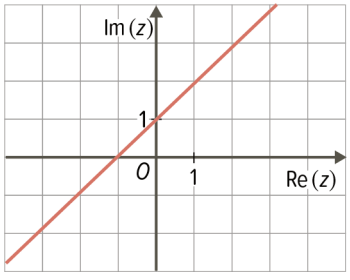
$|z-5-3\text{i}| > 3 \wedge 0 \leq \text{Im}(z) \leq 6 \wedge 0 \leq \text{Re}(z) \leq 5$

10.1. $\text{Im}(z) = \text{Re}(z) \Leftrightarrow \text{Im}(x+y\text{i}) = \text{Re}(x+y\text{i}) \Leftrightarrow y = x$



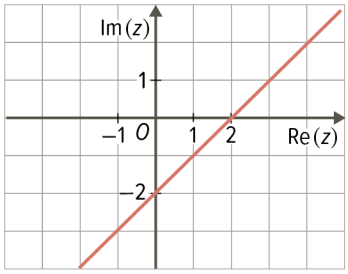
10.2. $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)+1 \Leftrightarrow \text{Im}(x+y\text{i}) = \text{Re}(x+y\text{i})+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = x+1$



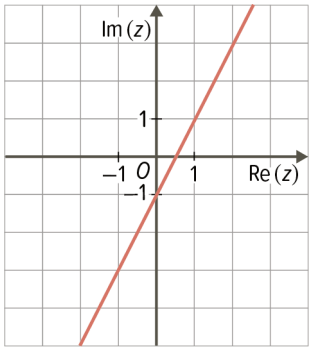
10.3. $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)-2 \Leftrightarrow \text{Im}(x+y\text{i}) = \text{Re}(x+y\text{i})-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = x-2$



10.4. $2\text{Re}(z)+\text{Im}(\overline{z}) = 1 \Leftrightarrow 2\text{Re}(x+y\text{i})+\text{Im}(x-y\text{i}) = 1$

$\Leftrightarrow 2x+(-y) = 1 \Leftrightarrow y = 2x-1$



11. Condição, em $\mathbb{C}$, que define a bissetriz dos quadrantes pares: $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z)$

- r: $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z)+a$

  Como r passa pelo afixo de $z_1 = -1+2\text{i}$:

  $\text{Im}(z_1) = -\text{Re}(z_1)+a \Leftrightarrow 2 = -(-1)+a \Leftrightarrow a = 1$

  r: $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z)+1$

- s: $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z)+b$

  Como s passa pelo afixo de $z_2 = 2\text{i}$:

  $\text{Im}(z_2) = -\text{Re}(z_2)+b \Leftrightarrow 2 = 0+b \Leftrightarrow b = 2$

  s: $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z)+2$

- t: $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z)+c$

  Como t passa pelo afixo de $z_3 = -2-\text{i}$:

  $\text{Im}(z_3) = -\text{Re}(z_3)+c \Leftrightarrow -1 = -(-2)+c \Leftrightarrow c = -3$

  t: $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z)-3$

12. $z \neq 0 \wedge \text{Re}(z)+\text{Im}(z) = 0$

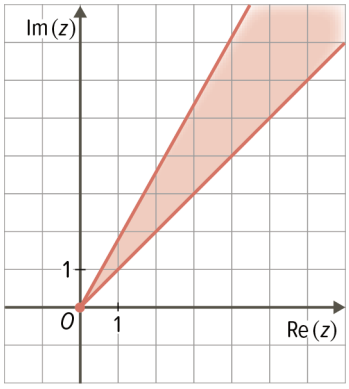
$\text{Re}(x+y\text{i})+\text{Im}(x+y\text{i}) = 0 \Leftrightarrow x+y = 0 \Leftrightarrow y = -x$

$z = |z|\text{e}^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$

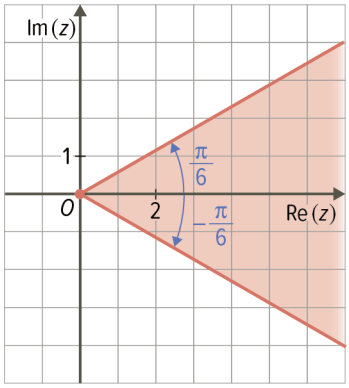
O argumento principal de z não pode pertencer ao intervalo $\left]-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[$ dado que este está contido no 3.º quadrante.

A opção correta é a **(B)**.

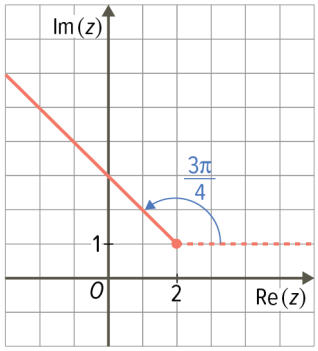
13.1. $\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}$



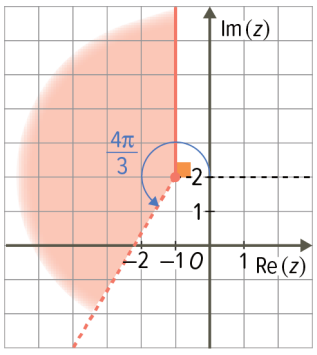
13.2. $-\frac{\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{6}$



13.3. $\arg(z-2-\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{4}$



13.4. $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z+1-2\mathrm{i}) \leq \frac{4\pi}{3}$



14.1. $\arg(z) = \frac{2\pi}{5}$

14.2. $\arg(z) = \frac{4\pi}{5}$

14.3. $\arg(z-4) = \pi$

14.4. $A\hat{O}E = \overset{\frown}{AE} = \frac{2\pi}{5}$; $\pi + \frac{3\pi}{10} = \frac{13\pi}{10}$

$O\hat{A}E = \frac{\pi - \frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{3\pi}{10}$

$\arg(z-4) = \frac{13\pi}{10}$

15. $z_C = 3+3\mathrm{i} \rightarrow$ argumento principal: $\frac{\pi}{4}$

Como a circunferência é tangente aos eixos, o seu raio é igual a 3.

A região sombreada da figura pode ser definida por $|z-3-3\mathrm{i}| \geq 3 \wedge 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{4} \wedge \mathrm{Re}(z) \geq 3$.

Página 83 – Consolida

16. r: $\mathrm{Im}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(\bar{z})$; s: $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Re}(z)$

$\frac{\pi}{4} < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4} \vee -\frac{3\pi}{4} < \arg(z) \leq -\frac{\pi}{4}$

17.1. $\arg(z-3+2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$

17.2. $\arg(z-3+2\mathrm{i}) = \pi$

17.3. $-\pi \leq \arg(z-3+2\mathrm{i}) \leq \frac{\pi}{4}$.

17.4. $z_C = (3+2)+0\mathrm{i} = 5$

$|z-3+2\mathrm{i}| = |z-5|$

17.5. $w = z_A = 3-2\mathrm{i}$ e $z_B = -2\mathrm{i}$

$\overline{AB} = |z_B - z_A| = |-2\mathrm{i} - (3-2\mathrm{i})| = 3$

Raio: $\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{3}{2}$

Centro: afixo de $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} - 2\mathrm{i}$

$\left|z - \frac{3}{2} + 2\mathrm{i}\right| \leq \frac{3}{2}$

$\left|z - \frac{3}{2} + 2\mathrm{i}\right| \leq \frac{3}{2} \wedge \mathrm{Im}(z) \leq -2$

18. C: centro da circunferência

$z_R = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -2$

$z_C = y\text{i},\ 0 < y < 4$

$\overline{CR} = \overline{CT} \Leftrightarrow |z_R - z_C| = |z_T - z_C| \Leftrightarrow |-2 - y\text{i}| = |4\text{i} - y\text{i}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-2)^2 + (-y)^2} = \sqrt{0^2 + (4-y)^2}$

$\Leftrightarrow 4 + y^2 = 16 - 8y + y^2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$

Então, $z_C = \frac{3}{2}\text{i}$ e $r = \left|4\text{i} - \frac{3}{2}\text{i}\right| = \left|\frac{5}{2}\text{i}\right| = \frac{5}{2}$.

A circunferência circunscrita ao triângulo pode ser definida pela condição $\left|z - \frac{3}{2}\text{i}\right| = \frac{5}{2}$.

19.1. a) $z_A = 2\text{i}$ e $\theta = \frac{\pi}{12}$

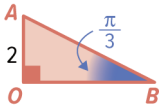
$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

$\arg(z - 2\text{i}) = \frac{5\pi}{12}$

b) Se $\theta = \frac{\pi}{3}$, então $A\hat{B}O = \frac{\pi}{3}$.

$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



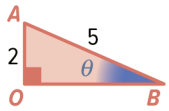
$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6} \le \arg\left(z - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \le \frac{2\pi}{3}$

19.2. $P_{[ABCD]} = 20 \Leftrightarrow 4\overline{AB} = 20 \Leftrightarrow \overline{AB} = 5$

$A\hat{B}O = \theta$

$\sin\theta = \frac{2}{5}$



$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{25} + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{21}{25}$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{21}{25}}$

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\theta > 0$. Logo, $\cos\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Página 84 – Avalia 3 – Parte 1 – Verificação rápida

1. $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{5}$

$|z_4| = 2 \Leftrightarrow \overline{DO} = 2$

$[ABCD]$ é um losango, logo $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

$\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{DO}^2 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2 = \overline{AO}^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{AO} = 4$

Assim, sabe-se que $z_1 = -4$ e $z_2 = -2\text{i}$.

Logo, $z_1 \times z_2 = -4 \times (-2\text{i}) = 8\text{i}$

A opção correta é a **(B)**.

2. A condição $|z - z_1| = |z - z_2|$ representa uma reta paralela ao eixo real se $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$.

$\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \Leftrightarrow \text{Re}(-2 + 3\text{i}) = \text{Re}\left(k + 1 + \frac{k}{2}\text{i}\right)$

$\Leftrightarrow -2 = k + 1 \Leftrightarrow k = -3$

A opção correta é a **(A)**.

3. $z_1 = \sqrt{3} + \text{i} \rightarrow$ Seja θ o argumento principal de z_1.

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta \in 1.^{\text{o}}\,\text{Q}\end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{6}$

$\arg\left(z + \sqrt{3} + \text{i}\right) = \frac{\pi}{6}$; $z_1 = |z_1| e^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$

A opção correta é a **(A)**.

4. **I:** Mediatriz de $[AB]$

$|z - z_1| = |z - z_2|$, ou seja, $|z + 3 - \text{i}| = |z - 1 + 3\text{i}|$ **b)**

II: A mediatriz de $[AB]$ interseta $[AB]$ no seu ponto médio (M).

$z_M = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{-3 + \text{i} + 1 - 3\text{i}}{2} = \frac{-2 - 2\text{i}}{2} = -1 - \text{i}$ **c)**

III: $r = \overline{AB} = |z_2 - z_1| = |1 - 3\text{i} - (-3 + \text{i})| = |4 - 4\text{i}|$

$= \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

A circunferência de centro A que passa em B é definida pela condição $|z + 3 - \text{i}| = 4\sqrt{2}$ **b)**

IV: O exterior do círculo de centro B e raio 2 é definido pela condição $|z - 1 + 3\text{i}| > 2$ **a)**

Conclusão: I – b); II – c); III – b); IV – a)

Página 85 – Avalia 3 – Parte 2 – Questões de desenvolvimento

1.1. $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\text{i}$; $|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$

$z_1 = 2e^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

Como o hexágono $[ABCDEF]$ é regular, então

$A\hat{O}C = 2 \times \frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$$z_3 = z_1 \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$$

$$|z_3 - z_1| = \left|\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i-\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\right| =$$

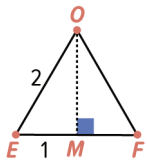
$$= \left|\frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}i\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{18+6\sqrt{12}+6}{4}+\frac{6-6\sqrt{12}+18}{4}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

1.2. **a)** O semiplano fechado definido pela mediatriz de $[OA]$ ao qual pertence o ponto C pode ser definido pela condição $|z| \leq |z-\sqrt{2}-\sqrt{2}i|$.

b) O triângulo $[OEF]$ é equilátero $(\overline{OE} = \overline{OF} = \overline{EF})$.



$\overline{OE} = \overline{OA} = |z_1| = 2$

Sendo M o ponto médio de $[EF]$, $\overline{EM} = \overline{MF} = 1$.

$\overline{EO}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MO}^2 \Leftrightarrow 2^2 = 1^2 + \overline{MO}^2 \Leftrightarrow \overline{MO} = \sqrt{3}$

$|z| \leq \sqrt{3}$

c) $|z| \geq 2 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$, ou seja,

$|z| \geq 2 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{12}$

2. $z_1 = \frac{3+i^{18}}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i}{1+1} = 1-i$

$z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -2i$

$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \wedge |z-z_1| = |z-z_2| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(x+yi) = \mathrm{Im}(x+yi) \wedge |x+yi-(1-i)| = |x+yi-(-2i)|$

$\Leftrightarrow x = y \wedge |(x-1)+(y+1)i| = |x+(y+2)i|$

$\Leftrightarrow x = y \wedge \sqrt{(y-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{y^2+(y+2)^2}$

$\Leftrightarrow x = y \wedge \cancel{y^2} \cancel{-2y} + 1 + \cancel{y^2} \cancel{+2y} + 1 = \cancel{y^2} + \cancel{y^2} + 4y + 4$

$\Leftrightarrow x = y \wedge y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \wedge y = -\frac{1}{2}$

Então, $z = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

3. **Etapa 1:**

$C_1 : |z-2-i| = 2\sqrt{2}$

Centro é o afixo de $z_A = 2+i$, logo $A(2, 1)$.

$B(0, b);\ b \in \mathbb{R}^+ \rightarrow z_B = bi;\ b \in \mathbb{R}^+$

Como B pertence à circunferência C_1, tem-se:

$|z_1-2-i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |bi-2-i| = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-2)^2+(b-1)^2} = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 4+(b-1)^2 = 8$

$\Leftrightarrow (b-1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow b-1 = 2 \vee b-1 = -2$

$\Leftrightarrow b = 3 \vee b = -1$

Como $b \in \mathbb{R}^+$, conclui-se que $b = 3$

Então, $B(0, 3)$.

C é o ponto médio de $[OB]$, logo:

$C\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$, ou seja, $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Etapa 2:

C_2: centro $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Raio $\overline{BC} = 3-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$z_C = \frac{3}{2}i$

A circunferência C_2 pode ser definida pela condição $\left|z-\frac{3}{2}i\right| = \frac{3}{2}$.

Etapa 3:

A região colorida da figura pode ser definida pela condição $\left|z-\frac{3}{2}i\right| \leq \frac{3}{2} \wedge |z-2-i| \geq 2\sqrt{2}$.