Propostas de resolução da unidade 2 do manual

Página 92 – Recorda e Aplica

1.1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

1.2. **a)** $A = \{1, 3\}$; $B = \{2, 4\}$; $C = \{\ \}$; $D = \{1, 2, 3, 4\}$

b) A: acontecimento composto

B: acontecimento composto

C: acontecimento impossível

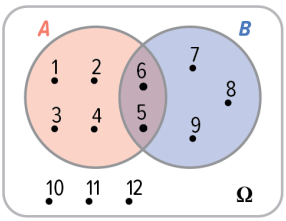
D: acontecimento certo

Página 93 – Recorda e Aplica

2.1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$



2.2. **a)** $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) $P(B) = \frac{5}{12}$

c) $C = \{10, 11, 12\}$

$P(C) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$P(A \cup B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

e) $A \cap B = \{5, 6\}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

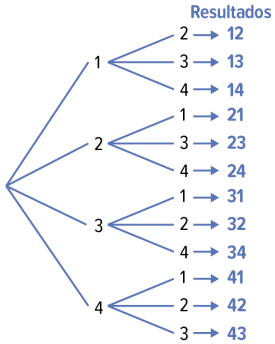
f) $\overline{A} = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$P(\overline{A}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{6}$

g) $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 10, 11, 12\}$

$P(\overline{B}) = \frac{7}{12}$

3.1. **a)**



Os casos possíveis são 12.

b) $\overset{\text{1.ª bola}}{4} \times \overset{\text{2.ª bola}}{3} = 12$

3.2. **a)** Por **3.1. a)** sabe-se que $A = \{31, 32, 34, 41, 42, 43\}$.

Logo, $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

b) $P(B) = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{1}{4}$

Página 94 – Tarefa inicial

1.1. Experiência aleatória: B

1.2. Experiência aleatória: A

1.3. Experiência aleatória: B

2. A roleta está dividida em 15 setores circulares geometricamente iguais, dos quais 3 têm quantias superiores a 1000 euros.

Então, $P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$.

A opção correta é a **(A)**.

Página 95

1.1. Fenómeno determinístico

1.2. Fenómeno aleatório

1.3. Fenómeno aleatório

1.4. Fenómeno determinístico

1.5. Fenómeno aleatório

2.1. Experiência determinística

2.2. Experiência aleatória

2.3. Experiência aleatória

Página 96

3.1. $\Omega = \{(3,6),(3,9),(3,12),(6,3),(6,9),(6,12),$
$(9,3),(9,6),(9,12),(12,3),(12,6),(12,9)\}$

3.2. **a)** *A*: "o primeiro número é divisor do segundo"

$A = \{(3,6),(3,9),(3,12),(6,12)\}$

A: acontecimento composto

b) *B*: "os dois números são iguais"

$B = \{\ \}$

B: acontecimento impossível

c) *C*: "a soma dos números é 9"

$C = \{(3,6),(6,3)\}$

C: acontecimento composto

Página 97 – Tarefa 1

1.1. 1.º lançamento: 2 possibilidades (E ou N)

2.º lançamento: 2 possibilidades (E ou N)

3.º lançamento: 2 possibilidades (E ou N)

3 lançamentos: 8 possibilidades $(2\times2\times2)$

1.2. $\Omega = \{(E,E,E),(E,E,N),(E,N,E),(E,N,N),$
$(N,E,E),(N,E,N),(N,N,E),(N,N,N)\}$

1.3. **a)** *A*: "ocorreu, exatamente, uma vez a face E"

B: "ocorreu, exatamente, uma vez a face N"

C: "ocorreu, no máximo, uma vez a face E"

$A = \{(E,N,N),(N,E,N),(N,N,E)\}$,

$B = \{(N,E,E),(E,N,E),(E,E,N)\}$ e

$C = \{(E,N,N),(N,E,N),(N,N,E),(N,N,N)\}$

b) $\overline{A} = \{(E,E,N),(E,N,E),(N,E,E),(E,E,E),$
$(N,N,N)\}$

$\overline{B} = \{(E,E,E),(N,N,E),(N,E,N),(E,N,N),$
$(N,N,N)\}$

$\overline{C} = \{(E,E,N),(E,N,E),(N,E,E),(E,E,E)\}$

2.1.

	R	***P***	***V***
R	(*R*, *R*)	(*R*, *P*)	(*R*, *V*)
P	(*P*, *R*)	(*P*, *P*)	(*P*, *V*)
V	(*V*, *R*)	(*V*, *P*)	(*V*, *V*)

$\Omega = \{(R,R),(R,P),(R,V),(P,R),(P,P),(P,V),$
$(V,R),(V,P),(V,V)\}$

2.2. $\overline{A}$: "sair bola verde"

$\overline{A} = \{(R,V),(P,V),(V,R),(V,P),(V,V)\}$

$\overline{B}$: "sair bolas com a mesma cor"

$\overline{B} = \{(R,R),(P,P),(V,V)\}$

$\overline{C}$: "não sair bola roxa"

$\overline{C} = \{(P,P),(P,V),(V,P),(V,V)\}$

Página 98 – Tarefa 2

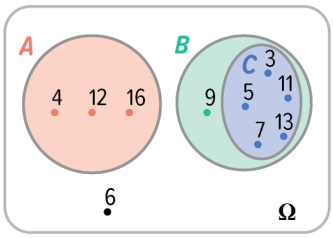
1.1. $\Omega = \{3,4,5,6,7,9,11,12,13,16\}$

$A = \{4,12,16\}$

$B = \{3,5,7,9,11,13\}$

$C = \{3,5,7,11,13\}$

Diagrama de Venn:



1.2. **a)** Por exemplo, *A* e *B* (pois $A \cap B = \{\ \}$).

b) Por exemplo, *B* e *C* (pois $B \cap C \neq \{\ \}$).

1.3. $B \cup C = \{3,5,7,9,11,13\}$

$\overline{B \cup C} = \{4,6,12,16\}$

$\overline{B} = \{4,6,12,16\}$

$C = \{4,6,9,12,16\}$

$\overline{B} \cap \overline{C} = \{4,6,12,16\}$

Logo, $\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$.

2.1. $\Omega = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,2),(0,-1),(0,0),(0,1),(0,2),(1,-1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,2),(3,-1),(3,0),(3,1),(3,2)\}$

2.2. **a)** *A*: "o ponto escolhido pertence à reta *r*"

$A = \{(-1,1),(0,0),(1,1),(2,2)\}$

O acontecimento *A* é composto.

b) *B*: "o ponto escolhido pertence à reta *s*"

$B = \{(2,0),(3,2)\}$

O acontecimento *B* é composto.

c) $A \cup B = \{(-1,1),(0,0),(1,1),(2,2),(2,0),(3,2)\}$

O acontecimento $A \cup B$ é composto.

2.3. **a)** $A \cap B = \{\ \}$, logo o acontecimento $A \cap B$ é impossível.

b) Os acontecimentos *A* e *B* são disjuntos porque $A \cap B = \{\ \}$

Página 99

4.1. $\Omega = \{\text{sem defeito, pequeno defeito, a eliminar}\}$

4.2. *A*: "a peça tem pequeno defeito"

$P(A) = 1 - 0{,}84 - 0{,}03 = 0{,}13$

4.3. $P(\text{eliminar}) = 0{,}03$

$367 \times 0{,}03 \approx 11$

Estimativa do número de peças eliminadas: 11

Página 100 – Pratica

5.1. Fenómeno aleatório

5.2. Fenómeno determinístico

5.3. Fenómeno aleatório

6.1. $\Omega = \{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$

6.2. **a)** $A = \{18, 36, 54, 72\}$

$B = \{45\}$

$C = \{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$

$D = \{54, 63, 72, 81\}$

b) *A*: acontecimento composto

B: acontecimento elementar

C: acontecimento certo

D: acontecimento composto

c) $A \cap B = \{18, 36, 54, 72\} \cap \{45\} = \{\ \}$, logo o acontecimento $A \cap B$ é impossível.

Página 101 – Pratica

7.1. V_1: bola vermelha com o número 1

V_2 : bola vermelha com o número 2

A_3 : bola azul com o número 3

A_5 : bola azul com o número 5

$\Omega = \{(V_1,V_2),(V_1,A_3),(V_1,A_5),(V_2,V_1),(V_2,A_3),(V_2,A_5),(A_3,V_1),(A_3,V_2),(A_3,A_5),(A_5,V_1),(A_5,V_2),(A_5,A_3)\}$

7.2. *A*: "as bolas têm a mesma cor"

B: "os números das bolas são pares"

a) $\overline{A} = \{(V_1,A_3),(V_1,A_5),(V_2,A_3),(V_2,A_5),(A_3,V_1),(A_3,V_2),(A_5,V_1),(A_5,V_2)\}$

$\overline{B} = \{(V_1,V_2),(V_2,V_1),(V_2,A_3),(V_2,A_5),(A_3,V_2),(A_5,V_2)\}$

b) $A \cap B = \{(V_1,V_2),(V_2,V_1),(A_3,A_5),(A_5,A_3)\} \cap \{(V_1,A_3),(V_1,A_5),(A_3,V_1),(A_3,A_5),(A_5,V_1),(A_5,A_3)\} = \{(A_3,A_5),(A_5,A_3)\}$

$A \cup B = \{(V_1,V_2),(V_2,V_1),(A_3,A_5),(A_5,A_3)\} \cup \{(V_1,A_3),(V_1,A_5),(A_3,V_1),(A_3,A_5),(A_5,V_1),(A_5,A_3)\} = \{(V_1,V_2),(V_2,V_1),(V_1,A_3),(V_1,A_5),(A_3,V_1),(A_3,A_5),(A_5,V_1),(A_5,A_3)\}$

c) $\overline{A \cap B} = \{(V_1,V_2),(V_1,A_3),(V_1,A_5),(V_2,V_1),(V_2,A_3),(V_2,A_5),(A_3,V_1),(A_3,V_2),(A_5,V_1),(A_5,V_2)\}$

$\overline{A \cup B} = \{(V_2,A_3),(V_2,A_5),(A_3,V_2),(A_5,V_2)\}$

8.1. $A = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$

$B = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$A \cap B = \{(6,4),(6,5)\}$

8.2. $A \cup B = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

8.3. $A \cap \overline{B} = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3)\}$

8.4. $\overline{A} \cap B = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}$

9. A tabela que corresponde ao modelo procurado é a **(A)**.

A opção **(B)** é rejeitada, porque $P(E)+P(N)>1$.

A opção **(C)** é rejeitada, porque $P(E)+P(N)<1$.

A opção **(D)** é rejeitada, porque $P(E)+P(N)\neq 100\%$.

10. Por exemplo:

A: "ter, no máximo, três vogais"

B: "ter, pelo menos, quatro vogais"

C: "ter, exatamente, duas vogais"

A e *B* são contrários, pois $A \cap B = \{\ \}$ e $A \cup B = \Omega$.

B e *C* são disjuntos, porque $B \cap C = \{\ \}$.

C é um acontecimento elementar.

Página 102 – Avalia 1 – Parte 1

1. "O aluno é rapaz ou tem biologia" $\rightarrow \overline{A} \cup B$

A opção correta é a **(C)**.

2.1. $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \rightarrow$ Oito acontecimentos elementares

A opção correta é a **(C)**.

2.2. $\underbrace{\overline{A} \cap B}_{\text{acontecimento impossível}} = \{e, f, g, h\} \cap \{c, d\} = \{\ \}$

A opção correta é a **(D)**.

3. $0{,}21 + a + 0{,}37 + 2a = 1 \Leftrightarrow 3a = 0{,}42 \Leftrightarrow a = 0{,}14$

$P(\text{"retirar uma bola preta"}) =$

$= 2 \times 0{,}14 = 0{,}28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$

A opção correta é a **(A)**.

4. **I:** $6 \times 6 = 36$

II: $6 \times 1 = 6$

III: $\underbrace{A}_{\text{acontecimento composto}} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

IV: $\underbrace{B}_{\text{acontecimento elementar}} = \{(6,6)\}$

Conclusão: I – c) ; **II – b)** ; **III – a)** ; **IV – b)**

Página 103 – Avalia 1 – Parte 2

1.1.

Transporte		**Alojamento**	
5	×	4	= 20 resultados possíveis

1.2. **a)** *R*: "o cartão transporte sai a um rapaz"

Casos favoráveis ao acontecimento *R*:

Transporte	**Alojamento**
D	A
D	B
D	C
D	E
E	A
E	B
E	C
E	D

b) $\overline{S}$: "o cartão transporte sai a um rapaz ou o cartão alojamento sai a um rapaz"

2.1. $\Omega = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(4,0)\}$

2.2. **a)** $C = \{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$

$D = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

C e *D* são acontecimentos disjuntos, porque $C \cap D = \{\ \}$ e não são contrários porque $C \cup D \neq \Omega$.

b) $C = \{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$

$E = \{(0,0),(1,1),(2,2)\}$

$C \cap E = \{(2,2)\} \rightarrow$ acontecimento elementar

Página 104 – Tarefa inicial

1.1.

N.º de pintas	Frequência absoluta	Frequência relativa
1	43	$\frac{43}{250}=0,172$
2	41	$\frac{41}{250}=0,164$
3	41	$\frac{41}{250}=0,164$
4	47	$\frac{47}{250}=0,188$
5	44	$\frac{44}{250}=0,176$
6	34	$\frac{34}{250}=0,136$
Total	250	1

1.2. Atendendo à definição frequencista de probabilidade, estima-se que:

$P(1)=0,172$; $P(2)=P(3)=0,164$; $P(4)=0,188$; $P(5)=0,176$; $P(6)=0,136$

Página 105

11. Frequência relativa $=\frac{180}{213}\approx 0,845$

Assim, estima-se que a probabilidade de Cristiano Ronaldo concretizar em golo a marcação de uma grande penalidade seja de 85%.

12. Não, a moeda não parece ser equilibrada pois se o fosse, as frequências relativas da saída da face N e da saída da face E deveriam ser valores próximos de 0,5 (o que não acontece).

Página 106

13.

N.º testes	Frequência relativa
6000	$\frac{5094}{6000}=0,849(\approx 85\%)$

À medida que o número de testes aumenta, a frequência relativa do número de sucessos aproxima-se de 85%, sendo esse o valor de eficácia da vacina.

Página 107 – Tarefa 3

1.1.

N.º de pontos	Frequência absoluta	Frequência relativa
1	158	0,158
2	163	0,163
3	250	0,250
4	160	0,160
5	89	0,089
6	180	0,180
Total	**1000**	1

Cálculos auxiliares:

$20\times 50=1000$
$0,163\times 1000=163$
$250:1000=0,250$
$0,160\times 1000=160$
$180:1000=0,180$
$158+163+250+160+180=911$
$1000-911=89$
$89:1000=0,089$

Modelo de probabilidade						
N.º de pontos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Probabilidade (% arredondada às unidades)	16%	16%	25%	16%	9%	18%

1.2. **a)** *A*: “sair face com um ponto”

$P(A)=16\%$

b) *B*: “sair face com cinco pontos”

$P(B)=9\%$

1.3. Sejam *C* e *D* os acontecimentos:

C: “sair um número de pontos inferior a 4”

D: “sair um número de pontos superior a 3”

$P(C)=P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})$
$=16\%+16\%+25\%=57\%$

$P(D)=P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})$
$=16\%+9\%+18\%=43\%$

É mais provável sair um número de pontos inferior a 4 do que superior a 3.

Página 108

14.1. A roleta não é equilibrada, porque a probabilidade de sair o número 2 não é igual à probabilidade de sair o número 4.

14.2. $P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{6\})=1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}+a+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=1 \Leftrightarrow a=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6} \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$$

14.3. a) *A*: "obter um número ímpar"

$$P(A)=P(\{3\})=\frac{1}{4}$$

b) *B*: "obter um número maior do que 3"

$$P(B)=P(\{4\})+P(\{6\})=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

c) *C*: "obter um número divisor de 12"

$$P(C)=P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{6\})$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=1$$

d) *D*: "obter um número múltiplo de 5"

$$P(C)=P(\{\ \})=0$$

Página 109

15. Sejam *A* e *I* os acontecimentos:

A: "falar alemão"

I: "falar inglês"

Sabe-se que:

$P(A\cup I)=100\%$; $P(I)=84\%$ e $P(A)=35\%$

15.1. $P(A\cap I)=?$

$$P(A\cup I)=P(A)+P(I)-P(A\cap I)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 100\%=35\%+84\%-P(A\cap I)\Leftrightarrow P(A\cap I)=19\%$$

15.2. $P(I\cap \overline{A})=?$

$$P(I\cap \overline{A})=P(I)-P(I\cap A)=84\%-19\%=65\%$$

15.3. $P(\overline{I}\cap A)=?$

$$P(\overline{I}\cap A)=P(A)-P(I\cap A)=35\%-19\%=16\%$$

16. Sejam *A* e *B* os acontecimentos:

A: "ser assinante da versão papel do jornal"

B: "ser assinante da versão digital do jornal"

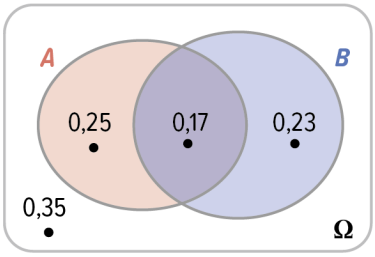
Sabe-se que:

$P(\overline{A}\cap \overline{B})=0{,}35$; $P(A)=0{,}42$ e $P(B)=0{,}4$

Se 35% da população não é assinante do jornal, então 65% da população é assinante do jornal, ou seja, $P(A\cup B)=0{,}65$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}65=0{,}42+0{,}4-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}17$$

$$P(A\setminus B)+P(B\setminus A)=(0{,}42-0{,}17)+(0{,}4-0{,}17)=$$
$$=0{,}25+0{,}23=0{,}48$$



Página 110 – Pratica

17. Jogador A: $\frac{61}{260}\approx 0{,}235\ (23{,}5\%)$

Jogador B: 25%

O jogador A tem melhor desempenho em lances livres.

18.1. Por observação do gráfico, sabe-se que a frequência relativa correspondente à cor vermelha ao fim de 50 experiências é superior a 0,4 e inferior a 0,45.

$0{,}4\times 50=20$ e $0{,}45\times 50=22{,}5$

n: número de bolas vermelhas saídas nas 50 primeiras experiências

Assim, $20<n<22{,}5$.

A opção correta é a **(A)**.

18.2. Na tabela não está representado um modelo de probabilidade associado à experiência aleatória considerada porque:

$P(\text{Cor de laranja})+P(\text{Vermelho})+P(\text{Azul})\neq 1$

18.3. Atendendo à definição frequencista de probabilidade, sabe-se que a probabilidade de um acontecimento é o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização desse acontecimento, quando a experiência aleatória é repetida um grande número de vezes.

Então, um modelo de probabilidade para a situação apresentada é, por exemplo:

Cor	Cor de laranja	Vermelho	Azul
Probabilidade	0,37	0,43	0,20

19. $P(\overline{R}) = 0{,}78$, logo $a = P(R) = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$

$0{,}22 \times 2000 = 440$

Estima-se que, nas 2000 experiências, o rei de espadas tenha saído 440 vezes.

Página 111 – Pratica

20. $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}42$; $P(\overline{A \cup B}) = 0{,}15$

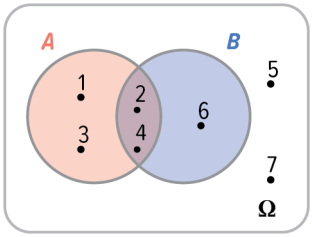
$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}85 = 0{,}5 + 0{,}42 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}07$

21.1. *A*: "a bola é azul"

B: "o número da bola é par"



21.2. a) $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$ b) $P(A \cup B) = \frac{5}{7}$

c) $P(A \cap \overline{B}) = \frac{2}{7}$ d) $P(\overline{A \cup B}) = \frac{2}{7}$

22. *B*: "frequentou a biblioteca"

C: "frequentou a cantina"

- $P(B \cup C) = 1$
- $P(\overline{B}) = 0{,}4 \Leftrightarrow 1 - P(B) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}6$
- $P(B \cap C) = \frac{7}{5} P(B \cap \overline{C}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B \cap C) = \frac{7}{5}(P(B) - P(B \cap C))$

$\Leftrightarrow P(B \cap C) = \frac{7}{5} P(B) - \frac{7}{5} P(B \cap C)$

$\Leftrightarrow \frac{12}{5} P(B \cap C) = \frac{7}{5} \times 0{,}6 \Leftrightarrow P(B \cap C) = 0{,}35$

Página 112

23.1. *B*: "sair letra B"

$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{1}{7}$

23.2. *V*: "sair uma vogal"

$P(V) = \frac{\#V}{\#\Omega} = \frac{3}{7}$

23.3. *C*: "sair uma consoante"

$P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{4}{7}$

23.4. *D*: "sair uma letra do nome Beatriz"

$P(D) = \frac{\#D}{\#\Omega} = \frac{5}{7}$

24. *A*: "sair número primo e divisor de 6"

$A = \{2, 3\}$; $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Página 113

25.1. $\Omega = \{\text{azul, verde, vermelho}\}$

25.2. A afirmação é falsa. Os acontecimentos elementares não são equiprováveis porque não têm a mesma probabilidade de ocorrer (a cor verde é a mais provável de sair e a azul a menos provável, pois no dado há 3 faces verdes, 2 vermelhas e 1 azul).

Por exemplo, a probabilidade de sair face verde é $\frac{1}{2}$ e a de sair face azul é $\frac{1}{6}$.

25.3. *A*: "sair face verde"

B: "sair face vermelha";

C: "sair face azul"

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{1}{6}$

	Probabilidade
A	$\frac{1}{2}$
B	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{6}$

Página 114

26.1. *A*: "ser rapariga"

$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

26.2. *B*: "ser rapaz e não participar na corrida de sacos"

$$P(B)=\frac{\#B}{\#\Omega}=\frac{12-7}{21}=\frac{5}{21}$$

27.1. *A*: "não sair bola verde nem vermelha"

$$P(A)=\frac{{}^{3}C_{3}}{{}^{5}C_{3}}=\frac{1}{10}=0{,}1$$

27.2. *B*: "a bola verde ser uma das escolhidas"

$$P(B)=\frac{1\times{}^{4}C_{2}}{{}^{5}C_{3}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

Página 115 – Tarefa 4

1.1. Os acontecimentos elementares são 16.

Dado verde Dado vermelho

4 × 4 = 16

1.2. *A*: "o produto dos números é um quadrado perfeito"

$$A=\{(1,1),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$$

B: "a soma dos números é um número primo"

$$B=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)\}$$

a) $A\cap B=\{(1,1),(1,4),(4,1)\}$

$A\cap B\neq\{\ \}$, logo *A* e *B* não são acontecimentos disjuntos.

b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{6}{16}+\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

c) Casos favoráveis ao acontecimento $\overline{A\cup B}$:

$(1,3)$, $(2,4)$, $(3,1)$ e $(4,2)$.

$$P\left(\overline{A\cup B}\right)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

2.1. Produto dos números que ocorrem no lançamento dos dados.

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

a) *G*: "ganhar o Gil" → o produto dos números saídos teria de ser 5, o que é impossível.

$$P(G)=\frac{0}{16}=0$$

b) *S*: "Ganhar a Sofia" → o produto dos números saídos teria de ser 3.

$$P(S)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

2.2. Soma dos números que ocorrem no lançamento dos dois dados.

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

$$P(G)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$$P(S)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

$P(G)>P(S)$

O Gil tem maior probabilidade de ganhar.

Página 116 – Pratica

28.1.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

N.º de casos possíveis: $6\times6=36$

a) *A*: "o primeiro número é menor do que o segundo"

$$P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

b) *B*: "o segundo número é par"

$$A\cap B=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,4),(2,6),(3,4),(3,6),(4,6),(5,6)\}$$

$$P(A\cap B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

c) $A \cup B$

$$P(A \cup B) = \frac{\#A \cup B}{\#\Omega} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

d) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

28.2. a) A: "o número é par"

$$P(A) = \frac{6 \times 6 \times 3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{2}$$

b) B: "o número é formado por algarismos diferentes"

$$P(B) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{9}$$

c) C: "o número é ímpar e múltiplo de 5"

$$P(C) = \frac{6 \times 6 \times 1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

Página 117 – Pratica

29.1. Número total de lâmpadas: 45

Número de lâmpadas fundidas: $\frac{1}{5} \times 45 = 9$

Número de lâmpadas boas: $45 - 9 = 36$

A: "zero lâmpadas fundidas"

$$P(A) = \frac{4}{5} \times \frac{35}{44} = \frac{7}{11}$$

29.2. B: "exatamente uma lâmpada fundida"

$$P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{36}{44} + \frac{4}{5} \times \frac{9}{44} = \frac{18}{55}$$

30. n: número total de jogadores da equipa

$0{,}64n$: número de jogadores portugueses

$0{,}36n$: número de jogadores estrangeiros

Sabe-se que há 288 possibilidade diferentes de escolher, sucessivamente, dois jogadores e exatamente um ser português. Então, tem-se:

$(0{,}64n) \times (0{,}36n) \times 2 = 288 \Leftrightarrow 0{,}2304n^2 = 144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 = 625 \Leftrightarrow n = \pm\sqrt{625}$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 25$.

Assim, a equipa tem 16 jogadores portugueses $(0{,}64 \times 25)$ e 9 jogadores estrangeiros.

A: "os jogadores são ambos portugueses ou ambos estrangeiros"

$$P(A) = \frac{16}{25} \times \frac{15}{24} + \frac{9}{25} \times \frac{8}{24} = \frac{312}{600} = \frac{13}{25} = 0{,}52\,(52\%)$$

31.1. A: "tem disponibilidade para, exatamente, uma opção"

$$P(A) = \frac{3+5+8}{26} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$$

31.2. $\#(B \cap C) = 5 \Leftrightarrow 2 + a = 5 \Leftrightarrow a = 3$

$\#(C) = 11 \Leftrightarrow a + 5 + c + 2 = 11 \underset{a=3}{\Leftrightarrow} c = 1$

$\#\Omega = 26 \Leftrightarrow b + 3 + a + 2 + 5 + c + 8 = 26 \underset{\substack{a=3 \text{ e} \\ c=1}}{\Leftrightarrow} b = 4$

B: "tem disponibilidade para, exatamente, duas opções"

$$P(B) = \frac{a+b+c}{26} = \frac{3+4+1}{26} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$$

32. A: "o número ter algarismos diferentes e a soma deles ser máxima" $\rightarrow$ têm de ser os algarismos 6, 7 e 8

- Número de casos possíveis: $8 \times 8 \times 8 = 8^3 = 512$
- Número de casos favoráveis: $3 \times 2 \times 1 = 6$

$$P(A) = \frac{6}{512} = \frac{3}{256}$$

Página 118 – Consolida

1.

	A	**B**
Frequência relativa	$\frac{54}{75} \approx 0{,}72$	$\frac{63}{90} \approx 0{,}7$

O treinador escolherá o jogador A.

2.1.

N.º de peças observadas	**N.º de peças defeituosas**	**Frequência relativa (%)**
200	8	4%
800	10	1,25%
1200	28	2,3%
2500	51	2,04%
4000	89	2,2%

Cálculos auxiliares:

- $\frac{8}{200} = 0{,}04\ (4\%)$
- $\frac{10}{800} = 0{,}0125\ (1{,}25\%)$
- $\frac{28}{1200} = 0{,}023\ (2{,}3\%)$
- $\frac{51}{2500} = 0{,}0204\ (2{,}04\%)$
- $\frac{89}{4000} = 0{,}022\ (2{,}2\%)$

$P \approx 2{,}2\%$

2.2. $0{,}022 \times 12\,000 = 264$

Com base na estimativa de **2.1.**, é de esperar que, numa produção de 12 000 peças, haja 264 peças defeituosas.

3.1. **Região A**

$$\text{Frequência relativa} = \frac{1850}{45\,000} \approx 0{,}041\,(4{,}1\%)$$

Região B

$$\text{Frequência relativa} = \frac{48\,000 - 46\,080}{48\,000} =$$

$$= \frac{1920}{48\,000} \approx 0{,}04\ (4\%)$$

A incidência da doença parece ser maior na região A.

3.2. **Regiões A e B**

$$\text{Frequência relativa} = \frac{1850 + 1920}{45\,000 + 48\,000} =$$

$$= \frac{3770}{93\,000} \approx 0{,}0405\,(4{,}05\%)$$

Probabilidade pedida $\approx 4{,}05\%$

4.1. A afirmação é falsa.

Para que a afirmação fosse verdadeira, os acontecimentos A e B teriam de ser contrários.

4.2. A afirmação é verdadeira.

Sendo A e B acontecimentos contrários, então $A \cap B = \{\ \}$ e $A \cup B = \Omega$.

Então, $P(A \cap B) = 0$ e $P(A \cup B) = 1$.

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, tem-se:

$1 = P(A) + P(B) - 0$, ou seja, $P(A) + P(B) = 1$.

4.3. A afirmação é falsa.

Se $P(A) + P(B) = 1$, não podemos concluir que A e B são acontecimentos contrários (só se soubermos que $A \cap B = \{\ \}$ e $A \cup B = \Omega$).

5. $P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$

Página 119 – Consolida

6.1. $\overline{A}$: "sair bola vermelha"

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{5}$$

6.2. $\overline{B}$: "sair bola com número par"

$$P\left(\overline{B}\right) = \frac{2}{5}$$

6.3. $A \cap B$: "sair bola azul com número ímpar"

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

7. Sendo A e B acontecimentos contrários, então $A \cap B = \{\ \}$ e $A \cup B = \Omega$. Donde se conclui que $P(A \cap B) = 0$ e $P(A \cup B) = 1$.

$$P(A \cup B) = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{0} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 1 - P(A)$$

- $P(A) \times P(B) = \frac{2}{9} \Leftrightarrow P(A) \times (1 - P(A)) = \frac{2}{9} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -9\left(P(A)\right)^2 + 9P(A) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3} \vee P(A) = \frac{2}{3}$$

- Como $P(A) < P(B)$, conclui-se que $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{2}{3}$.

8.1. **a)** $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) =$

$$= 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right)$$

$$= 1 - (0{,}2 + 0{,}48 - 0{,}08) = 0{,}4$$

b) $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}48 - 0{,}08 = 0{,}4$

9. Sendo A e B acontecimentos incompatíveis, sabe-se que $A \cap B = \{\ \}$ e, consequentemente, $P(A \cap B) = 0$.

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= P\left(\overline{A}\right) - P(B) + 0$$

$$= P\left(\overline{A}\right) - P(B)$$

10.1. O **erro de D'Alembert** foi assumir que esses três casos possíveis (2 caras, 1 cara ou 0 caras) eram equiprováveis mas não são. Pode modelar-se o problema com quatro casos possíveis:

1.º lançamento	2.º lançamento
Cara	Cara
Cara	Coroa
Coroa	Cara
Coroa	Coroa

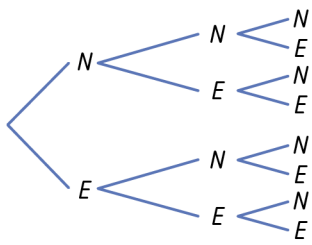
10.2. *A*: "obter, pelo menos, uma cara"

N.º de casos possíveis: 4

N.º de casos favoráveis: 3

$P(A)=\frac{3}{4}$

9. Diagrama em árvore Casos possíveis $(2\times2\times2=8)$



11.1. *A*: "ocorrer três vezes a face europeia"

$P(A)=\frac{1}{8}$

11.2. *B*: " ocorrer, pelo menos, uma vez a face europeia"

$P(B)=\frac{7}{8}$

11.3. *C*: "ocorrer, no máximo, uma vez a face europeia"

$P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Página 120 – Consolida

12.1. *A*: "sair um número com dois algarismos"

$P(A)=\frac{41}{50}$

12.2. *B*: "não sair um múltiplo de 5"

$P(B)=\frac{50-10}{50}=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$

13.1. $\Omega=\{M, A, R, G, I, D\}$

13.2. *A*: "ter obtido a letra A"

$P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

A opção correta é a **(B)**.

13.3. a) *B*: "ter retirado, pelo menos, uma vogal"

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{2\times1\times0}{7\times6\times5}=1-0=1$

A opção correta é a **(A)**.

b) *C*: "ter retirado três vogais"

$P(C)=\frac{5\times4\times3}{7\times6\times5}=\frac{2}{7}$

A opção correta é a **(C)**.

14.1. $P(A)+P(V)+P(R)+P(P)=1$

$\Leftrightarrow a+2a+3a+0,28=1\Leftrightarrow 6a=0,72\Leftrightarrow a=0,12$

14.2. $P(V)=2\times0,12\Leftrightarrow\frac{6}{n}=0,24\Leftrightarrow n=25$

Seja *n* o número total de bolas existente no saco.

Número de bolas azuis: $0,12\times25=3$

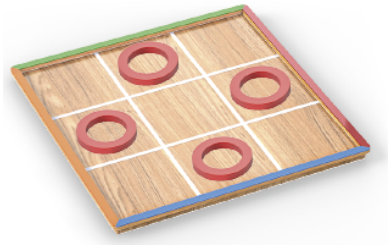
Número de bolas roxas: $0,36\times25=9$

Número de bolas pretas: $0,28\times25=7$

Conclusão: No saco existem 25 bolas, sendo 3 azuis, 6 vermelhas, 9 roxas e 7 pretas.

15.1. *A*: "ficar, pelo menos, um disco numa das diagonais"

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{4\times3\times2}{9\times8\times7}=\frac{20}{21}$



15.2. *B*: "ficarem, pelo menos, dois discos na última linha"

$P(B)=\frac{3\times3\times2\times6}{9\times8\times7}+\frac{3\times2\times1}{9\times8\times7}=\frac{19}{84}$

Página 121 – Consolida

16.1. Número total de alunos da turma:

$3+12+10+4=29$

A: "ser rapaz e frequentar física"

$P(A)=\frac{12}{29}$

16.2. *B*: "frequentar biologia"

$P(B)=\frac{13}{29}$

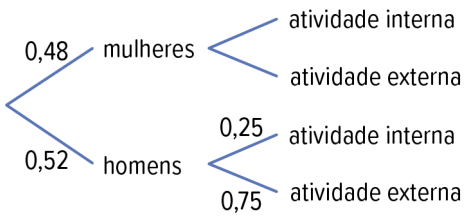
16.3. *C*: "ser rapariga"

$P(C)=\frac{14}{29}$

17.1. *A*: "o prémio ser atribuído a um homem"

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,48=0,52\ (52\%)$

17.2.



B: "o prémio ser atribuído a um homem com atividade interna"

$P(B)=0{,}52\times 0{,}25=0{,}13\ (13\%)$

18. *n*: número total de bolas

8: número de bolas com número par

$n-8$: número de bolas com número ímpar

$\frac{n-8}{n}=0{,}2 \Leftrightarrow n-8=0{,}2n \Leftrightarrow 0{,}8n=8 \Leftrightarrow n=10$

A caixa tem 10 bolas, 8 com número par e 2 com número ímpar.

18.1. *A*: "a soma dos números das bolas retiradas ser ímpar"

1.ª bola	2.ª bola
ímpar	par
par	ímpar

$P(A)=\frac{2\times 8+8\times 2}{10\times 9}=\frac{32}{90}=\frac{16}{45}$

18.2. *B*: "a soma dos números das bolas retiradas ser par"

1.ª bola	2.ª bola
ímpar	ímpar
par	par

$P(B)=\frac{2\times 1+8\times 7}{10\times 9}=\frac{58}{90}=\frac{29}{45}$

19.1. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=\frac{6}{12}+\frac{6}{12}-\frac{4}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

19.2. $A\cap B\cap C=\{4,12\}$

$P(A\cap B\cap C)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

19.3. $A\cap \overline{B}=\{8,10\}$

$P(A\cap \overline{B})=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

19.4. $\overline{B}\cup C=\{4,5,7,8,9,10,11,12\}$

$P(\overline{B}\cup C)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

20. L I S B O A

$P=\frac{1\times 1\times 1}{6\times 5\times 4}=\frac{1}{120}\approx 0{,}008$

21. Casos possíveis:

AR *A*: "A Ana recebe um bilhete"

AP *R*: "O Rui recebe um bilhete"

RP *P*: "O Pedro recebe um bilhete"

$P(R)=\frac{2}{3}$ e $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Então, $P(R)=2P(\overline{A})$.

Página 122 – Avalia 2 – Parte 1

1. $\#(B\cup H)=18\ ;\ \#B=15\ ;\ \#H=8$

$\#(B\cap H)=-\#(B\cup H)+\#B+\#H=-18+15+8-5$

$\#(B\cap \overline{H})+\#(\overline{B}\cap H)=(15-5)+(8-5)=13$

A opção correta é a **(C)**.

2. $P(3)+P(5)+P(6)+P(8)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}2+a+0{,}24+a^2=1 \Leftrightarrow a^2+a-0{,}56=0$

$\Leftrightarrow a=0{,}4 \vee a=-1{,}4$

Como a $a\in\mathbb{R}^+$, então $a=0{,}4$.

Assim, $P(8)=0{,}4^2=0{,}16$.

A opção correta é a **(D)**.

3. A palavra tem de ter, no mínimo, duas vogais.

Então, a probabilidade pedida é igual a 0.

A opção correta é a **(D)**.

4. *A*: "número é múltiplo de 4"

$A=\{4,8\}\ ;\ P(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

B: "número é ímpar"

$B=\{1,3,5,7\}\ ;\ P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

C: "número é divisor de 4"

$C=\{1,2,4\}\ ;\ P(C)=\frac{3}{8}$

O acontecimento menos provável é o *A* e o mais provável é o *B*.

Os acontecimentos *A* e *B* são disjuntos, porque $A\cap B=\{\ \}$.

$P(B\cup C)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0{,}75$

Assim, **I – c)** ; **II – b)** ; **III – a)** ; **IV – b)**.

Página 123 – Avalia 2 – Parte 2

1.1. *A*: "a bola vermelha ficar no compartimento 1 e a amarela no 4"

$$P(A)=\frac{1\times 1\times 2!}{4!}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

1.2. *B*: "a bola azul ficar num compartimento com número par"

$$P(B)=\frac{2\times 3!}{4!}=\frac{2\times 6}{24}=\frac{1}{2}$$

2. *A*: "é rapariga"

Número de rapazes da turma: 12

$P(A)=\frac{3}{5}$, logo $P(\overline{A})=\frac{2}{5}$

Seja n o número de alunos da turma.

$$P(\overline{A})=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{12}{n}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow n=30$$

Grupo de 3 alunos escolhido entre os 30 (12 rapazes e 18 raparigas)

Seja *B* o acontecimento: "o grupo é formado só por raparigas ou só por rapazes"

$$P(B)=\frac{{}^{18}C_3+{}^{12}C_3}{{}^{30}C_3}=\frac{1036}{4060}=\frac{37}{145}$$

3. *A*: "tem carta de condução para ligeiros"

B: "tem carta de condução para pesados"

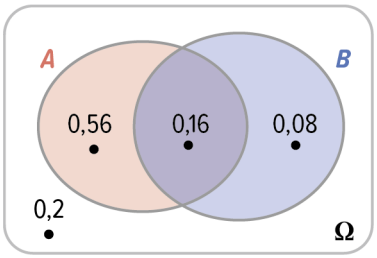
Sabe-se que: $P(A\cup B)=0{,}8$;

$P(A)=0{,}8\times 0{,}9=0{,}72$ e $P(B)=0{,}8\times 0{,}3=0{,}24$

3.1. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow 0{,}8=0{,}72+0{,}24-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}16$

3.2.



Cálculos auxiliares:

- $0{,}72-0{,}16=0{,}56$
- $0{,}24-0{,}16=0{,}08$
- $n-0{,}8=0{,}2$

n: número de funcionários da empresa

$$P(\overline{A}\cap B)=0{,}08\Leftrightarrow\frac{4}{n}=0{,}08\Leftrightarrow n=50$$

A empresa tem 50 funcionários.

Página 124 – Tarefa inicial

1.
- 9.ª jogada: Ganha o jogador A (FIM do jogo)
- 9.ª jogada: Ganha o jogador B
  10.ª jogada: Ganha o jogador A (FIM do jogo)
- 9.ª jogada: Ganha o jogador B
  10.ª jogada: Ganha o jogador B
  11.ª jogada: Ganha o jogador A (FIM do jogo)
- 9.ª jogada: Ganha o jogador B
  10.ª jogada: Ganha o jogador B
  11.ª jogada: Ganha o jogador B (FIM do jogo)

2. O número máximo de jogadas necessárias é 3.

3. Para *B* sair vencedor tem de ganhar os três jogos.

Logo, $P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

Assim, $P(A)=1-P(B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

A probabilidade de *B* sair vencedor é $\frac{1}{8}$ e a de *A* sair vencedor é $\frac{7}{8}$.

Página 125

33.1. *A*: "sair número 1"

$$P(A)=\frac{5}{12}$$

33.2. *A*: "sair número 1"; *B*: "sair cor azul"

$$P(A\mid B)=\frac{2}{3}$$

33.3. *C*: "sair número 4"; *D*: "sair cor verde"

$$P(C\mid D)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

33.4. $P(D\mid C)=\frac{2}{3}$

34. *A*: "sair carta de copas"; *B*: "sair figura"

$$P(B\mid A)=\frac{3}{10}=0{,}3$$

Página 126

35.

- $P(\overline{A})=0{,}4\Leftrightarrow 1-P(A)=0{,}4\Leftrightarrow P(A)=0{,}6$

- $P(A \mid B) = 0{,}3 \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}3P(B)$

- $P(A \cup B) = 0{,}75 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}75$

$\Leftrightarrow 0{,}6 + P(B) - 0{,}3P(B) = 0{,}75 \Leftrightarrow P(B) = \dfrac{3}{14}$

36.1. $P(A \cup B) = 0{,}9 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9$

$\Leftrightarrow 0{,}32 + 0{,}58 - P(A \cap B) = 0{,}9 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$

Como $P(A \cap B) = 0$, então A e B são acontecimentos incompatíveis $(A \cap B = \{\ \})$.

36.2. a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0}{0{,}58} = 0$

b) $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} =$

$= \dfrac{1 - P(A \cup B)}{0{,}42} = \dfrac{0{,}1}{0{,}42} = \dfrac{5}{21}$

Página 127

37. A: "sair face com o número menor do que 5"

B: "sair número primo"

$B = \{2, 3, 5\}$

$P(A \mid B) = \dfrac{2}{3}$

38.1. $P(B \cap C) = \dfrac{1}{8}$

38.2. $P(C \mid A) = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{2}{3}$

38.3. $P(\overline{C} \mid A) = \dfrac{P(\overline{C} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{1}{3}$

38.4. $P(\overline{B} \mid C) = \dfrac{P(\overline{B} \cap C)}{P(C)} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}} = \dfrac{3}{4}$

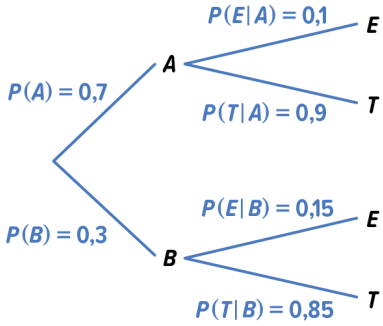
Página 128

39.1. A: "a bicicleta é do modelo A"

B: "a bicicleta é do modelo B"

E: "a bicicleta é elétrica"

T: "a bicicleta é tradicional"



39.2. a) $P(A \cap T) = P(A) \times P(T \mid A) = 0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}63$

b) $P(T \mid B) = 0{,}85$

Página 129 – Tarefa 5

1.1. $a = P(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ $\quad b = P(B) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$c = P(F \mid A) = 0{,}4 = \dfrac{2}{5}$ $\quad d = P(V \mid A) = 0{,}6 = \dfrac{3}{5}$

$e = P(F \mid B) = 0{,}3 = \dfrac{3}{10}$ $\quad f = P(V \mid B) = 0{,}7 = \dfrac{7}{10}$

1.2. a) $P(A \cap F) = P(A) \times P(F \mid A) = \dfrac{1}{3} \times 0{,}4 = \dfrac{2}{15}$

b) $P(A \cap V) = P(A) \times P(V \mid A) = \dfrac{1}{3} \times 0{,}6 = \dfrac{1}{5}$

c) $P(B \cap F) = P(B) \times P(F \mid B) = \dfrac{2}{3} \times 0{,}3 = \dfrac{1}{5}$

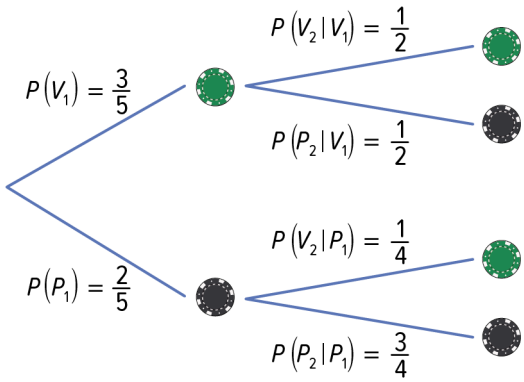
d) $P(B \cap V) = P(B) \times P(V \mid B) = \dfrac{2}{3} \times 0{,}7 = \dfrac{7}{15}$

2. V_1: "sai ficha verde na primeira extração"

P_1: "sai ficha preta na primeira extração"

V_2: "sai ficha verde na segunda extração"

P_2: "sai ficha preta na segunda extração"



$$P(V_1 \cap V_2) + P(P_1 \cap P_2) =$$
$$= P(V_1) \times P(V_2 \mid V_1) + P(P_1) \times P(P_2 \mid P_1)$$
$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} =$$
$$= \frac{3}{10} + \frac{6}{20} = \frac{3}{5}$$

Página 130

40.1. N.º total de candidatos: $82 + 65 = 147$

N.º de mulheres que foram chamadas para a entrevista: 30

M: "ser mulher"

E: "ser chamada para a entrevista"

$P(M \cap E) = \frac{30}{147} = \frac{10}{49}$

40.2. $P(H \mid E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{42}{147}}{\frac{42+30}{147}} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12}$

Página 131 – Tarefa 6

1.1.

	***E*: É europeu**	**$\overline{E}$: Não é europeu**	
***G*: Fala inglês**	102	27	129
$\overline{G}$: Não fala inglês	6	15	21
	108	42	150

a) $P(G) = \frac{129}{50} = \frac{43}{50}$

b) $P(E \cap G) = \frac{102}{150} = \frac{17}{25}$

c) $P(E \cap \overline{G}) = \frac{6}{150} = \frac{1}{25}$

d) $P(\overline{E} \cap \overline{G}) = \frac{15}{150} = \frac{1}{10}$

e) $P(\overline{E}) = \frac{42}{150} = \frac{7}{25}$

1.2. a) $P(\overline{E} \mid G) = \frac{P(\overline{E} \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{27}{150}}{\frac{129}{150}} = \frac{27}{129} = \frac{9}{43} \approx 0{,}209$

b) $P(\overline{G} \mid \overline{E}) = \frac{P(\overline{G} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{\frac{15}{150}}{\frac{42}{150}} = \frac{15}{42} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$

1.3. a) $P(G \mid E) = \frac{P(G \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{102}{150}}{\frac{108}{150}} = \frac{102}{108} = \frac{17}{18} \approx 0{,}944$

b) $P(G \mid \overline{E}) = \frac{P(G \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{\frac{27}{150}}{\frac{42}{150}} = \frac{27}{42} = \frac{9}{14} \approx 0{,}643$

c) $P(\overline{E} \mid \overline{G}) = \frac{P(\overline{E} \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{\frac{15}{150}}{\frac{21}{150}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \approx 0{,}714$

2.1. *N*: "é português"; *R*: "recomenda o hotel"

- $P(R) = 0{,}85$
- $P(\overline{N}) = 0{,}64$

Logo: $P(\overline{R}) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$; $P(N) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

- $P(\overline{R} \mid N) = 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{R} \cap N)}{P(N)} = 0{,}1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{R} \cap N) = 0{,}1 \times 0{,}36$

$\Leftrightarrow P(\overline{R} \cap N) = 0{,}036$

	N	$\overline{N}$	
R	0,324	0,526	0,85
$\overline{R}$	0,036	0,114	0,15
	0,36	0,64	1

Donde se conclui que:

- $P(N \cap R) = 0{,}36 - 0{,}036 = 0{,}324$
- $P(\overline{N} \cap R) = 0{,}85 - 0{,}324 = 0{,}526$
- $P(\overline{N} \cap \overline{R}) = 0{,}64 - 0{,}526 = 0{,}114$

2.2. a) $P(R \cap \overline{N}) = 0{,}526$

b) $P(\overline{N} \mid R) = \frac{P(\overline{N} \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}526}{0{,}85} = \frac{263}{425}$

c) $P(N \mid \overline{R}) = \frac{P(N \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{0{,}036}{0{,}15} = 0{,}24$

Página 132 – Pratica

41. $A = \{1, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$

$P(A \mid B) = \frac{2}{3}$

$P(B \mid A) = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$ Verifica-se que $P(B|A) = 1$, pois todos os divisores de 5 são números ímpares.

42.1. A: "a soma dos números é par"

Casos favoráveis a *A*: $(1,5)$; $(1,7)$; $(2,6)$; $(3,5)$; $(3,7)$; $(4,6)$

B: "o produto dos números é par"

Casos favoráveis a *B*: $(1,6)$; $(2,5)$; $(2,6)$; $(2,7)$; $(3,6)$; $(4,5)$; $(4,6)$; $(4,7)$

42.2. a) $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{8}{12}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b) $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

43.1.
- $a = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
- $b = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
- $c = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

43.2. a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

b) $P(D \mid A) = 0{,}2$

c) $P(C \mid B) = 0{,}7$

43.3. a) $P(A \cap C) = P(A) \times P(C \mid A) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$

b) $P(A \cap D) = P(A) \times P(D \mid A) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$

c) $P(B \cap C) = P(B) \times P(C \mid B) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$

d) $P(B \cap D) = P(B) \times P(D \mid B) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$

44. $P(A) + P(B) = 1{,}1$ e $P(A) = 0{,}7$, logo $P(B) = 0{,}4$.

$P(\overline{A \cup B}) = 0{,}2 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}2$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}8 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8$

$\Leftrightarrow 1{,}1 - P(A \cap B) = 0{,}8 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}3$

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4}$

A opção correta é a **(A)**.

Página 133 – Pratica

45.1. Informação que consta da árvore de probabilidade:

$P(R) = \frac{3}{5}$, $P(\overline{V} \mid R) = \frac{2}{3}$ e $P(V \mid \overline{R}) = \frac{5}{8}$

Daqui se conclui que:

- $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
- $P(\overline{V} \mid R) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{V} \cap R)}{P(R)} = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow P(\overline{V} \cap R) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(\overline{V} \cap R) = \frac{2}{5}$

- $P(V \mid \overline{R}) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{P(V \mid \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow P(V \mid \overline{R}) = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(V \mid \overline{R}) = \frac{1}{4}$

Sabe-se que o número de alunos do 12.º ano é 240.

- $\frac{3}{5} \times 240 = 144$
- $\frac{2}{5} \times 240 = 96$
- $\frac{1}{4} \times 240 = 60$
- $144 - 96 = 48$
- $96 - 60 = 36$
- $48 + 60 = 108$
- $96 + 36 = 132$

	V	$\overline{V}$	
R	48	96	144
$\overline{R}$	60	36	96
	108	132	240

45.2. $P(\overline{V} \mid \overline{R}) = ?$

$P(\overline{V} \mid \overline{R}) = \frac{P(\overline{V} \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{\frac{36}{240}}{\frac{96}{240}} = \frac{36}{96} = \frac{3}{8}$

46. E: "está inscrito em escalada"

R: "está inscrito em *rafting*"

$P(E \cup R) = 1$, $P(\overline{E} \cap R) = \frac{1}{2}$ e $P(R \mid E) = \frac{2}{5}$

46.1.
- $P(\overline{E} \cap R) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(R) - P(E \cap R) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(R) = \frac{1}{2} + P(E \cap R)$

- $P(R \mid E) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{2} P(R \cap E) = P(E)$
- $P(E \cup R) = 1 \Leftrightarrow P(E) + P(R) - P(E \cap R) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} P(R \cap E) + \frac{1}{2} + \cancel{P(E \cap R)} - \cancel{P(E \cap R)} = 1$

$\Leftrightarrow P(R \cap E) = \frac{1}{5}$

46.2. $P\left(\left(E \cap \overline{R}\right) \mid \left(\overline{R \cap E}\right)\right) = \frac{P\left(\left(E \cap \overline{R}\right) \cap \left(\overline{R \cap E}\right)\right)}{P\left(\overline{R \cap E}\right)}$

$= \frac{P(E \cap \overline{R})}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{8}$

Cálculo auxiliar:

$$P\left(E\cap\overline{R}\right)=P(E)-P(E\cap R)=$$
$$=\frac{5}{2}P(R\cap E)-P(E\cap R)$$
$$=\frac{3}{2}P(R\cap E)$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

Página 134

47.1. $A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(B)=\frac{6\times3}{36}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

$P(A\mid B)=P(A)$, logo A e B são independentes.

47.2. $P(A)=\frac{1}{6}$

$C=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$$P(C)=\frac{5}{36}$$

$$P(A\mid C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{1}{5}$$

$P(A\mid C)\neq P(A)$, logo A e C não são independentes.

48. Como A e B são acontecimentos independentes, então $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

$$P(A\cap B)=0{,}15\Leftrightarrow P(A)\times P(B)=0{,}15\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5\times P(B)=0{,}15\Leftrightarrow P(B)=0{,}3$$

Página 135 – Tarefa 7

1.1. **a)** $A=\{48\}$ e $B=\{20,55,60,85\}$

$P(A)=\frac{1}{15}$ e $P(B)=\frac{4}{15}$

Os acontecimentos A e B são possíveis porque $P(A)>0$ e $P(B)>0$.

b) $A\cap B=\{\ \}$, logo os acontecimentos A e B são incompatíveis.

1.2. $P(A\cap B)=0$ e $P(A)\times P(B)\neq0$

Como $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$, então os acontecimentos A e B não são independentes, ou seja, são dependentes.

2. Sabe-se que $P(A)\neq0$, $P(B)\neq0$ e $P(A\cap B)=0$

Logo, $P(A)\times P(B)\neq0$ e, consequentemente, $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$.

Donde se conclui que A e B são dependentes.

3.1. Sejam A e B dois acontecimentos independentes, então: $\underline{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}_{(1)}$

Pretende-se provar que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também são independentes, ou seja, $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)\times P\left(\overline{B}\right)$.

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=$$
$$=1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)_{(1)}$$
$$=P\left(\overline{A}\right)-P(B)+P(A)\times P(B)$$
$$=P\left(\overline{A}\right)-P(B)\left(1-P(A)\right)$$
$$=P\left(\overline{A}\right)-P(B)\times P\left(\overline{A}\right)$$
$$=P\left(\overline{A}\right)\left(1-P(B)\right)=P\left(\overline{A}\right)\times P\left(\overline{B}\right)$$

3.2. **a)** $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0{,}76\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=0{,}76$

$$\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)=0{,}76\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}24$$

$P(A)\times P(B)=0{,}6\times0{,}4=0{,}24$

Como $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$, então os acontecimentos A e B são independentes.

b) $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=$
$=1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)$
$=1-\left(0{,}6+0{,}4-0{,}24\right)=0{,}24$

3.3. L: “o Luís participar”
M: “a Mariana participar”
Os acontecimentos L e M são independentes, ou seja, $P(L\cap M)=P(L)\times P(M)$.

$P(L)=0{,}6$ e $P(M)=0{,}8$

Então, $P(L\cap M)=0{,}6\times0{,}8=0{,}48$.

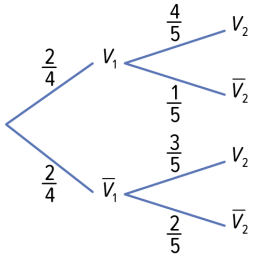
$$P\left(\overline{L}\cap\overline{M}\right)=P\left(\overline{L\cup M}\right)=1-P(L\cup M)=$$
$$=1-\left(P(L)+P(M)-P(L\cap M)\right)=$$
$$=1-(0{,}6+0{,}8-0{,}48)=0{,}08$$

Página 136

49.1. Caixas: *A* e *B*

V_1: "a primeira bola retirada é vermelha"

V_2: "a segunda bola retirada é vermelha"



$$P\left(\overline{V_2}\right)=P\left(V_1\cap\overline{V_2}\right)+P\left(\overline{V_1}\cap\overline{V_2}\right)=$$
$$=P(V_1)\times P\left(\overline{V_2}\,|\,V_1\right)+P\left(\overline{V_1}\right)\times P\left(\overline{V_2}\,|\,\overline{V_1}\right)$$
$$=\frac{2}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

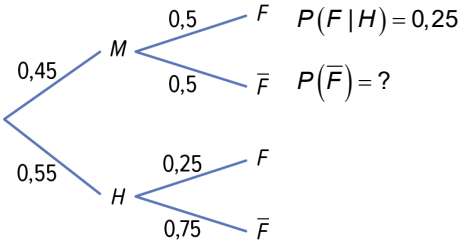
49.2. $P(V_2)=P(V_1\cap V_2)+P\left(\overline{V_1}\cap V_2\right)$
$$=P(V_1)\times P(V_2\,|\,V_1)+P\left(\overline{V_1}\right)\times P\left(V_2\,|\,\overline{V_1}\right)$$
$$=\frac{2}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$$

Página 137

50.1. *M*: "ser mulher"; $P(M)=0{,}45$

H: "ser homem"; $P(M)=1-P(H)=0{,}55$

F: "passar à 2.ª fase"; $P(F\,|\,M)=0{,}5$



$$P\left(\overline{F}\right)=P\left(M\cap\overline{F}\right)+P\left(H\cap\overline{F}\right)$$
$$=P(M)\times P\left(\overline{F}\,|\,M\right)+P(H)\times P\left(\overline{F}\,|\,H\right)$$
$$=0{,}45\times0{,}5+0{,}55\times0{,}75=0{,}6375\ (63{,}75\%)$$

50.2. $P(M\,|\,F)=\dfrac{P(M\cap F)}{P(F)}=\dfrac{0{,}45\times0{,}5}{1-0{,}6375}=$

$$=\frac{0{,}225}{0{,}3625}\approx0{,}62\ (62\%)$$

Página 138 – Consolida

1.1.
$$\begin{cases}P\left(A\cap\overline{B}\right)=0{,}4\\P(A\cup B)=0{,}78\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P(A)-P(A\cap B)=0{,}4\\P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}78\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\\0{,}4+P(B)=0{,}78\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\\P(B)=0{,}38\end{cases}$$

A opção correta é a **(D)**.

1.2. $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=\dfrac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{0{,}4}{0{,}62}=\dfrac{20}{31}$

A opção correta é a **(C)**.

2.
- $P\left(\overline{B}\right)=0{,}6\Leftrightarrow1-P(B)=0{,}6\Leftrightarrow P(B)=0{,}4$
- $P(B\,|\,A)=0{,}4\Leftrightarrow\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=0{,}4$

$\Leftrightarrow P(B\cap A)=0{,}4P(A)$
- $P(A\cup B)=0{,}75\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}75$

$\Leftrightarrow P(A)+0{,}4-0{,}4P(A)=0{,}75\Leftrightarrow0{,}6P(A)=0{,}35$

$\Leftrightarrow P(A)=\dfrac{7}{12}$

3. *A*: "a rifa ser premiada"

B: "a rifa corresponder a bilhetes para um espetáculo"

$P(B\,|\,A)=\dfrac{1}{3}$ e $P(A\cap B)=\dfrac{1}{9}$

$$P(B\,|\,A)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{9}}{P(A)}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{3}$$

$\dfrac{1}{3}\times72=24$

Há 24 rifas premiadas.

4. *A*: "a primeira bola retirada é vermelha"

B: "a segunda bola retirada é azul"

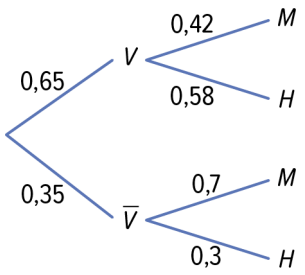
n: número de bolas vermelhas

$25-n$: número de bolas azuis

$$P(A\cap B)=\frac{3}{8}P(A)\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{3}{8}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(B\,|\,A)=\frac{3}{8}\Leftrightarrow\frac{25-n}{24}=\frac{3}{8}\Leftrightarrow n=16$$

Inicialmente, havia 16 bolas vermelhas e 9 bolas azuis na caixa.

5. *M*: "ser mulher"; *H*: "ser homem"; *V*: "ter votado"



5.1. $P(M \cap \overline{V}) = P(\overline{V}) \times P(M \mid \overline{V}) = 0,35 \times 0,7 = 0,245$

5.2. $P(H \mid V) = 0,58$

5.3. $P(V \mid M) = \dfrac{P(V \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(V) \times P(M \mid V)}{P(V \cap M) + P(\overline{V} \cap M)} =$

$= \dfrac{0,65 \times 0,42}{0,65 \times 0,42 + 0,35 \times 0,7} = \dfrac{0,273}{0,518} \approx 0,53$

5.4. $P(\overline{V} \mid H) = \dfrac{P(\overline{V} \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0,35 \times 0,3}{1 - 0,518} = \dfrac{0,105}{0,482} \approx 0,22$

Página 139 – Consolida

6.1.

Turma	Positivas	Negativas	Total
A	20	4	24
B	18	8	26
Total	38	12	50

Cálculos auxiliares:

- $\dfrac{2}{3} \times 12 = 8$ e $12 - 8 = 4$
- $50 - 12 = 38$
- **Turma A:** $\dfrac{1}{6}$ dos alunos teve negativa (4 alunos)

Logo, $\dfrac{5}{6}$ dos alunos obtiveram positiva

$(5 \times 4 = 20$ alunos$)$

- $38 - 20 = 18$; $20 + 4 = 24$; $18 + 8 = 26$

6.2. *A*: "pertencer à turma A"

C: "obter positiva no teste"

$P(A \mid C) = \dfrac{20}{38} = \dfrac{10}{19}$

7.1. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,67 \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0,67$

$\Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,67 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,33$

$P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,55 = 0,33$

Como $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, conclui-se que os acontecimentos *A* e *B* são independentes.

7.2. $P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} =$

$= \dfrac{0,55 - 0,33}{0,55} = 0,4$

8. *A*: "a primeira bola é vermelha"

B: "a segunda bola é verde"

n: número de bolas vermelhas

$15 - n$: número de bolas verdes

$P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{4}{7} \Leftrightarrow \dfrac{14 - n}{14} = \dfrac{4}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14 - n = 8 \Leftrightarrow n = 6$

A caixa contém 6 bolas vermelhas e 9 bolas verdes.

$P(\underbrace{A \cap B}_{\substack{\text{a 1.ª bola retirada é vermelha e a 2.ª é verde}}}) = \dfrac{6}{15} \times \dfrac{9}{14} = \dfrac{54}{210} = \dfrac{9}{35}$

9.1. $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{7}{12} \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{7}{12} \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{\frac{3}{5}} = \dfrac{7}{12}$

$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = \dfrac{7}{20} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} - P(A \cap B) = \dfrac{7}{20}$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{3}{20}$

$b = P(A \cap B) = \dfrac{3}{20}$

$a = P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{7}{20}$

$c = P(\overline{A} \cap B) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{1}{4}$

9.2. $P(B) = b + c = \dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{20}$

$P(A) \times P(B) = \dfrac{7}{20} \times \dfrac{13}{20} = \dfrac{91}{400}$

$P(A \cap B) = \dfrac{3}{20}$

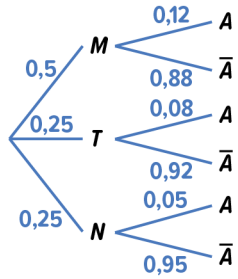
Como $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, conclui-se que os acontecimentos *A* e *B* não são independentes.

10.1. *M*: "escolher o voo da manhã"

T: "escolher o voo da tarde"

N: "escolher o voo da noite"

A: "chegar atrasada"



10.2. $P(\overline{A}) = P(M \cap \overline{A}) + P(T \cap \overline{A}) + P(N \cap \overline{A})$

$= P(M) \times P(\overline{A} \mid M) + P(T) \times P(\overline{A} \mid T) +$

$+ P(N) \times P(\overline{A} \mid N) =$

$= 0,5 \times 0,88 + 0,25 \times 0,92 + 0,25 \times 0,95$

$= 0,9075 \ (90,75\%)$

Página 140 – Avalia 3 – Parte 1

1. $A = \{23, 31, 45\}$; $B = \{8, 10, 12\}$; $C = \{10, 45\}$

$P(C \mid A) = \frac{1}{3}$; $P(C \mid B) = \frac{1}{3}$

Logo, $P(C \mid A) + P(C \mid B) = \frac{2}{3}$ e

$P(C \mid A) - P(C \mid B) = 0$.

A opção correta é a **(C)**.

2. $P(M \cup T) = 1$; $P(M) = 0,72$; $P(T) = 0,36$

$P(M) + P(T) - P(M \cap T) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,72 + 0,36 - P(M \cap T) = 1 \Leftrightarrow P(M \cap T) = 0,08$

$P(M \mid T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,08}{0,36} = 0,(2)$

A opção correta é a **(A)**.

3. Sendo *A* e *B* dois acontecimentos independentes, então sabe-se que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$P(\overline{A \cup B}) = 0,3 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,7 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7$

$\Leftrightarrow 0,6 + P(B) - 0,6 \times P(B) = 0,7 \Leftrightarrow 0,4P(B) = 0,1$

$\Leftrightarrow P(B) = 0,25$

A opção correta é a **(D)**.

4. **I:** acontecimento impossível (só há uma bola azul, logo, não é possível, ao extrair duas bolas sem reposição, obter duas bolas azuis).

I: c)

II: $P = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5} = 0,2$ **II – a)**

III: $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$ **III – b)**

IV: $P = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{6}$ **IV – b)**

Página 141 – Avalia 3 – Parte 2

1.1. $\Omega = \{16, 17, 18, 19, 26, 27, 28, 29, 36, 37, 38, 39, 46, 47, 48, 49\}$

1.2. *A*: "o algarismo das unidades é múltiplo do das dezenas"

B: "a soma dos algarismos é 10"

$A = \{16, 17, 18, 19, 26, 28, 36, 39, 48\}$

$B = \{19, 28, 37, 46\}$

$A \cap B = \{19, 28\}$

$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{9}{16}} = \frac{2}{9}$

$P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Como $P(B \mid A) \neq P(B)$, então conclui-se que o acontecimento *B* não é independente de *A*.

2. $P(A) = 0,8$; $P(E \mid A) = 0,6$; $P(E \mid B) = 0,75$

2.1. **a)** • $P(B) = 1 - P(A) = 0,2$

• $P(E \mid A) = 0,6 \Leftrightarrow \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = 0,6$

$\Leftrightarrow P(E \cap A) = 0,6 \times 0,8 \Leftrightarrow P(E \cap A) = 0,48$

Logo, $P(\overline{E} \cap A) = 0,8 - 0,48 = 0,32$.

• $P(E \mid B) = 0,75 \Leftrightarrow \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = 0,75$

$\Leftrightarrow P(E \cap B) = 0,75 \times 0,2 \Leftrightarrow P(E \cap B) = 0,15$

Logo, $P(E \cap B) = 0,2 - 0,15 = 0,05$

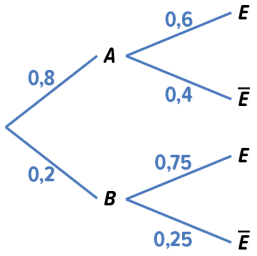
$P(E) = 0,48 + 0,15 = 0,63$

$P(\overline{E}) = 0,32 + 0,05 = 0,37$

Tabela de contingência:

	A	B	
E	0,48	0,15	0,63
$\overline{E}$	0,32	0,05	0,37
	0,8	0,2	1

b) Árvore de probabilidades:



2.2. a) $P(A \cap \overline{E}) = P(A) \times P(\overline{E} \mid A) = 0,8 \times 0,4 = 0,32$

b) $P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E)$

$= P(A) \times P(E \mid A) + P(B) \times P(E \mid B)$

$= 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,75 = 0,63$

c) $P(B \mid \overline{E}) = \dfrac{P(B \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(B) \times P(E \mid B)}{P(A \cap \overline{E}) + P(B \cap \overline{E})} =$

$= \dfrac{0,2 \times 0,25}{0,8 \times 0,4 + 0,2 \times 0,25} = \dfrac{0,05}{0,37} \approx 0,14$

3.1. C: "Fizeram reserva para o Museu da Ciência"

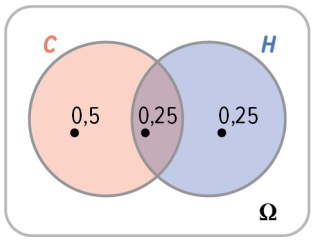
H: "Fizeram reserva para o Museu de História Natural"

$P(C \cup H) = 1;\ P(H) = 0,5;\ P(C) = 0,75$

$P(C \cup H) = 1 \Leftrightarrow P(C) + P(H) - P(C \cap H) = 1$

$\Leftrightarrow 0,75 + 0,5 - P(C \cap H) = 1 \Leftrightarrow P(C \cap H) = 0,25$

$0,5 - 0,25 = 0,25;\ 0,75 - 0,25 = 0,5$



3.2. $P(H \mid C) = ?$

$P(H \mid C) = \dfrac{P(H \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,25}{0,75} = \dfrac{1}{3}$

Página 142 – Tarefa inicial

1.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2.1. Saldos possíveis: $+9€$, $0€$ ou $-1€$

2.2. A: "o saldo é 9 €" (a soma é 2 ou 12)

$P(A) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

B: "o saldo é de 0 €" (a soma é 6, 7 ou 8)

$P(B) = \dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$

C: "o saldo é de $-1€$" (a soma é 3, 4, 5, 9, 10 ou 11)

$P(C) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

2.3. $\text{"Valor esperado"} = 9 \times \dfrac{1}{18} + 0 \times \dfrac{4}{9} + (-1) \times \dfrac{1}{2} = 0$

Página 143

51.1. X: "número de cubos que fica acima do cubo amarelo"

Neste caso, a variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1 e 2.

51.2. a) $P(X = 1) = \dfrac{\overbrace{2 \times 1}^{2!}}{3!} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$X = 1 \rightarrow$ o cubo amarelo fica no meio

b) $P(X = 0) = \dfrac{\overbrace{2 \times 1}^{2!}}{3!} = \dfrac{1}{3}$

$X = 0 \rightarrow$ o cubo amarelo fica em cima

52.

Peça	N.º total de pintas	Divisores	X
	1	1	1
	5	1 e 5	2
	6	1, 2, 3 e 6	4
	8	1, 2, 4 e 8	4
	9	1, 3 e 9	3

X: "número de divisores do número total de pintas da peça retirada"

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Página 144

53.1.

+	–1	1	1	1	2	2
–1	–2	0	0	0	1	1
1	0	2	2	2	3	3
1	0	2	2	2	3	3
1	0	2	2	2	3	3
2	1	3	3	3	4	4
2	1	3	3	3	4	4

X: "soma dos números saídos nos dois lançamentos"

A variável X pode tomar os valores: -2 , 0, 1, 2, 3 e 4

Tabela de distribuição de probabilidade da variável X:

x_i	**–2**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{4}{36}$

53.2. a) $P(X < 0) = P(X = -2) = \frac{1}{36}$

b) $P(X = 3) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

c) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$

$= \frac{9}{36} + \frac{12}{26} + \frac{4}{36} = \frac{25}{36}$

54.1. $P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 7) = 1 \Leftrightarrow$

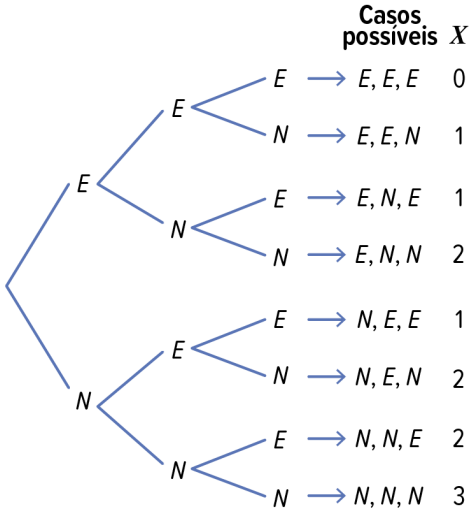
$\Leftrightarrow 2a + a + 2a = 1 \Leftrightarrow 5a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$

Então, $P(Y = 5) = \frac{1}{5}$.

54.2. $P(Y \neq 7) = P(Y = 4) + P(Y = 5) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Página 145 – Tarefa 8

1.1.



X: "número de vezes que sai face nacional (N)"

A variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1, 2 e 3.

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

1.2. A: "ocorrer pelo menos duas vezes face nacional"

$P(A) = P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

B: "ocorrer, no máximo, uma vez face nacional"

$P(B) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Então, $P(A) = P(B)$.

2.

+	1	2	2
1	–	3	3
2	–	–	4
2	–	–	–

Valor da despesa: 3 €

X: "o valor, em euros, que recebe de troco"

A variável aleatória X pode tomar os valores 0 e 1.

A função de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	**0**	**1**
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

3.1. X: "soma do número de moedas que os jogadores levam a jogo"

Como cada jogador coloca numa das mãos até ao máximo de três moedas, então a variável aleatória X toma os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

3.2. Recorrendo a um diagrama em árvore, tem-se:

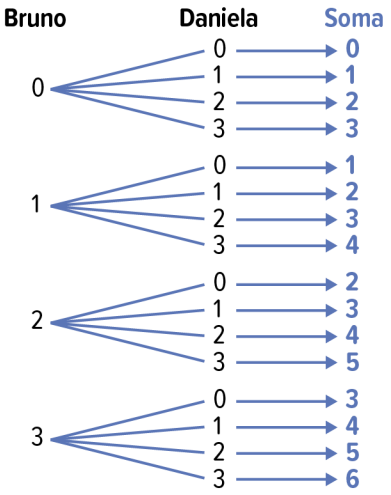


Tabela de distribuição de probabilidades da variável X:

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

3.3. Palpite do Bruno: 4 $\quad P(X=4)=\frac{3}{16}$

Palpite da Daniela: 3 $\quad P(X=3)=\frac{4}{16}$

$P(X=3)>P(X=4)$

A Daniela tem maior probabilidade de vencer.

3.4. $P(X=3)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}=0{,}25$

$0{,}25\times 92=23$

Neste caso, é de esperar que a soma do número de moedas seja igual a 3 em 23 jogadas.

Página 146 – Pratica

55.1. Custo da jogada: 20 €

Valor obtido na roleta		Saldo do jogador	
0 €	→	–20 €	1 setor
5 €	→	–15 €	2 setores
20 €	→	0 €	1 setor
50 €	→	30 €	2 setores

X: "saldo, em euros, obtido na jogada"

A variável aleatória X toma os valores -20, -15, 0 e 30.

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é:

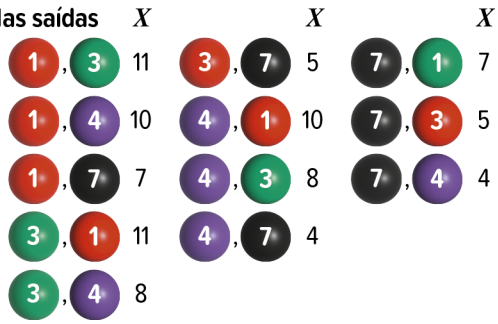
x_i	**–20**	**–15**	**0**	**30**
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

55.2. $P(X<0)=P(X=-20)+P(X=-15)=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$P(X>0)=P(X=30)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(X<0)>P(X>0)$, donde se conclui que, numa jogada, é mais provável ter prejuízo.

56.1. X: "soma dos números das bolas não retiradas"



A variável aleatória X toma os valores 4, 5, 7, 8, 10 e 11.

A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	**4**	**5**	**7**	**8**	**10**	**11**
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$

56.2. a) $P(X=10)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

b) $P(5<X<10)=P(X=7)+P(X=8)+\frac{2}{12}+\frac{2}{12}$

$=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

56.3. $P(X\geq k)=0{,}5$ e k é par

$P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=10)+P(X=11)=$

$=3\times\frac{2}{12}=\frac{1}{2}=0{,}5$. Então, $k=8$.

A opção correta é a **(C)**.

Página 147 – Pratica

57. X: "produto dos números das bolas retiradas"

A variável aleatória X toma os valores 0, 1, 2 e 4.

Então, sabe-se que $a=2$.

$b=P(X=1)\underbrace{=}_{\text{retirar as 2 bolas com o nº 1}}\frac{^2C_2}{^5C_2}=\frac{1}{10}=0{,}1$

$c=P(X=2)\underbrace{=}_{\text{retirar uma bola com o nº 1 e outra com o nº 2}}\frac{^2C_1\times{}^2C_1}{^5C_2}=\frac{4}{10}=0{,}4$

Conclusão: $a=2$; $b=0{,}1$; $c=0{,}4$

58.1. X: "número de cilindros por cima do cilindro azul"

A variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1, 2, 3 e 4.

- $X=0$, se o cilindro azul ocupar a 1.ª posição a contar de cima para baixo
- $X=1$, se o cilindro azul ocupar a 2.ª posição a contar de cima para baixo
- $X=2$, se o cilindro azul ocupar a 3.ª posição a contar de cima para baixo
- $X=3$, se o cilindro azul ocupar a 4.ª posição a contar de cima para baixo
- $X=4$, se o cilindro azul ocupar a 5.ª posição a contar de cima para baixo

$P(X=0)=P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=$

$=P(X=4)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$

x_i	0	1	2	3	4
$p_i=P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

58.2. n cilindros de cores distintas, entre os quais um cilindro verde

X: "número de cilindros por cima do cilindro verde"

A variável aleatória X toma os valores 0, 1, 2, 3, …, $n-1$.

$P(X=k)\underbrace{=}_{k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}}\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$

Sabe-se que $P(X=7)=5\%=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$.

Donde se conclui que $\frac{1}{n}=\frac{1}{20}$, ou seja, $n=20$.

A opção correta é a **(B)**.

Página 148

59.1.

N.º de lápis	N.º de caixas n_i	Frequência relativa f_i
46	12	$\frac{12}{80}=0{,}15$
49	16	$\frac{16}{80}=0{,}2$
50	28	$\frac{28}{80}=0{,}35$
52	16	$\frac{16}{80}=0{,}2$
53	8	$\frac{8}{80}=0{,}1$
	$N=80$	

59.2. N.º de caixas com mais de 49 lápis: $28+16+8=52$

$\frac{52}{80}\times 100\%=65\%$

65% da amostra tem mais de 49 lápis.

59.3. $\bar{x}=\frac{46\times 12+49\times 16+50\times 28+52\times 16+53\times 8}{80}\approx 50$

Página 149

60.1. a)

N.º do setor	n_i	f_i
1	95	$\frac{95}{500}=0{,}19$
3	190	$\frac{190}{500}=0{,}38$
5	215	$\frac{215}{500}=0{,}43$

b) $\bar{x} = 1\times 0{,}19 + 3\times 0{,}38 + 5\times 0{,}43 = 3{,}48$

$$s = \sqrt{\frac{95(1-3{,}48)^2 + 190(3-3{,}48)^2 + 215(5-3{,}48)^2}{500-1}}$$

$s \approx 1{,}5$

60.2. a) X: "número que ocorre quando se roda a roleta"

A variável aleatória X toma os valores 1, 3 e 5.

$P(X=1) = \frac{1}{5}$ e $P(X=3) = P(X=5) = \frac{2}{5}$

A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

b) $\mu = 1\times\frac{1}{5} + 3\times\frac{2}{5} + 5\times\frac{2}{5} = \frac{17}{5} = 3{,}4$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{5}(1-3{,}4)^2 + \frac{2}{5}(3-3{,}4)^2 + \frac{2}{5}(5-3{,}4)^2}$$

$\sigma \approx 1{,}5$

Página 150

61.1. $P(Y=2) + P(Y=5) + P(Y=8) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + 0{,}4 + 2a = 1 \Leftrightarrow a = 0{,}2$

$P(Y \leq 5) = P(Y=2) + P(Y=5) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$

61.2. $P(Y>2) = P(Y=5) + P(Y=8) = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$

61.3. $\mu = 2\times 0{,}2 + 5\times 0{,}4 + 8\times 0{,}4 = 5{,}6$

61.4. $\sigma = \sqrt{0{,}2(2-5{,}6)^2 + 0{,}4(5-5{,}6)^2 + 0{,}4(8-5{,}6)^2}$

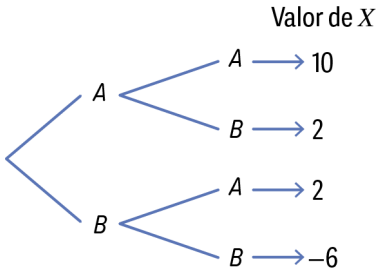
$\sigma \approx 2{,}245$

62.1. X: "ganhos ou prejuízos obtidos no final dos dois lançamentos"

- $X = -6$ se sair duas vezes a face B da moeda
- $X = 2$ se sair uma vez a face A e uma vez a face B da moeda
- $X = 10$ se sair duas vezes a face A da moeda

A variável X pode tomar os valores -6, 2 e 10.

62.2.



x_i	−6	2	10
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

62.3. a) $\mu = -6\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{2}{4} + 10\times\frac{1}{4}$, ou seja, $\mu = 2$

b) $\sigma = \sqrt{\frac{1}{4}(-6-2)^2 + \frac{2}{4}(2-2)^2 + \frac{1}{4}(10-2)^2}$

$\sigma \approx 5{,}66$

Página 151 – Tarefa 9

1. X: "número de letras da palavra escrita no cartão retirado"

1.1.

Palavra	Ouve	Não	Respondas	Por	Impulso
N.º de letras	4	3	9	3	7

E	Nunca	Desistas	Sem	Pensar
1	5	8	3	6

Tabela de distribuição de probabilidades da variável X:

x_i	1	3	4	5	6	7	8	9
$p_i = (X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

1.2. a) $\mu = 1\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{3}{10} + 4\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{10} + 6\times\frac{1}{10}$

$+7\times\frac{1}{10} + 8\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{10} = \frac{49}{10} = 4{,}9$

b) $\sigma = \sqrt{\frac{1}{10}(1-4{,}9)^2 + \frac{3}{10}(3-4{,}9)^2 + \frac{1}{10}(4-4{,}9)^2}$

$\overline{+\frac{1}{10}(5-4{,}9)^2 + \frac{1}{10}(6-4{,}9)^2 + \frac{1}{10}(7-4{,}9)^2}$

$\overline{+\frac{1}{10}(8-4{,}9)^2 + \frac{1}{10}(9-4{,}9)^2} \approx 2{,}427$

1.3. **a)** $P(X>\mu)=P(X>4{,}9)$

$=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)$

$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{5}{10}=0{,}5$

b) $\mu-\sigma=4{,}9-2{,}427=2{,}473$

$\mu+\sigma=4{,}9+2{,}427=7{,}327$

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=P(2{,}473<X<7{,}327)$

$=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$

$=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}=0{,}7$

2.1.

Palavra	Ouve	Não	Respondas	Por	Impulso
N.º de letras	3	2	3	1	3

E	Nunca	Desistas	Sem	Pensar
1	2	3	1	2

Y: "número de pontos obtidos (positivos ou negativos)"

y_i	**+20**	**−*k***	**+30**
$p_i=P(Y=y_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

$\mu=0\Leftrightarrow 20\times\frac{3}{10}-k\times\frac{3}{10}+30\times\frac{4}{10}=0$

$\Leftrightarrow 6-0{,}3k+12=0\Leftrightarrow -0{,}3k=-18\Leftrightarrow k=60$

2.2. $\sigma=\sqrt{\frac{3}{10}(20-0)^2+\frac{3}{10}(-60-0)^2+\frac{4}{10}(30-0)^2}$

$\sigma\approx 39{,}5$

2.3. **Ganho de pontos** $\rightarrow$ $Y=20$ ou $Y=30$

$P(Y>0)=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}=0{,}7$

$180\times 0{,}7=126$

Se o jogo for repetido 180 vezes, estima-se que haja ganho de pontos 126 vezes.

Página 152 – Pratica

63.1. $P(X=2)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=8)=1$

$\Leftrightarrow 0{,}16+p+0{,}34+p=1\Leftrightarrow 2p=0{,}5\Leftrightarrow p=0{,}25$

63.2. **a)** $P(X=5)=0{,}25$

b) $P(X\leq 5)=P(X=2)+P(X=5)=0{,}16+0{,}25$

$=0{,}41$

c) $P(X>4)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=8)$

$=0{,}25+0{,}34+0{,}25=0{,}84$

64. $\mu=1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{4}=4{,}33$

$\sigma\approx 2{,}75$

65.1.

Peça								
Soma do n.º de pintas	7	4	4	6	4	7	6	7

X: "a soma do número de pintas da peça"

A variável aleatória *X* pode tomar os valores 4, 6 e 7.

65.2.

x_i	**4**	**6**	**7**
$p_i=P(X=x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

65.3. $\mu=4\times\frac{3}{8}+6\times\frac{2}{8}+7\times\frac{3}{8}=\frac{45}{8}$

$\sigma=\sqrt{\frac{3}{8}\left(4-\frac{45}{8}\right)^2+\frac{2}{8}\left(6-\frac{45}{8}\right)^2+\frac{3}{8}\left(7-\frac{45}{8}\right)^2}$

$\sigma\approx 1{,}317$

Página 153 – Pratica

66.1. *X*: "saldo obtido numa jogada"

$X=-4$ se sair dado azul

$X=0$ se sair dado verde

$X=10$ se sair dado vermelho

A variável aleatória *X* pode tomar os valores -4, 0 e 10.

66.2.

x_i	**−4**	**0**	**10**
$p_i=P(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

66.3. $\mu=-4\times\frac{2}{5}+0\times\frac{2}{5}+10\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}=0{,}4$

O valor médio do saldo é positivo, logo o jogo é favorável ao Bernardo.

67.1. *X*: "o valor absoluto da diferença entre o número de pintas que ocorre em cada dado"

Recorrendo a uma tabela de dupla entrada, tem-se:

Valor absoluto da diferença	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Tabela da distribuição de probabilidades da variável *X*:

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

67.2. a) $P(X = 6) = 0$

b) $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36}$

$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) $P(X \in \{1, 3, 5\})$

$= P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) = \frac{10}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36}$

$= \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

67.3. $\mu = 0 \times \frac{6}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{8}{36} + 3 \times \frac{6}{36} + 4 \times \frac{4}{36} + 5 \times \frac{2}{36}$

$= \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$

$\sigma = \sqrt{\frac{6}{36}\left(0 - \frac{35}{18}\right)^2 + \frac{10}{36}\left(1 - \frac{35}{18}\right)^2 + \frac{8}{36}\left(2 - \frac{35}{18}\right)^2 + \frac{6}{36}\left(3 - \frac{35}{18}\right)^2 + \frac{4}{36}\left(4 - \frac{35}{18}\right)^2 + \frac{2}{36}\left(5 - \frac{35}{18}\right)^2}$

$\sigma \approx 1{,}43$

68. *X*: "saldo da jogada na roleta A"

x_i	**–2**	**8**
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}$

$\mu_A = -2 \times \frac{8}{10} + 8 \times \frac{2}{10} = 0$

Y: "saldo da jogada na roleta B"

y_i	**–1**	**6**
$p_i = P(Y = y_i)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$

$\mu_B = -1 \times \frac{7}{10} + 6 \times \frac{3}{10} = 1{,}1$

Como $\mu_B > \mu_A$, a roleta B é mais favorável ao jogador.

69. $P(X = 2) + P(X = a) + P(X = 7) + P(X = 8) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p + \frac{p}{2} + 2p + \frac{3p}{2} = 1 \Leftrightarrow 5p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{5} \Leftrightarrow p = 0{,}2$

$\mu = 6{,}1 \Leftrightarrow 2 \times 0{,}2 + a \times 0{,}1 + 7 \times 0{,}4 + 8 \times 0{,}3 = 6{,}1$

$\Leftrightarrow 0{,}1a = 0{,}5 \Leftrightarrow a = 5$

$P(X > 4 \mid X < 8) = \frac{P(X > 4 \wedge X < 8)}{P(X < 8)} =$

$= \frac{0{,}1 + 0{,}4}{1 - 0{,}3} = \frac{0{,}5}{0{,}7} = \frac{5}{7}$

Página 154

70.1.

Altura (cm) x_i	n_i	f_i
[160, 165[	5	0,033
[165, 170[	28	0,187
[170, 175[	34	0,227
[175, 180[	36	0,24
[180, 185[	27	0,18
[185, 190[	13	0,087
[190, 195[	6	0,04
[195, 200[	1	0,006
Total	150	1

70.2. 1,8 m = 180 cm

$P(X > 180) = \frac{27 + 13 + 6 + 1}{150} = \frac{47}{150}$

Página 155

71. Por observação gráfica, sabe-se que $a < b < c$.

Se $\mu_2 > b$, então $\mu_2 = c$.

Se $\mu_3 < c$, então $\mu_3 = a \vee \mu_3 = b$.

Se $\mu_3 < \mu_1$, então $\mu_3 = a$ e $\mu_1 = b$.

A opção correta é a **(B)**.

72. X segue uma distribuição $N(45, 2)$.

Valor médio: $\mu = 45$

Desvio-padrão: $\sigma = 2$

(A) É falsa, pois $P(X \leq 45) = 0{,}5$ e $P(X > 48) < 0{,}5$.

(B) É falsa, pois $P(X \geq 45) = 0{,}5$ e $P(X \leq 48) > 0{,}5$.

(C) É verdadeira, pois $P(X \leq 48) =$

$= P(X \leq 45) + P(45 \leq X \leq 48) = 0{,}5 + P(45 \leq X \leq 48)$

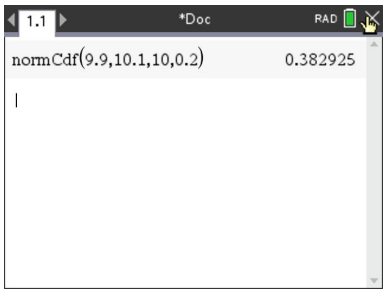
(D) É falsa, pois $P(X \leq 48) = 1 - P(X > 48)$.

A opção correta é a **(C)**.

Página 156

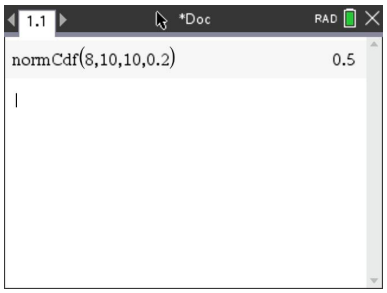
73. X é uma variável aleatória que segue a distribuição $N(10; 0{,}2)$.

73.1. Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$P(9{,}9 \leq X \leq 10{,}1) \approx 0{,}383$

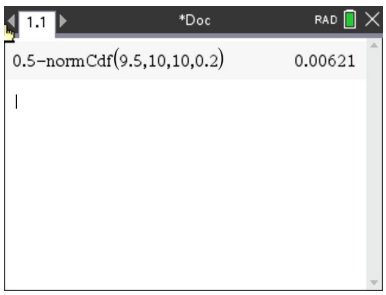
73.2. Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$P(8 \leq X \leq 10) \approx 0{,}5$

73.3. $P(X \leq 9{,}5) = 0{,}5 - P(9{,}5 \leq X \leq 10)$

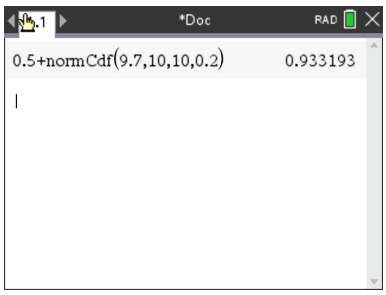
Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $P(X \leq 9{,}5) \approx 0{,}006$.

73.4. $P(X > 9{,}7) = 0{,}5 + P(9{,}7 \leq X \leq 10)$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $P(X > 9{,}7) \approx 0{,}933$.

74. X segue a distribuição $N(2{,}5; 3)$.

Então, $\mu = 25$ e $\sigma = 3$.

$1 - P(21 \leq X \leq 27) = 1 - \underbrace{P(25 - 4 \leq X \leq 25 + 2)}_{\text{área da região representada em (B)}}$

Logo, a área da região colorida representa $1 - P(21 \leq X \leq 27)$ na opção **(A)**.

Página 157 – Tarefa 10

1. A: $N(14; 0{,}8)$; B: $N(20; 1)$; C: $N(25; 2)$

$\mu_A = 14$ e $\sigma_A = 0{,}8$; $\mu_B = 20$ e $\sigma_B = 1$; $\mu_C = 25$ e $\sigma_C = 5$

$P(\mu_A - \sigma_A < X < \mu_A + \sigma_A) = P(13{,}2 < X < 14{,}8)$ $\approx 0{,}683$
$P(\mu_B - \sigma_B < Y < \mu_B + \sigma_B) = P(19 < Y < 21)$ $\approx 0{,}683$
$P(\mu_C - \sigma_C < Z < \mu_C + \sigma_C) = P(23 < Z < 27)$ $\approx 0{,}683$

Os resultados obtidos são iguais.

2.

$P(\mu_A - 2\sigma_A < X < \mu_A + 2\sigma_A) = P(12{,}4 < X < 15{,}6) \approx 0{,}954$
$P(\mu_B - 2\sigma_B < Y < \mu_B + 2\sigma_B) = P(18 < Y < 22) \approx 0{,}954$
$P(\mu_C - 2\sigma_C < Z < \mu_C + 2\sigma_C) = P(21 < Z < 29) \approx 0{,}954$

Os resultados obtidos são iguais.

3. Em relação a qualquer máquina, aproximadamente, 68,3% das peças produzidas têm diâmetro pertencente ao intervalo $]\mu - \sigma, \mu + \sigma[$ e 95,4% pertencem ao intervalo $]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[$.

4. *A*: 800 peças/dia; *B*: 1200 peças/dia;
C: 950 peças/dia

$95{,}4\%$ das peças produzidas têm diâmetro pertencente ao intervalo $]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[$, isto é, são de 1.ª qualidade.

$100\% - 95{,}4\% = 4{,}6\%$ das peças produzidas têm diâmetro não pertencente ao intervalo $]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[$, ou seja, são de qualidade inferior.

Máquina	N.º de peças de qualidade inferior
A	$0{,}046 \times 800 \approx 37$
B	$0{,}046 \times 1200 \approx 55$
C	$0{,}046 \times 950 \approx 44$

Página 158 – Pratica

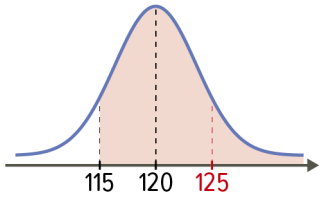
75. As distribuições normais representadas graficamente têm o mesmo valor médio.
Assim sendo, conclui-se que $\mu = 13$.

Os modelos que representam são $N(13, 2)$, $N(13, 1)$ e $N(13, 3)$.

Das distribuições representadas sabe-se que a que tem menor desvio-padrão é a *h* e a que tem maior desvio-padrão é a *f*.
Donde se conclui que:
$f \to N(13, 3)$; $g \to N(13, 2)$; $h \to N(13, 1)$

76. $N(120, \sigma)$

Se $P(X \leq a) > P(X \geq 115)$, então $a > 125$.



Sabe-se que $P(X \geq 115) = P(X \leq 125)$

A opção correta é a **(D)**.

Página 159 – Pratica

77. *X*: "tempo de espera, em minutos, pelo autocarro"
$N(8, \sigma)$

$P(X \geq 12) = 0{,}07$

77.1. $P(X \geq 12) = P(X \geq 8 + 4) = P(X \leq 8 - 4)$

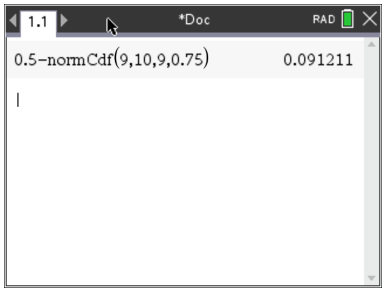
$= P(X \leq 4)$

Então, $P(X \leq 4) = 0{,}07$, ou seja, 7%.

77.2. $P(8 \leq X \leq 12) = 0{,}5 - P(X \geq 12) = 0{,}5 - 0{,}07 = 0{,}43$, ou seja, 43%.

78.1. $N(9; 0{,}75)$

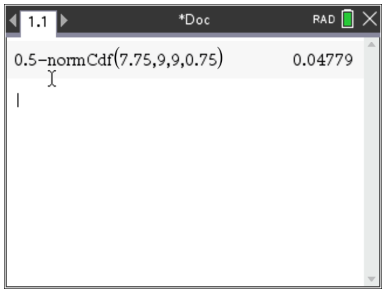
Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$P(X > 10) = 0{,}5 - P(9 \leq X \leq 10) \approx 0{,}091\ (9{,}1\%)$

78.2. 45 min = 0,75 h ; 7 h 45 min = 7,75 h

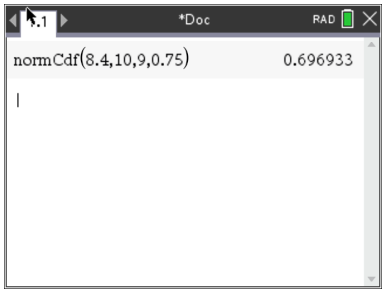
Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$P(X < 7{,}75) = 0{,}5 - P(7{,}75 \leq X \leq 9) \approx 0{,}048\ (4{,}8\%)$

78.3. 24 min = 0,4 h ; 8 h 24 min = 8,4 h

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



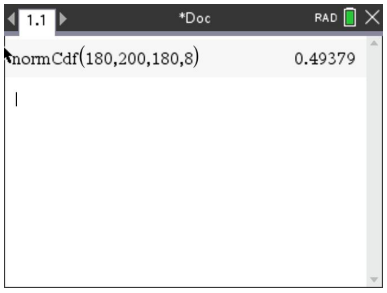
$P(8{,}4 < X < 10) = 0{,}697\ (69{,}7\%)$

79. X: "tempo de dissolução até à completa desintegração"

tempo: em segundos

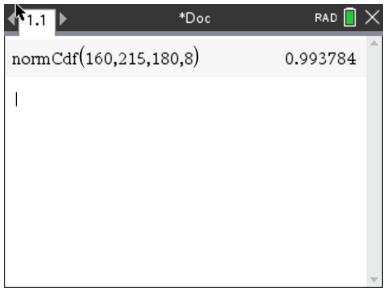
$\mu = 180$ e $\sigma = 8$; $N(180, 8)$

79.1. Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$P(180 \le X \le 200) \approx 0{,}494\ (49{,}4\%)$

79.2. Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



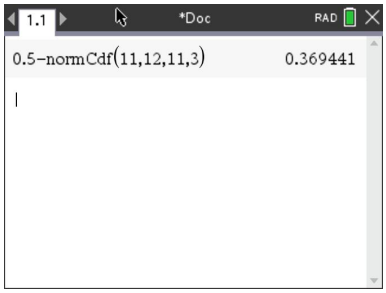
$P(160 \le X \le 215) \approx 0{,}994\ (99{,}4\%)$

80. 500 provas de exame; $N(11, 3)$

X: "classificação das provas, na escala de 0 a 20 valores"

80.1. $P(X \ge 12) = ?$; $P(X \ge 12) = 0{,}5 - P(11 \le X \le 12)$

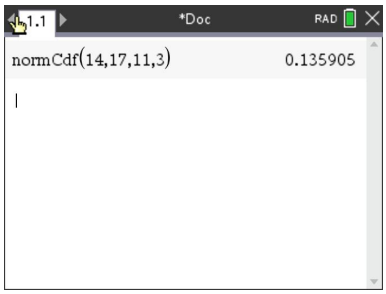
Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$P(X \ge 12) \approx 0{,}37$; $0{,}37 \times 500 = 185$

Estima-se que 185 provas foram classificadas com, pelo menos, 12 valores.

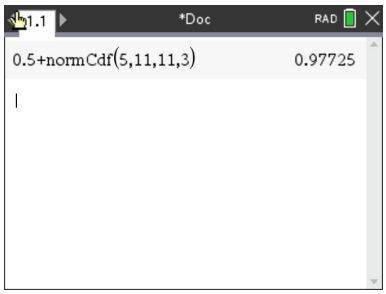
80.2. a) Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $P(14 < X < 17) \approx 0{,}14$.

b) $P(X \ge 5) = P(5 \le X \le 11) + P(X \ge 11) =$

$= P(5 \le X \le 11) + 0{,}5$



Então, $P(X \ge 5) \approx 0{,}98$.

Página 160 – Consolida

1.1. X: "ganho/prejuízo na jogada"

$X = -2$, se sair o número 2, 4 ou 6

$X = 1$, se sair o número 3, 5 ou 7

$X = 3$, se sair o número 1 ou 8

A variável X toma os valores -2 , 1 e 3.

1.2. **Prejuízo:** $X < 0$

$P(X < 0) = P(X = -2) = \frac{3}{8}$

Lucro: $X > 0$

$P(X > 0) = P(X = 1) + P(X = 3) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$

1.3. Função massa de probabilidade da variável X

x_i	–2	1	3
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

2.1. $P(X=2)+P(X=5)+P(X=8)+P(X=10)=1$

$\Leftrightarrow 0{,}23+0{,}9p+0{,}2+p=1 \Leftrightarrow 1{,}9p=0{,}57$

$\Leftrightarrow p=0{,}3$

Então, $P(X=5)=0{,}9\times 0{,}3=0{,}27$ e

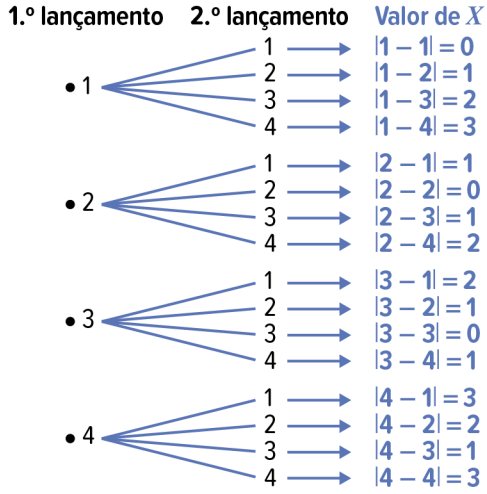
$P(X=10)=0{,}3$.

$P(X<6)=P(X=2)+P(X=5)=0{,}23+0{,}27=0{,}5$

2.2. $P(4<X<9)=P(X=5)+P(X=8)=$

$=0{,}27+0{,}2=0{,}47$

3.1. X: "valor absoluto da diferença dos números dos vértices que ficam voltados para cima".



A variável X toma os valores 0, 1, 2 e 3.

3.2. Tabela de distribuição de probabilidades da variável X:

x_i	0	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$

3.3. a) $P(X=3)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

b) $P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$

c) $P(X>0)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

4.1. $\mu=-1\times 0{,}2+3\times 0{,}3+4\times 0{,}4+5\times 0{,}1=2{,}8$

4.2.

$\sigma=\sqrt{0{,}2(-1-2{,}8)^2+0{,}3(3-2{,}8)^2+0{,}4(4-2{,}8)^2+0{,}1(5-2{,}8)^2}$

$\sigma\approx 1{,}99$

5. $P(X=1)+P(X=a)+P(X=4)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p+0{,}2+3p=1\Leftrightarrow p=0{,}2$

$\mu=3{,}1\Leftrightarrow 1\times 0{,}2+a\times 0{,}2+4\times 0{,}6=3{,}1\Leftrightarrow a=2{,}5$

$P(X<3)=P(X=1)+P(X=2{,}5)=0{,}2+0{,}2=0{,}4$

6. Aposta: 250 pontos

X: "diferença entre o número de pontos que sai na jogada e o número de pontos da aposta".

6.1. $X=-50$ se sair 200 pontos da jogada

$P(X=-50)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

6.2. $X=-150$, se sair 100 pontos na jogada

$X=50$, se sair 300 pontos na jogada

$X=150$, se sair 400 pontos na jogada

$P(X=-150)=P(X=50)=P(X=150)=$

$=P(X=-50)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0{,}25$

x_i	–150	–50	50	150
$p_i = P(X = x_i)$	0,25	0,25	0,25	0,25

6.3. $\mu=-150\times 0{,}25+(-50)\times 0{,}25+50\times 0{,}25+150\times 0{,}25=0$

Como o valor médio é nulo, o jogo considera-se justo.

Página 161 – Consolida

7.1. $P(X=-2)+P(X=3)+P(X=a)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p+\frac{3p}{2}+0{,}4=1\Leftrightarrow \frac{5p}{2}=0{,}6\Leftrightarrow p=0{,}24$

7.2. Sendo $a=5$, tem-se:

$\mu=-2\times 0{,}24+3\times 0{,}36+5\times 0{,}4=2{,}6$

$\sigma=\sqrt{0{,}24(-2-2{,}6)^2+0{,}36(3-2{,}6)^2+0{,}4(5-2{,}6)^2}$

$\sigma\approx 2{,}728$

7.3. $\mu=4{,}6\Leftrightarrow -2\times 0{,}24+3\times 0{,}36+a\times 0{,}4=4{,}6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}4a=4\Leftrightarrow a=10$

8.1. *X*: "número de ases escolhidos"

A variável aleatória *X* pode tomar os valores 0, 1 e 2.

$$P(X=0)=\frac{{}^{3}C_{3}}{{}^{5}C_{3}}=\frac{1}{10}=0{,}1$$

$$P(X=1)=\frac{{}^{2}C_{1}\times{}^{3}C_{2}}{{}^{5}C_{3}}=\frac{6}{10}=0{,}6$$

$$P(X=2)=\frac{{}^{2}C_{2}\times{}^{3}C_{1}}{{}^{5}C_{3}}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

Tabela de distribuição de probabilidades da variável *X*:

x_i	**0**	**1**	**2**
$p_i = P(X=x_i)$	0,1	0,6	0,3

8.2. **a)** $\mu = 0\times 0{,}1+1\times 0{,}6+2\times 0{,}3=1{,}2$

b) $\sigma=\sqrt{0{,}1(0-1{,}2)^2+0{,}6(1-1{,}2)^2+0{,}3(2-1{,}2)^2}$

$\sigma\approx 0{,}6$

c) $P(X>\mu)=P(X>1{,}2)=P(X=2)=0{,}3$

9. *X*: "saldo da jogada"

$X=-p$, se sair número ímpar $\quad P(X=-p)=\frac{5}{9}$

$X=5$, se sair número par $\quad P(X=5)=\frac{4}{9}$

Tabela de distribuição de probabilidades da variável *X*:

x_i	$-p$	**5**
$p_i = P(X=x_i)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

$$\mu=0\Leftrightarrow -p\times\frac{5}{9}+5\times\frac{4}{9}=0\Leftrightarrow -\frac{5p}{9}+\frac{20}{9}=0\Leftrightarrow p=4$$

10.1.



k: número inteiro positivo

Aposta de *k* euros

X: "saldo obtido na jogada"

A variável aleatória *X* pode tomar os valores $4-k$, $5-k$ e $8-k$.

$$P(X=4-k)=\frac{3}{10}=0{,}3$$

$$P(X=5-k)=\frac{4}{10}=0{,}4$$

$$P(X=8-k)=\frac{3}{10}=0{,}3$$

$$\mu=(4-k)\times 0{,}3+(5-k)\times 0{,}4+(8-k)\times 0{,}3=$$
$$=1{,}2-0{,}3k+2-0{,}4k+2{,}4-0{,}3k=5{,}6-k$$

$$\mu>0\wedge k\in\mathbb{Z}^+\Leftrightarrow 5{,}6-k>0\wedge k\in\mathbb{Z}^+\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k<5{,}6\wedge k\in\mathbb{Z}^+$$

O maior valor de *k* para o qual $\mu>0$ é 5.

10.2. Se o valor da aposta for 4 euros, ou seja, se $k=4$, então $\mu=5{,}6-4=1{,}6$.

11.1. *X*: "o número de algarismos iguais a 7 que existem na sequência"

$X=0$, se a sequência não tiver nenhum algarismo 7

$X=1$, se a sequência tiver exatamente um algarismo 7

$X=2$, se a sequência tiver exatamente dois algarismos 7

$X=3$, se a sequência tiver exatamente três algarismos 7

$$P(X=0)=\frac{9^3}{10^3}=0{,}729$$

$$P(X=1)=\frac{3\times 9^2}{10^3}=0{,}243$$

$$P(X=2)=\frac{{}^{3}C_{2}\times 9}{10^3}=0{,}027$$

$$P(X=3)=\frac{1}{10^3}=0{,}001$$

Tabela de distribuição de probabilidades da variável *X*:

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
$p_i = P(X=x_i)$	0,729	0,243	0,027	0,001

11.2. **a)** $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$
$=0{,}729+0{,}243+0{,}027=0{,}999$

b) $P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=0{,}027+0{,}001$
$=0{,}028$

c) $P(X>0)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$
$=0{,}243+0{,}027+0{,}001=0{,}271$

Página 162 – Consolida

12. Modelos normais: $N(a, b)$ e $N(c, d)$

Por observação gráfica, sabe-se que os dois modelos têm o mesmo valor médio, logo $a = c$.

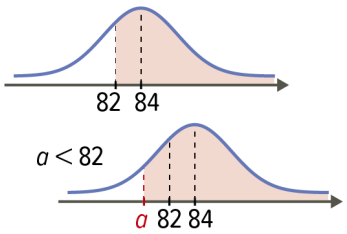
A curva representada a azul corresponde ao modelo normal que o desvio-padrão é menor, logo, $d < b$.

A opção correta é a **(C)**.

13. X: variável aleatória

X segue uma distribuição normal, em que $\mu = 84$.

Sabe-se que $P(X \geq a) > P(X \geq 82)$.



Das afirmações dadas a que é necessariamente verdadeira é a que refere que $a < 82$.

A opção correta é a **(B)**.

14. X: variável aleatória

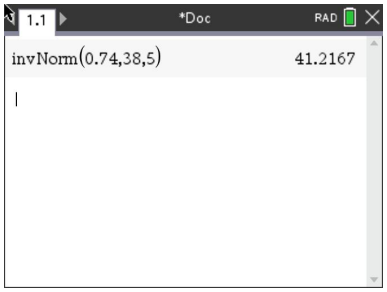
$N(38; 5)$

Sabe-se que $P(X < a) = 0{,}74$ e $P(X > 40) = b$.

14.1. $a = ?$

$P(X < a) = 0{,}74$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



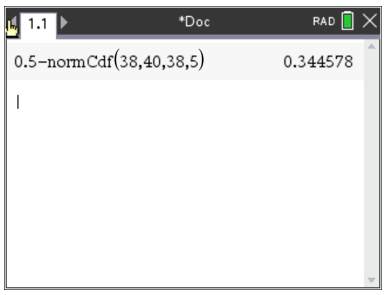
Então, $a \approx 41{,}22$.

A opção correta é a **(D)**.

14.2. $P(X > 40) = b \qquad b = ?$

$P(X > 40) = 0{,}5 - P(38 \leq X \leq 40)$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $b \approx 0{,}345$.

A opção correta é a **(C)**.

15. 5000 alunos

X: "classificação obtida no exame"

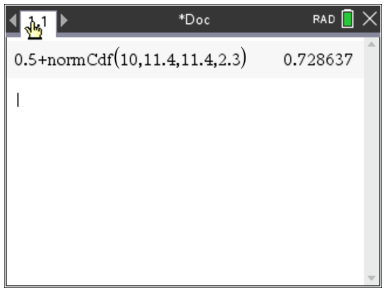
$N(11{,}4; 2{,}3)$

15.1. $P(X \geq 10) = ?$

$P(X \geq 10) = P(10 \leq X \leq 11{,}4) + P(X \geq 11{,}4) =$

$= P(10 \leq X \leq 11{,}4) + 0{,}5$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



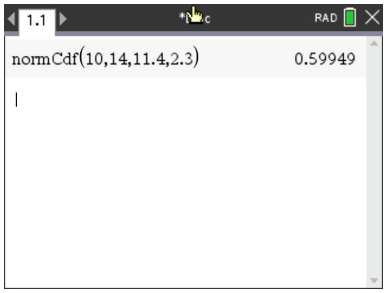
Então, $P(X \geq 10) \approx 0{,}7286$.

$0{,}7286 \times 5000 = 3643$

Estima-se que 3643 estudantes obtiveram uma classificação não inferior a 10.

15.2. $P(10 < X < 14) = ?$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $P(10 < X < 14) \approx 0{,}5995$.

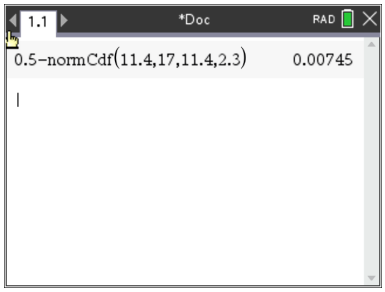
$0{,}5995 \times 5000 = 2997{,}45$

Estima-se que 2997 estudantes obtiveram uma classificação entre 10 e 14.

15.3. $P(X>17)=?$

$P(X>17)=0{,}5-P(11{,}4\le X\le 17)$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $P(X>17)\approx 0{,}00745$.

$0{,}00745\times 5000=37{,}25$

Estima-se que 37 estudantes obtiveram uma classificação superior a 17.

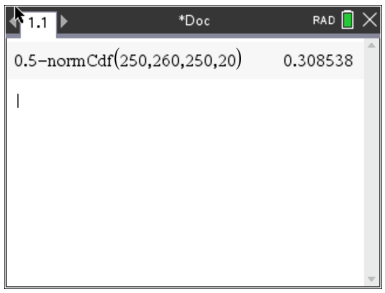
16. X: "sumo dispensado por cada utilização"

$N(250,\,20)$

16.1. $P(X>260)=P(X\ge 250)-P(250\le X\le 260)=$

$=0{,}5-P(250\le X\le 260)$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:

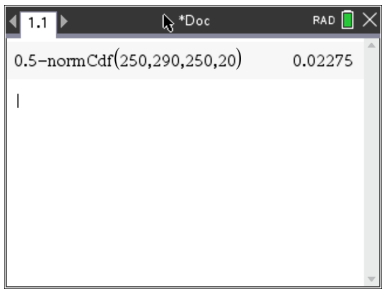


Então, $P(X>260)\approx 0{,}309\ (30{,}9\%)$.

16.2. $P(X\ge 290)=P(X\ge 250)-P(250\le X\le 290)$

$=0{,}5-P(250\le X\le 290)$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $P(X\ge 290)\approx 0{,}023\ (2{,}3\%)$

17. X segue uma distribuição normal.

Como o gráfico é simétrico em relação à reta de equação $x=8$, então $\mu=8$.

$P(X>a)=0{,}82$

Como $P(X>8)=0{,}5$ e $P(X>a)>0{,}5$, conclui-se que $a<8$. Assim, dos valores apresentados, o único que pode corresponder ao valor de a é 5.

A opção correta é a **(A)**.

Página 163 – Consolida

18. $N(45,\,12)$

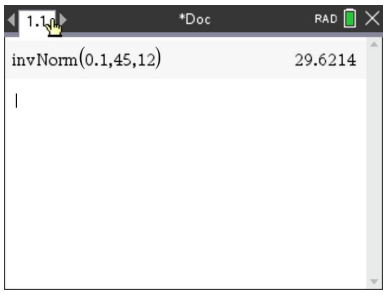
$P(a\le X\le b)=0{,}8$

18.1. $P(X>b)=0{,}5-P(\mu\le X\le b)=0{,}5-\dfrac{0{,}8}{2}=0{,}1$

18.2. $a=?$ e $b=?$

$P(X\le a)=0{,}1$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $a\approx 29{,}621$.

$b=\mu+(\mu-a)\approx 45+(45-29{,}621)\approx 60{,}379$

19. X: "comprimentos, em cm, dos peixes adultos de uma determinada espécie".

$N(20,\,5)$

19.1. $P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0{,}954$

A opção correta é a **(D)**.

19.2. $X<\mu-2\sigma\rightarrow$ proibida a pesca

$\mu-2\sigma=20-2\times 5=10$

$P(X<10)=0{,}5-\dfrac{0{,}954}{2}=0{,}023$

Comprimento mínimo permitido para a pesca: 10 cm

Percentagem protegida dessa população: 2,3%

20. X: "pressão arterial sistólica".
$N(120, 10)$

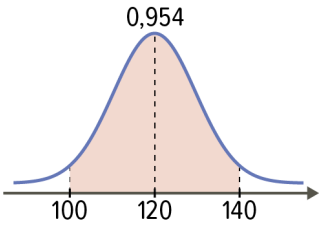
20.1. $P(110 \leq X \leq 130) = P\left(\underbrace{120-10}_{\mu-\sigma} \leq X \leq \underbrace{120+10}_{\mu+\sigma}\right) \approx 0{,}68$

No contexto apresentado, significa que, aproximadamente, 68% da população portuguesa tem pressão arterial sistólica entre 110 e 130 mmHg.

20.2. a) $\mu + 2\sigma = 120 + 2 \times 10 = 140$

Uma pessoa é considerada hipertensa a partir dos 140 mmHg.

b) $P(X > 140) = 0{,}5 - \dfrac{0{,}954}{2} = 0{,}023$



Estima-se que 2,3% da população portuguesa seja hipertensa.

21. X: "quantidade de iogurte, em gramas, colocada por uma máquina em cada embalagem individual"

$N(110, \sigma)$

$P(X \geq 125) = 0{,}15$

R: "a quantidade de iogurte da embalagem é superior a 110 g"

S: "a quantidade de iogurte da embalagem é inferior a 125 g"

$$P(R|S) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{P(110 < X < 125)}{P(X < 125)}$$

$$= \frac{0{,}5 - P(X \geq 125)}{1 - P(X \geq 125)} = \frac{0{,}5 - 0{,}15}{1 - 0{,}15} =$$

$$= \frac{0{,}35}{0{,}85} = \frac{35}{85} = \frac{7}{17}$$

Página 164 – Avalia 4 – Parte 1

1.

$0{,}50 + 1 = 1{,}50$
$0{,}50 + 2 = 2{,}50$
$1 + 1 = 2$
$1 + 2 = 3$
$2 + 2 = 4$

A variável X pode tomar cinco valores distintos.

A opção correta é a **(A)**.

2. $\begin{cases} P(X=0) + P(X=2) + P(X=5) = 1 \\ \mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 0{,}28 = 1 \\ 0 \times a + 2 \times b + 5 \times 0{,}28 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0{,}42 \\ b = 0{,}3 \end{cases}$$

$P(X > 0) = P(X = 2) + P(X = 5) = 0{,}3 + 0{,}28 = 0{,}58$

A opção correta é a **(C)**.

3. X é uma variável aleatória que segue $N(8; 1{,}5)$.

$$P(X > 9{,}5) = P\left(X > \underbrace{8 + 1{,}5}_{\mu+\sigma}\right) = 0{,}5 - \frac{0{,}683}{2} \approx 0{,}16$$

A opção correta é a **(D)**.

4. **I**: O valor mínimo que pode obter numa jogada são 100 pontos e, nesse caso, como a aposta foi de 500 pontos, perde 400 pontos.
A opção correta é a **a)**.
II: O valor máximo que pode obter numa jogada são 900 pontos e, nesse caso, como a aposta foi de 500 pontos, ganha 400 pontos.
A opção correta é a **c)**.
III: Numa jogada, o jogador apenas recupera a aposta se obtiver 500 pontos.
Dos 12 setores, só há um que tem registado 500 pontos.

Assim, $P = \dfrac{1}{12}$.

A opção correta é a **a)**.
IV: Numa jogada, o jogador ganha exatamente 300 pontos se sair um setor com 800 pontos.

Então, $P = \dfrac{1}{12}$.

A opção correta é a **b)**.
Assim: **I – a)**; **II – c)**; **III – a)**; **IV – b)**

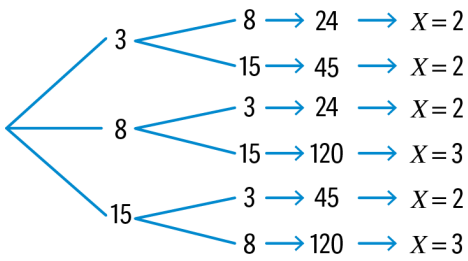
Página 165 – Avalia 4 – Parte 2

1.



Retiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da taça e regista-se o produto dos números das bolas retiradas.
X: "número de algarismos do produto dos números das bolas retiradas".

1.1.



A variável X pode assumir os valores 2 e 3.

1.2. $P(X=2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ e $P(X=3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Tabela de distribuição de probabilidades da variável X:

x_i	**2**	**3**
$p_i = P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

1.3. $P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

2. X: "número de vogais no nome da cidade"

Chaves $\rightarrow X=2$	Machico $\rightarrow X=3$
Barcelos $\rightarrow X=3$	Viseu $\rightarrow X=3$
Aveiro $\rightarrow X=4$	Faro $\rightarrow X=2$
Lisboa $\rightarrow X=3$	Barreiro $\rightarrow X=4$

Tabela de distribuição de probabilidades da variável X:

x_i	**2**	**3**	**4**
$p_i = P(X=x_i)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

$$\mu=2\times\frac{2}{8}+3\times\frac{4}{8}+4\times\frac{2}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{2}{8}(2-3)^2+\frac{4}{8}(3-3)^2+\frac{2}{8}(4-3)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. $N(12;3)$

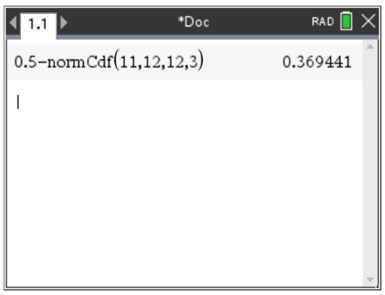
X: "tempo que um participante demora a concluir a prova"

3.1. $P(X\leq 11)=?$

$$P(X\leq 11)=P(X\leq 12)-P(11\leq X\leq 12)=$$

$$=0{,}5-P(11\leq X\leq 12)$$

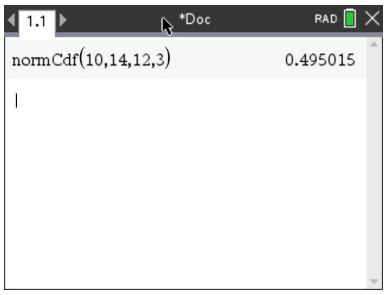
Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $P(X\leq 11)\approx 0{,}369$.

3.2. $P(10\leq X\leq 14)=?$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $P(10\leq X\leq 14)=0{,}495$.

3.3. Considera os acontecimentos:

A: "o participante completar a prova em menos de 13 minutos"

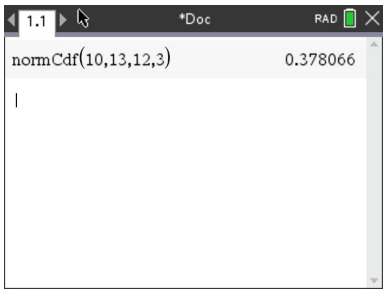
B: "o participante ser considerado com níveis médios de condicionamento físico"

Pretende-se determinar $P(A|B)$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(X<13\wedge 10\leq X\leq 14)}{P(10\leq X\leq 14)}=$$

$$=\frac{P(10\leq X\leq 13)}{0{,}495}$$

Vamos recorrer à calculadora gráfica para determinar $P(10\leq X\leq 13)$.



$P(10\leq X\leq 13)\approx 0{,}378$

Assim, conclui-se que:

$$P(A|B)=\frac{0{,}378}{0{,}495}=0{,}76\ (76\%)$$

Página 172 – Questões tipo exame – Unidade 1

1. $w \to W \qquad i\overline{w} \to D$

$\overline{w} \to C \qquad -i\overline{w} \to B$

A opção correta é a **(B)**.

2. $z_1 = \dfrac{2i}{i-1} = \dfrac{2i(-i-1)}{(i-1)(-i-1)} = \dfrac{-2i^2-2i}{1+1} = \dfrac{2-2i}{2} = 1-i$

$z_2 = \dfrac{i^{13}+2i^{11}}{i^{17}}$

$= \dfrac{i+2(-i)}{i} = \dfrac{-i}{i} = -1$

Cálculos auxiliares:

$i^{13} = i^{3\times4+1} = i^1 = i$

$i^{11} = i^{2\times4+3} = i^3 = -i$

$i^{17} = i^{4\times4+1} = i^1 = i$

$w = ke^{i\frac{3\pi}{2}} = k(-i) = -ki$

Os afixos de w e de z_2 são equidistantes do afixo de z_1 se:

$|w - z_1| = |z_2 - z_1| \Leftrightarrow |-ki-(1-i)| = |-1-(1-i)| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |-1+(-k+1)i| = |-2+i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2+(-k+1)^2} = \sqrt{(-2)^2+1^2}$

$\Leftrightarrow 1+(-k+1)^2 = 4+1$

$\Leftrightarrow -k+1 = 2 \vee -k+1 = -2$

$\Leftrightarrow k = -1 \vee k = 3$

$k \in \{-1, 3\}$

3. $z = 4e^{i\frac{5\pi}{12}} \qquad z \to B$

Logo, $\overline{OB} = 4$.

Como [*OABC*] é um quadrado, tem-se:

$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\overline{OA}^2 = 4^2$

$\Leftrightarrow \overline{OA} = \sqrt{8}$

$\Leftrightarrow \overline{OA} = 2\sqrt{2}$

$z_A = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Sendo *A* uma das raízes quartas de um número complexo *w*, então sabe-se que $w = (z_A)^4$.

$w = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 = \left(2\sqrt{2}\right)^4 e^{i\frac{4\pi}{6}} = 64e^{i\frac{2\pi}{3}} =$

$= 64\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= 64\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= -32 + 32\sqrt{3}i$

4. $w = \dfrac{(1+i)^2 + 2e^{i\frac{11\pi}{6}}}{i^{23}}$

$= \dfrac{1+2i+i^2+2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)}{i^{5\times4+3}}$

$= \dfrac{2i+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{i^3} = \dfrac{2i+\sqrt{3}-i}{-i} = \dfrac{(\sqrt{3}+i)i}{(-i)i} = -1+\sqrt{3}i$

$|w| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

Seja θ um argumento de *w*.

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \\ \theta \in 2.^{o}Q\end{array}\right\rangle$ Por exemplo, $\theta = -\dfrac{\pi}{3} + \pi$

$\therefore w = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z^2 = w$, logo $z = \sqrt{w}$.

$z = \sqrt{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)}, \ k \in \{0, 1\}$

$k = 0 \to z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

$k = 1 \to z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Conclusão: $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \vee z = \sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Página 173 – Questões tipo exame – Unidade 1

5. Seja $z = \rho e^{i\theta}$, então $\overline{z} = \rho e^{i(-\theta)}$.

$z^3 - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^3 - \rho e^{i(-\theta)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^3 e^{i(3\theta)} = \rho e^{i(-\theta)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 3\theta = -\theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho^2-1) = 0 \\ 4\theta = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

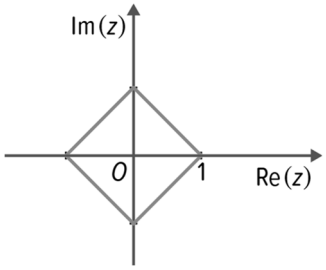
$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\boxed{\rho = 0} \to z = 0$

$\boxed{\rho = 1}$

- $k = 0 \to z = e^{i0}$
- $k = 1 \to z = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $k = 2 \to z = e^{i\pi}$
- $k = 3 \to z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$A_{\square} = 4 \times \dfrac{1\times1}{2} = 2$ u.a.



6. Seja $z = x + yi,\ x,\ y \in \mathbb{R}$

$\text{Im}(\bar{z} - 1) = \text{Re}(-z + 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Im}(x - yi - 1) = \text{Re}(-x - yi + 2)$

$\Leftrightarrow -y = -x + 2$

$\Leftrightarrow y = x - 2$

A opção correta é a **(A)**.

7. $z = 2e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi[$

$$w = \frac{(1-i)^3}{2i} = \frac{(1-i)^2 + (1-i)}{2i} = \frac{(1 - 2i + i^2)(1-i)}{2i} =$$

$$= \frac{-2i(1-i)}{2i} = -(1-i) = -1 + i$$

$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Seja α um argumento de *w*.

$$\left.\begin{array}{l}\tan\alpha = \dfrac{1}{-1} = -1 \\ \alpha \in 2.^{\circ}Q\end{array}\right\rangle \text{ Por exemplo, } \alpha = \frac{3\pi}{4}.$$

$$w = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\frac{z}{w} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{2e^{i\theta}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \sqrt{2}e^{i\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Logo, $\theta - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\theta = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in [0, 2\pi[$, então $\theta = \frac{13\pi}{12}$.

8. $z = |z|e^{i\frac{\pi}{8}}$

$$-4iz^2 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} \times |z|^2 e^{i\left(\frac{2\pi}{8}\right)} = 4|z|^2 e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = 4|z|^2 e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$\frac{7\pi}{4}$ é um argumento de $-4iz^2$.

A opção correta é a **(B)**.

9. $$\left(\frac{2-2i}{i}\right)^4 = \left[\frac{(2-2i)(-i)}{i(-i)}\right]^4 = (-2-2i)^4 = \left[(-2-2i)^2\right]^2$$

$$= \left(4 + 8i + 4i^2\right)^2 = (8i)^2 = 64i^2 = -64 = 64e^{i\pi}$$

$$z^3 = \left(\frac{2-2i}{i}\right)^4 \Leftrightarrow z^3 = 64e^{i\pi} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{64}e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)},$$

$k \in \{0, 1, 2\}$

$k = 0 \rightarrow z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

$k = 1 \rightarrow z_1 = 4e^{i\pi}$

$k = 2 \rightarrow z_2 = 4e^{i\frac{5\pi}{3}}$

z_2 é o número complexo cujo afixo é *B*.

$$z_2 = 4e^{i\frac{5\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 2 - 2\sqrt{3}i$$

Página 174 – Questões tipo exame – Unidade 1

10. $w\bar{w} = |w|^2$ e $w \neq 0$

$-w\bar{w} = \underbrace{-|w|^2}_{\substack{\text{n.º real} \\ \text{negativo}}}$ e $w \neq 0$

A opção correta é a **(D)**.

11. $$z = -\frac{2\sqrt{3} + 2i}{2e^{i\frac{5\pi}{12}}} = \frac{-2\sqrt{3} - 2i}{2e^{i\frac{5\pi}{12}}}$$

$$= \frac{4e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2e^{i\frac{5\pi}{12}}} = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{12}\right)} = 2e^{i\frac{9\pi}{12}} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Cálculos auxiliares:

Seja $w = -2\sqrt{3} - 2i$.

$$|w| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = 4$$

Seja θ um argumento de *w*.

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta = \dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta \in 3.^{\circ}Q\end{array}\right\rangle \text{ Por exemplo, } \theta = \frac{7\pi}{6}.$$

$$w = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

12. $D(-2, 0)$ $\qquad z_D = 2e^{i\pi}$

$$z_F = 2e^{i\left(\pi + 2\times\frac{2\pi}{7}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{7}}$$

A opção correta é a **(C)**.

13. $$z = (1-3i)(2k+i) = 2k + i - 6ki - 3i^2$$

$$= (3 + 2k)(1 - 6k)i$$

$w = -9 + 2i$

A reta *r* é definida pela condição $\text{Re}(z) = -9$.

O afixo de *z* pertence à reta *r* se:

$3+2k=-9 \Leftrightarrow k=-6$

A opção correta é a **(D)**.

14. $z=(1-\mathrm{i})^{2026}$

Seja $w=1-\mathrm{i}$.

$|w|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Sendo θ um argumento de *w*, tem-se:

$\left.\begin{array}{l}\tan(w)=\dfrac{-1}{1}=-1\\ \theta\in 4.^{\circ}Q\end{array}\right\rangle$ Por exemplo, $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$.

$w=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$z=(1-\mathrm{i})^{2026}=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{2026}=$

$=\sqrt{2}^{2026}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2026\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

$=2^{1013}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{1013\pi}{2}\right)}=$

$2^{1013}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$=2^{1013}\times(-\mathrm{i})=-1013\mathrm{i}$

Assim, *z* é um imaginário puro.

Página 175 – Questões tipo exame – Unidade 1

15. $z=(1-\mathrm{i})^{2026}$

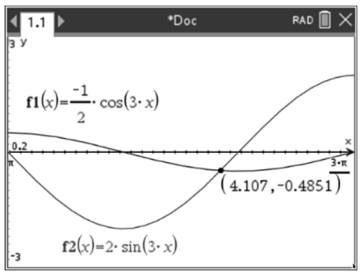
$z=-(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^3 \Leftrightarrow z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+3x)}$

$\Leftrightarrow z=-\cos(3x)-\mathrm{i}\sin(3x)$

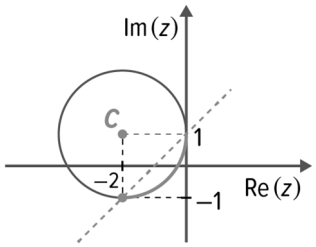
$\frac{1}{2}\mathrm{Re}(z)=-2\mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos(3x)=2\sin(3x)$

Recorrendo à calculadora: $x\approx 4{,}11$



A opção correta é a **(C)**.

16.



$|z+2-\mathrm{i}|=2 \wedge 0\le \arg(z+2+\mathrm{i})\le\dfrac{\pi}{4}$

A condição dada define um quarto da circunferência de raio 2.

$P=\dfrac{\pi\times 4}{4}=\pi$

A opção correta é a **(C)**.

17. $z_1=\dfrac{(4\mathrm{i})^2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}}=\dfrac{16\mathrm{i}^2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}}=\dfrac{-16}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}}=\dfrac{16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}}=16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

$z_2=\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^4=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^4=2^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}=16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.

Cálculos auxiliares:

Seja $z=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

$|z|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2=2}$

Sendo θ um argumento de *z*, tem-se:

$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}\\ \theta\in 4.^{\circ}Q\end{array}\right\rangle$ Por exemplo, $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$.

Então, $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

Os afixos de z_1 e de z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de *n* lados, com centro na origem do referencial, logo tem-se:

$\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \dfrac{3\pi}{12}=\dfrac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n=8$

18. $|z_1-z_2|=6 \Leftrightarrow \overline{AB}=6$

Sendo $z_1=a+b\mathrm{i}$, $a, b\in\mathbb{R}$, então $2a=6$, ou seja, $a=3$. Logo, $z_1=3+b\mathrm{i}$, $b\in\mathbb{R}^+$ e $z_4=3-b\mathrm{i}$, $b\in\mathbb{R}^+$.

$z_1\times z_4=25 \Leftrightarrow (3+b\mathrm{i})\times(3-b\mathrm{i})=25 \Leftrightarrow 9+b^2=25$

$\Leftrightarrow b^2=16 \Leftrightarrow b=4 \vee b=-4$

Como $b \in \mathbb{R}^+$, então $b = 4$.

$z_1 = 3 + 4\text{i}$ e $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = \text{raio}$

O conjunto dos números complexos cujo afixos definem a região sombreada pode ser representado pela seguinte condição:

$|z| \leq 5 \wedge \left(\left|\text{Re}(z)\right| \geq 3 \vee \left|\text{Im}(z)\right| \geq 4\right)$

Página 176 – Questões tipo exame – Unidade 2

1. Sejam *A* e *B* os acontecimentos:

A: "o cliente escolher arroz"

B: "o cliente escolher palitos de cenoura"

Sabe-se que $P(\overline{A}) = 0{,}22$, $P(B \cap A) = 0{,}64$ e $P(\overline{A}|B) = \frac{1}{5}$.

Pretende-se determinar $P(\overline{A}|\overline{B})$.

- $P(\overline{A}) = 0{,}22 \Leftrightarrow 1 - P(A) = 0{,}22 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}78$
- $P(\overline{A}|B) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = 0{,}2$

$\Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2P(B) \Leftrightarrow P(B) - 0{,}64 = 0{,}2P(B)$

$\Leftrightarrow 0{,}8P(B) = 0{,}64 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}8$

Logo, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}2$.

Assim sendo:

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{0{,}2} =$$
$$= \frac{1 - P(A \cup B)}{0{,}2}$$
$$= \frac{1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right)}{0{,}2}$$
$$= \frac{1 - (0{,}78 + 0{,}8 - 0{,}64)}{0{,}2}$$
$$= 0{,}3$$

2.1. *n*: número de alunos da turma D

$0{,}48n$: número de rapazes da turma D

$0{,}52n$: número de raparigas da turma D

$$P(B|A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{0{,}48n}{n-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0{,}96n = n - 1 \Leftrightarrow n = 25$$

A turma D tem 25 alunos.

2.2. Número de alunos das turmas do 12.º ano: 75

52% são rapazes, ou seja, $0{,}52 \times 75 = 39$ rapazes.

Segundo a Regra de Laplace, quando os acontecimentos elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis. Como o grupo de alunos das turmas do 12.º ano da escola é constituído por 75 alunos, o número de comissões de seis elementos que podem ser formadas, ou seja, o número de casos possíveis, é ${}^{75}C_6$.

O número de casos favoráveis é a diferença entre o número total de comissões que é possível formar e o número de comissões constituídas exclusivamente por rapazes, ou seja, ${}^{75}C_6 - {}^{39}C_6$.

Assim sendo, recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade de a comissão selecionada integrar, pelo menos uma rapariga, é dada por $\frac{{}^{75}C_6 - {}^{39}C_6}{{}^{75}C_6}$.

Página 177 – Questões tipo exame – Unidade 2

3. Como *A* e *B* são dois acontecimentos equiprováveis, então sabe-se que $P(A) = P(B)$.

Sendo *A* e *B* acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$$P(A|B) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = \frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{4}$$

Logo, $P(B) = \frac{3}{4}$.

Assim, $P(A \cap B) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

A opção correta é a **(B)**.

4.1.

20 bolas brancas $\begin{cases} 4 \text{ numeradas} \\ 16 \text{ não numeradas} \end{cases}$

n: número total de bolas do saco

A: "a bola ser branca e não ser numerada"

$$P(A) = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{16}{n} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow n = 56$$

No saco estão 56 bolas.

4.2. O saco contém apenas 20 bolas brancas (quatro numeradas)

Extraem-se, simultaneamente, três bolas.

B: "pelo menos duas dessas bolas serem numeradas"

$$P(B)=\frac{{}^{4}C_{2}\times{}^{16}C_{1}+{}^{4}C_{3}}{{}^{20}C_{3}}=\frac{100}{1140}=\frac{5}{57}$$

5. *A*: "ser investigador anfitrião"

C: "ser investigador convidado"

T: "ser orador em sessões experimentais"

- $\frac{4}{9}\times 45=20$
- $x+\frac{x}{2}=45\Leftrightarrow x=30 \qquad \frac{x}{2}=15$
- $0{,}6\times 30=18$

Organizando os dados numa tabela, tem-se:

	A	C	
T	8	12	20
$\overline{T}$	7	18	25
	15	30	45

5.1. $P(A|T)=\frac{8}{20}=0{,}4$

5.2. Número de pessoas que assistiram à sessão: 50

Número de pessoas que tem atividade profissional ligada à ciência: n

Número de pessoas que não tem atividade profissional ligada à ciência: $50-n$

Como a maior parte das pessoas tem uma atividade profissional ligada à ciência, sabe-se que $n>25$.

$$\frac{{}^{n}C_{1}\times{}^{50-n}C_{1}}{{}^{50}C_{2}}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{n\times(50-n)}{1225}=\frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow -n^{2}+50n-525=0$$

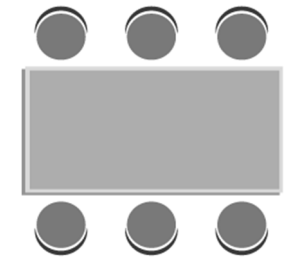
$$\Leftrightarrow n=15\vee n=35$$

Como $n>25$, então $n=35$.

Assim, há 15 pessoas cuja atividade profissional não se relaciona com a ciência.

Página 178 – Questões tipo exame – Unidade 2

5.3. Seis amigos, incluindo dois irmãos gémeos.



$\underbrace{2}_{\text{n.º de maneiras de escolher o lado da bancada}}\times\underbrace{{}^{3}A_{2}}_{\text{n.º de maneiras de dispor os gémeos em 2 dos 3 lugares do lado escolhido}}\times\underbrace{4!}_{\text{n.º de maneiras de sentar os outros 4 amigos nos 4 lugares disponíveis}}$

A opção correta é a **(D)**.

6.

$$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+$$
$$+P(X=1)+P(X=2)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+a+\frac{13}{36}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=1$$

$$\Leftrightarrow 2a=\frac{8}{36}\Leftrightarrow a=\frac{1}{9}$$

I:

A: "obter soma negativa"

$$P(A)=P(X=-2)+P(X=-1)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

I – b)

II:

$$P(X<0)=\frac{2}{9}$$

$$P(X=0)=\frac{13}{36}$$

$$P(X>0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{12}>\frac{13}{36}>\frac{2}{9}$$

Assim, o mais provável é obter soma superior a zero.

Logo: **II – c)**

III: $\mu=-2\times\frac{1}{9}-1\times\frac{1}{9}+0\times\frac{13}{36}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$

Logo: **III – a)**

Conclusão: I – b); **II – c)**; **III – a)**

Página 179 – Questões tipo exame – Unidade 2

7. 12 bolas: 6 vermelhas, 3 azuis, 2 brancas e 1 dourada

Extrair, em simultâneo, quatro bolas do saco.

X: "número de bolas douradas extraídas"

A variável aleatória *X* pode tomar os valores 0 e 1.

$P(X=0)=\frac{^{11}C_4}{^{12}C_4}=\frac{2}{3}$; $P(X=1)=\frac{1\times{}^{11}C_3}{^{12}C_4}=\frac{1}{3}$

Tabela de distribuição de probabilidade da variável *X*:

x_i	**0**	**1**
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

8. LUÍSA $\rightarrow$ selecionar, ao acaso e simultaneamente, 3 letras

X: "n.º de vogais selecionadas"

Como o nome LUÍSA tem cinco letras, das quais três são vogais, sabe-se que a variável *X* pode tomar os valores 1, 2 e 3.

$P(X=1)=\frac{^3C_1\times{}^2C_2}{^5C_3}=\frac{3}{10}$

$P(X=2)=\frac{^3C_2\times{}^2C_1}{^5C_3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

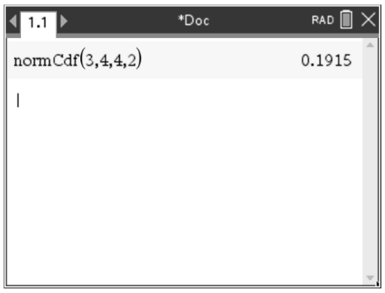
$P(X=3)=\frac{^3C_3}{^5C_3}=\frac{1}{10}$

Se $P(X=a)=\frac{1}{10}$, então $a=3$.

9. $N(4,2)$

$P(X>3)=P(3<X<4)+P(X\geq 4)=P(3<X<4)+0{,}5$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$P(3<X<4)\approx 0{,}19$

Então, $P(X>3)\approx 0{,}69$.

A opção correta é a **(A)**.

10. $N_f(a,b)$ e $N_g(c,d)$

Como as distribuições são simétricas em relação à reta *r*, sabe-se que têm o mesmo valor médio, ou seja, $a=c$.

Por observação gráfica, sabe-se que o desvio-padrão relativo à distribuição normal representada pela curva *g* é menor do que o desvio-padrão relativo à distribuição normal representada pela curva *f*, ou seja, $b>d$

A opção correta é a **(A)**.

11. *X*: "diâmetro das maçãs, em milímetros"

$N(72,5)$

$\mu=72$ e $\sigma=5$

$X>\mu+\sigma\rightarrow$ a maçã é de categoria superior

$P(X\leq\mu+\sigma)=0{,}5+P(72\leq X\leq 77)\approx 0{,}84$

A opção correta é a **(D)**.