Propostas de resolução da unidade 3 do manual

Tema 1: Função exponencial

Página 6 – Aplica

1.1. $\frac{1}{4}\times 2^9 = \frac{1}{2^2}\times 2^9 = 2^{-2}\times 2^9 = 2^7$

1.2. $-\frac{1}{27} = \frac{-1}{27} = \frac{(-1)^3}{3^3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$

1.3. $\left(\frac{1}{2}-1\right)^{-12} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-12} = (-2)^{12} = \left[(-2)^2\right]^6 = 4^6$

2. $1.^{\circ} \rightarrow \left(\frac{1}{2^{-7}}\right) : 2^5 = 2^7 : 2^5 = 2^2 = 4$

$2.^{\circ} \rightarrow 9^{-4} : 3^{-4}\times 3^6 = 3^{-4}\times 3^6 = 3^2 = 9$

$3.^{\circ} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^8 \times 2^8 = \left(-\frac{2}{2}\right)^8 = (-1)^8 = 1$

$4.^{\circ} \rightarrow 7^{-5}\times 7^5 + \left(-\frac{1}{7}\right)^0 = 7^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

O pin do telemóvel do Dinis é 4912.

3.1. 1,3 mil milhões de euros $= 1{,}3\times 10^9$ €

3.2. $85 \text{ nm} = 85\times 10^{-9} \text{ m} = 85\times 10^{-9}\times 10^3 \text{ mm} =$

$= 85\times 10^{-6} \text{ mm} = 8{,}5\times 10\times 10^{-6} \text{ mm} = 8{,}5\times 10^{-5} \text{ mm}$

Página 7 – Aplica

4.1. $7 < \sqrt{53} < 8$

4.2. $9 < \sqrt{90} < 10$

4.3. $11 < \sqrt{170} < 12$

5.1. Sendo $\sqrt{130} \approx 13{,}03840$, então o maior quadrado perfeito que é menor que 170 é 13^2, ou seja, 169.

5.2. Sendo $\sqrt{325} \approx 18{,}027756$, então o menor quadrado perfeito que é maior do que 325 é 19^2, ou seja, 361.

5.3. Todos os quadrados perfeitos compreendidos entre 170 e 325 são 14^2, 15^2, 16^2, 17^2 e 18^2, ou seja, 196, 225, 256, 289 e 324.

6.1. $-1 \in D_f$ porque não existe nenhum número real cujo quadrado seja -1.

6.2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$, logo $D_f' = [0, +\infty[$.

6.3. $f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = +\sqrt{5}$

Os objetos que têm imagem 5 são $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$.

7.1. *f* e *g* são funções porque a cada elemento do conjunto *A* corresponde um e um só elemento do conjunto *B*.

h não é uma função porque, por exemplo, o elemento 1 pertence ao conjunto *A* e tem duas correspondências (2 e 4) no conjunto *B*.

7.2. Não porque, por exemplo, 4 é um elemento do conjunto *B* e não tem correspondência no conjunto *A*.

Em *h* é função, porque, neste caso, a cada elemento do conjunto *B* corresponde um e um só elemento do conjunto *A*.

Página 8 – Tarefa inicial

1.

Resultado, em milhões de euros, no:	Aumento, em milhões de euros, em relação ao ano anterior	Aumento, em percentagem, em relação ao ano anterior
1.º ano: 2	-----	-----
2.º ano: 4	$4-2=2$	100%
3.º ano: 8	$8-4=4$	100%
4.º ano: 16	$16-8=8$	100%
5.º ano: 32	$32-16=16$	100%
6.º ano: 64	$64-32=32$	100%

2. $f(7) = 2^7 = 128$; $f(8) = 2^8 = 256$;

$f(9) = 2^9 = 512$; $f(10) = 2^{10} = 1024$

É no 10.º aniversário em que pela primeira vez um resultado é superior a 1000 M €.

Página 9

1.1. $2^{x+1} = 4^x \Leftrightarrow 2^{x+1} = \left(2^2\right)^x \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{2x} \Leftrightarrow x+1 = 2x$

$\Leftrightarrow x = 1$

1.2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

1.3. $\frac{1}{8} = 2^{1-x} \Leftrightarrow 2^{-3} = 2^{1-x} \Leftrightarrow -3 = 1-x \Leftrightarrow x = 4$

2.1. $f(x) \times g(x) = 2^{-x} \times \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^{-x} \times 4^{-x} = (2 \times 4)^{-x} = 8^{-x}$

2.2. $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{2^{-x}} = \frac{4^{-x}}{2^{-x}} = \left(\frac{4}{2}\right)^{-x} = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}$

3.1. $h(x) \times j(x) = 3^x \times 2^{-x} = 3^x \times \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1{,}5^x$

3.2. $\frac{j(x)}{h(x)} = \frac{2^{-x}}{3^x} = 2^{-x} \times 3^{-x} = 6^{-x}$

Página 10

4. $f(x) = 0{,}2^x$ e $g(x) = 1{,}2^x$

4.1. $g(0) - f(1) = 1{,}2^0 - 0{,}2^1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

4.2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

5. $f(x) = 0{,}8^x$; $g(x) = 1{,}5^x$ e $h(x) = 0{,}2^x$

g é crescente porque é uma função exponencial de base superior a 1. Logo, a representação gráfica de g é a **III**.

$A(2; g(2))$; $g(2) = 1{,}5^2 = 2{,}25$

Assim, $A(2; 2{,}25)$.

f e h são decrescentes (gráficos **I** e **II**).

$h^{-1}(x) = 0{,}2^{-0{,}1} = \frac{1}{0{,}2} = 5$. Logo, $B(-1, 5)$.

Página 11 – Tarefa 1

1.1. $f(x) = 2^x$ e $h(x) = 2^{x-c} + d$, $c, d \in \mathbb{R}$

A representação gráfica de h obtém-se a partir do gráfico de f por uma translação do vetor $\vec{u}(c, d)$.

$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $j(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-c} + d$

A representação gráfica de j obtém-se a partir do gráfico de g por uma translação de vetor $\vec{u}(c, d)$.

1.2.

	D_h	D'_h	Interseção com o eixo Ox	Interseção com o eixo Oy
$c = 3$ e $d = 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	Não existe	$\left(0, \frac{1}{8}\right)$
$c = -1$ e $d = 2$	$\mathbb{R}$	$]2, +\infty[$	Não existe	$(0, 4)$
	D_j	D'_j	Interseção com o eixo Ox	Interseção com o eixo Oy
$c = 2$ e $d = -1$	$\mathbb{R}$	$]-1, +\infty[$	$(2, 0)$	$(0, 8)$
$c = 1$ e $d = 3$	$\mathbb{R}$	$]3, +\infty[$	Não existe	$(0, 6)$

Monotonia	$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$
Crescente	$+\infty$	0
Crescente	$+\infty$	2
Monotonia	$\lim\limits_{x \to +\infty} j(x)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} j(x)$
Decrescente	-1	$+\infty$
Decrescente	3	$+\infty$

$b > 0 \wedge b \neq 1$

2.1. O gráfico de m e de n obtém-se a partir do gráfico de f e de g por uma dilatação ou contração vertical, consoante $b > 1$ e $0 < b < 1$.

2.2.

	D_m	D'_m	Interseção com o eixo Ox	Interseção com o eixo Oy
$b = 3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	Não existe	$(0, 3)$
$b = 0{,}5$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	Não existe	$(0; 0{,}5)$
$b = -1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^-$	Não existe	$(0, -1)$
	D_n	D'_n	Interseção com o eixo Ox	Interseção com o eixo Oy
$b = 3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	Não existe	$(0, 3)$
$b = 0{,}5$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	Não existe	$(0; 0{,}5)$
$b = -1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^-$	Não existe	$(0, -1)$

Monotonia	$\lim\limits_{x\to+\infty} m(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} m(x)$
Crescente	$+\infty$	0
Crescente	$+\infty$	0
Decrescente	$-\infty$	0
Monotonia	$\lim\limits_{x\to+\infty} n(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} n(x)$
Decrescente	0	$+\infty$
Decrescente	0	$+\infty$
Crescente	0	$-\infty$

Página 12

6.1. $f(x)=2^{x+1}$

$y=2^x \xrightarrow[\text{de vetor } \vec{u}(-1,0)]{\text{Transformação}} y=2^{x+1}$

$D'=\mathbb{R}^+$ $\qquad$ $D'=\mathbb{R}^+$

Então, $D_f'=\mathbb{R}^+$.

6.2. $f(x)=3^{-x}+1 \Leftrightarrow f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x \xrightarrow[\text{de vetor } \vec{u}(0,1)]{\text{Transformação}} y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$

$D'=\mathbb{R}^+$ $\qquad$ $D'=]1,+\infty[$

Então, $D_f'=]1,+\infty[$.

6.3. $f(x)=-5+2^{x-3}$

$y=2^x \xrightarrow[\text{de vetor } \vec{u}(3,0)]{\text{Transformação}} y=2^{x-3} \xrightarrow[\text{de vetor } \vec{u}(0,-5)]{\text{Transformação}} y=-5+2^{x-3}$

$D'=\mathbb{R}^+$ $\qquad$ $D'=\mathbb{R}^+$ $\qquad$ $D'=]-5,+\infty[$

Então, $D_f'=]-5,+\infty[$.

6.4. $f(x)=3-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x \xrightarrow[\text{de vetor } \vec{u}(-1,0)]{\text{Transformação}} y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \xrightarrow[\text{de fator } 2]{\text{Dilatação vertical}} y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

$D'=\mathbb{R}^+$ $\qquad$ $D'=\mathbb{R}^+$ $\qquad$ $D'=\mathbb{R}^+$

$\xrightarrow[\text{de eixo } Ox]{\text{Reflexão}} y=-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \xrightarrow[\text{de vetor } \vec{v}(0,3)]{\text{Translação de}} y=3-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

$D'=\mathbb{R}^-$ $\qquad$ $D'=]-\infty,3[$

Então, $D_f'=]-\infty,3[$.

7.1. $f(x)=2-3^{x+1}$. f é decrescente.

Quando $x\to+\infty$, $f(x)\to-\infty$.

Quando $x\to-\infty$, $f(x)\to 2$.

7.2. $f(x)=-2\times5^{-x}$. f é crescente.

Quando $x\to+\infty$, $f(x)\to 0$.

Quando $x\to-\infty$, $f(x)\to-\infty$.

7.3. $f(x)=1+\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$. f é decrescente.

Quando $x\to+\infty$, $f(x)\to 1$.

Quando $x\to-\infty$, $f(x)\to+\infty$.

7.4. $f(x)=-4\times5^{1-x}$. f é decrescente.

Quando $x\to+\infty$, $f(x)\to 0$.

Quando $x\to-\infty$, $f(x)\to-\infty$.

8.1. $f(x)=\frac{1}{4}-2^{x+3}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}-2^{x+3}=0 \Leftrightarrow 2^{-2}=2^{x+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2=x+3 \Leftrightarrow x=-5$

Zero: -5

$f(0)=\frac{1}{4}-2^{0+3}=-\frac{31}{4}$

Interseção com o eixo Oy: $\left(0,-\frac{31}{4}\right)$

8.2. $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-9$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-9=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1=-2 \Leftrightarrow x=-3$

Zero: -3

$f(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^{0+1}-9=\frac{1}{3}-9=-\frac{26}{3}$

Interseção com o eixo Oy: $\left(0,-\frac{26}{3}\right)$

Página 13

9.1. $f(x)=a3^{x-2}+b,\ a,b\in\mathbb{R}$

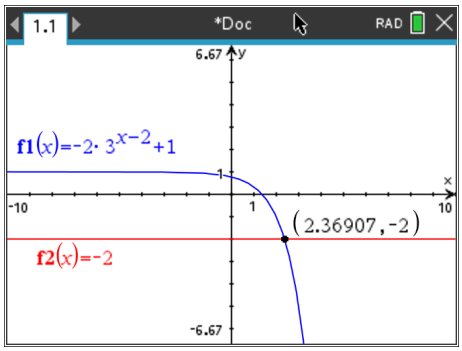
$\begin{cases} f(2)=-1 \\ f(1)=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ \frac{1}{3}a+b=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1-a \\ \frac{1}{3}a-1-a=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-2 \end{cases}$

$a=-2$ e $b=1$

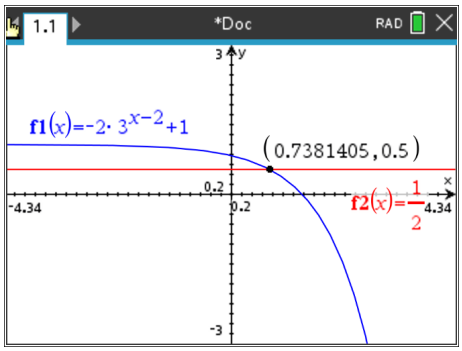
9.2. a) $f(x) = -2 \Leftrightarrow -2 \times 3^{x-2} + 1 = -2$

Resolvendo graficamente a equação $f(x) = -2$, obtém-se $x \approx 2{,}37$.



b) $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 \times 3^{x-2} + 1 = \frac{1}{2}$

Resolvendo graficamente a equação $f(x) = \frac{1}{2}$, obtém-se $x \approx 0{,}74$.



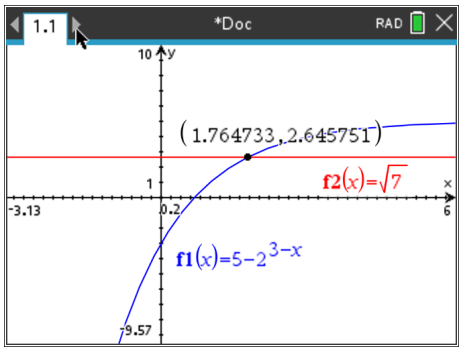
10.1. $f(x) = 5 - 2^{3-x}$

$f(x) = 6 \Leftrightarrow 5 - 2^{3-x} = 6 \Leftrightarrow \underbrace{2^{3-x} = -1}_{\text{Equação impossível pois } \forall x \in \mathbb{R},\ 2^{3-x} > 0.}$

10.2. $f(x) > \sqrt{7} \Leftrightarrow x \in]k, 5[$

A função f é crescente e $D_f' =]-\infty, 5[$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $k \approx 1{,}8$.

Página 14 – Tarefa 2

1.1. $f(0) = 6 - 2^0 = 5 \rightarrow A(0, 5)$

$g(0) = 4^0 = 1 \rightarrow B(0, 1)$

$f(x) = g(x) = 6 - 2^x = 4^x \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 + 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -3 \underset{y=2^x}{\Leftrightarrow}$

$\underset{y=2^x}{\Leftrightarrow} 2^x = 2 \vee \underbrace{2^x = -3}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = 1$

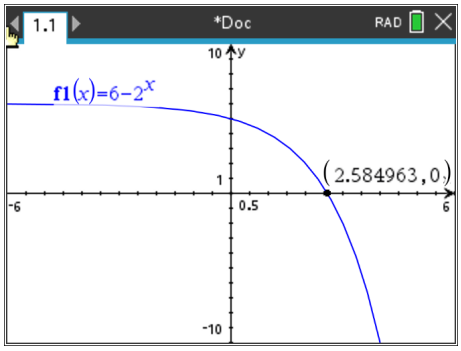
$g(1) = 4^1 = 4$, logo $D(1, 4)$.

$A_{[ABD]} = \frac{\overline{AB} \times x_D}{2} = \frac{4 \times 1}{2} = 2$ u.a.

1.2. $P_{[AOC]} = \overline{OA} + \overline{OC} + \overline{AC}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2^x = 0$

Resolvendo graficamente a equação $f(x) = 0$:



O zero de f, arredondado às centésimas, é 2,58.

Então, $C(2{,}58; 0)$.

$\overline{AC} = \sqrt{(0 - 2{,}58)^2 + (5 - 0)^2} \approx 5{,}63$

Assim, $P_{[AOC]} = 5 + 2{,}58 + 5{,}63 \approx 13{,}2$.

1.3. $g(x) = 2 \Leftrightarrow 4^x = 2 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$R\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$f(x) = 2 \Leftrightarrow 6 - 2^x = 2 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$

$S(2, 2)$

$\overline{RS} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$A_{\text{quadrado}} = 1{,}5^2 = 2{,}25$

2. $T(t) = 25 - 30 \times 0{,}96^t$

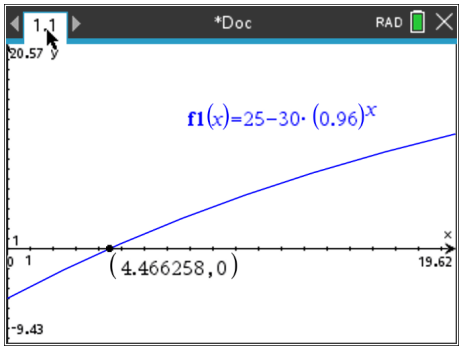
T: graus Celsius; t: minutos

2.1. $T(0) = 25 - 30 \times 0{,}96^0 = -5$

A temperatura das almôndegas no instante em que foram retiradas do congelador era -5 ºC.

2.2. $T(t) = 0 \Leftrightarrow 25 - 30 \times 0{,}96^t = 0$

Resolvendo graficamente a equação, tem-se:



Então, $t \approx 4{,}5$.

Até à temperatura das almôndegas atingir 0 ºC, decorreram, aproximadamente, 4,5 minutos.

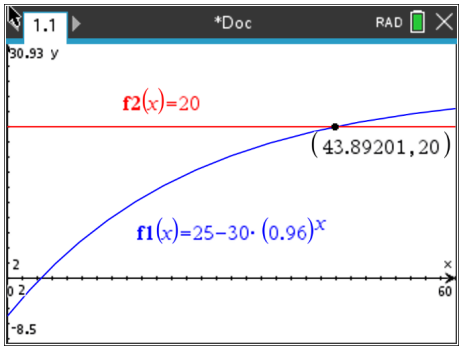
2.3. 1 hora são 60 minutos.

$T(60) = 25 - 30 \times 0{,}96^{60} \approx 22{,}41$

A temperatura das almôndegas, uma hora após terem sido retiradas do congelador, era, aproximadamente, 22,41 ºC.

2.4. $T(t) = 20 \Leftrightarrow 25 - 30 \times 0{,}96^t = 20$

Resolvendo graficamente a equação $T(t) = 20$:



Então, $t \approx 44$. Até o processo de descongelação ser interrompido, decorreram, aproximadamente, 44 minutos.

2.5. Quando $t \to +\infty$, $T(t) \to 25$.

Com o passar do tempo, a temperatura das almôndegas tende para 25 ºC.

No contexto descrito, 25 ºC representa a temperatura ambiente.

Página 15 – Tarefa 3

1. Valor do automóvel novo: 35 000 €

Desvalorização: 12% ao ano

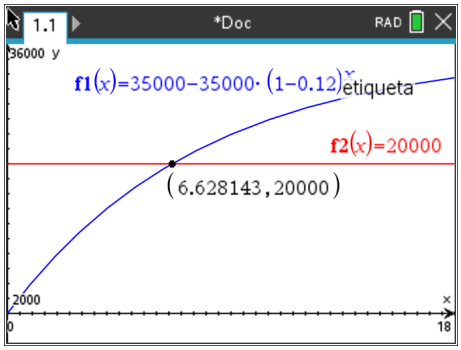
$V(t)$: Valor comercial do automóvel com t anos

1.1. $35\,000 - V(2) = 35\,000 - 35\,000 \times (1 - 0{,}12)^2 = 7896$

No contexto apresentado, representa a desvalorização do automóvel ao fim de 2 anos.

1.2. A desvalorização do automóvel ao fim de t anos é dado por $35\,000 - V(t)$, ou seja, pela expressão $35\,000 - 35\,000(1 - 0{,}12)^t$.

Resolvendo graficamente a condição anterior:



Então, $t \leq 6{,}6$.

Assim, para que a desvalorização não ultrapasse 20 000 €, o carro deve ter, no máximo, seis anos.

2. $V(t) = V_0 \times 1{,}5^{0{,}2t}$

V: valor comercial do espaço t anos após a compra

2.1. V_0 representa o valor comercial do espaço no ano de compra (2020).

2.2. $V(t+1) - V(t) = V_0 \times 1{,}5^{0{,}2(t+1)} - V_0 \times 1{,}5^{0{,}2t}$

$= V_0 \times 1{,}5^{0{,}2t} \times 1{,}5^{0{,}2} - V_0 \times 1{,}5^{0{,}2t} = V_0 \times 1{,}5^{0{,}2t}\left(1{,}5^{0{,}2} - 1\right) \approx$

$\approx V(t) \times 0{,}0845$

$0{,}0845 = 8{,}45\%$

Valorização anual do espaço: 8,45%

2.3. Pretende-se determinar k tal que:

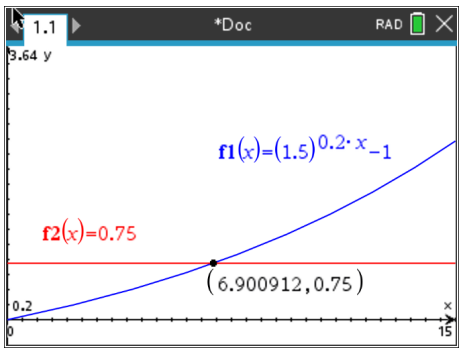
$V(t+k) - V(t) = 0{,}75V(t)$

$V(t+k) - V(t) = V(t) \times \left(1{,}5^{0{,}2k} - 1\right)$

Então, pretende-se determinar k tal que

$1{,}5^{0{,}2k} - 1 = 0{,}75$.

Resolvendo graficamente a condição anterior:



Então, $k \approx 7$.

Assim, devem passar sete anos para que o espaço tenha uma valorização de 75%.

3. T_0 : temperatura da bebida ao instante em que é sentida

T_A : temperatura ambiente

T_t : temperatura da bebida passados t minutos

3.1. $T_0 - T_A = 75 - 15 = 60$

a) $T_1 - T_A = 0{,}96 \times 60$; $100\% - 4\% = 96\%$

b) $T_2 - T_A = 0{,}96\left(T_1 - T_A\right) = 0{,}96\left(0{,}96 \times 60\right) =$

$= 0{,}96^2 \times 60$

$T_2 - T_{Aa} = 0{,}96^2 \times 60$

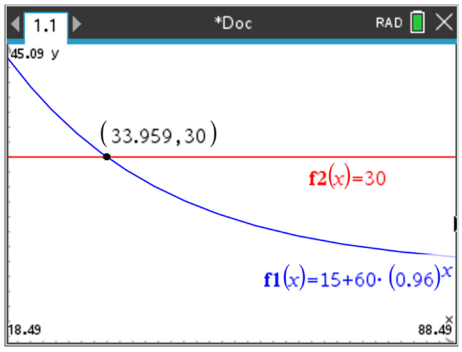
c) $T_t - T_A = 0{,}96^t \times 60$

3.2. $T_t - T_A = 0{,}96^t \times 60 \Leftrightarrow T_t = T_A + 0{,}96^t \times 60 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T_t = 15 + 60 \times 0{,}96^t$

3.3. $T_t = 30 \Leftrightarrow 15 + 60 \times 0{,}96^t = 30$

Resolvendo graficamente a equação $T_t = 30$:



Então, $t = 33{,}96$.

Donde se conclui que o consumo da bebida é recomendável durante, aproximadamente, 34 minutos.

Página 16 – Pratica

11.1. Função *f* definida por:

$f\left(x\right) = 1 - 3^{x-2}$

$y = 3^x \xrightarrow[\vec{u}(2,\,0)]{\text{Translação de vetor}} y = 3^{x-2} \xrightarrow{\text{Reflexão de eixo } Ox} y = -3^{x-2} \xrightarrow[\vec{v}(0,\,1)]{\text{Translação de vetor}} y = 1 - 3^{x-2}$

$D' = \mathbb{R}^+$ $\quad D' = \mathbb{R}^+$ $\quad D' = \mathbb{R}^-$ $\quad D' = \underset{\text{decrescente}}{]-\infty,\,1[}$

Interseção com o eixo Oy : $f\left(0\right) = 1 - 3^{0-2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

Interseção com o eixo Ox :

$f\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3^{x-2} = 0 \Leftrightarrow 3^{x-2} = 3^0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Função *f* definida por:

$f\left(x\right) = 4 - 2^{-x}$

$y = 2^x \xrightarrow{\text{Reflexão de eixo } Ox} y = 2^{-x} \xrightarrow{\text{Reflexão de eixo } Oy} y = -2^{-x} \xrightarrow[\vec{u}(0,\,4)]{\text{Translação de vetor}} y = 4 - 2^{-x}$

$D' = \mathbb{R}^+$ $\quad D' = \mathbb{R}^+$ $\quad D' = \mathbb{R}^-$ $\quad D' = \underset{\text{crescente}}{]-\infty,\,4[}$

Interseção com o eixo Oy : $f\left(0\right) = 4 - 2^0 = 3$

Interseção com o eixo Ox

$f\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^2 \Leftrightarrow x = -2$

Função *f* definida por:

$f\left(x\right) = 3 \times 2^{x+3} - 12$

$y = 2^x \xrightarrow[\vec{u}(-3,\,0)]{\text{Translação de vetor}} y = 2^{x+3} \xrightarrow{\text{Dilatação vertical de fator 3}} y = 3 \times 2^{x+3} \xrightarrow[\vec{u}(0,\,-12)]{\text{Translação de vetor}} y = 3 \times 2^{x+3} - 12$

$D' = \mathbb{R}^+$ $\quad D' = \mathbb{R}^+$ $\quad D' = \mathbb{R}^+$ $\quad D' = \underset{\text{crescente}}{]-12,\,+\infty[}$

Interseção com o eixo Oy : $f\left(0\right) = 3 \times 2^{0+3} - 12 = 12$

Interseção com o eixo Ox :

$f\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 3 \times 2^{x+3} - 12 = 0 \Leftrightarrow 2^{x+3} = 4 \Leftrightarrow 2^{x+3} = 2^2$

$\Leftrightarrow x + 3 = 2 \Leftrightarrow x = -1$

Função *f*	D_f	D_f'	Interseção com o eixo *Oy*	Interseção com o eixo *Ox*
$f\left(x\right) = 1 - 3^{x-2}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty,\,1[$	$\left(0,\,\frac{8}{9}\right)$	$(2,\,0)$
$f\left(x\right) = 4 - 2^{-x}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty,\,4[$	$(0,\,3)$	$(-2,\,0)$
$f\left(x\right) = 3 \times 2^{x+3} - 12$	$\mathbb{R}$	$]-12,\,+\infty[$	$(0,\,12)$	$(-1,\,0)$

Monotonia	$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right)$
Decrescente	$-\infty$	1
Crescente	4	$-\infty$
Crescente	$+\infty$	-12

12. $a^x = 5$

$a^{-x} = \left(a^x\right)^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

A opção correta é a **(B)**.

13.1. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 8 - 2^{1+2x} = 0 \Leftrightarrow 2^{1+2x} = 2^3 \Leftrightarrow$

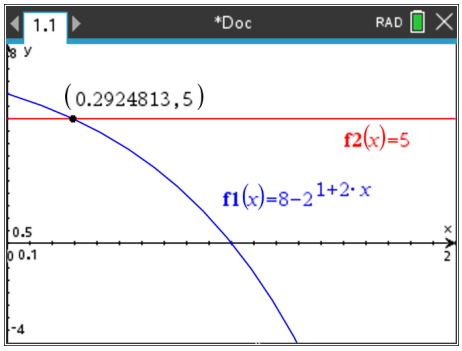
$\Leftrightarrow 1 + 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1$; zero de f: 1

b) $f(x) = 7 \Leftrightarrow 8 - 2^{1+2x} \Leftrightarrow 2^{1+2x} = 1 \Leftrightarrow 2^{1+2x} = 2^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

13.2. a) $f(x) = 5 \Leftrightarrow 8 - 2^{1+2x} = 5$

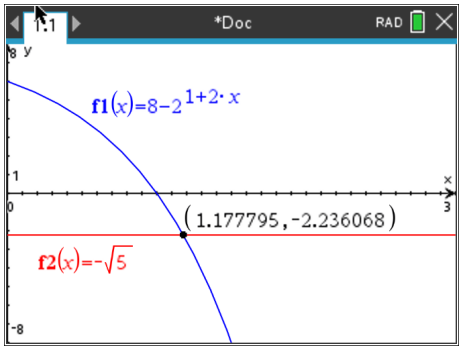
Resolvendo graficamente a equação $f(x) = 5$:



Então, $x \approx 0{,}29$.

b) $f(x) = -\sqrt{5} \Leftrightarrow 8 - 2^{1+2x} = -\sqrt{5}$

Resolvendo graficamente a equação $f(x) = -\sqrt{5}$, tem-se:



Então, $x \approx 1{,}18$.

14. $f(x) = a \times \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} + b,\ a, b \in \mathbb{R}$

14.1. $\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + b = 4 \\ a \times \left(\frac{1}{4}\right)^{0} + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 4 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2 - a = 4 \\ b = -2 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$

Então, $a + b = 2 + (-4) = -2$.

14.2. $f(x) = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - 4$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4^{x-1} = 2 \Leftrightarrow 2^{2-2x} = 2 \Leftrightarrow 2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

15. $f(x) = \pi - 0{,}75 \times 2{,}3^{-0{,}5x}$

15.1. $y = 2{,}3^x \rightarrow y = 2 - 3^{-0{,}5x} \rightarrow y = -0{,}75 \times 2{,}3^{-0{,}5x}$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$D' = \mathbb{R}^+ \qquad D' = \mathbb{R}^+ \qquad D' = \mathbb{R}^-$

$\rightarrow y = \pi - 0{,}75 \times 2{,}3^{-0{,}5x}$

$\downarrow$

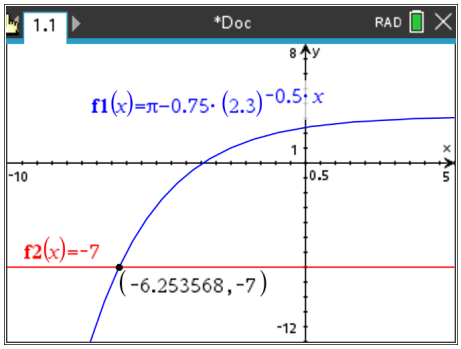
$D' =]-\infty, \pi[$

A inequação $f(x) > k$ é impossível quando $k \in [\pi, +\infty[$.

O menor valor de k para o qual a inequação $f(x) > k$ é impossível é π.

15.2. $f(x) > -7 \wedge x \in \mathbb{Z}^-$

Vamos começar por resolver graficamente a equação $f(x) = -7$.



Então, tem-se $x \approx -6{,}25$.

Como f é crescente e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, então:

$f(x) > -7 \wedge x \in \mathbb{Z}^- \Leftrightarrow x \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1\}$

Página 17 – Pratica

16. **2020** → N.º de habitantes: 40 000

$P(t) = \frac{90}{1 + 15 \times 2{,}7^{-0{,}54t}}$

$\downarrow$

Percentagem de habitantes que usava essa tecnologia t anos após 2020.

16.1. **2030** $\rightarrow$ $+8\%$ de habitantes do que em 2020

$40\,000 \times 1{,}08 = 43\,200$

$2030 \rightarrow t = 10$

$P(10) = \dfrac{90}{1+15\times 2{,}7^{-5{,}4}} \approx 84\%$

$0{,}84 \times 43\,200 = 36\,288$

Estima-se que, em 2030, nessa região, 36 288 habitantes usarão essa tecnologia.

16.2. $2{,}7^{-0{,}54t} > 0$; $15\times 2{,}7^{-0{,}54t} > 0$; $1+15\times 2{,}7^{-0{,}54t} > 1$

$\dfrac{90}{1+15\times 2{,}7^{-0{,}54t}} < 90$, ou seja, $P(t)$.

Não é permissível que o uso dessa tecnologia venha a superar 90% dos habitantes da região.

Página 18 – Consolida

1.1. $\sqrt{3^x} = 3^{\frac{x}{2}}$

1.2. $9^{x+1} = \left(3^2\right)^{x+1} = 3^{2x+2}$

1.3. $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{-x} = \left(5^{-2}\right)^{-x} = 5^{2x}$

1.4. $\dfrac{3^x}{27} = \dfrac{3^x}{3^3} = 3^{x-3}$

1.5. $\sqrt{8^x} = \sqrt{\left(2^3\right)^x} = \sqrt{2^{3x}} = 2^{\frac{3x}{2}}$

1.6. $0{,}0016^x = \left(\dfrac{16}{10\,000}\right)^x = \left(\dfrac{1}{625}\right)^x = \left(5^{-4}\right)^x = 5^{-4x}$

2.1. $y = a^x$, $a > 1$ é uma função exponencial crescente.

Como $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$, $\left(\dfrac{1}{a}\right)^3 = \left(a^{-1}\right)^3 = a^{-3}$ e $\dfrac{1}{a^{-2}} = a^2$,

conclui-se que $\left(\dfrac{1}{a}\right)^3 < a^{-1} < a^0 < a^{\frac{1}{3}} < \sqrt{a^3} < \dfrac{1}{a^{-2}}$.

2.2. $f(x) = a^x + 1$ e $g(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$; $a > 1$

A e B são os pontos de interseção dos gráficos das funções com o eixo Oy .

$f(0) = a^0 + 1 = 2$ e $g(0) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^0 = 1$.

Logo, $A(0,1)$ e $B(0,2)$.

$f \rightarrow$ crescente

$g \rightarrow$ decrescente $\left(0 < \dfrac{1}{a} < 1\right)$

Assim, $f \rightarrow$ **II e** $g \rightarrow$ **I**.

3. $f(x) = -\dfrac{1}{2} + 2^{x-4}$

3.1. $D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se: $2^{x-4} > 0$, logo $\underbrace{-\dfrac{1}{2} + 2^{x-4}}_{f(x)} > -\dfrac{1}{2}$.

$f(x) > -\dfrac{1}{2}$

Então, $D_f' = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

3.2. Quando x tende para $+\infty$, $f(x)$ tende para $+\infty$.

Quando x tende para $-\infty$, $f(x)$ tende para $-\dfrac{1}{2}$.

3.3. Interseção com o eixo Oy :

$f(0) = -\dfrac{1}{2} + 2^{0-4} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{16} = -\dfrac{7}{16}$

$I_1\left(0, -\dfrac{7}{16}\right)$

Interseção com o eixo Ox :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} + 2^{x-4} = 0 \Leftrightarrow 2^{x-4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{x-4} = 2^{-1} \Leftrightarrow x - 4 = -1 \Leftrightarrow x = 3$

$I_2(3, 0)$

Conclusão: O gráfico da função f interseta os eixos coordenados nos pontos de coordenadas $\left(0, -\dfrac{7}{16}\right)$ e $(3, 0)$.

4. $f(x) = 3^x + k$, $k \in \mathbb{R}$

Interseção com o eixo Oy : $\rightarrow B(0, -1)$

r: assíntota horizontal ao gráfico de f

4.1. $f(0) = -1 \Leftrightarrow 3^0 + k = -1 \Leftrightarrow 1 + k = -1 \Leftrightarrow k = -2$

A opção correta é a **(B)**.

4.2. Sendo $k = -2$, então $f(x) = 3^x - 2$.

Quando x tende para $-\infty$, então $f(x)$ tende para -2 .

Uma equação da reta r é $y = -2$.

A opção correta é a **(D)**.

5.1. $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$f(4) > f(7)$ e f é monótona, logo f é decrescente.

Assim, sabe-se que $0 < a < 1$.

Logo, a opção correta é a **(D)**.

5.2. $f(k)=5 \Leftrightarrow a^k=5$

a) $f(-k)=a^{-k}=\left(a^k\right)^{-1}=(5)^{-1}=\frac{1}{5}=0{,}2$

A opção correta é a **(A)**.

b) $f(2k)=a^{2k}=\left(a^k\right)^2=(5)^2=25$

A opção correta é a **(B)**.

Página 19 – Consolida

6. $f(x)=2^x-5$ e $g(x)=3^{-x}+2$

$A(-1, g(-1))$, $B(0, g(0))$, $F(x, 0)$ tal que $f(x)=0$.

Os pontos *E* e *D* pertencem ao gráfico de *f* e são tais que as retas *AD* e *BC* são paralelas ao eixo Ox.

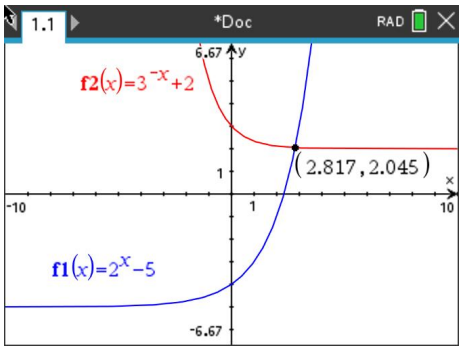
6.1. $B(0, g(0))$; $g(0)=3^0+2=3 \rightarrow B(0, 3)$

$C(x, 3)$, tal que $f(x)=3$.

$f(x)=3 \Leftrightarrow 2^x-5=3 \Leftrightarrow 2^x=8 \Leftrightarrow 2^x=2^3 \Leftrightarrow x=3$

Então, $C(3, 3)$.

6.2. *E* é o ponto de interseção dos gráficos das funções *f* e *g*. Pretende-se resolver graficamente a equação $f(x)=g(x)$.



$E(2{,}817;\ 2{,}045)$. Assim, a ordenada do ponto *E*, com arredondamento às milésimas, é 2,045.

6.3. $A_{[ABCD]}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times(y_A-y_B)$

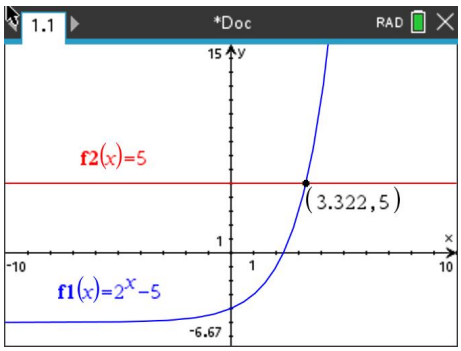
$g(-1)=3^1+2=5 \rightarrow A(-1, 5)$

$B(0, 3)$ e $C(3, 3)$

$D(x, 5)$, tal que $f(x)=5$.

$f(x)=5 \Leftrightarrow 2^x-5=5$

Recorrendo à calculadora gráfica:



Então, $x_0 \approx 3{,}322$ e $D(3{,}322;\ 5)$.

$A_{[ABCD]}=\frac{4{,}322+3}{2}\times(5-3)=7{,}322 \approx 7{,}32$

6.4. $F(a, 0)$ e $f(a)=0$, ou seja, $2^a-5=0 \Leftrightarrow 2^a=5$

$h(x)=10\times 2^{-x}+m,\ m \in \mathbb{R}$

$h(a)=0 \Leftrightarrow 10\times 2^{-a}+m=0 \Leftrightarrow 10\times\left(2^a\right)^{-1}+m=0 \Leftrightarrow$

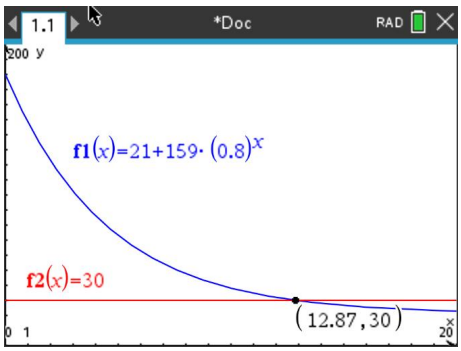
$\Leftrightarrow 10\times\left(5^{-1}\right)+m=0 \Leftrightarrow 10\times\frac{1}{5}+m=0 \Leftrightarrow m=-2$

7. $T(t)=21+76\times 0{,}8^t$

T: temperatura (ºC); *t*: tempo (min)

7.1. $T(t) \leq 30$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $t \approx 10$. Donde se conclui que a Joana tem de esperar, no mínimo, 10 minutos.

7.2. Quando *t* tende para $+\infty$, então $T(t)$ tende para 21. Logo, a temperatura ambiente da cozinha da Joana era 21 ºC.

8. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+3$ e $g(x)=2^x$

$A(0, f(0))$, $B(0, g(0))$ e *C* é o ponto de interseção dos gráficos de *f* e de *g*.

8.1. **Função *f***

- $D_f = \mathbb{R}$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + 3 > 3 \Leftrightarrow f(x) > 3$

  $D_f' =]3, +\infty[$
- Quando x tende para $+\infty$, $f(x)$ tende para 3.

  Logo, a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

$D_f = \mathbb{R}$; $D_f' =]3, +\infty[$; $y = 3$

Função *g*

- $D_g = \mathbb{R}$
- $2^x > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \qquad D_g' =]0, +\infty[$
- Quando x tende para $-\infty$, $g(x)$ tende para 0.

  Logo, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *g*.

$D_g = \mathbb{R}$; $D_g' =]0, +\infty[$; $y = 0$

8.2. $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 3 = 4 + 3 = 7 \rightarrow A(0, 7)$

$g(0) = 2^0 = 1 \rightarrow B(0, 1)$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + 3 = 2^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 3 = 2^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2^x} + 3 = 2^x \Leftrightarrow 4 + 3 \times 2^x = \left(2^x\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 3 \times 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 4 \vee \underbrace{2^x = -1}_{\text{Equação impossível}} \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$$

$g(2) = 2^2 = 4$. Logo, $C(2, 4)$.

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times x_C}{2} = \frac{6 \times 2}{2} = 6$.

8.3. $h(x) = k \times 5^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$

$C(2, 4)$ pertence ao gráfico de *h* se $h(2) = 4$.

$$h(2) = 4 \Leftrightarrow k \times 5^{-2} = 4 \Leftrightarrow k \times \frac{1}{25} = 4 \Leftrightarrow k = 100$$

9. $Q(t) = Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$

Q: mg ; t: anos ; Q_0 : quantidade em vida

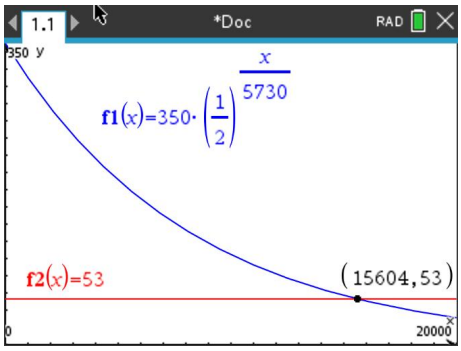
9.1. $Q(20\,000) = 12 \Leftrightarrow Q_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20\,000}{5730}} = 12 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow Q_0 = \frac{12}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20\,000}{5730}}} \Leftrightarrow Q_0 \approx 135$$

Antes de morrer, o organismo teria, aproximadamente, 135 mg de carbono-14.

9.2. $Q_0 = 350$; $Q(t) = 53 \Leftrightarrow 350 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = 53$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$t \approx 15\,604$

Donde se conclui que, após a sua morte, decorreram, aproximadamente, 15 604 anos.

Página 20 – Avalia 1 – Parte 1: Verificação rápida

1. (A) $D_f' =]5, +\infty[$
(B) $D_g' =]-\infty, 5[$
(C) $D_h' =]5, +\infty[$
(D) $D_j' =]-5, +\infty[$

A opção correta é a **(B)**.

2. $g(x) = -3a^x + 4$, $a > 1$

$a > 1 \rightarrow$ Quando x tende para $-\infty$, $g(x)$ tende para 4. Então, a reta de equação $y = 4$ é assíntota horizontal ao gráfico da função *g*.

A opção correta é a **(B)**.

3. $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \rightarrow D_f' =]0, +\infty[$

$f(-5) > f(1) \rightarrow$ *f* não é crescente

Como *f* é monótona, então *f* é decrescente.

Logo, $0 < a < 1$.

A opção correta é a **(D)**.

4. $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$a^{x+3} = \frac{1}{a^x} \Leftrightarrow a^{x+3} = a^{-x} \Leftrightarrow x+3 = -x \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

A opção correta é a **(C)**.

5. $f(x) = 3^x$

I: $f(x+2) - f(x) = 3^{x+2} - 3^x = 3^x \times 3^2 - 3^x =$

$= 3^x(3^2 - 1) = 3^x \times 8 = 8 \times 3^x \rightarrow$ **b)**

II: $g(x) = 3^{x+2} - k$

$3^{x+2} > 0 \Leftrightarrow 3^{x+2} - k > -k \Leftrightarrow g(x) > -k$

Então, $D'_g =]-k, +\infty[\rightarrow$ **a)**

III: $y = 3^x \rightarrow y = 3^{x+2} \rightarrow y = 3^{x+2} - k$

O gráfico de *g* obtém-se a partir do gráfico de *f* através de uma translação de vetor

$\vec{u}(-2, -k) \rightarrow$ **b)**

Conclusão: I – b); II – a); III – b)

Página 21 – Avalia 1 – Parte 2: Questões de desenvolvimento

1. $a^x = 21$, $a^y = 7$ e $b^x = 3$

1.1. $a^{x+y} = a^x \times a^y = 21 \times 7 = 147$

1.2. $a^{x-y} = a^x : a^y = 21 : 7 = 3$

1.3. $b^{2x} = (b^x)^2 = 3^2 = 9$

1.4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{b^x}{a^x} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

2. $f(x) = 7 \times 2^x - 14$ e $g(x) = 6 \times 7^x$

2.1. a) $A(0, f(0))$

$f(0) = 7 \times 2^0 - 14 = 7 - 14 = -7 \rightarrow A(0, -7)$

$B(x, 0)$, tal que $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 7 \times 2^x + 14 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \rightarrow B(1, 0)$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$2^x > 0 \Leftrightarrow 7 \times 2^x > 0 \Leftrightarrow 7 \times 2^x - 14 > -14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) > -14$

Então, $D'_f =]-14, +\infty[$.

c) $f(x) = g(1) \Leftrightarrow 7 \times 2^x - 14 = 6 \times 7^1 \Leftrightarrow$

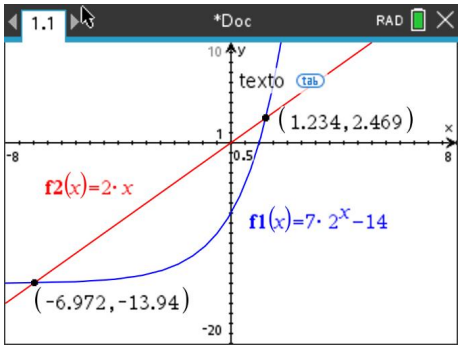
$\Leftrightarrow 7 \times 2^x - 14 = 42 \Leftrightarrow 7 \times 2^x = 56 \Leftrightarrow 2^x = 8$

$\Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$

Então, as coordenadas do ponto do gráfico de *f* que satisfaz a condição $f(x) = g(1)$ são $(3, 42)$.

2.2. Pretende-se resolver graficamente a equação $f(x) = 2x$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que as coordenadas dos pontos do gráfico de *f* que pertencem à reta de equação $y = 2x$ são $(-6{,}97; -13{,}94)$ e $(1{,}23; 2{,}47)$.

3. $B(t) = \frac{125}{1 + 8{,}9 \times 2^{-t}}$

B: em toneladas; *t*: em meses

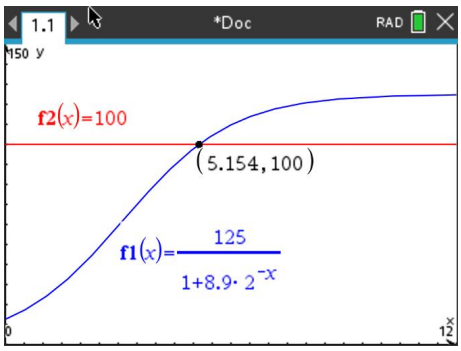
3.1. $B(0) = \frac{125}{1 + 8{,}9 \times 2^0} = \frac{125}{9{,}9} \approx 12{,}6$

$B(4) = \frac{125}{1 + 8{,}9 \times 2^{-4}} = 80{,}3$

A biomassa inicial de robalos é 12,6 toneladas e ao fim de 4 meses é 80,3 toneladas.

3.2. Pretende-se resolver a condição $B(t) > 100$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $t > 5{,}154$.

Donde se conclui que para serem ultrapassadas 100 toneladas de biomassa devem decorrer, no mínimo, 6 meses completos.

3.3. Quando t tende para $+\infty$, 2^{-t} tende para zero.

Logo, $B(t)$ tende para $\frac{125}{1+8{,}9\times 0}$, ou seja, 125.

Assim, conclui-se que a capacidade de carga é de 125 toneladas.

Tema 2: Função inversa

Página 22 – Tarefa inicial

1.1. Desconto: 25%

Valor final do artigo: 75% do valor inicial

$f(x)=0{,}75x=\frac{3}{4}x \rightarrow a=\frac{3}{4}$

$g(x)=\frac{4}{3}x \rightarrow b=\frac{4}{3}$

1.2. a) $g(f(x))=g\left(\frac{3}{4}x\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}x\right)=x$

b) $f(g(y))=f\left(\frac{4}{3}y\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}y\right)=y$

2. $f(x)=1{,}8x+32$

2.1. $x=15$

$f(15)=1{,}8\times 15+32=59$

15 ºC correspondem a 59 ºF.

2.2. a) $f(x)=y \Leftrightarrow 1{,}8x+32=y \Leftrightarrow 1{,}8x=y-32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{y-32}{1{,}8} \Leftrightarrow x=\frac{y-32}{\frac{9}{5}} \Leftrightarrow x=\frac{5y-160}{9}$

b) $g(x)=\frac{5x-160}{9}$

Página 23

17.1. a) $D_f=A=\{-2, 1, 2, 3\}$

$f(-2)=|-2|=2$; $f(1)=|1|=1$; $f(2)=|2|=2$;

$f(3)=|3|=3$

Então, $D_f'=\{1, 2, 3\}$

b) A função f não é invertível porque $-2\neq 2$ e $f(-2)=f(2)$.

17.2. a) $g(-1)=|-1|=1$; $g(0)=|0|=0$; $g(2)=|2|=2$;

$g(3)=|3|=3$

A função g é invertível porque quaisquer dois elementos diferentes do seu domínio têm imagens diferentes.

b) $D_{g^{-1}}=\{1, 0, 2, 3\}$

17.3. $D_h=\{-1, 0, 2, 3\}$

$h(-1)=-1+1=0$; $h(0)=0+1=1$;

$h(2)=2+1=3$; $h(3)=3+1=4$

$D_h'=\{0, 1, 3, 4\}$

Logo, $D_{h^{-1}}=\{0, 1, 3, 4\}$ e $D_{h^{-1}}'=\{-1, 0, 2, 3\}$.

Página 24

18.1. $f(-2)=-4$; $f(0)=0$; $f(3)=6$; $f(4)=8$

$D_f'=\{-4, 0, 6, 8\}$

Como $D_{f^{-1}}=D_f'$, então $D_{f^{-1}}=\{-4, 0, 6, 8\}$.

$f(x)=y \Leftrightarrow 2x=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{2}$

Então, $f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$.

18.2. $f(-2)=2\times(-2)+1=-3$; $f(0)=2\times 0+1=1$;

$f(3)=2\times 3+1=7$; $f(4)=2\times 4+1=9$

$D_f'=\{-3, 1, 7, 9\}$

Como $D_{f^{-1}}=D_f'$, então $D_{f^{-1}}=\{-3, 1, 7, 9\}$.

$f(x)=y \Leftrightarrow 2x+1=y \Leftrightarrow 2x=y-1 \Leftrightarrow x=\frac{y-1}{2}$

Então, $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$.

18.3. $f(-2)=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}$; $f(0)=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}$;

$f(3)=\frac{3+3}{2}=3$; $f(4)=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$

$D_f'=\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}$

Como $D_{f^{-1}}=D_f'$, então $D_{f^{-1}}=\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}$.

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x+3}{2}=y \Leftrightarrow x+3=2y \Leftrightarrow x=2y-3$

Então, $f^{-1}(x)=2x-3$.

18.4. $f(-2)=3\times(-2)-1=-7$; $f(0)=3\times0-1=-1$;

$f(3)=3\times3-1=8$; $f(4)=3\times4-1=11$

$D_f^{'}=\{-7,-1,8,11\}$

Como $D_{f^{-1}}=D_f^{'}$, então $D_{f^{-1}}=\{-7,-1,8,11\}$.

$f(x)=y\Leftrightarrow 3x-1=y\Leftrightarrow 3x=y+1\Leftrightarrow x=\dfrac{y+1}{3}$

Então, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{3}$.

18.5. $f(-2)=\dfrac{2\times(-2)+1}{3}=-1$; $f(0)=\dfrac{2\times0+1}{3}=\dfrac{1}{3}$;

$f(3)=\dfrac{2\times3+1}{3}=\dfrac{7}{3}$; $f(4)=\dfrac{2\times4+1}{3}=3$

$D_f^{'}=\left\{-1,\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{3},3\right\}$

Como $D_{f^{-1}}=D_f^{'}$, então $D_{f^{-1}}=\left\{-1,\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{3},3\right\}$.

$f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{2x+1}{3}=y\Leftrightarrow 2x+1=3y\Leftrightarrow x=\dfrac{3y-1}{2}$

Então, $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-1}{2}$.

Página 25

19.1. *f* não é invertível, porque há objetos diferentes que têm a mesma imagem (basta ver que a função *f* tem três zeros).

19.2. a) $g\colon [0,+\infty[\to\mathbb{R}$

$x\to f(x)$

g não é invertível, porque há objetos diferentes com a mesma imagem.

Por exemplo, $g(0)=g(2)$.

b) $g\colon [2,+\infty[\to\mathbb{R}$

$x\to f(x)$

g é invertível, porque objetos diferentes têm a mesma imagem.

c) $g\colon]-\infty,0]\to\mathbb{R}$

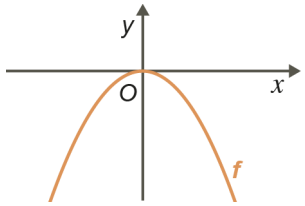
$x\to f(x)$

g não é invertível, porque há objetos diferentes com a mesma imagem.

Por exemplo, $g(-2)=g(0)$.

20.1. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\to -x^2$



$D_f^{'}=]-\infty,0]$

20.2. *f* não é invertível, porque objetos simétricos têm a mesma imagem.

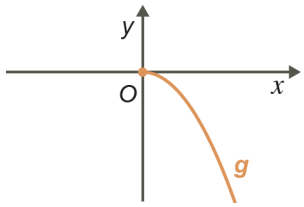
20.3. $g\colon [0,+\infty[\to\mathbb{R}$

$x\to -x^2$

a) Da representação gráfica, conclui-se que $D_g^{'}=]-\infty,0]$.

Logo, sendo *g* invertível, então:

$D_{g^{-1}}=D_g^{'}=]-\infty,0]$.



b) $g(x)=-x^2\wedge x\in[0,+\infty[$

$y=-x^2\wedge x\in[0,+\infty[$

$x=\sqrt{-y}\wedge x\in[0,+\infty[$

$g^{-1}(y)=\sqrt{-y}$

Logo, conclui-se que $g^{-1}(x)=\sqrt{-x}$.

Página 26

21.1. $3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3^1}=\sqrt[4]{3}$

21.2. $5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{5^3}=\sqrt{125}$

21.3. $6^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{6^{-2}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{6^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{36}}$

21.4. $2^{-\frac{1}{3}}\times2^{\frac{3}{4}}=2^{-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}=2^{\frac{5}{12}}=\sqrt[12]{2^5}=\sqrt[12]{32}$

22.1. $\sqrt[4]{5^3}=5^{\frac{3}{4}}$

22.2. $\sqrt[5]{7^2}=7^{\frac{2}{5}}$

22.3. $\sqrt[7]{5^3}\times\sqrt[7]{5^{-1}}=5^{\frac{3}{7}}\times5^{-\frac{1}{7}}=5^{\frac{3-1}{7}}=5^{\frac{2}{7}}$

23.1. $V_{cubo}=\sqrt[3]{5}$

Designando por *a* a aresta do cubo, tem-se:

$a^3=\sqrt[3]{5}\Leftrightarrow a^3=5^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{5^{\frac{1}{3}}}\Leftrightarrow a=\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow a=5^{\frac{1}{9}}$

23.2. $A_{face}=a^2=\left(5^{\frac{1}{9}}\right)^2=5^{\frac{2}{9}}=\sqrt[9]{25}$

Página 27

24.1. $x^4=7\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{7}\vee x=-\sqrt[4]{7}$

24.2. $x^3=-5\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-5}$

24.3. $x^5-8=0\Leftrightarrow x^5=8\Leftrightarrow x=\sqrt[5]{8}$

24.4. $x^6+2=0\Leftrightarrow \underbrace{x^6=-2}_{\text{equação impossível}}\quad x\in\varnothing$

A equação não tem soluções reais.

24.5. $x^7=0\Leftrightarrow x=0$

24.6. $\left(x^3-5\right)^4=0\Leftrightarrow x^3-5=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{5}$

25. $f(x)=3\Leftrightarrow x^4=3\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{3}\vee x-\sqrt[4]{3}$

A reta *r* interseta o gráfico de *f* nos pontos de abcissas $-\sqrt[4]{3}$ e $\sqrt[4]{3}$.

Página 28 – Tarefa 4

1.1. $f(x)=\dfrac{1-3x}{4}$

$D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{1-3x}{4}=y\Leftrightarrow 1-3x=4y\Leftrightarrow x=\dfrac{1-4y}{3}$

$f^{-1}(y)=\dfrac{1-4y}{3}$

Então, $f^{-1}(x)=\dfrac{1-4x}{3}$.

$D_f'=D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

1.2. $f(x)=\dfrac{1-3x}{4}$

$D_f=[0,+\infty[$

Por **1.1.** sabe-se que $f^{-1}(x)=\dfrac{1-4x}{3}$.

$x\geq 0\Leftrightarrow -3x\leq 0\Leftrightarrow 1-3x\leq 1\Leftrightarrow\dfrac{1-3x}{4}\leq\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow f(x)\leq\dfrac{1}{4}$

$D_f'=\left]-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$

1.3. $f(x)=\dfrac{1-3x}{4}$

$D_f=[-5,1]$

Por **1.1.** sabe-se que $f^{-1}(x)=\dfrac{1-4x}{3}$.

$-5\leq x\leq 1\Leftrightarrow -15\leq 3x\leq 3\Leftrightarrow -3\leq -3x\leq 15$

$\Leftrightarrow -2\leq 1-3x\leq 16\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1-3x}{4}\leq 4\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq 4$

$D_f'=\left[-\dfrac{1}{2},4\right]$

1.4. $f(x)=\dfrac{1-3x}{4}$

$D_f=[-1,+\infty[$

Por **1.1.** sabe-se que $f^{-1}(x)=\dfrac{1-4x}{3}$.

$x\geq -1\Leftrightarrow -3x\leq 3\Leftrightarrow 1-3x\leq 4\Leftrightarrow\dfrac{1-3x}{4}\leq 1\Leftrightarrow f(x)\leq 1$

$D_f'=]-\infty,1]$

2.1. $f(x)=y\Leftrightarrow 1-2x^2=y\Leftrightarrow\dfrac{1-y}{2}=x^3\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{1-y}{2}}$

$f^{-1}(y)=\sqrt[3]{\dfrac{1-y}{2}}$

a) $f^{-1}(-15)=\sqrt[3]{\dfrac{1+15}{2}}=\sqrt[3]{8}=2$

b) $f^{-1}(-1)=\sqrt[3]{\dfrac{1+1}{2}}=\sqrt[3]{1}=1$

c) $f\left(f^{-1}(k)\right)=f\left(\sqrt[3]{\dfrac{1-k}{2}}\right)=1-2\left(\sqrt[3]{\dfrac{1-k}{2}}\right)^3=$

$=1-2\times\dfrac{1-k}{2}=1-(1-k)=k$

2.2. **a)** $g\colon[0,+\infty[\to\mathbb{R}$

$x\to 1-2x^3$

$x\geq 0\Leftrightarrow x^3\geq 0\Leftrightarrow -2x^3\leq 0\Leftrightarrow 1-2x^3\leq 1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow g(x)\leq 1$

$D_g'=]-\infty,1]$

$D_{g^{-1}}=D_g'=]-\infty,1]$

b) $g\colon [-1, 3] \to \mathbb{R}$

$$x \to 1-2x^3$$

$$-1 \le x \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x^3 \le 27 \Leftrightarrow -2 \le 2x^3 \le 54 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -54 \le -2x^3 \le 2 \Leftrightarrow -53 \le 1-2x^3 \le 3$$
$$\Leftrightarrow -53 \le g(x) \le 3$$

$D_g' = [-53, 3]$; $D_{g^{-1}} = D_g' = [-53, 3]$

c) $g\colon]-\infty, -2] \to \mathbb{R}$

$$x \to 1-2x^3$$

$$x \le -2 \Leftrightarrow x^3 \le -8 \Leftrightarrow -2x^3 \ge 16 \Leftrightarrow 1-2x^3 \ge 17 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(x) \ge 17$$

$D_g' = [17, +\infty[$; $D_{g^{-1}} = D_g' = [17, +\infty[$

Página 29

26.1. Como as representações gráficas de uma função invertível e da sua função inversa são simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, sabe-se que as representações gráficas das funções f^{-1} e g^{-1} são, respetivamente, I e III.

$f^{-1} \to$ I e $g^{-1} \to$ III

26.2. Sendo $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt{x}$, então $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g^{-1}(x) = x^2$. Por observação gráfica, sabe-se que: se $0 < a < 1$, então $a^3 < a^2 < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$.

26.3. $\sqrt[3]{x} < x \wedge x \ge 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) < x \wedge x \ge 0 \Leftrightarrow x > 1$

$S =]1, +\infty[$

Página 30

27.1. $A(-3, -1)$ pertence ao gráfico de f, logo $f(-3) = -1$. As representações gráficas de f e de g são simétricas em relação à reta de equação $y = x$, logo a função g é a função inversa de f.

Assim, $g(-1) = -3$.

27.2. $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2} = y \Leftrightarrow 1 = xy + 2y \wedge x \ne -2$

$$\Leftrightarrow 1-2y = xy \wedge x \ne -2 \Leftrightarrow \frac{1-2y}{y} = x \wedge x \ne -2$$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1-2x}{x}$ e $D_f' = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Página 31 – Tarefa 5

1.1. A função f não é invertível, porque existem objetos diferentes que têm a mesma imagem.

1.2. A correspondência j não é uma função porque, por exemplo, ao elemento 3 da variável independente correspondem dois valores (-3 e 1) da variável dependente.

1.3. g: restrição de f ao conjunto $[-1, +\infty[$

a) $g(-1) = f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) = -1$

$D_g' = [-1, +\infty[$

b) $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2x = y \wedge x \ge -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - y = 0 \wedge x \ge -1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4y}}{2} \wedge x \ge -1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4(1+y)}}{2} \wedge x \ge -1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+y}}{2} \wedge x \ge -1$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1+y} \wedge x \ge -1 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{1+y}$$

Donde se conclui que $g^{-1}(x) = -1 + \sqrt{1+x}$.

c) Por observação gráfica da figura, sabe-se que:

$g(x) \le g^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in [-1, 0]$

$S = [-1, 0]$

1.4. h: restrição de f ao conjunto $]-\infty, -1]$.

a) $D_{h^{-1}} = D_h' = [-1, +\infty[$

b) $h(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2x = y \wedge x \le -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - y = 0 \wedge x \le -1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4y}}{2} \wedge x \le -1$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1+y} \wedge x \le -1 \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{1+y}$$

Donde se conclui que $h^{-1}(x) = -1 - \sqrt{1+x}$.

2. $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

2.1. Sim, as funções da família são invertíveis pois a objetos diferentes correspondem imagens diferentes.

2.2. Se $a > 1$, então f^{-1} é crescente.

Se $0 < a < 1$, então f^{-1} é decrescente.

Página 32 – Pratica

28.1. a) Se $k \in \left[-\frac{9}{2}, 3\right]$, então a equação $f(x) = k$ tem uma solução.

b) Se $k \notin \left[-\frac{9}{2}, 3\right]$, então a equação $f(x) = k$ tem zero soluções.

28.2. A função f é invertível, pois basta constatar que objetos diferentes têm imagens diferentes.

28.3. a) $D_{f^{-1}} = D_f' = \left[-\frac{9}{2}, 3\right]$

b) $f^{-1}(3) = x \Leftrightarrow f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 2$

Então, $f^{-1}(3) = 2$.

c) $f^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$ porque $f(1) = -\frac{3}{2}$

$f^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right) = -1$ porque $f(-1) = -\frac{9}{2}$

Logo, $f^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) + f^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right) = 1 + (-1) = 0$

29. $f(x) = 1 - 2x^3$; $D_f = \mathbb{R}$

$f^{-1}(-15) = x \Leftrightarrow f(x) = -15 \Leftrightarrow 1 - 2x^3 = -15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$

$f^{-1}(-15) = 2$

A opção correta é a **(D)**.

30. $f(x) = -2x^4$; $A \in$ 3.º Q

30.1. $f(x) = x \Leftrightarrow -2x^4 = x \Leftrightarrow 2x^4 + x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(2x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$

Como $x_A < 0$, conclui-se que $A\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\right)$.

Soma das coordenadas do ponto A:

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$

30.2. A função f não é invertível.

Basta verificar que os objetos simétricos têm a mesma imagem.

30.3. g: restrição de f a $[0, +\infty[$

g^{-1}: inversa de g

a) Por observação gráfica, sabe-se que $D_f' =]-\infty, 0]$.

b) $g(x) = y \Leftrightarrow -2x^4 = y \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 = -\frac{y}{2} \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{-\frac{y}{2}} \wedge x \geq 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{-\frac{y}{2}}$

Donde se conclui que $g^{-1}(x) = \sqrt[4]{-\frac{x}{2}}$.

31.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$, logo objetos simétricos têm a mesma imagem. Assim, a função f não é invertível.

31.2. g: restrição de f a $[0, +\infty[$

Não se pode concluir que a função g é invertível, pois não se sabe se há objetos diferentes com a mesma imagem. Basta, por exemplo, pensar na função cosseno.

32.1. f é uma função afim, logo f é invertível.

$D_{f^{-1}} = D_f' = \mathbb{R}$

$f(x) = y \Leftrightarrow -3x + 2 = y \Leftrightarrow x = \frac{2 - y}{3}$

Donde se conclui que $f^{-1}(x) = \frac{2 - x}{3}$.

32.2. $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow -3x + 2 = \frac{2 - x}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -9x + 6 = 2 - x \Leftrightarrow -8x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Os gráficos de f e de f^{-1} intersetam-se no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Página 33 – Pratica

33.1. $f(x) = ax + b$; $a \neq 0$

r: $y = ax + b$ é a reta que representa f; $m_r = a$

$f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow x = \frac{y - b}{a} \wedge a \neq 0$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$; $a \neq 0$

s: $y=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}$ é a reta que representa $f^{-1}(x)$

$m_s=\frac{1}{a}$; $m_r\times m_s=a\times\frac{1}{a}\underset{a\neq 0}{=}1$

33.2. Por exemplo, $f(x)=x+2$.

Neste caso, $f^{-1}(x)=x-2$.

As retas que representam *f* e f^{-1} são paralelas, logo os gráficos de *f* e f^{-1} não têm pontos em comum.

34. $f(x)=-x^2+4x$; $A(a,a)$; $a>2$

34.1. A função *g*, restrição de *f* ao intervalo $[0,a]$, não é invertível pois, por exemplo, $g(a)=g(4-a)$.

34.2. *h*: restrição de *f* ao intervalo $[a,+\infty[$

a) $D_h=[a,+\infty[$

$h(a)=f(a)=-a^2+4a$

Por observação gráfica, sabe-se que $D_h'=]-\infty,-a^2+4a]$.

b) $h(x)=y\Leftrightarrow -x^2+4x=y\wedge x\geq a\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2+4x-y=0\wedge x\geq a\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4y}}{-2}\wedge x\geq a$

$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm 2\sqrt{4-y}}{-2}\wedge x\geq a$

$\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{4-y}\wedge x\geq a\underset{a>2}{\Leftrightarrow}x=2+\sqrt{4-y}$

Donde se conclui que $h^{-1}(x)=2+\sqrt{4-x}$.

35. $f(x)=\frac{2x}{x+1}$

35.1. Qualquer reta horizontal não interseta o gráfico de *f* em mais do que um poto, logo *f* é invertível.

A função *g* é a função inversa de *f*, ou seja, $g=f^{-1}$.

35.2. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x+1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\begin{array}{r|l} 2x+0 & x+1 \\ \hline -2x-2 & 2 \\ \hline -2 & \end{array}$ $\qquad f(x)=2-\frac{2x}{x+1}$

Equação da assíntota vertical: $x=-1$

Equação da assíntota horizontal: $y=2$

r: $x=-1$ e *s*: $y=2$

35.3. $f(x)=y\Leftrightarrow\frac{2x}{x+1}=y\Leftrightarrow 2x=xy+y\wedge x\neq -1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-xy=y\wedge x\neq -1\Leftrightarrow x(2-y)=y\wedge x\neq -1$

$\Leftrightarrow x=\frac{y}{2-y}\wedge x\neq -1$

Conclui-se que $f^{-1}(x)=\frac{x}{2-x}$.

Atendendo a que a representação gráfica de *g* $(g=f^{-1})$ é a imagem da representação gráfica de *f* pela reflexão em relação à reta $y=x$, sabe-se que as equações que definem as retas *t* e *u* são, respetivamente, $x=2$ e $y=-1$.

t: $x=2$ e *u*: $y=-1$

Página 34 – Consolida

1.1. As funções *g* e *i* não são invertíveis porque há objetos diferentes que têm a mesma imagem (basta verificar que as funções têm mais do que um zero).

1.2. **a)** Por exemplo, *f* é uma função invertível e crescente.

b) A função *j* é invertível e decrescente.

2.

$-1\leq x\leq 2$

$-1\leq x^3\leq 8$

$0\leq 1+x^3\leq 9$

$0\leq f(x)\leq 9$

$D_{f^{-1}}=D_f'=[0,9]$

A opção correta é a **(A)**.

3. *g* é a função inversa de *f*.

$f(x)=y\Leftrightarrow x^2+1=y\Leftrightarrow x^2=y-1\underset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}x=\sqrt{y-1}$

$g^{-1}(x)=\sqrt{y-1}$

$g^{-1}(8)=\sqrt{7}\neq 2$

Logo, o ponto de coordenadas $(8,2)$ não pertence ao gráfico de *g*.

A opção correta é a **(B)**.

4.1. $f(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x+2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=-2$

Zeros de *f*: -2 e 0

4.2. A função *f* não é invertível porque tem dois zeros.

4.3. g: restrição de f ao intervalo $[-1, +\infty[$.

g é invertível.

$g(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2x = y \Leftrightarrow x^2 + 2x - y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-y)}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4(1+y)}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{1+y}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1+y}$

Como $x \in [-1, +\infty[$, então $x = -1 + \sqrt{1+y}$.

Logo, $g^{-1}(x) = -1 + \sqrt{1+x}$

A opção correta é a **(C)**.

5.1. O ponto de interseção dos gráficos de f e g pertence à reta de equação $y = x$.

$f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{3}{x+2} = x \underset{x \neq -2}{\Leftrightarrow} 3 = x(x+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$

Como $D_f =]-2, +\infty[$, então $x = 1$.

Assim, o ponto de interseção dos gráficos de f e de g tem coordenadas $(1, 1)$.

5.2. $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{3}{x+2} = y \underset{x \neq -2}{\Leftrightarrow} 3 = y(x+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 = yx + 2y \Leftrightarrow 3 - 2y = yx \Leftrightarrow \dfrac{3-2y}{y} = x$

Então, $f^{-1}(x) = \dfrac{3-2x}{x}$, ou seja, $g(x) = \dfrac{3-2x}{x}$.

5.3. $D_g = D_f' = \mathbb{R}^+$

Página 35 – Consolida

6. $f(x) = -3 + 2^{x-1}$

$f(1) = -3 + 2^0 = -2 \rightarrow (-2, 1)$

$f(-2) = -3 + 2^{-3} = -3 + \dfrac{1}{8} = -\dfrac{23}{8} \rightarrow \left(-\dfrac{23}{8}, -2\right)$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3 + 2^{-\frac{3}{2}} = -3 + \dfrac{1}{\sqrt{8}} = -3 + \dfrac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \left(-3 + \dfrac{\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{1}{2}\right)$

$f(-1) = -3 + 2^{-2} = -3 + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{11}{4} \rightarrow \left(-\dfrac{11}{4}, -1\right)$

A opção correta é a **(D)**.

7.1. $f(x) = \sqrt{x-2}$ e $D_f = [2, +\infty[$

A função f é invertível.

$D_{f^{-1}} = D_f' = [0, +\infty[$, pois $\forall x \in D_f,\ \sqrt{x-2} \geq 0$.

$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = y \Leftrightarrow x - 2 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 + 2$

Então, $f^{-1}(x) = x^2 + 2$.

7.2. $g(x) = \sqrt{x+3}$ e $D_g = [-3, +\infty[$

A função g é invertível.

$D_{g^{-1}} = D_g' = [0, +\infty[$, pois $\forall x \in D_g,\ \sqrt{x+3} \geq 0$.

$g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = y \Leftrightarrow x + 3 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 - 3$

Então, $g^{-1}(x) = x^2 - 3$.

7.3. $h(x) = \sqrt{1-x}$ e $D_h =]-\infty, 1]$

A função h é invertível.

$D_{h^{-1}} = D_h' = [0, +\infty[$, pois $\forall x \in D_h,\ \sqrt{1-x} \geq 0$.

$h(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = y \Leftrightarrow 1 - x = y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x = y^2 - 1 \Leftrightarrow x = -y^2 + 1$

Então, $h^{-1}(x) = -x^2 + 1$.

8. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ e $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- $C(x, 2)$, tal que $f(x) = 2$.

  $f(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} = 2 \underset{x \neq -1}{\Leftrightarrow} x = 2x + 2 \Leftrightarrow x = -2$

  Então, $C(-2, 2)$.

- $A\left(\dfrac{3}{4}, y\right)$, tal que $f^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) = y$.

  $f^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) = y \Leftrightarrow f(y) = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{3}{4} \underset{y \neq -1}{\Leftrightarrow}$

  $\underset{y \neq -1}{\Leftrightarrow} 4y = 3y + 3 \Leftrightarrow y = 3$

  Então, $A\left(\dfrac{3}{4}, 3\right)$.

- $B\left(x, -\dfrac{1}{2}\right)$, tal que $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{2}$.

  $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} \Leftrightarrow x = -1$

  Então, $B\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

9.1. a) $f(x) = x \times \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$

f é uma função invertível porque objetos diferentes têm imagens diferentes.

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = y \Leftrightarrow x^2 = 2y \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{2y}$

Então, $f^{-1}(x) = \sqrt{2x}$.

9.2. $f^{-1}(32) = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$

Um retângulo com área 32 tem o lado maior com medida igual a 2.

9.3. $D_h = \mathbb{R}^+$; $h(x) = 3f^{-1}(x)$

$h(72) = 3f^{-1}(72) = 3 \times \sqrt{2 \times 72} = 3 \times 12 = 36$

Um retângulo com área 72 tem perímetro 36.

10. f: função invertível, de domínio $\mathbb{N}$

$f(x) = x + \cos(\pi x)$

10.1. a) $f(7) = 7 + \cos(7\pi) = 7 - 1 = 6 \rightarrow (7, 6)$

b) $f(12) = 12 + \cos(12\pi) = 12 + 1 = 13 \rightarrow (12, 13)$

10.2. Se x é par, então $\cos(\pi x) = 1$.

Se x é ímpar, então $\cos(\pi x) = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ se } x \text{ é par} \\ x - 1 \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

10.3. x é par :

$f(x) = y \Leftrightarrow x + 1 = \underset{\text{é ímpar}}{y} \Leftrightarrow x = y - 1$

$f^{-1}(y) = y - 1$, sendo y ímpar

Mudando a variável, tem-se: $f^{-1}(x) = x - 1$, x ímpar

x é ímpar :

$f(x) = y \Leftrightarrow x - 1 = \underset{\text{é par}}{y} \Leftrightarrow x = y + 1$

$f^{-1}(y) = y + 1$, sendo y par

Mudando a variável, tem-se: $f^{-1}(x) = x + 1$, x par

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ se } x \text{ é par} \\ x - 1 \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

10.4. $f^{-1}(2025) - f^{-1}(1974) = 2025 - 1 - (1974 + 1) = 49$

Página 36 – Avalia 1 – Parte 1: Verificação rápida

1. f: $A \rightarrow \mathbb{R}$

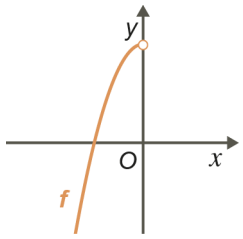
$x \rightarrow -x^2 + 4$

1.1. A função f terá inversa se quaisquer dois elementos diferentes do seu domínio têm imagens diferentes.

Das opções apresentadas, a única em que tal acontece é no caso em que $A = [1, +\infty[$.

A opção correta é a **(C)**.

1.2. Se $A = \mathbb{R}^-$, então f tem inversa.



$f(x) = y \Leftrightarrow -x^2 + 4 = y \Leftrightarrow x^2 = 4 - y \underset{x<0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{4 - y}$

Então, $f^{-1}(x) = -\sqrt{4 - x}$.

A opção correta é a **(A)**.

2. $D_f = \mathbb{R}$, $D'_f =]-\infty, 4[$, f é invertível e decrescente.

Como o gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto B de ordenada $\frac{7}{2}$, sabe-se que $f(0) = \frac{7}{2}$.

$A(1, 3)$ pertence ao gráfico de f, logo $f(1) = 3$ e consequentemente, $f^{-1}(3) = 1$.

$f^{-1}(x) + f^{-1}(3) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(x) + 1 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow f(0) = x \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

A opção correta é a **(B)**.

3. $A(5, a)$ pertence ao gráfico de f^{-1}, logo

$f^{-1}(5) = a$, ou seja, $f(a) = 5$.

$D_f = \mathbb{R}$ e $f(x) = 0{,}5x^3 + 1$

I: $f(a) = 5 \Leftrightarrow 0{,}5a^3 + 1 = 5 \Leftrightarrow a^3 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underset{\substack{\text{ordenada} \\ \text{de A}}}{a} = 2 \rightarrow$ **b)**

II: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}5x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-2} \Leftrightarrow x=(-2)^{\frac{1}{3}}$ → **c)**

III: Se $f\left((-2)^{\frac{1}{3}}\right)=0$, então $f(0)=(-2)^{\frac{1}{3}}$, ou seja,

o gráfico da função inversa de *f* interseta o eixo *Oy* no ponto de ordenada $(-2)^{\frac{1}{3}}$ → **a)**

IV: $f(x)=y \Leftrightarrow 0{,}5x^3+1=y \Leftrightarrow 0{,}5x^3=y-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3=\frac{y-1}{0{,}5} \Leftrightarrow x^3=\frac{y-1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^3=2y-2$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2y-2}$

Então, $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x-2}$ → **b)**

Conclusão: I – b) ; II – c) ; III – a) ; IV – b)

Página 37 – Avalia 1 – Parte 2: Questões de desenvolvimento

1.1. **a)** $f(x)=1{,}525x$

b) A função *f* é invertível.

$f(x)=y \Leftrightarrow 1{,}525x=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1{,}525} \Leftrightarrow x=\frac{40}{61}y$

Então, $f^{-1}(x)=\frac{40}{61}x$.

1.2. **a)** $f(18)$ é a resposta à questão:

Qual é o custo de um abastecimento de 18 litros de gasóleo?

b) $f^{-1}(54{,}9)$ é a resposta à questão:

Quantos litros de gasóleo abasteceu o Pedro sabendo que pagou 54,90 €?

2.1. A função *f* não é invertível porque, por exemplo, *f* tem dois zeros, 0 e 4.

2.2. **a)** *g*: restrições de *f* ao conjunto $[2,+\infty[$.

$D'_g=[f(2),+\infty[$

$f(2)=2^2-4\times 2=-4$

$D'_g=[-4,+\infty[$

g é uma função invertível, porque objetos diferentes têm imagens diferentes.

$D_{g^{-1}}=D'_g=[-4,+\infty[$

$g(x)=y \Leftrightarrow x^2-4x=y \Leftrightarrow x^2-4x-y=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+4y}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{4(4+y)}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm 2\sqrt{(4+y)}}{2} \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{(4+y)}$

Como $x\in[2,+\infty[$, então $x=2+\sqrt{4+y}$.

Assim, $g^{-1}(x)=2+\sqrt{4+x}$.

b) *h*: restrição de *f* ao conjunto $[0,2]$.

$D'_h=[-4,0]$

h é uma função invertível porque objetos diferentes têm imagens diferentes.

$D_{h^{-1}}=D'_h=[-4,0]$

$h(x)=y \Leftrightarrow x^2-4x=y \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{4+y}$

Como $x\in[0,2]$, então $x=2-\sqrt{4+y}$.

Assim, $h^{-1}(x)=2-\sqrt{4+x}$.

3.1. $f(x)=\frac{2x}{x+3}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

f é uma função invertível.

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{2x}{x+3}=y \underset{x\neq -3}{\Leftrightarrow} 2x=y(x+3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=yx+3y \Leftrightarrow 2x-yx=3y \Leftrightarrow x(2-y)=3y$

$\Leftrightarrow x=\frac{3y}{2-y}$

Então, $f^{-1}(x)=\frac{3x}{2-x}$.

$D'_f=D_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

3.2. $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow \frac{2x}{x+3}=\frac{3x}{2-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(2-x)=3x(x+3) \wedge x\neq -3 \wedge x\neq 2$

$\Leftrightarrow 5x^2+5x=0 \wedge x\neq -3 \wedge x\neq 2$

$\Leftrightarrow 5x(x+1)=0 \wedge x\neq -3 \wedge x\neq 2$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=-1) \wedge x\neq -3 \wedge x\neq 2$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

Os gráficos de *f* e de f^{-1} intersetam-se em pontos que pertencem à reta de equação $y=x$.

Então, as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos de *f* e de f^{-1} são $(-1,-1)$ e $(0,0)$.

Tema 3: Função logarítmica

Página 38 – Tarefa inicial

1.1. $5^3 = 125$, então $\log_5 125 = 3$.

1.2. $7^5 = 16\,807$, então $\log_7 16\,807 = 5$.

1.3. $\log_6 216 = 3$, então $6^3 = 216$.

1.4. $\log_3 243 = 5$, então $3^5 = 243$.

2.1. $\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$.

2.2. $\log_5 25 = 2$ porque $5^2 = 25$.

2.3. $\log_{10} 10 = 1$ porque $10^1 = 10$.

Página 39

36. $f(x) = \log_a x,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

36.1. Se $a = 5$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[$

A afirmação é verdadeira **(V)**.

36.2. Se $a = \frac{2}{3}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

A afirmação é falsa **(F)** pois se $a = \frac{2}{3}$, então $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

36.3. Se $a = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

A afirmação é verdadeira **(V)**.

36.4. Se $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$, então $a > 1$.

A afirmação é verdadeira **(V)**.

36.5. Se $a = \sqrt{3}$, então $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{4}{3}\right)$

A afirmação é verdadeira **(V)** porque se $a > 1$, então f é crescente.

36.6. Se $f(2) > f(3)$, então $0 < a < 1$.

A afirmação é verdadeira **(V)**.

Página 40

37.1. $\log_3 81 = 4$, porque $3^4 = 81$.

37.2. $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.

37.3. $\log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4}$, porque $4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

37.4. $\log 0{,}000\,01 = -5$, porque $10^{-5} = 0{,}000\,01$.

38.1. $2^8 = 256 \Leftrightarrow \log_2 256 = 8$

38.2. $7^3 = 343 \Leftrightarrow \log_7 343 = 3$

38.3. $5 = 125^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

38.4. $0{,}01 = 10^{-2} \Leftrightarrow \log 0{,}01 = -2$

38.5. $3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$

38.6. $\frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$

39.1. $\log_4 64 = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$

39.2. $\log_{0,5} \frac{1}{8} = 3 \Leftrightarrow 0{,}5^3 = \frac{1}{8}$

39.3. $\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

39.4. $\log\left(\frac{1}{10^7}\right) = -7 \Leftrightarrow 10^{-7} = \frac{1}{10^7}$

40.1. $5 = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^5 \Leftrightarrow x = 32$

Então, $5 = \log_2 32$.

40.2. $3 = 5^x \Leftrightarrow x = \log_5 3$

Então, $3 = 5^{\log_5 3}$

Página 41 – Tarefa 6

1.1.

x	a	$\log_a(x)$
81	3	4
25	5^{-1}	–2
32	2	5
1000	10	3
0,0001	10	–4

Cálculo auxiliar (Nota: $\log_a y = x$):

$\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81$

$\log_{5^{-1}} 25 = y \Leftrightarrow \left(5^{-1}\right)^y = 25 \Leftrightarrow 5^{-y} = 5^2 \Leftrightarrow y = 2$

$\log_a 32 = 5 \Leftrightarrow a^5 = 32 \Leftrightarrow a^5 = 2^5 \Leftrightarrow a = 2$

$\log_{10} x = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 \Leftrightarrow x = 1000$

$\log_{10} 0{,}0001 = y \Leftrightarrow 10^y = 0{,}0001 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10^y = 10^{-4} \Leftrightarrow y = -4$

1.2.

x	a	$y = a^x$	$\log_a(y)$
3	2	8	3
–2	2	$\frac{1}{4}$	–2
4	0,5	0,0625	4
–2	$\frac{1}{3}$	9	–2
0,5	9	3	0,5

Cálculo auxiliar (Nota: $\log_a y = x$):

$8 = a^3 \Leftrightarrow 2^3 = a^3 \Leftrightarrow 2 = a$

$y = 2^{-2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$

$y = 0{,}5^4 \Leftrightarrow y = 0{,}0625$

$a^{-2} = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = 9 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{9} \underset{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}}{\Leftrightarrow} a = \frac{1}{3}$

$y = 9^{0,5} \Leftrightarrow y = \sqrt{9} \Leftrightarrow y = 3$

2.1. $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x \Leftrightarrow 2y = \left(\sqrt{2}\right)^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \log_{\sqrt{2}}(2y)$

2.2. $A(x_A, 1)$, tal que $f(x_A) = 1$

Logo, $x_A = \log_{\sqrt{2}}(2 \times 1)$, ou seja, $x_A = 2$.

$B(x_B, 4)$ tal que $f(x_B) = 4$

Logo, $x_B = \log_{\sqrt{2}}(2 \times 4)$, ou seja, $x_B = 6$.

3.1. $A_{\text{máxima}} = 2463 \Leftrightarrow \pi \times R_0^2 = 2463 \Leftrightarrow R_0^2 = \frac{2463}{\pi}$

$\underset{R_0 > 0}{\Leftrightarrow} R_0 = \sqrt{\frac{2463}{\pi}} \Leftrightarrow R_0 \approx 28$

3.2. $R(t) = 28(0{,}65)^t \Leftrightarrow \frac{R(t)}{28} = 0{,}65^t \Leftrightarrow t = \log_{0,65}\left(\frac{R(t)}{28}\right)$

4.1. $N(t) = N_0 \times 3^t$

$N(0) = 5 \Leftrightarrow N_0 \times 3^0 = 5 \Leftrightarrow N_0 = 5$

4.2. $N(t) = 5 \times 3^t$

$N(5) = 5 \times 3^5 = 1215$

No 5.º dia após o seu lançamento, 1215 pessoas tiveram conhecimento da notícia.

4.3. $N(t) = 5 \times 3^t \Leftrightarrow \frac{N(t)}{5} = 3^t \Leftrightarrow t = \log_3\left(\frac{N(t)}{5}\right)$

4.4. $N(t) = 10\,935$

$t = \log_3 \frac{10\,935}{5} = \log_3 2187 = \log_3\left(3^7\right) = 7$

Decorreram sete dias desde o lançamento até esse dia.

Página 42

41.1. $f(x) = \log_a(x - b)$

Sendo $a = 4$ e $b = 1$, então $f(x) = \log_4(x - 1)$.

$D_f =]1, +\infty[$; $D_f' = \mathbb{R}$

Zero: 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

Equação da assíntota vertical: $x = 1$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1, 2[$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[$

41.2. $f(x) = \log_a(x - b)$

Sendo $a = 2$ e $b = -3$, então $f(x) = \log_2(x + 3)$.

$D_f =]-3, +\infty[$; $D_f' = \mathbb{R}$

Zero: –2

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

Equação da assíntota vertical: $x = -3$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-3, -2[$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, +\infty[$

41.3. $f(x) = \log_a(x - b)$

Sendo $a = \frac{2}{3}$ e $b = 3$, então $f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(x - 3)$.

$D_f =]3, +\infty[$; $D_f' = \mathbb{R}$

Zero: 4

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

Equação da assíntota vertical: $x = 3$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]4, +\infty[$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]3, 4[$

42. $f(x)=\log_a(x-b)$, $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ e $b\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}f(-3)=0\\f(0)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a(-3-b)=0\\\log_a(0-b)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3-b=1\\-b=a^{-2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4\\4=a^{-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4\\4=\dfrac{1}{a^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4\\a^2=\dfrac{1}{4}\end{cases}\underset{a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}b=-4\\a=\sqrt{\dfrac{1}{4}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4\\a=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$a=\dfrac{1}{2}$ e $b=-4$

Página 43

43.1. $f(x)=c+\log_a x$

Sendo $a=3$ e $c=-2$, então $f(x)=-2+\log_3 x$.

$D_f=]0,+\infty[$; $D_f'=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

Equação da assíntota vertical: $x=0$

$f(x)<0\Leftrightarrow x\in]0,9[$; $f(x)>0\Leftrightarrow x\in]9,+\infty[$

43.2. $f(x)=c+\log_a x$

Sendo $a=\dfrac{2}{3}$ e $c=3$, então $f(x)=3+\log_{\frac{2}{3}} x$.

$D_f=]0,+\infty[$; $D_f'=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

Equação da assíntota vertical: $x=0$

$f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]\dfrac{27}{8},+\infty\right[$; $f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]0,\dfrac{27}{8}\right[$

44.1. $f(x)=c+\log_a(x-b)$

Sendo $a=3$ e $c=-2$, então $f(x)=-2+\log_3(x-b)$.

$D_f=]b,+\infty[$; $D_f'=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=-\infty$

Equação da assíntota vertical: $x=b$

44.2. $f(x)=c+\log_a(x-b)$

Sendo $a=\dfrac{2}{3}$ e $c=3$, então $f(x)=3+\log_{\frac{2}{3}}(x-b)$.

$D_f=]b,+\infty[$; $D_f'=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=+\infty$

Equação da assíntota vertical: $x=b$

Página 44 – Tarefa 7

1.1. Os gráficos das quatro funções intersetam o eixo Ox no ponto de coordenadas $(1,0)$.

1.2. **a)** O número negativo é b_2.

b) O número positivo e menor do que 1 é b_3.

c) O número positivo e maior do que 1 é b_1.

2. $f(3)=1\Leftrightarrow\log_a 3=1\Leftrightarrow a^1=3\Leftrightarrow a=3$

2.1. Se $b_1=4$ e $a=3$, então $g(x)=4\log_3 x$.

Logo, $g(9)=4\log_3 9=4\times2=8$.

2.2. Se $b_2=-2$ e $a=3$, então $h(x)=-2\log_3 x$.

Logo, $h\left(\dfrac{1}{3}\right)=-2\log_3\dfrac{1}{3}=2\times(-1)=2$.

2.3. Se $b_3=\dfrac{1}{2}$ e $a=3$, então $i(x)=\dfrac{1}{2}\log_3 x$.

Logo, $i(27)=\dfrac{1}{2}\log_3 27=\dfrac{1}{2}\times3=\dfrac{3}{2}$.

3.

$f(x)=b\log_a(x)$	$a>1$	
	$b>0$	$b<0$
Domínio	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$
Contradomínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Monotonia	Crescente	Decrescente
Zeros	1	1
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$
Sinal positivo	$]1,+\infty[$	$]0,1[$
Sinal negativo	$]0,1[$	$]1,+\infty[$
Equação da assíntota vertical	$x=0$	$x=0$

$f(x)=b\log_a(x)$	$0<a<1$	
	$b>0$	$b<0$
Domínio	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$
Contradomínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Monotonia	Decrescente	Crescente
Zeros	1	1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$
Sinal positivo	$]0,1[$	$]1,+\infty[$
Sinal negativo	$]1,+\infty[$	$]0,1[$
Equação da assíntota vertical	$x=0$	$x=0$

Página 45 – Tarefa 8

1. $M=\frac{2}{3}(\log E-11{,}4)\Leftrightarrow \frac{3}{2}M=\log E-11{,}4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1{,}5M+11{,}4=\log E\Leftrightarrow 10^{1{,}5M+11{,}4}=E$

Então, $E(M)=10^{1{,}5M+11{,}4}$

2.

M	1	2	3	4	5	…
***E* (na forma de potência de base 10)**	$10^{12{,}9}$	$10^{14{,}4}$	$10^{15{,}9}$	$10^{17{,}4}$	$10^{18{,}9}$	…

Cálculo auxiliar:

$E(1)=10^{1{,}5\times 1+11{,}4}=10^{12{,}9}$

$E(3)=10^{1{,}5\times 3+11{,}4}=10^{15{,}9}$

$E(4)=10^{1{,}5\times 4+11{,}4}=10^{17{,}4}$

$E(5)=10^{1{,}5\times 5+11{,}4}=10^{18{,}9}$

3. $E(M+1)=10^{1{,}5(M+1)+11{,}4}=10^{1{,}5M+1{,}5+11{,}4}=10^{1{,}5M+11{,}4}\times 10^{1{,}5}$

$=E(M)\times\underbrace{10^{1{,}5}}_{\approx 32}$

Então, $E(M+1)\approx 32E(M)$.

Assim, a afirmação dada é verdadeira.

4. $M=7{,}5$; $E=?$

$E(7{,}5)=10^{1{,}5\times 7{,}5+11{,}4}=10^{22{,}65}$

A energia libertada pelo sismo foi de $10^{22{,}65}$ ergs.

5. $E=2{,}1\times 10^{15}$ ergs; $M=?$

$M=\frac{2}{3}\left(\log\left(2{,}1\times 10^{15}\right)-11{,}4\right)\approx 2{,}6$

A magnitude do sismo foi, aproximadamente, igual a 2,6.

Página 46 – Pratica

45.1. $\log_2 16=4$, pois $2^4=16$.

45.2. $\log_{\frac{1}{4}} 16=-4$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$.

45.3. $\log_4 16=2$, pois $4^2=16$.

45.4. $\log_8 16=\frac{4}{3}$, pois $8^{\frac{4}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{4}{3}}=2^4=16$.

45.5. $\log_{\sqrt{2}} 4=4$, pois $\left(\sqrt{2}\right)^4=2^2=4$.

45.6. $\log_8\frac{1}{32}=-\frac{5}{3}$, pois $8^{-\frac{5}{3}}=\left(2^3\right)^{-\frac{5}{3}}=2^{-5}=\frac{1}{32}$.

45.7. $\log(0{,}000\ 000\ 01)=\log\left(10^{-8}\right)=-8$

45.8. $\log_5\left(\sqrt[3]{25}\right)=x\Leftrightarrow 5^x=\sqrt[3]{25}=5^x=\left(5^2\right)^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^x=5^{\frac{2}{3}}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

Então, $\log_5\left(\sqrt[3]{25}\right)=\frac{2}{3}$.

46.1. $9=\log_2 x\Leftrightarrow x=2^9\Leftrightarrow x=512$

Então, $9=\log_2 512$.

46.2. $5=3^x\Leftrightarrow x=\log_3 5$

Então, $5=3^{\log_3 5}$.

46.3. $2=\log_{\frac{1}{3}} x\Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{3}\right)^2\Leftrightarrow x=\frac{1}{9}$

Então, $2=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$.

46.4. $3=\left(\frac{1}{2}\right)^x\Leftrightarrow x=\log_{\frac{1}{2}} 3$

Então, $3=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}$.

47.1. Se $2^x=7$, então $x=\log_2 7$.

47.2. Se $\left(\sqrt{3}\right)^x=8$, então $x=\log_{\sqrt{3}} 8$.

47.3. Se $\log_3 x=5$, então $x=3^5$, ou seja, $x=243$.

47.4. Se $3-\log_3 x=5$, então $x=\frac{1}{9}$.

$3-\log_3 x=5 \Leftrightarrow \log_3 x=-2 \Leftrightarrow x=3^{-2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{9}$

47.5. Se $3+5^x=7$, então $x=\log_5 4$.

Cálculo auxiliar:

$3+5^x=7 \Leftrightarrow 5^x=4 \Leftrightarrow x=\log_5 4$

47.6. Se $7-2\log_3 x=1$, então $x=27$.

Cálculo auxiliar:

$7-2\log_3 x=1 \Leftrightarrow \log_3 x=3 \Leftrightarrow x=3^3 \Leftrightarrow x=27$

48. $f(x)=\log_a x,\ a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

$f(2)-f(3)>0 \Leftrightarrow f(2)>f(3)$

Como f é monótona, então f é decrescente.

Logo, conclui-se que $0<a<1$.

Como $f(1)=0$ e f é decrescente, então $f(19)<0$.

Assim, a opção correta é a **(C)**.

49.1. $f(x)=3+\log_{\frac{1}{2}} x$; $D_f=]0,+\infty[$ e $D_f'=\mathbb{R}$

49.2. $A(1,f(1))$

$f(1)=3+\log_{\frac{1}{2}} 1=3+0=3$; $A(1,3)$

$B(x,1)$, tal que $f(x)=1$.

$f(x)=1 \Leftrightarrow 3+\log_{\frac{1}{2}} x=1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x=-2 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4$; $B(4,1)$

$C(x,0)$, tal que $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow 3+\log_{\frac{1}{2}} x=0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x=-3 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=8$; $C(8,0)$

Conclusão: $A(1,3)$, $B(4,1)$ e $C(8,0)$

49.3. $y_P=f\left(\sqrt{2}\right)=3+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=3+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$

Cálculo auxiliar:

$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=a \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^a=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(2^{-1}\right)^a=2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

Página 47 – Pratica

50.1. $f(x)=-\log_a(x-b),\ a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ e $b\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(2)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\log_a(-1-b)=0 \\ -\log_a(2-b)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(-1-b)=0 \\ \log_a(2-b)=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-b=a^0 \\ 2-b=a^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-b=1 \\ 2-b=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=4 \end{cases}$

Então, $f(x)=-\log_4(x+2)$.

50.2. $D_f=]-2,+\infty[$

50.3. A função f é decrescente.

50.4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$

Conclui-se que o gráfico de f não admite assíntota horizontal e admite uma assíntota vertical de equação $x=-2$

51. $C(t)=N\times 10^{kt}$

$\begin{cases} C(0)=80 \\ C(2{,}5)=800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N\times 10^{k\times 0}=80 \\ N\times 10^{k\times 2{,}5}=800 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} N=80 \\ 80\times 10^{k\times 2{,}5}=800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 10^{k\times 2{,}5}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 2{,}5k=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} N=80 \\ k=\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N=80 \\ k=0{,}4 \end{cases}$

$N=80$ e $k=0{,}4$

$C(t)=80\times 10^{0{,}4t}$

$C(6)=80\times 10^{0{,}4\times 6}=80\times 10^{2{,}4}\approx 20\ 095$

Passadas 6 horas, o número de bactérias era, aproximadamente, igual a 20 095.

Página 48

52.1. $\log_3\frac{1}{2}+\log_3 5=\log_3\left(\frac{1}{2}\times 5\right)=\log_3\frac{5}{2}$

52.2. $2\log_7 3-\log_7 2=\log_7\left(3^2\right)-\log_7 2=\log_7\frac{9}{2}$

52.3. $1+\log_5 3=\log_5 5+\log_5 3=\log_5(5\times 3)=\log_5 15$

52.4. $2-\log 5=\log\left(10^2\right)-\log 5=\log\left(\frac{100}{5}\right)=\log(20)$

53.1. $\log_a(ab)=\log_a a+\log_a b=1+(-3)=-2$

53.2. $\log_a\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)=\log_a\left(a^2\right)-\log_a\left(\sqrt{b}\right)=2-\log_a\left(b^{\frac{1}{2}}\right)=$

$=2-\frac{1}{2}\log_a b=2-\frac{1}{2}\times(-3)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

54.1. $\log_5 3=\log_{10}\left(10^{\log_3 5}\right)=\log\left(10^{\log\frac{3}{5}}\right)$

54.2. $\log_a 4 \underset{a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1,\,10\}}{=} \log\left(10^{\log_a 4}\right)$

55.1. $A=\log_2 7+\log_8 3=\log_2 7+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 8}=\log_2 7+\dfrac{\log_2 3}{3}=$

$=\log_2 7+\dfrac{1}{3}\log_2 3=\log_2 7+\log_2\left(3^{\frac{1}{3}}\right)=\log_2\left(7\sqrt[3]{3}\right)$

55.2. $A=\log_2 7+\log_8 3=\dfrac{\log_8 7}{\log_8 2}+\log_8 3=\dfrac{\log_8 7}{\frac{1}{3}}+\log_8 3=$

$=3\log_8 7+\log_8 3=\log_8\left(7^3\right)+\log_8 3=$

$=\log_8\left(7^3\times 3\right)=\log_8\left(3\times 7^3\right)$

Página 49 – Tarefa 9

1. $f(x)=\log_k x,\ k\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

$A(a,-1)\rightarrow f(a)=-1\Leftrightarrow \log_k a=-1$

$B(b,2)\rightarrow f(b)=2\Leftrightarrow \log_k b=2$

1.1. a) $f(a\times b)=\log_k(a\times b)=\log_k a+\log_k b=-1+2=1$

b) $f\left(ka^2\right)=\log_k\left(ka^2\right)=\log_k k+\log_k\left(a^2\right)=$

$=1+2\log_k a=1+2\times(-1)=-1$

c) $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=\log_k\dfrac{b}{a}=\log_k b-\log_k a=2-(-1)=3$

d) $f\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)=\log_k\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)=\log_k\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\log_k\dfrac{a}{b}=$

$=\dfrac{1}{2}(\log_k a-\log_k b)=\dfrac{1}{2}(-1-2)=-\dfrac{3}{2}$

e) $f\left(\dfrac{1}{a^3}\right)=\log_k\left(\dfrac{1}{a^3}\right)=-\log_k\left(a^3\right)=-3\log_k a=$

$=-3\times(-1)=3$

f) $f\left(\dfrac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)=\log_k\left(\dfrac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)=\log_k\left(\sqrt{a}\times\sqrt[3]{b}\right)=$

$=\log_k\left(\sqrt{a}\right)+\log_k\left(\sqrt[3]{b}\right)=\log_k\left(a^{\frac{1}{2}}\right)+\log_k\left(b^{\frac{1}{3}}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\log_k a+\dfrac{1}{3}\log_k b=\dfrac{1}{2}\times(-1)+\dfrac{1}{3}\times 2=\dfrac{1}{6}$

1.2. $f(0{,}25)=-2\Leftrightarrow \log_k 0{,}25=-2\Leftrightarrow k^{-2}=0{,}25\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{k^2}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow k^2=4\Leftrightarrow k=2\vee k=-2$

Como $k\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, então $k=2$.

$\left(\dfrac{ab}{2}\right)^{2025}=\left(\dfrac{k^{-1}\times k^2}{2}\right)^{2025}=\left(\dfrac{k}{2}\right)^{2025}=\left(\dfrac{2}{2}\right)^{2025}=1^{2025}=1$

Cálculos auxiliares:

$\log_k a=-1\Leftrightarrow a=k^{-1}$; $\log_k b=2\Leftrightarrow b=k^2$

2.1. a) $A_{[RSTU]}=\overline{RS}\times\overline{ST}$

$A(x)=\log_4(2x)\times 3=3\log_4(2x)=$

$=\log_4\left[(2x)^3\right]=\log_4\left(8x^3\right)$

b) $P_{[RSTU]}=2\overline{RS}+2\overline{ST}$

$P(x)=2\log_4(2x)+2\times 3=$

$=2(\log_4 2+\log_4 x)+6=2\left(\dfrac{1}{2}+\log_4 x\right)+6$

$=1+2\log_4 x+6=7+2\log_4 x$

2.2. $P(x)=11\Leftrightarrow 7+2\log_4 x=11\Leftrightarrow \log_4 x=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4^2\Leftrightarrow x=16$

$A(16)=\log_4\left(8\times 16^3\right)=\log_4(32\,768)=7{,}5$

A área do retângulo que tem perímetro igual a 11 é 7,5.

3.1. a) $f(x)=\log_3 x+\log_9 x=\log_3 x+\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}=$

$=\log_3 x+\dfrac{\log_3 x}{2}=\log_3 x+\dfrac{1}{2}\log_3 x=$

$=\log_3 x+\log_3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=\log_3 x+\log_3\left(\sqrt{x}\right)=$

$=\log_3\left(x\sqrt{x}\right)$

b) $f(x)=\log_3 x+\log_9 x=\dfrac{\log_9 x}{\log_9 3}+\log_9 x=$

$=\dfrac{\log_9 x}{\frac{1}{2}}+\log_9 x=2\log_9 x+\log_9 x=$

$=\log_9\left(x^2\right)+\log_9 x=\log_9\left(x^2\times x\right)=\log_9\left(x^3\right)$

3.2. a) $A(3,y_A)$

$y_A=f(3)=\log_3\left(3\sqrt{3}\right)=\log_3\left(3^{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{3}{2}\underbrace{\log_3 3}_{1}=\dfrac{3}{2}$

b) $A(x_A,3)$

$f(x_A)=3\Leftrightarrow \log_3\left(x_A\sqrt{x_A}\right)=3\Leftrightarrow x_A=\sqrt{x_A}=3^3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_A^{\frac{3}{2}}=3^3\Leftrightarrow x_A^{\frac{3}{2}}=\left(3^2\right)^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x_A=3^2\Leftrightarrow x_A=9$

Página 50

56.1. a) $x\log_2(x-1)=0$

$x=0 \rightarrow 0\times\underbrace{\log_2(0-1)}_{\text{não existe}}=0$

Logo, 0 não é solução da equação.

b) $x\log_2(x-1)=0$

$x=1 \rightarrow 1\times\underbrace{\log_2(1-1)}_{\text{não existe}}=0$

Logo, 1 não é solução da equação.

56.2. $x\log_2(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee \log_2(x-1)=0) \wedge x-1>0$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x-1=2^0) \wedge x>1$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=2) \wedge x>1 \Leftrightarrow x=2$

57. $x\log_3(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee \log_3(x+1)=0) \wedge x+1>0$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x+1=3^0) \wedge x>-1$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=0) \wedge x>-1 \Leftrightarrow x=0$

58. $x\log_3(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee \log_3(x+2)=0) \wedge x+2>0$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x+2=3^0) \wedge x>-2$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=-1) \wedge x>-2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

Soluções da equação: -1 e 0

59.1. $\log_2(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x^2-1=2^0 \wedge x^2-1>0 \Leftrightarrow$

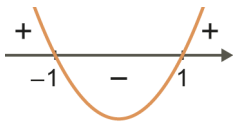
$\Leftrightarrow x^2=2 \wedge x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

$\Leftrightarrow (x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}) \wedge x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$

Cálculo auxiliar:

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$



59.2. $\log_2(5-x^2)=0 \Leftrightarrow 5-x^2=2^0 \wedge 5-x^2>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=4 \wedge x\in\left]-\sqrt{5},\sqrt{5}\right[$

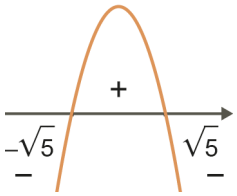
$\Leftrightarrow (x=2 \vee x=-2) \wedge x\in\left]-\sqrt{5},\sqrt{5}\right[$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$

Cálculo auxiliar:

$5-x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$



60. $f(x)=\log(x^2)$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2>0\}=\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \log(x^2)=0 \Leftrightarrow x^2=10^0 \wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=1 \wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$

zeros de *f*: -1 e 1

$g(x)=2\log x$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\}=\left]0,+\infty\right[$

$g(x)=0 \Leftrightarrow 2\log x=0 \Leftrightarrow \log x=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow x=1$

Zero de *g*: 1

Página 51

61.1. $g(0)=4{,}1\times\log\left(\frac{50}{1{,}4\times 0^2+1}\right)+0{,}045\approx 7$

No início, a altura da água no recipiente B, na unidade de medida considerada, era, aproximadamente, igual a 7.

61.2. $g(0)\approx 7$

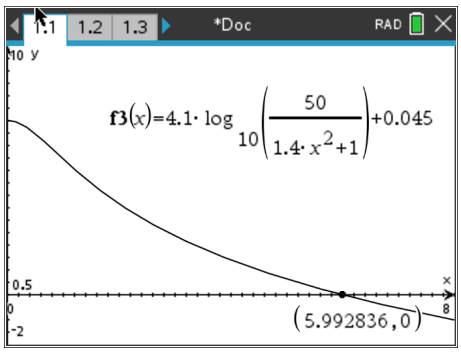
$f(t)=g(0) \Leftrightarrow f(t)=7 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^t-1=7 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^t=8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^t=2^3 \Leftrightarrow 2^{\frac{t}{2}}=2^3 \Leftrightarrow \frac{t}{2}=3 \Leftrightarrow t=6$

61.3. Como os recipientes A e B são iguais, a equação que permite determinar o tempo de esvaziamento do recipiente B é a seguinte: $g(t)=0$

$g(t)=0 \Leftrightarrow 4{,}1\times\log\left(\frac{50}{1{,}4t^2+1}\right)+0{,}045=0$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que $t\approx 6{,}0$.

Página 52 – Tarefa 10

1. **Resolução da Sofia:**

Um erro foi considerar que $(\log_3 x)^2 = 2\log_3 x$.

Outro erro foi não considerar que $x > 0$.

A resolução do Bernardo está correta.

2. $\log_2(3+x) - \log_2\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(3+x) + \log_2 x = 2 \wedge 3+x>0 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow \log_2((3+x)x) = 2 \wedge x \in]0,+\infty[$

$\Leftrightarrow \log_2(3x+x^2) = 2 \wedge x \in]0,+\infty[$

$\Leftrightarrow 3x+x^2 = 2^2 \wedge x \in]0,+\infty[$

$\Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \wedge x \in]0,+\infty[$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \wedge x \in]0,+\infty[$

$\Leftrightarrow (x=1 \vee x=-4) \wedge x \in]0,+\infty[$

$\Leftrightarrow x = 1$

Solução: 1

3. **Resolução da Sofia:**

Erro: $\underbrace{3-x>0 \wedge 1-x>0}_{x \in]1,3[}$

Deveria ser: $\underbrace{3-x>0 \wedge 1-x>0}_{x<1}$

Após essa retificação, conclui-se que -1 é solução da equação.

Resolução do Bernardo:

Erro: Indicar a condição referente ao domínio depois de aplicar uma propriedade dos logaritmos $(x^2-4x+3>0)$.

Deveria ser: $3-x>0 \wedge 1-x>0$

Após essa retificação conclui-se que a equação tem apenas uma solução (-1).

4.1. $(\log_4 x^2) + 2\log_4\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log_4 x)^2 - 2\log_4 x = 0 \wedge x>0 \wedge \frac{1}{x}>0$

$\Leftrightarrow \log_4 x(\log_4 x - 2) = 0 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow (\log_4 x = 0 \vee \log_4 x = 2) \wedge x>0$

$\Leftrightarrow (x = 4^0 \vee x = 4^2) \wedge x>0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=16$

Conjunto-solução: $\{1, 16\}$

4.2. $\log_9(2x-1) - 1 = \log_9(x+3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_9(2x-1) = \log_9 9 + \log_9(x+3) \wedge 2x-1>0 \wedge x+3>0$

$\Leftrightarrow \log_9(2x-1) = \log_9(9(x+3)) \wedge x > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x-1 = 9x+27 \wedge x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-4 \wedge x>\frac{1}{2}$

A equação é impossível.

Conjunto-solução: $\{\ \}$

4.3. $(x^3-16x)\log_3(10-x^2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[x^3-16x=0 \vee \log_3(10-x^2)=0\right] \wedge 10-x^2>0$

$\Leftrightarrow \left[x(x^2-16)=0 \vee 10-x^2=3^0\right] \wedge x \in]-\sqrt{10}, \sqrt{10}[$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=4 \vee x=-4 \vee x=3 \vee x=-3)$

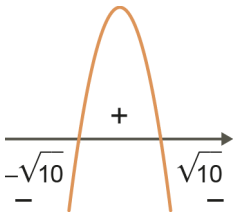
$\wedge x \in]-\sqrt{10}, \sqrt{10}[\Leftrightarrow x=0 \vee x=3 \vee x=-3$

Conjunto-solução: $\{-3, 0, 3\}$

Cálculo auxiliar:

$10-x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{10} \vee x=-\sqrt{10}$



4.4. $\log_2(1-3x) = 1 - \log_{\frac{1}{2}} x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(1-3x) = \log_2 2 - \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} \wedge 1-3x>0 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow \log_2(1-3x) = \log_2 2 - \log_2 x \wedge x \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$

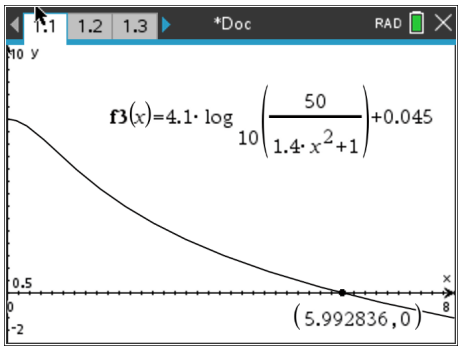
$\Leftrightarrow \log_2(1-3x) = \log_2(2x) \wedge x \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$

$\Leftrightarrow 1-3x = 2x \wedge x \in \left]0, \frac{1}{3}\right[\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

Conjunto-solução: $\left\{\frac{1}{5}\right\}$

Página 53 – Tarefa 11

1.1. $T_A = T_B \Leftrightarrow 5 - \log(0{,}5t+2) = 1 + 3\log(10t+5) \wedge 0 \le t \le 6$



Então, $t \approx 1{,}079$ h.

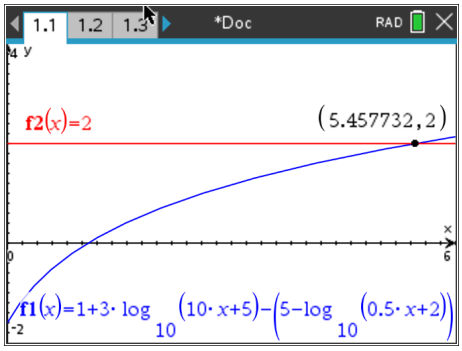
$0{,}079 \times 60$ min $= 4{,}74$ min ≈ 5 min ; $t \approx 1$ h 5 min

No contexto apresentado, significa que à 1h e 5 min, do dia considerado, a temperatura nas duas estações meteorológicas (A e B) era igual.

1.2. $T_B - T_A = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 - \log(0{,}5t + 2) - (1 + 2\log(10t + 5)) = 2 \wedge 0 \leq t \leq 6$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $t \approx 5{,}458$ h .

$6 - 5{,}458 = 0{,}542$; $0{,}542 \times 60 \approx 33$ minutos

No instante em que $T_B - T_A = 2$, faltam 33 minutos para as 6 horas.

2.1. **a)** $F(t) = 1{,}4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3{,}4 - \log_2(0{,}5t + 2) = 1{,}4 \wedge t \in [0, 8]$

$\Leftrightarrow \log_2(0{,}5t + 2) = 2 \wedge t \in [0, 8]$

$\Leftrightarrow 0{,}5t + 2 = 2^2 \wedge t \in [0, 8] \Leftrightarrow t = 4 \wedge t \in [0, 8] \Leftrightarrow t = 4$

Até esse instante decorreram 4 horas.

b) $T(4) = 2{,}4 - 2{,}2\log(4 + 1) = 2{,}4 - 2{,}2\log 5 \approx 0{,}9$

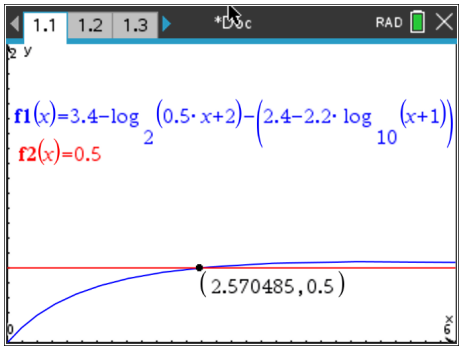
Nesse instante, o computador indicava 0,9 bar de pressão para o pneu de trás do lado direito.

2.2. **a)** $F(t) - T(t) = 0{,}5 \wedge 0 \leq t \leq 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3{,}4 - \log_2(0{,}5t + 2) - (2{,}4 - 2{,}2\log(t + 1)) = 0{,}5$

$\wedge\ 0 \leq t \leq 8$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$t \approx 2{,}57$ h ; $0{,}57 \times 60 \approx 34$

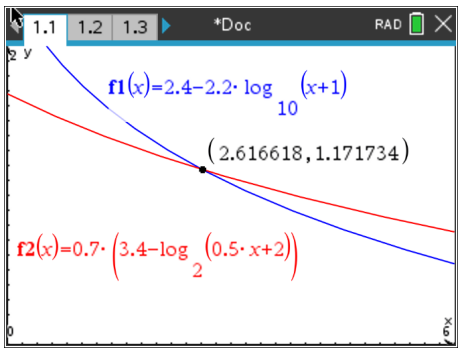
Então, $t \approx 2$ h 34 min .

b) $T(t) = 0{,}7F(t) \wedge 0 \leq t \leq 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2{,}4 - 2{,}2\log(t + 1) = 0{,}7(3{,}4 - \log_2(0{,}5t + 2))$

$\wedge\ 0 \leq t \leq 8$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$t \approx 2{,}62$ h

Até à paragem decorreram, aproximadamente, 2,62 horas.

Página 54 – Pratica

62.1. $\log_7\left(\frac{1}{49}\right) = -2$, porque $7^{-2} = \frac{1}{49}$.

62.2. $\log(10\ 000) = 4$, porque $10^4 = 10\ 000$.

62.3. $\log(0{,}000\ 000\ 1) = -7$, porque $10^{-7} = 0{,}000\ 000\ 1$.

62.4. $\log_{\frac{1}{2}}(32) = -5$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$.

62.5. $\log_{0,1}(1000) = -3$, porque $0{,}1^{-3} = 1000$.

62.6. $\log_{36}(6) = \frac{1}{2}$, porque $36^{\frac{1}{2}} = 6$.

63.1. $\log_3 x + \log_3 5 = \log_3(5x)$

63.2. $\log_5 x + 2\log_5 3 = \log_5 x + \log_5(3^2) = \log_5(9x)$

63.3. $\log_5 y - 2\log_5 x = \log_5 y - \log_5(x^2) = \log_5\left(\frac{y}{x^2}\right)$

63.4. $\frac{1}{2}\log_4 y - \log_4\left(\frac{1}{x}\right) = \log_4\left(y^{\frac{1}{2}}\right) + \log_4 x = \log_4\left(x\sqrt{y}\right)$

63.5. $\log_2 x - \log_4 3 = \log_2 x - \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = \log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 3 =$

$= \log_2 x - \log_2\left(3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$

63.6. $2\log_3 x+\log_9\left(\frac{1}{3}\right)=2\frac{\log_9 x}{\log_9 3}+\log_9\left(\frac{1}{3}\right)=$

$=4\log_9 x+\log_9\left(\frac{1}{3}\right)=\log_9\left(x^4\right)+\log_9\left(\frac{1}{3}\right)=\log_9\left(\frac{x^4}{3}\right)$

63.7. $3-\log_2 x=\log_2 8-\log_2 x=\log_2\left(\frac{8}{x}\right)$

63.8. $\frac{1}{3}\log_6 x+1=\log_6\left(x^{\frac{1}{3}}\right)+\log_6 6=\log_6\left(6\sqrt[3]{x}\right)$

63.9. $-2+\log_3\left(\frac{1}{x}\right)=\log_3\left(\frac{1}{9}\right)+\log_3\left(\frac{1}{x}\right)=\log_3\left(\frac{1}{9x}\right)$

64. $a^b=c$, $b\in\mathbb{R}^+$ e $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

$\log_{\frac{1}{a}}\left(a^2\sqrt{c}\right)=\log_{\frac{1}{a}}\left(a^2\times\sqrt{a^b}\right)=\log_{\frac{1}{a}}\left(a^2\times a^{\frac{b}{2}}\right)=$

$=\log_{\frac{1}{a}}\left(a^{2+\frac{b}{2}}\right)=\frac{\log_a\left(a^{2+\frac{b}{2}}\right)}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)}=\frac{2+\frac{b}{2}}{-1}=-2-\frac{b}{2}$

A opção correta é a **(C)**.

65. $D_f=]-1,+\infty[$ e $f(x)=2+\log_2(x+1)$

Os gráficos das funções f e f^{-1} intersetam-se nos pontos A (3.º Q) e B (1.º Q).

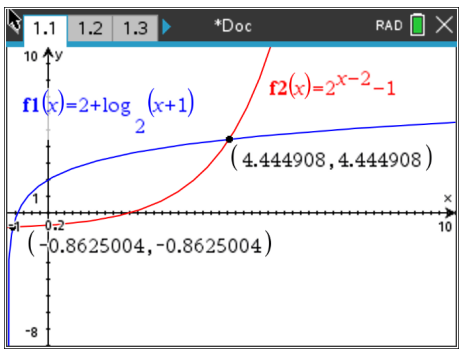
65.1. $f(x)=y\Leftrightarrow 2+\log_2(x+1)=y\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_2(x+1)=y-2\Leftrightarrow x+1=2^{y-2}\Leftrightarrow x=2^{y-2}-1$

Então, $f^{-1}(x)=2^{x-2}-1$.

65.2. O problema pode ser traduzido pela equação $f(x)=f^{-1}(x)$, ou seja, $2+\log_2(x+1)=2^{x-2}-1$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Conclui-se que $x\approx -0{,}86\vee x\approx 4{,}44$.

Como $A\in$ 3.º Q e $B\in$ 1.º Q, então $x_A\approx -0{,}86$ e $x_B\approx 4{,}44$.

Página 55 – Pratica

66.1. $\log_3(x+1)-\log_3(2x-1)^2=-\log_3(2x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_3(x+1)+\log_3(2x-1)=\log_3(2x-1)^2$

$\wedge\underbrace{x+1>0\wedge(2x-1)^2>0\wedge 2x-1>0}_{x>\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow\log_3\left((x+1)(2x-1)\right)=\log_3(2x-1)^2\wedge x>\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\log_3\left(2x^2+x-1\right)=\log_3\left(4x^2-4x+1\right)\wedge x>\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -2x^2+5x-2=0\wedge x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(x=\frac{1}{2}\vee x=2\right)\wedge x>\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=2$

Conjunto-solução: $\{2\}$

66.2. $\log\left(\frac{5}{x-4}\right)-\log x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log\left(\frac{5}{x-4}\right)=\log x\wedge\frac{5}{x-4}>0\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\frac{5}{x-4}=x\wedge\underbrace{x>4\wedge x>0}_{x>4}\Leftrightarrow 5=x^2-4x\wedge x>4$

$\Leftrightarrow(x=-1\vee x=5)\wedge x>4\Leftrightarrow x=5$

Conjunto-solução: $\{5\}$

66.3. $\log_4\left((x-3)2^8\right)=5-\log_4 x$

$\Leftrightarrow\log_4(x-3)+\log_4\left(2^8\right)=5-\log_4 x\wedge(x-3)2^8>0\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\log_4(x-3)+\log_4 x=5-4\wedge x>3\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\log_4\left(x(x-3)\right)=1\wedge x>3\Leftrightarrow\log_4\left(x^2-3x\right)=1\wedge x>3$

$\Leftrightarrow x^2-3x=4^1\wedge x>3\Leftrightarrow x^2-3x-4=0\wedge x>3$

$\Leftrightarrow(x=-1\vee x=4)\wedge x>3\Leftrightarrow x=4$

Conjunto-solução: $\{4\}$

66.4. $\log_4\left(\sqrt{x}\right)=\log_2\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_4\left(\sqrt{x}\right)=-\log_2 x\wedge\sqrt{x}>0\wedge\frac{1}{x}>0$

$\Leftrightarrow\log_4\left(\sqrt{x}\right)+\log_2 x=0\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\log_4\left(\sqrt{x}\right)+\frac{\log_4 x}{\log_4 2}=0\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\log_4\left(\sqrt{x}\right)+\frac{\log_4 x}{\frac{1}{2}}=0\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\log_4\left(\sqrt{x}\right)+2\log_4 x=0\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\log_4\left(x^2\sqrt{x}\right)=0\wedge x>0\Leftrightarrow x^2\sqrt{x}=4^0\wedge x>0$

$\Leftrightarrow x^{\frac{5}{2}}=1\wedge x>0\Leftrightarrow x=1\wedge x>0\Leftrightarrow x=1$

Conjunto-solução: $\{1\}$

67. $f(x)=2-3\log_2\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$A(x,5)$ tal que $f(x)=5$.

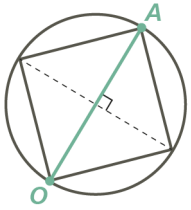
$f(x)=5 \Leftrightarrow 2-3\log_2\left(\frac{x}{2}-1\right)=5 \wedge \frac{x}{2}-1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x}{2}-1\right)=-1 \wedge x>2 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-1=2^{-1} \wedge x>2$

$\Leftrightarrow x=3 \wedge x>2 \Leftrightarrow x=3$

$A(3,5)$

$[OA]$ diâmetro da circunferência.



$\overline{OA}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{34}$

$A_{quadrado}=4\times A_{triângulo}=4\times\frac{\frac{\sqrt{34}}{2}\times\frac{\sqrt{34}}{2}}{2}=\frac{34}{2}=17$

68.1. Capital inicial: 5000 €

Taxa anual de juro (composto): 2%

Capital ao fim de 4 anos:

$C_4=5000\times1{,}02^4=5412{,}16$

O capital acumulado ao fim de 4 anos é 5412,16 €.

68.2. **Capital acumulado ao fim de *n* anos:**

$C_n=5000\times1{,}02^n$

$C_n=5000\times1{,}02^n \Leftrightarrow \frac{C_n}{5000}=1{,}02^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{1{,}02}\left(\frac{C_n}{5000}\right)=n \Leftrightarrow \frac{\log\left(\frac{C_n}{5000}\right)}{\log 1{,}02}=n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\log C_n-\log 5000}{\log 1{,}02}=n$

68.3. Pretende-se determinar o menor valor inteiro de *n* para o qual $C_n>6590$.

Por **68.2.**, sabe-se que $n=\frac{\log C_n-\log 5000}{\log 1{,}02}$.

Substituindo C_n por 6590, tem-se:

$n=\frac{\log 6590-\log 5000}{\log 1{,}02}$, ou seja, $n\approx13{,}9$

Assim, são necessários, no mínimo, 14 anos para que o capital acumulado seja superior a 6590 €.

69. $C_f=C_i(1{,}004)^t$

C_i : capital inicial; C_f : capital final

t: número de trimestres (número de capitalizações)

Depósito: 20 000 €

69.1. Duração do depósito: 2 anos

$t=8$ (número de capitalizações)

$C_f=20\,000\times(1{,}004)^8\approx20\,649$

Se o depósito tiver duração de dois anos, então o capital final é 20 649 €.

69.2. $C_f=22\,365{,}26$; $C_i=20\,000$; $C_f=C_i(1{,}004)^t$

$22\,365{,}26=20\,000(1{,}004)^t \Leftrightarrow \frac{22\,365{,}26}{20\,000}=1{,}004^t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{1{,}004}\left(\frac{22\,365{,}26}{20\,000}\right)=t \Leftrightarrow t=28$

A duração do depósito foi 28 anos.

70. $T(t)=45+16\log(t+1)$

T: tempo, em segundos

t: número de treinos

$\underbrace{1\text{ min}}_{60\text{ s}}$ e 20 s = 80 s

$T=80$; $t=?$

$80=45+16\log(t+1) \Leftrightarrow \frac{35}{16}=\log(t+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10^{\frac{35}{16}}=t+1 \Leftrightarrow t=10^{\frac{35}{16}}-1 \Leftrightarrow t\approx153$

O jovem deve efetuar, no mínimo, 153 treinos para conseguir imobilidade durante 1 minutos e 20 segundos.

Página 56 – Consolida

1.

x	a	$\log_a(x)$
16	4	2
4	$\frac{1}{2}$	−2
0,1	10	−1
1000	$\frac{1}{10}$	−3
$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sqrt[4]{3}$	3	$\frac{1}{4}$
$\sqrt[3]{5^2}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{3}$
9	$\sqrt{3}$	4

Cálculo auxiliar:

- $\log_4 x = 2 \Leftrightarrow x = 4^2 \Leftrightarrow x = 16$
- $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
- $\log_{10} 0{,}1 = -1$ porque $10^{-1} = 0{,}1$
- $\log_a 1000 = -3 \Leftrightarrow a^{-3} = 1000 \Leftrightarrow \frac{1}{a^3} = 10^3 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \frac{1}{10^3} = a^3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$
- $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{2}$
- $\log_a \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow a = 3$
- $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{5^2} = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^y = \sqrt[3]{5^2} \Leftrightarrow 5^{-y} = 5^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow -y = \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}$
- $\log_{\sqrt{3}} x = 4 \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{3}\right)^4 \Leftrightarrow x = 9$

2.1. $f(x) = \log_a x,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_a x = 0 \Leftrightarrow x = a^0 \Leftrightarrow x = 1 \therefore B(1, 0)$

2.2. Sim, pode-se concluir que $a \in]0, 1[$, porque pela representação gráfica sabe-se que $f(x) = \log_a(x)$ e f é decrescente.

2.3. $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ pertence ao gráfico de f

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \log_a\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow a^1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

2.4. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

2.5. $P(30, -5)$ pertence ao gráfico de f?

$f(30) = \log_{\frac{1}{2}} 30 \approx -4{,}9$

Como $f(30) = -5$, conclui-se que o ponto P não pertence ao gráfico de f.

2.6. a) $T\left(\sqrt{2}, y\right)$

$f\left(\sqrt{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2} \therefore T\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$

b) $T(x, 3)$

$f(x) = 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = 3 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$

$T\left(\frac{1}{8}, 3\right)$

3.1. $A(0, f(0))$

$f(0) = 2 \times 3^{0-1} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3};\ A\left(0, \frac{2}{3}\right)$

3.2. a) $P(x, y)$ ponto qualquer do gráfico de f

$f(x) = y \Leftrightarrow 2 \times 3^{x-1} = y \Leftrightarrow 3^{x-1} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = \log_3\left(\frac{y}{2}\right) \Leftrightarrow x = 1 + \log_3\left(\frac{y}{2}\right)$

b) $B(x, 6)$ pertence ao gráfico de f, então

$x = 1 + \log_3\left(\frac{6}{2}\right)$, ou seja, $x = 2$. $x_B = 2$

3.3. $f(3) = 2 \times 3^2 = 18$, logo o ponto de coordenadas $(3, 18)$ pertence ao gráfico de f.

Assim, como f é irreversível, o ponto de coordenadas $(18, 3)$ pertence ao gráfico da função inversa de f.

4.1. $f(x) = y \Leftrightarrow 3 - 2^{x+1} = y \Leftrightarrow 3 - y = 2^{x+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(3 - y) = x + 1 \Leftrightarrow -1 + \log_2(3 - y) = x$

Então, $f^{-1}(x) = -1 + \log_2(3 - x)$, ou seja,

$g(x) = -1 + \log_2(3 - x)$.

4.2. $A(-13, 0)$ e $B(-5, 0)$

$\overline{AB} = |-13 + 5| = 8$

$C(-5, g(-5))$ e $D(-13, g(-13))$

$g(-5) = -1 + \log_2 8 = -1 + 3 = 2$

$g(-13) = -1 + \log_2 16 = -1 + 4 = 3$

Então, $C(-5, 2)$ e $D(-13, 3)$.

$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB} = \frac{3 + 2}{2} \times 8 = 20$

Página 57 – Consolida

5.1. $f(x) = 0{,}3 - 1{,}2^x$

$f(x) = y \Leftrightarrow 0{,}3 - 1{,}2^x = y \Leftrightarrow 0{,}3 - y = 1{,}2^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{1{,}2}(0{,}3 - y) = x \rightarrow f^{-1}(x) = \log_{1{,}2}(0{,}3 - x)$

5.2. $f(x) = 3\log_2(1 - x)$

$f(x) = y \Leftrightarrow 3\log_2(1 - x) = y \Leftrightarrow \log_2(1 - x) = \frac{y}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - x = 2^{\frac{y}{3}} \Leftrightarrow 1 - 2^{\frac{y}{3}} = x \rightarrow f^{-1}(x) = 1 - 2^{\frac{x}{3}}$

5.3. $f(x)=2-1{,}25^{0{,}2x}$

$f(x)=y \Leftrightarrow 2-1{,}25^{0{,}2x}=y \Leftrightarrow 2-y=1{,}25^{0{,}2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{1{,}25}(2-y)=0{,}2x \Leftrightarrow x=\dfrac{\log_{1{,}25}(2-y)}{0{,}2}$

$\Leftrightarrow x=5\log_{1{,}25}(2-y) \rightarrow f^{-1}(x)=5\log_{1{,}25}(2-x)$

5.4. $f(x)=3-0{,}5\log(2x)$

$f(x)=y \Leftrightarrow 3-0{,}5\log(2x)=y \Leftrightarrow 3-y=0{,}5\log(2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3-y}{0{,}5}=\log(2x) \Leftrightarrow 6-2y=\log(2x) \Leftrightarrow 10^{6-2y}=2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{10^{6-2y}}{2}=x \rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{10^{6-2x}}{2}$

5.5. $f(x)=3{,}25+0{,}4\times(0{,}5)^{-x}$

$f(x)=y \Leftrightarrow 3{,}25+0{,}4\times(0{,}5)^{-x}=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}4\times(0{,}5)^{-x}=y-3{,}25 \Leftrightarrow (0{,}5)^{-x}=\dfrac{y-3{,}25}{0{,}4}$

$\Leftrightarrow -x=\log_{0{,}5}\left(\dfrac{y-3{,}25}{0{,}4}\right)$

$\Leftrightarrow x=-\log_{0{,}5}\left(\dfrac{y-3{,}25}{0{,}4}\right) \rightarrow f^{-1}(x)=-\log_{0{,}5}\left(\dfrac{x-3{,}25}{0{,}4}\right)$

6.1. $N(0)=\dfrac{8}{1+4\times10^{0}}=1{,}6$. No início da reflorestação foram utilizados 1,6 milhares de árvores, ou seja, 1600 árvores.

6.2. $\lim\limits_{m\to+\infty} N(m)=8$. Significa que à medida que o tempo passa, ou seja, o número de meses aumenta consideravelmente, o número de árvores plantadas aproxima-se de 8000.

6.3. $N(m)=y \Leftrightarrow \dfrac{8}{1+4\times10^{-m}}=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8=y\left(1+4\times10^{-m}\right) \Leftrightarrow 8=y+4y\times10^{-m}$

$\Leftrightarrow \dfrac{8-y}{4y}=10^{-m} \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{8-y}{4y}\right)=-m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\log\left(\dfrac{8-y}{4y}\right)=m \Leftrightarrow -\log\left(\dfrac{2}{y}-0{,}25\right)=m$

Então, $m=-\log\left(\dfrac{2}{N}-0{,}25\right)$.

6.4. 7968 árvores = 7,968 milhares de árvores

$N=7{,}968$; $m=?$

Atendendo ao resultado obtido em **6.3.** sabe-se que:

$m=-\log\left(\dfrac{2}{7{,}968}-0{,}25\right)\approx 3$

Decorreram três meses.

7.1. $N(d)=a+b\log_4(d+1)$, $a\in\mathbb{R}$ e $b\neq 0$

$\begin{cases} N(0)=42 \\ N(15)=92 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b\log_4(0+1)=42 \\ a+b\log_4(15+1)=92 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b\times 0=42 \\ a+b\log_4 16=92 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=42 \\ 42+b\times 2=92 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=42 \\ b=25 \end{cases}$

7.2. Sendo $a=42$ e $b=25$, então

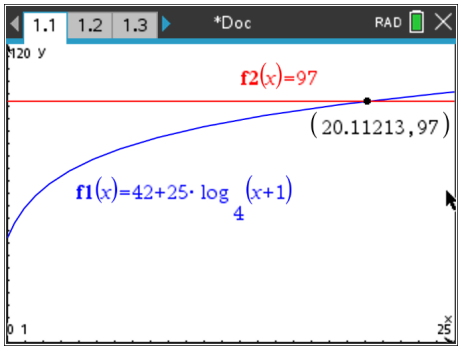
$N(d)=42+25\log_4(d+1)$.

$N(3)=42+25\log_4 4=42+25\times 1=67$

No contexto apresentado, significa que três dias após a inauguração havia 67 lâmpadas fundidas.

7.3. Pretende-se resolver, graficamente, a equação $N(d)=97$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



$t\approx 20$

Donde se conclui que a árvore esteve montada 20 dias após a inauguração.

8.1. $\log_2 9-\log_2 18=\log_2\left(\dfrac{9}{18}\right)=\log_2\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\log_2 2=-1$

8.2. $\dfrac{1}{2}\log 25+\log 2=\log\left(25^{\frac{1}{2}}\right)+\log 2=\log\left(\sqrt{25}\right)+\log 2=$

$=\log(5\times 2)=\log 10=1$

8.3. $\log(0{,}001)+\log\left(\dfrac{1}{10^6}\right)=\log\left(10^{-3}\right)+\log\left(10^{-6}\right)=$

$=\log\left(10^{-3}\times 10^{-6}\right)=\log\left(10^{-9}\right)=-9$

8.4. $\log 200+\log 5000=\log(200\times 5000)=\log(1\,000\,000)$

$=\log\left(10^6\right)=6$

8.5. $\log_3\left(9\sqrt{3}\right)=\log_3 9+\log_3\left(\sqrt{3}\right)=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

8.6. $\log_2\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}}{8}\right)=\log_2\left(\sqrt[3]{2}\right)-\log_2 8=\log_2\left(2^{\frac{1}{3}}\right)-3=-\dfrac{8}{3}$

8.7. $\log_5\left(\frac{0{,}2^9}{\sqrt{5}}\right)=\log_5\left(0{,}2^9\right)-\log_5\left(\sqrt{5}\right)=$

$=9\log_5(0{,}2)-\frac{1}{2}=9\log_5\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{2}=$

$=9\times(-1)-\frac{1}{2}=-9-\frac{1}{2}=-\frac{19}{2}$

Página 58 – Consolida

9.1. $\log_a\left(\sqrt{x}\right)=-3\Leftrightarrow\log_a\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_a x=-3\Leftrightarrow\log_a x=-6$

$\log_a\left(y^2\right)=1\Leftrightarrow 2\log_a y=1\Leftrightarrow\log_a y=\frac{1}{2}$

9.2. a) $\log_a\left(xy^2\right)=\log_a x+\log_a\left(y^2\right)=-6+1=-5$

b) $\log_a\left(\frac{x\sqrt{y}}{a^2}\right)=\log_a\left(x\sqrt{y}\right)-\log_a\left(a^2\right)=$

$=\log_a x+\log_a\left(\sqrt{y}\right)-2=-6+\log_a\left(y^{\frac{1}{2}}\right)-2$

$=-8+\frac{1}{2}\log_a y=-8+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=-8+\frac{1}{4}=-\frac{31}{4}$

c) $\log_{\frac{1}{a}} y=\frac{\log_a y}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{-1}=-\frac{1}{2}$

d) $\log_{\frac{1}{a}}\left(x^2\right)=2\log_{\frac{1}{a}} x=2\times\frac{\log_a x}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)}=2\times\frac{-6}{-1}=12$

10.1. $x>0$ e $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

$\log_{\frac{1}{2}} x+\log_2 x+\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)}+\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=$

$=\frac{\log_2 x}{-1}+\log_2 x+\frac{\log_2 x}{2}=\frac{1}{2}\log_2 x=\log_2\left(\sqrt{x}\right)$

10.2. $\log_a x+\log_{a^2} x+\log_{a^3} x=\log_a x+\frac{\log_a x}{\log_a\left(a^2\right)}+\frac{\log_a x}{\log_a\left(a^3\right)}$

$=\log_a x+\frac{\log_a x}{2}+\frac{\log_a x}{3}=\log_a x+\frac{1}{2}\log_a x+\frac{1}{3}\log_a x$

$=\frac{6}{6}\log_a x+\frac{3}{6}\log_a x+\frac{2}{6}\log_a x=\frac{11}{6}\log_a x$

11.1. $3+\log_2 x=\log_2 8+\log_2 x=\log_2(8x)$

11.2. $\log_3 x-5=\log_3 x-\log_3\left(3^5\right)=\log_3\left(\frac{x}{243}\right)$

11.3. $1+\log_5 x-\log_5\left(x^2\right)=\log_5 5+\log_5 x-\log_5\left(x^2\right)=$

$=\log_5(5x)-\log_5\left(x^2\right)=\log_5\left(\frac{5x}{x^2}\right)=\log_5\left(\frac{5}{x}\right)$

11.4. $\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}} x=\log_2 x-\frac{\log_2 x}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)}=\log_2 x-\frac{\log_2 x}{-1}=$

$=\log_2 x+\log_2 x=2\log_2 x=\log_2\left(x^2\right)$

12.1. $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=-2\Leftrightarrow x+2=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\wedge x+2>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2=9\wedge x>-2\Leftrightarrow x=7\wedge x>-2\Leftrightarrow x=7$

12.2. $\log_3 x-\log_3(1-2x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_3 x=\log_3(1-2x)\wedge x>0\wedge 1-2x>0$

$\Leftrightarrow x=1-2x\wedge 0<x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\wedge 0<x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

12.3. $\log_3(2-x)-\log_3(5x-4)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_3(2-x)=\log_2(5x-4)\wedge 2-x>0\wedge 5x-4>0$

$\Leftrightarrow 2-x=5x-4\wedge\frac{4}{5}<x<2\Leftrightarrow x=1\wedge\frac{4}{5}<x<2\Leftrightarrow x=1$

12.4. $\log_2(x+1)+3=\log_2(2x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_2(x+1)+\log_2 8=\log_2(2x)\wedge x+1>0\wedge 2x>0$

$\Leftrightarrow\log_2(8x+8)=\log_2(2x)\wedge x>0\Leftrightarrow 8x+8=2x\wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}\wedge x>0\Leftrightarrow x\in\varnothing$

A equação é impossível.

13.1. $\log\left(4-x^2\right)=\log x+\log(2-x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log\left(4-x^2\right)=\log\left(x(2-x)\right)\wedge 4-x^2>0\wedge x>0\wedge 2-x>0$

$\Leftrightarrow\log\left(4-x^2\right)=\log\left(2x-x^2\right)\wedge -2<x<2\wedge x>0\wedge x<2$

$\Leftrightarrow 4-x^2=2x-x^2\wedge 0<x<2\Leftrightarrow x=2\wedge 0<x<2\Leftrightarrow x\in\varnothing$

A equação é impossível.

13.2. $x^2\log(x-2)+\log(x+2)=\log\left(x^2-4\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2\log(x-2)=\log\left(x^2-4\right)-\log(x+2)\wedge x-2>0$

$\wedge x+2>0\wedge x^2-4>0$

$\Leftrightarrow x^2\log(x-2)=\log\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)\wedge x>2\wedge x>-2$

$\wedge(x<-2\vee x>2)$

$\Leftrightarrow x^2\log(x-2)=\log(x-2)\wedge x>2$

$\Leftrightarrow x^2\log(x-2)-\log(x-2)=0\wedge x>2$

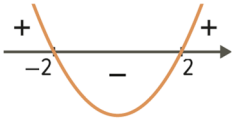
$\Leftrightarrow\log(x-2)\left(x^2-1\right)=0\wedge x>2$

$\Leftrightarrow\left(\log(x-2)=0\vee x^2-1=0\right)\wedge x>2$

$\Leftrightarrow(x=3\vee x=1\vee x=-1)\wedge x>2\Leftrightarrow x=3$

Cálculo auxiliar:

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$



13.3. $\log_5 x-\log_5\left(\frac{1}{x+4}\right)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_5 x+\log_5(x+4)=1 \wedge x>0 \wedge \frac{1}{x+4}>0$

$\Leftrightarrow \log_5(x(x+4))=\log_5 5 \wedge x>0 \wedge x>-4$

$\Leftrightarrow \log_5(x^2+4x)=\log_5 5 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow x^2+4x=5 \wedge x>0 \Leftrightarrow (x=-5 \vee x=1) \wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=1$

13.4. $x\log_2(x^2-1)=2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\log_2(x^2-1)-2x=0 \wedge x^2-1>0$

$\Leftrightarrow x(\log_2(x^2-1)-2)=0 \wedge x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee \log_2(x^2-1)=2) \wedge x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

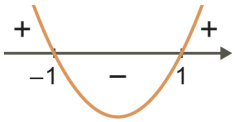
$\Leftrightarrow (x=0 \vee x^2-1=2^2) \wedge x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}) \wedge x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

Cálculo auxiliar:

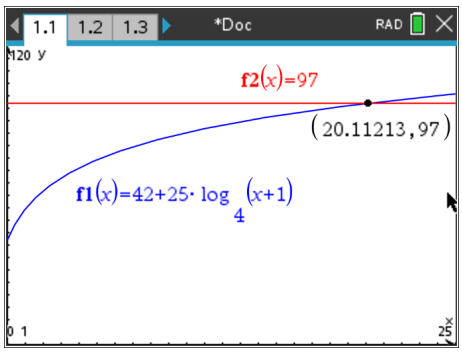
$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$



14. $f(x)=2x^2$ e $g(x)=3-8\log_7(\sqrt{x})$

Pretende-se determinar graficamente as coordenadas do ponto *A*, ponto de interseção dos gráficos das funções *f* e *g*, ou seja, pretende-se resolver, graficamente, a equação $f(x)=g(x)$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que $A(1{,}16;\ 2{,}69)$.

15.1. $f(x)=4+\log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}}(x^2)=4+\log_{\frac{1}{2}} x-2\log_{\frac{1}{2}} x=$

$=4-\log_{\frac{1}{2}} x$

15.2. a) $A(x,5)$ pertence ao gráfico de *f*.

$f(x)=5 \Leftrightarrow 4-\log_{\frac{1}{2}} x=5 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x=-1$

$\Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x=2\in\mathbb{R}^+;\ x_A=2$

b) $C(x,7)$ pertence ao gráfico de *f*.

$f(x)=7 \Leftrightarrow 4-\log_{\frac{1}{2}} x=7 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x=8\in\mathbb{R}^+;\ x_C=8$

c) $B(5,f(5));\ f(5)=4-\log_{\frac{1}{2}} 5\approx 6{,}322$

Então, $y_B\approx 6{,}322$.

16.1. $f(x)=2{,}5\log_2(x-1)$

$P(x,10)$

$f(x)=10 \Leftrightarrow 2{,}5\log_2(x-1)=10 \wedge x-1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)=4 \wedge x>1 \Leftrightarrow x-1=2^4 \wedge x>1 \Leftrightarrow x=17$

A abcissa desse ponto é 17.

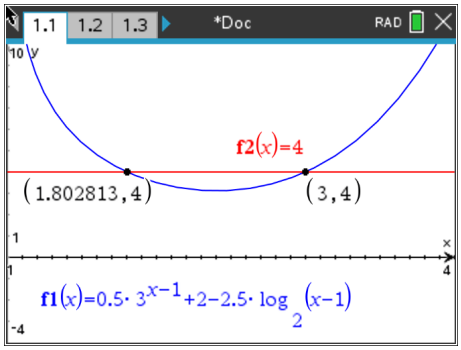
16.2. $\overline{AB}=4$, $A(x,f(x))$ e $B(x,g(x))$

$\overline{AB}=4 \Leftrightarrow g(x)-f(x)=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}5\times 3^{x-1}+2-2{,}5\log_2(x-1)=4$

Pretende-se resolver, graficamente, a equação anterior.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $x\approx 1{,}8 \vee x\approx 3$.

- Sendo $x=1{,}8$, $f(1{,}8)=2{,}5\log_2(0{,}8)\approx -0{,}8$ e $g(1{,}8)=0{,}5\times 3^{0{,}8}+2\approx 3{,}2$.
- Sendo $x=3$, $f(3)=2{,}5\log_2 2=2{,}5\times 1=2{,}5$ e $g(3)=0{,}5\times 3^2+2=6{,}5$.

Donde se conclui que $A(1{,}8;\ -0{,}8)$ e $B(1{,}8;\ 3{,}2)$ ou $A(3;\ 2{,}5)$ e $B(3;\ 6{,}5)$.

Página 59 – Consolida

17. $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$(\log_a x)^2 - \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \Leftrightarrow (\log_a x)^2 + \log_a x - 2 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_a x = -2 \vee \log_a x = 1) \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = a^{-2} \vee x = a^1\right) \wedge x > 0 \underset{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{a^2} \vee x = a$$

As duas soluções da equação são $\frac{1}{a^2}$ e a.

O produto das soluções da equação é:

$$\frac{1}{a^2} \times a = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

18.1. a) $N = 10 \times \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow N = 10 \times \left(\log(I) - \log\left(10^{-12}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow N = 10 \times \left(\log(I) - (-12)\right) \Leftrightarrow N = 10 \times \left(\log(I) + 12\right)$$

$$\Leftrightarrow N = 10\log(I) + 120 \Leftrightarrow N = 120 + 10\log(I)$$

b) $N = 120 + 10\log(I) \Leftrightarrow N - 120 = 10\log(I) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{N-120}{10} = \log(I) \Leftrightarrow 0{,}1N - 12 = \log(I)$$

$$\Leftrightarrow 10^{0{,}1N-12} = I$$

18.2.

	I: Intensidade (em W/m^2)	N: Nível de intensidade sonora (em dB)
Limiar da audibilidade	10^{-12}	0
Sussurros	5×10^{-10}	27
Trânsito intenso numa cidade	8×10^{-4}	89
Martelo pneumático	$3{,}16 \times 10^{-3}$	95
Concerto *rock*	10^{-1}	110
Limiar da dor	1	120
Reator	$7{,}94 \times 10^{2}$	149

Cálculo auxiliar:

- $N = 120 + 10\log\left(10^{-12}\right) = 120 + 10 \times (-12) = 0$
- $N = 120 + 10\log\left(5 \times 10^{-10}\right) \approx 27$
- $N = 120 + 10\log\left(8 \times 10^{-4}\right) \approx 89$
- $I = 10^{0{,}1 \times 9{,}5 - 12} = 3{,}16 \times 10^{-3}$
- $I = 10^{0{,}1 \times 110 - 12} = 10^{-1}$
- $N = 120 + 10\log 1 = 120$
- $I = 10^{0{,}1 \times 149 - 12} \approx 7{,}94 \times 10^{2}$

18.3. $N(I) = 120 + 10\log(I)$

$$N(2I) = 120 + 10\log(2I) = 120 + 10\left(\log 2 + \log(I)\right) =$$
$$= 120 + 10\log 2 + 10\log(I) = 120 + 10\log(I) + 10\log 2$$
$$= N(I) + 10\log(2)$$

Logo, $N(2I) - N(I) = 10\log(2) \approx 3$.

Donde se conclui que se duplicar a intensidade do som, então o nível de intensidade sonora sofre um acréscimo de 3 dB.

19.1. $P(0) = 200 + 15\log_2(5 \times 0 + 4) = 200 + 15 \times 2 = 230$

O preço de lançamento é 230 euros.

19.2. meio ano $\rightarrow$ 6 meses

$$P(6) = 200 + 15\log_2(5 \times 6 + 4) \approx 276{,}31$$

Meio ano após o lançamento, o preço previsto para o produto é 276,31 euros.

19.3. $P(t) = 290 \Leftrightarrow 200 + 15\log_2(5t+4) = 290$

$$\Leftrightarrow 15\log_2(5t+4) = 90 \Leftrightarrow \log_2(5t+4) = 6 \Leftrightarrow 5t + 4 = 2^6$$
$$\Leftrightarrow 5t + 4 = 64 \Leftrightarrow t = 12$$

Passados 12 meses após o lançamento, o preço do produto será de 290 euros.

19.4. $P(t+1) - P(t) =$

$$= 200 + 15\log_2\left(5(t+1)+4\right) - \left(200 + 15\log_2(5t+4)\right)$$
$$= \cancel{200} + 15\log_2(5t+9) \cancel{-200} - 15\log_2(5t+4)$$
$$= 15\left(\log_2(5t+9) - \log_2(5t+4)\right) = 15\log_2\left(\frac{5t+9}{5t+4}\right)$$
$$= 15\log_2\left(1 + \frac{5}{5t+4}\right)$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r|l} 5t+9 & 5t+4 \\ \hline -5t-4 & 1 \\ \hline 5 & \end{array} \qquad \frac{5t+9}{5t+4} = 1 + \frac{5}{5t+4}$$

$P(t+1) - P(t)$ representa a variação do custo do produto, em euros, em dois meses consecutivos.

20.1. $\text{pH} = 5{,}8 \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{\left[H^+\right]}\right) = 5{,}8 \Leftrightarrow -\log\left(\left[H^+\right]\right) = 5{,}8$

$$\Leftrightarrow \log\left(\left[H^+\right]\right) = -5{,}8 \Leftrightarrow \left[H^+\right] = 10^{-5{,}8} \Leftrightarrow \left[H^+\right] \approx 1{,}6 \times 10^{-6}$$

A concentração de iões de hidrogénio existentes nessa água é, aproximadamente, $1{,}6 \times 10^{-6}$ mol/L.

20.2. $\text{pH} = \log\left(\frac{1}{0{,}1\left[H^+\right]}\right) = -\log\left(0{,}1\left[H^+\right]\right) =$

$= -\left(\log(0{,}1) + \log\left(\left[H^+\right]\right)\right) = -\left(-1 + \log\left(\left[H^+\right]\right)\right)$

$= 1 - \log\left(\left[H^+\right]\right) = 1 + \underbrace{\log\left(\frac{1}{\left[H^+\right]}\right)}_{\text{pH inicial}}$

Donde se conclui que o pH sofre um aumento de 1 unidade.

Página 60 – Avalia 3: Parte 1 – Verificação rápida

1. $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $k > 0$

$k+1 > k$ e $\log_a(k+1) < \log_a k$, logo conclui-se que $0 < a < 1$.

Assim, a opção correta é a **(C)**.

2. $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\log_a\left(b^2\right) = -3 \Leftrightarrow 2\log_a b = -3 \Leftrightarrow \log_a b = -\frac{3}{2}$

$\log_a\left(\sqrt{ab}\right) = \log_a\left((ab)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log_a(ab) =$

$= \frac{1}{2}\left(\log_a a + \log_a b\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

A opção correta é a **(B)**.

3. $f(x) = \log_a x$; $g(x) = \frac{1}{2}\log_a x$; $h(x) = 2\log_a x$;

$j(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$

$f \to g$; $f \to h$; $f \to j$

contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$; dilatação vertical de coeficiente 2 ; reflexão de eixo Ox

$j(x) = \log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x = -f(x)$

Assim, a correspondência correta entre as funções e as representações gráficas, é a seguinte:

função *f*: III; função *g*: I; função *h*: IV; função *j*: II

4. **I)** $\overline{AP} = 3$, como $y_A = 0$ e $y_P > 0$, então $y_P = 3$ **c)**

II)

$f(x) = 3 \Leftrightarrow 5 - \log_3(x+1) = 3 \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 = 3^2 \Leftrightarrow x = 8$ **a)**

III) $y_B = f(0) = 5 - \log_3(0+1) = 5 - \log_3 1 = 5 - 0 = 5$ **a)**

IV) $A_{[OAPB]} = \frac{\overline{OB} + \overline{AP}}{2} \times \overline{OA} = \frac{5+3}{2} \times 8 = 32$ **b)**

Donde se conclui que:

I – c) ; **II – a)** ; **III – a)** ; **IV – b)**

Página 61 – Avalia 3: Parte 2 – Questões de desenvolvimento

1. $f(x) = \log_2 x - \log_2(3-x)$

1.1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \underbrace{3 - x > 0}_{x<3}\right\} =]0, 3[$

1.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x - \log_2(3-x) = 0 \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2(3-x) \wedge x \in]0, 3[x = 3 - x \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Zero de *f*: $\frac{3}{2}$

1.3. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

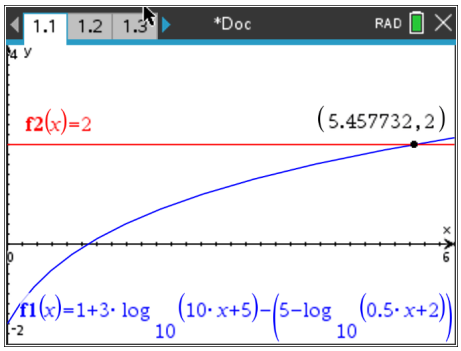
Pode-se concluir que as retas de equações $x = 0$ e $x = 3$ são assíntotas verticais ao gráfico de *f*.

2. $f(x) = 5\log_2(3x+1) - \frac{x}{2}$

Os pontos *A* e *B* são as interseções da reta de equação $y = 2$ com o gráfico de *f*, sendo $x_A < x_B$.

Pretende-se resolver, graficamente, a equação $f(x) = 2$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $x \approx 0{,}636 \vee x \approx 11{,}504$.

Como $x_A < x_B$, conclui-se que $A(0{,}636;\ 2)$ e $B(1{,}504;\ 2)$.

$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times 2}{2} = \overline{AB} = |1{,}504 - 0{,}636| = 0{,}868 \approx 0{,}9$

3. $T(t) = 28 - 24 \times (0{,}95)^t$

T: temperatura da bebida, em ºC

t: tempo após ser retirada do frigorífico, em minutos

3.1. $T(0) = 28 - 24 \times (0{,}95)^0 = 4$

A temperatura da bebida quando foi retirada do frigorífico era de 4 ºC.

3.2. $T(t) = 12 \Leftrightarrow 28 - 24 \times (0{,}95)^t = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -24 \times (0{,}95)^t = -16 \Leftrightarrow (0{,}95)^t = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow t = \log_{0{,}95}\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow t \approx 8$

Até a temperatura da bebida atingir 12 ºC decorreram, aproximadamente, 8 minutos.

3.3. $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(28 - 24 \times (0{,}95)^t\right) = 28 - 24 \times 0 = 28$

$\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = 28$

Significa que com o decorrer do tempo a temperatura da bebida tende a aproximar-se da temperatura ambiente (28 ºC).

4. $Q(t) = 10^3 \log\left(\frac{10}{t+1}\right)$

Q: Quantidade de água existente no recipiente, em ml

t: tempo decorrido após o início da experiência, em horas

$\underbrace{Q(0)}_{\text{quantidade inicial de água}} = 10^3 \log\left(\frac{10}{0+1}\right) = 10^3 \log 10 =$

$= 10^3 \times 1 = 1000$

Redução: 60%

Restou: 40%

$Q(t) = 0{,}4Q(0) \Leftrightarrow 10^3 \log\left(\frac{10}{t+1}\right) = 0{,}4 \times 1000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{10}{t+1}\right) = 0{,}4 \Leftrightarrow \frac{10}{t+1} = 10^{0{,}4} \Leftrightarrow \frac{10}{10^{0{,}4}} = t+1$

$\Leftrightarrow 10^{0{,}6} = t+1 \Leftrightarrow t = 10^{0{,}6} - 1 \Leftrightarrow t \approx 2{,}981$

$2{,}981 \text{ h} = 2 \text{ h} + 0{,}981 \text{ h}$

$0{,}981 \text{ h} = 0{,}981 \times 60 \text{ min} \approx 59 \text{ min}$

A quantidade de água no recipiente teve uma redução de 6'% ao fim de, aproximadamente, 2 horas e 59 minutos.

Tema 4: Função composta

Página 62 – Tarefa inicial

1. $x = 140$

$0{,}85 \times 140 = 119$

$1{,}23 \times 119 = 146{,}37$

$x = 200$

$0{,}85 \times 200 = 170$

$1{,}23 \times 170 = 209{,}10$

$x = 260$

$0{,}85 \times 260 = 221$

$1{,}23 \times 221 = 271{,}83$

$x \to 0{,}85x \to \underbrace{1{,}23(0{,}85x)}_{1{,}0455x}$

x: preço inicial	140	200	260	…	x
$h(x)$: preço final	146,37	209,10	271,83	…	$h(x) = 1{,}0455x$

2.1.

Preço sem desconto	–15% do preço sem desconto	Preço com desconto
400	$0{,}85 \times 400 = 340$	340
240	$0{,}85 \times 240 = 204$	204
…	…	…
x	$0{,}85 \times x$	$f(x) = 0{,}85x$

+23% do preço com desconto	Preço final (com IVA)
$340 \times 1{,}23 = 418{,}20$	418,20
$204 \times 1{,}23 = 250{,}92$	250,92
…	…
$0{,}85x \times 1{,}23 = 1{,}0455x$	$g(f(x)) = 1{,}0455x$

2.2. $g(f(x)) = h(x)$

Página 63

71.1. a) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(2 \times 0 - 1) = g(-1) = 2$

b) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2 \times 2 - 1) = g(3) = 3$

c) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(4) = 2 \times 4 - 1 = 7$

d) $(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(3)=2\times 3-1=5$

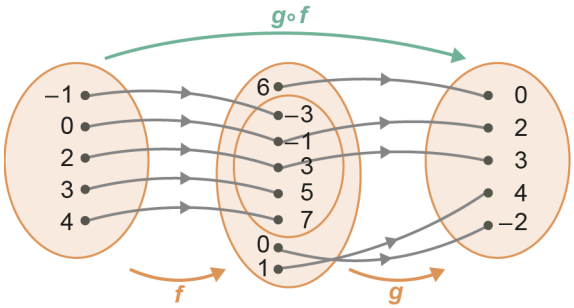
e) $(f\circ g)(6)=f(g(6))=f(0)=2\times 0-1=-1$

71.2. a) $D_f=\{-1,\,0,\,2,\,3,\,4\}$; $D_f'=\{-3,\,-1,\,3,\,5,\,7\}$

Cálculo auxiliar: $f(-1)=2\times(-1)-1=-3$

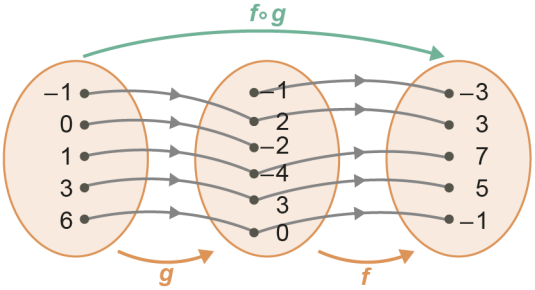
b) $D_g=\{-1,\,0,\,1,\,3,\,6\}$; $D_g'=\{-2,\,0,\,2,\,3,\,4\}$

71.3. a)



$D_{g\circ f}=\{0,\,2\}$

b)



$D_{f\circ g}=\{-1,\,1,\,3,\,6\}$

Página 64

72.1. $f(x)=x+3$ e $g(x)=\dfrac{1}{x}$

$D_f=\mathbb{R}$ e $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Caracterização da função $f\circ g$:

$D_{f\circ g}=\{x:\ x\in D_g\ \wedge\ g(x)\in D_f\}$

$x\in D_g\ \wedge\ g(x)\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \wedge\ \dfrac{1}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \wedge\ x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$

Então, $D_{f\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+3$

$f\circ g:\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

$x\to\dfrac{1}{x}+3$

Caracterização da função $g\circ f$:

$D_{g\circ f}=\{x:\ x\in D_f\ \wedge\ f(x)\in D_g\}$

$x\in D_f\ \wedge\ f(x)\in D_g\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \wedge\ x+3\neq 0\Leftrightarrow x\neq -3$

$D_{g\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+3)=\dfrac{1}{x+3}$

$g\circ f:\ \mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R}$

$x\to\dfrac{1}{x+3}$

72.2. $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=\dfrac{1}{x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 0\}=[0,+\infty[$ e $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Caracterização da função $f\circ g$:

$D_{f\circ g}=\{x:\ x\in D_g\ \wedge\ g(x)\in D_f\}$

$x\in D_g\ \wedge\ g(x)\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \wedge\ \dfrac{1}{x}\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \wedge\ x\geq 0\Leftrightarrow x>0$

Então, $D_{f\circ g}=]0,+\infty[$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

$f\circ g:\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$

$x\to\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

Caracterização da função $g\circ f$:

$D_{g\circ f}=\{x:\ x\in D_f\ \wedge\ f(x)\in D_g\}$

$x\in D_f\ \wedge\ f(x)\in D_g\Leftrightarrow x\geq 0\ \wedge\ \sqrt{x}\neq 0\Leftrightarrow x>0$

Então, $D_{g\circ f}=]0,+\infty[$.

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$g\circ f:\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$

$x\to\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

72.3. $f(x)=x$ e $g(x)=\sqrt{x-1}$

$D_f=\mathbb{R}$ e $D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \underbrace{x-1\geq 0}_{x\geq 1}\right\}=[1,+\infty[$

Caracterização da função $f \circ g$:

$D_{f\circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

$x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Então, $D_{f\circ g} = [1, +\infty[$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = \sqrt{x-1}$

$f \circ g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{x-1}$

Caracterização da função $g \circ f$:

$D_{g\circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

$x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

Então, $D_{g\circ f} = [1, +\infty[$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x-1}$

$g \circ f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{x-1}$

72.4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

$D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : \underbrace{x-2 \neq 0}_{x \neq 2}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Caracterização da função $f \circ g$:

$D_{f\circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

$x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \neq 2 \wedge x \neq 2$

Então, $D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$

$f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$

Caracterização da função $g \circ f$:

$D_{g\circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

$x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge \sqrt[3]{x} \neq 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 8 \Leftrightarrow x \neq 8$

Então, $D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{8\}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-2}$

$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{8\} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-2}$

73. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x^3$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $D_g = \mathbb{R}$

- $D_{g\circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$
  $= \left\{x : x \neq 0 \wedge \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}\right\} = \{x : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $D_{f\circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$
  $= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^3 \neq 0\} = \{x : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 = \dfrac{1}{x^3}$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \dfrac{1}{x^3}$

Como $D_{g\circ f} = D_{f\circ g}$ e $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$, conclui-se que $g \circ f = f \circ g$.

74. $D_f = D_g = \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ e $g(x) = x^2$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 1 - 2 = -1$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(-1) = (-1)^2 = 1$

Como $(f \circ g) \neq (g \circ f)(1)$, conclui-se que $f \circ g \neq g \circ f$.

Página 65 – Tarefa 12

1. $f(x) = \log x$ e $g(x) = \sqrt{x}$

1.1. a) $D_g = \{x : x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$

$D_f = \{x : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$D_{g\circ f} = \{x : x \in \mathbb{R}^+ \wedge \log(x) \geq 0\}$

$x > 0 \wedge \log(x) \geq 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

Conclui-se que $D_{g\circ f} = [1, +\infty[$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log x) = \sqrt{\log(x)}$

$(g \circ f)(x) = g(\log(x)) = \sqrt{\log(x)}$

c) $g \circ f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{\log(x)}$

1.2. $D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

$x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Então, $D_{f \circ g} =]0, +\infty[$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \log(\sqrt{x})$

$f \circ g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \log(\sqrt{x})$

1.3. As funções f e g não são permutáveis porque, por exemplo, $(f \circ g)(10) = \log\sqrt{10} = \frac{1}{2}$ e

$(g \circ f)(10) = \sqrt{\log 10} = 1$.

2. $g \circ f : A \to \mathbb{R}$

$x \to B$

$f(x) = \log_2(x-3)$ e $g(x) = \frac{1}{x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0\} =]3, +\infty[$ e $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$A = D_{g \circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \{x : x > 3 \wedge \log_2(x-3) \neq 0\} = \{x : x > 3 \wedge x \neq 4\}$
$=]3, +\infty[\setminus \{4\}$

$B = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_2(x-3)) =$

$= \frac{1}{\log_2(x-3)}$

3. $D_f = \mathbb{R}$, $A(4, 2) \in G_f$ e $B\left(x, \frac{1}{4}\right) \in G_f$

$D_g =]-2, +\infty[$ e $g(x) = \log_a(x+2)$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

3.1. $(g \circ f)(4) = -2 \Leftrightarrow g(f(4)) = -2 \Leftrightarrow g(2) = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a 4 = -2 \Leftrightarrow a^{-2} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = 4 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2}$

Como $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, então $a = \frac{1}{2}$.

3.2. Sendo $a = 1$ (por 3.1.), então $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$.

$(f \circ g)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow f\left(g\left(-\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{4}$

Então, $x_B = 1$.

Cálculo auxiliar:

$g\left(-\frac{3}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{2} + 2\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Página 66 – Pratica

75. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(g \circ f)(x) = \frac{x+1}{x}$

$D_{g \circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

$x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge \frac{x}{x+1} \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \neq 1 \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -1) \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 0$

Então, $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

A opção correta é a **(D)**.

76. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = x - 1$ e $h(x) = 5 - \frac{x}{2}$

$D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$

76.1. a) $(g \circ f)(\sqrt{3}) = g(f(\sqrt{3})) = g(2) = 2 - 1 = 1$

b) $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-2) = \sqrt{5}$

c) $(h \circ f)(\sqrt{15}) = h(f(\sqrt{15})) = h(4) = 5 - \frac{4}{2} = 3$

76.2. $D_{g \circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

$x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge \underbrace{\sqrt{x^2+1} \in \mathbb{R}}_{x \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2+1}) = \sqrt{x^2+1} - 1$

76.3. $D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

$x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge \underbrace{x-1 \in \mathbb{R}}_{x \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

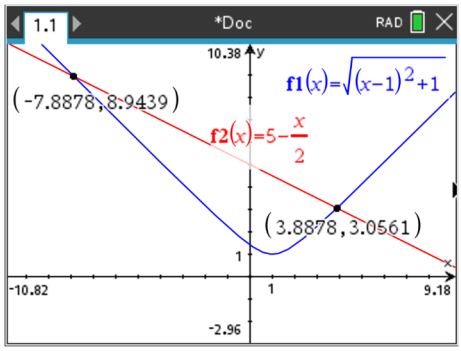
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = \sqrt{(x-1)^2+1}$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{(x-1)^2+1}$

Pretende-se resolver graficamente a equação $(f \circ g)(x) = h(x)$, ou seja, $\sqrt{(x-1)^2+1} = 5 - \frac{x}{2}$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que as coordenadas dos pontos comuns aos gráficos de $f \circ g$ e de h, arredondados às décimas, são $(-7{,}9;\ 8{,}9)$ e $(3{,}9;\ 3{,}1)$.

Página 67 – Pratica

77. $f(x) = x-3$ e $g(x) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$; $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R}^+$

$(g \circ f)(k) = -1 \Leftrightarrow g(f(k)) = -1 \Leftrightarrow g(k-3) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{k-3}\right) = -1 \Leftrightarrow -\log_2(k-3) = -1$

$\Leftrightarrow \log_2(k-3) = 1 \Leftrightarrow k-3 = 2^1 \wedge k-3 > 0$

$\Leftrightarrow k = 5 \wedge k > 3 \Leftrightarrow k = 5$

78. $D_g = [1, +\infty[$

$A(1, 0)$, $B(2, 3)$ e $C(16, 6)$

Como A, B e C pertencem ao gráfico de g, então $g(1) = 0$, $g(2) = 3$ e $g(16) = 6$.

78.1. $j(x) = 2(x^2-1)$

$(g \circ j)(3) = g(j(3)) = g(16) = 6$

78.2. $h(x) = x^2$

$(h \circ g)(2) = h(g(2)) = h(3) = 3^2 = 9$

78.3. $f(x) = 4x-1$

$(g \circ f)(x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow 4x-1 = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

79. $D_g = \mathbb{R}^+$ e $g(x) = \log_{0,5}\left(\frac{x}{2}\right)$

f é uma função quadrática $(D_f = \mathbb{R})$

Zeros de f: -2 e 2

79.1. $D_{f \circ g} = \{x :\ x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

$x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+ \wedge \log_{0,5}\left(\frac{x}{2}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+ \wedge \frac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+ \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$

$D_{f \circ g} = \mathbb{R}^+$

79.2. $(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow g(x) = -2 \vee g(x) = 2$

$\Leftrightarrow \left(\log_{0,5}\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \vee \log_{0,5}\left(\frac{x}{2}\right) = 2\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} = 0{,}5^{-2} \vee \frac{x}{2} = 0{,}5^2\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} = 4 \vee \frac{x}{2} = \frac{1}{4}\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \left(x = 8 \vee x = \frac{1}{2}\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = 8 \vee x = \frac{1}{2}$

Zeros de $f \circ g$: $\frac{1}{2}$ e 8

80. **Função identidade:** $\forall x \in D_f,\ f(x) = x$

$D_f = \mathbb{R}$ e $f(x) = x^n$, n ímpar

g: inversa de f

- $f(x) = y \Leftrightarrow x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$

  Então, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, ou seja, $g(x) = \sqrt[n]{x}$

  Como n é ímpar, $D_g = \mathbb{R}$

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt[n]{x}\right) = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

  $D_{f \circ g} = \{x :\ x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

  $= \left\{x :\ x \in \mathbb{R} \wedge \underbrace{\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}}_{\substack{x \in \mathbb{R} \text{ pois} \\ n \text{ é ímpar}}}\right\} = \mathbb{R}$

$(f\circ g)(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, ou seja, $f\circ g=i$, sendo i a função identidade.

- $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^n)=\sqrt[n]{x^n}\underset{n\text{ é ímpar}}{=}x$

  $D_{g\circ f}=\{x:\ x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}$

  $=\left\{x:\ x\in\mathbb{R}\wedge \underbrace{x^n}_{x\in\mathbb{R}}\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$

  $(g\circ f)(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, ou seja, $g\circ f=i$, sendo i a função identidade.
- Donde se conclui que $f\circ g=g\circ f=i$, sendo i a função identidade.

Página 68 – Avalia 4: Parte 1 – Verificação rápida

1. $D_f=]3,+\infty[$ e $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

   g é uma função de domínio $\mathbb{R}$.

   $(g\circ f)(7)=2\Leftrightarrow g(f(7))=2\Leftrightarrow g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$

   (A) $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **(C)** $D_g=\mathbb{R}$

   (B) $D_g=\mathbb{R}$ **(D)** $D_g=\mathbb{R}_0^+$

   Como $D_g=\mathbb{R}$, a função g pode estar representada na opção **(B)** ou na opção **(C)**.

   (B) $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\times\dfrac{1}{2}+1=2$

   (C) $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=4\times\dfrac{1}{2}-1=1$

   A opção correta é a **(B)**.

2. $D_f=]-1,+\infty[$ e $f(x)=\log(x+1)$

   $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $g(x)=\dfrac{1}{x}$

   2.1. $(g\circ f)(999)=g(f(999))=g(\log 1000)=g(3)=\dfrac{1}{3}$

   A opção correta é a **(D)**.

   2.2. $D_{f\circ g}=\{x:\ x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=$

   $=\left\{x:\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge\dfrac{1}{x}>-1\right\}$

   $=\left\{x:\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge\dfrac{1+x}{x}>0\right\}$

   $=\{x:\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\}$

   $=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

   Cálculo auxiliar:

   $\dfrac{1+x}{x}>0\Leftrightarrow(1+x>0\wedge x>0)\vee(1+x<0\wedge x<0)$

   $\Leftrightarrow(x>-1\wedge x>0)\vee(x<-1\wedge x<0)$

   $\Leftrightarrow x>0\vee x<-1\Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

   A opção correta é a **(A)**.

3. $D_f=]2,+\infty[$, sendo $f(x)=\sqrt{x-2}$

   g: função inversa de f

   $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=y\Leftrightarrow x-2=y^2\Leftrightarrow x=y^2+2$

   $g(x)=x^2+2$

   $D_{f\circ g}=\{x:x\in D_f\wedge g(x)\in D_f\}=\{x:\ x>0\wedge x^2+2>2\}=\mathbb{R}^+$

   Seja $k\in D_{f\circ g}$, então:

   $(f\circ g)(k)=f(g(k))=f(k^2+2)=\sqrt{k^2+\cancel{2}-\cancel{2}}=\sqrt{k^2}$

   $=|k|\underset{k\in\mathbb{R}^+}{=}k$

   A opção correta é a **(C)**.

4. **I:** $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(0)\underset{(0,\,2)\in G_f}{=}2$ **c)**

   II: $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(2)\underset{\text{por observação gráfica}}{>}0$ **b)**

   III: $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(2)=2^2-2=2$ **b)**

   IV: $k\in]-\infty,-2[$

   $(g\circ f)(k)=g\left(\underbrace{f(k)}_{<0}\right)>0$ **a)**

   Nota:

   $g(x)=x^2-x$

   Se $x<0$, então $g(x)>0$.

   Conclusão: I – c) ; II – b) ; III – b) ; IV – a)

Página 69 – Avalia 4: Parte 2 – Questões de desenvolvimento

1. $D_f =]-1, +\infty[$, sendo $f(x) = \log_3(x+1)$

1.1. $g(x) = \sqrt{x-1}$ e $D_g = [1, +\infty[$

- $D_{g\circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

  $x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \Leftrightarrow x > -1 \wedge \log_3(x+1) \geq 1$

  $\Leftrightarrow x > -1 \wedge x+1 \geq 3 \Leftrightarrow x > -1 \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2$

  $D_{g\circ f} = [2, +\infty[$

- $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_3(x+1)) = \sqrt{\log_3(x+1)-1}$

- $g\circ f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$

  $x \to \sqrt{\log_3(x+1)-1}$

1.2. $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

- $D_{g\circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

  $x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \Leftrightarrow x > -1 \wedge \log_3(x+1) \neq -1$

  $\Leftrightarrow x > -1 \wedge x+1 \neq 3^{-1} \Leftrightarrow x > -1 \wedge x \neq -\dfrac{2}{3}$

  $D_{g\circ f} =]-1, +\infty[\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$

- $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_3(x+1))$

  $= \dfrac{1}{\log_3(x+1)+1}$

- $g\circ f :]-1, +\infty[\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}$

  $x \to \dfrac{1}{\log_3(x+1)+1}$

2. $f(x) = 2^{x-1}$ e $g(x) = \dfrac{x}{4}$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$

2.1. $(g\circ f)(3) = g(f(3)) = g(4) = \dfrac{4}{4} = 1$

2.2. a) $(f\circ g)(2) = f(g(2)) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) $(f\circ g)(8) = f(g(8)) = f(2) = 2^1 = 2$

$g(8) = 2$

Então, $(f\circ g)(8) = g(8)$.

2.2. $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^{x-1}) = \dfrac{2^{x-1}}{4} = \dfrac{2^{x-1}}{2^2} =$

$= 2^{x-1-2} = 2^{x-3}$

$D_{g\circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \left\{x : x \in \mathbb{R} \wedge \underbrace{2^{x-1}}_{x\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$

$g\circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 2^{x-3}$

Inversa da função $g\circ f$:

$(g\circ f)(x) = y \Leftrightarrow 2^{x-3} = y \Leftrightarrow x-3 = \log_2 y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3+\log_2 y$

$(g\circ f)^{-1}(x) = 3+\log_2 x$ e $D_{(g\circ f)^{-1}} = \mathbb{R}^+$

$(g\circ f)^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \to 3+\log_2(x)$

3. $D_f = [0, +\infty[$

f é estritamente crescente

O gráfico de f está representado na figura dada.

$D_g = \mathbb{R}$; $g(x) = 2x+1$

3.1. a) $(f\circ g)(4) = f(g(4)) = f(9) = 6$

b) $(g\circ f)(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$

3.2. $D_{f\circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 2x+1 \geq 0\}$

$= \left\{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -\dfrac{1}{2}\right\}$

$= \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

$(f\circ g)(x) = 3 \Leftrightarrow f(g(x)) = 3 \wedge x \geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x) = 0 \wedge x \geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \wedge x \geq -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \wedge x \geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$