Propostas de resolução da unidade 4 do manual

Tema 1: Derivadas

Página 74 – Recorda e Aplica

1.1. $A(-2, f(-2))$, $B(0, f(0))$, $C(2, f(2))$ e $D(3, f(3))$

$f(x) = \frac{x^3}{4} - 2x + 1$

$f(-2) = \frac{(-2)^3}{4} - 2\times(-2) + 1 = -2 + 4 + 1 = 3$

$f(0) = 1$

$f(2) = \frac{2^3}{4} - 2\times 2 + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$

$f(3) = \frac{3^3}{4} - 2\times 3 + 1 = \frac{27}{4} - 6 + 1 = \frac{7}{4}$

Então, $A(-2, 3)$, $B(0, 1)$, $C(2, -1)$ e $D\left(3, \frac{7}{4}\right)$.

1.2. **a)** $\text{t.m.v.}_{[0,3]} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\frac{7}{4} - 1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

A afirmação é falsa pois $\text{t.m.v.}_{[0,3]} > 0$ e f não é crescente em $[0, 3]$.

b) $\text{t.m.v.}_{[0,2]} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-1 - 1}{2} = -1$

A afirmação é falsa pois, por exemplo, $\text{t.m.v.}_{[0,2]} < 0$ e f não é decrescente em $[0, 2]$.

1.3. $\text{t.m.v.}_{[-2,3]} = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{\frac{7}{4} - 3}{5} = -\frac{1}{4}$

$m_{AD} = \text{t.m.v.}_{[-2,3]} = -\frac{1}{4}$

AD: $y = -\frac{1}{4}x + b$

Como o ponto A, de coordenadas $(-2, 3)$, pertence à reta AD, tem-se:

$3 = -\frac{1}{4}\times(-2) + b \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{2} = b \Leftrightarrow \frac{5}{2} = b$

AD: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$

Página 75 – Recorda e Aplica

1.2. **a)** Sendo $x \neq 1$, tem-se:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 3x - (1^2 - 3\times 1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} =$$
$$= \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x - 2$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} (x - 2) = 1 - 2 = -1$

2.2. $A(1, f(1))$, ou seja, $A(1, -2)$.

$m_r = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$

r: $y = -x + b \overset{A\in r}{\rightarrow} -2 = -1 + b \Leftrightarrow -1 = b$

r: $y = -x - 1$

3.1. $f'(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2$

3.2. $f'(x) = \left[(3 - x)x^2\right]' = (3 - x)'\times(x^2) + (3 - x)\times(x^2)' =$

$= -1\times x^2 + (3 - x)\times(2x) = -x^2 + 6x - 2x^2 = -3x^2 + 6x$

3.3. $f'(x) = \left(\frac{3}{x^2}\right)' = \frac{(3)'\times x^2 - 3\times(x^2)'}{(x^2)^2}$

$= \frac{0\times x^2 - 3\times(2x)}{x^4} = \frac{-6x}{x^4} = \frac{-6}{x^3}$

3.4. $f'(x) = \left(\frac{2x}{x+1}\right)' =$

$= \frac{(2x)'\times(x+1) - (2x)\times(x+1)'}{(x+1)^2}$

$= \frac{2(x+1) - (2x)\times 1}{(x+1)^2}$

$= \frac{2x + 2 - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

3.5. $f'(x) = \left(\frac{3}{2x+1} - 3x^2\right)' =$

$= \frac{(3)'\times(2x+1) - 3\times(2x+1)'}{(2x+1)^2} - 6x$

$= \frac{0\times(2x+1) - 3\times 2}{(2x+1)^2} - 6x$

$= \frac{-6}{(2x+1)^2} - 6x$

3.6. $f'(x)=\left(-\frac{5x}{2}+\frac{x^2}{x+1}\right)'=$

$=-\frac{5}{2}+\frac{\left(x^2\right)'\times(x+1)-x^2\times(x+1)'}{(x+1)^2}$

$=-\frac{5}{2}+\frac{(2x)\times(x+1)-x^2\times 1}{(x+1)^2}$

$=-\frac{5}{2}+\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

Página 76 – Tarefa inicial

2. Recorrendo à aplicação em GeoGebra e fazendo variar o valor de *a*, verifica-se que as representações gráficas de f e de f' coincidem quando $a\approx 2{,}718$.

Página 77

1.1. $f'(x)=\left(3x-\mathrm{e}^x\right)'=(3x)'-\left(\mathrm{e}^x\right)'=3-\mathrm{e}^x$

1.2. $f'(x)=\left(x^2\mathrm{e}^x\right)'=\left(x^2\right)'\times\mathrm{e}^x+x^2\times\left(\mathrm{e}^x\right)'=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x$

1.3. $f'(x)=\left[\mathrm{e}^x(2-x)\right]'=\left(\mathrm{e}^x\right)'\times(2-x)+\left(\mathrm{e}^x\right)\times(2-x)'=$

$=\mathrm{e}^x\times(2-x)+\mathrm{e}^x\times(-1)=\mathrm{e}^x(2-x-1)=\mathrm{e}^x(1-x)$

1.4. $f'(x)=\left(\frac{x+3}{\mathrm{e}^x}\right)'=\frac{(x+3)'\times\mathrm{e}^x-(x+3)\times\left(\mathrm{e}^x\right)'}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}=$

$=\frac{1\times\mathrm{e}^x-(x+3)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\frac{\mathrm{e}^x(1-x-3)}{\mathrm{e}^{2x}}=(-x-2)\mathrm{e}^{-x}$

1.5. $f'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'-\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)'=$

$=\frac{(1)'\times x-1\times(x)'}{x^2}-\frac{(x)'\times\mathrm{e}^x-x\times\left(\mathrm{e}^x\right)'}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}$

$=\frac{0-1}{x^2}-\frac{\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=-\frac{1}{x^2}-\frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{\mathrm{e}^{2x}}$

$=-\frac{1}{x^2}-\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$

2.1. $f'(x)=\left(2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x\right)'=\left(2\mathrm{e}^x\right)'-(\mathrm{e}x)'=2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$

$m=f'(0)=2\mathrm{e}^0-\mathrm{e}=2-\mathrm{e}$

2.2. $m=f'(1)=2\mathrm{e}^1-\mathrm{e}=\mathrm{e}$

3. $P(0,f(0))$

$f(0)=0-3\mathrm{e}^0+3=0\rightarrow P(0,0)$

$f'(x)=\left(x-3\mathrm{e}^x+3\right)'=(x)'-\left(3\mathrm{e}^x\right)'+(3)'=$

$=1-3\mathrm{e}^x+0=1-3\mathrm{e}^x$

$m_r=f'(0)=1-\mathrm{e}^0=-2$

$r:\ y=-2x+b$

Como $P(0,0)\in r$ então $b=0$

Logo, a reta r é definida por $y=-2x$.

Página 78

4.1. $f'(x)=(\ln x-3x)'=(\ln x)'-(3x)'=\frac{1}{x}-3$

4.2. $f'(x)=(x\ln x)'=(x)'\times\ln x+x\times(\ln x)'=$

$=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

4.3. $f'(x)=\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{(x)'\times\ln x-x\times(\ln x)'}{(\ln x)^2}=$

$=\frac{1\times\ln x-x\times\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

4.4. $f'(x)=\left(x^3+\frac{1}{\ln x}\right)'=\left(x^3\right)'+\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=$

$=3x^2+\frac{(1)'\times\ln x-1\times(\ln x)'}{(\ln x)^2}=3x^2+\frac{0\times\ln x-1\times\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$

$=3x^2-\frac{1}{x\ln^2 x}$

Página 79 – Tarefa 1

1.1. $k=y_A=g(2)=\ln 2$

$A(2,\ln 2)$ e $B(\ln 2,2)$

1.2. $m_1=g'(2)$; $g'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Logo, $m_1=\frac{1}{2}$.

1.3. $m_2=f'(\ln 2)$; $f'(x)=\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x$

Logo, $m_2=\mathrm{e}^{\ln 2}=2$.

1.4. $m_1 \times m_2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

Os declives são inversos um do outro.

2.1. $s = y_C = f(2) = e^2$

$C(2, e^2)$ e $D(e^2, 2)$

2.2. $m_3 = f'(2) = e^2$

2.3. $m_4 = g'(e^2) = \frac{1}{e^2}$

2.4. $m_3 \times m_4 = e^2 \times \frac{1}{e^2} = 1$

Os declives são inversos um do outro.

3.1. $f'(x_0) = e^{x0}$. Geometricamente representa o declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *P* de coordenadas (x_0, y_0).

3.2. $g'(y_0) = \frac{1}{y_0} = \frac{1}{e^{x0}}$

$P(x_0, y_0) \in G_f$, logo $f(x_0) = y_0$, ou seja, $y_0 = e^{xo}$.

Geometricamente representa o declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto *Q* de coordenadas (y_0, x_0).

3.3. $f'(x_0) \times g'(y_0) = e^{x0} \times \frac{1}{e^{x0}} = \frac{e^{x0}}{e^{x0}} = 1$

Conclui-se que o declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *P* e o declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto *Q* são inversos um do outro.

Página 80 – Pratica

5.1. $f'(x) = \left(3\ln x + \frac{e^x}{2}\right)' = (3\ln x)' + \left(\frac{e^x}{2}\right)' = \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}$

5.2. $f'(x) = \left(2\ln x - x^2\right)' = (2\ln x)' - \left(x^2\right)' = \frac{2}{x} - 2x$

5.3. $f'(x) = \left(\frac{1-\ln x}{e^x}\right)' = \frac{(1-\ln x)' \times e^x - (1-\ln x) \times \left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2} =$

$= \frac{-\frac{1}{x} \times e^x - (1-\ln x) \times e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x\left(-\frac{1}{x} - 1 + \ln x\right)}{e^{2x}}$

$= \frac{-\frac{1}{x} - 1 + \ln x}{e^x} = \left(-\frac{1}{x} - 1 + \ln x\right)e^{-x}$

6.1. $f'(x) = \left(x^2 e^x\right)' = \left(x^2\right)' \times e^x + x^2 \times \left(e^x\right)' =$

$= 2xe^x + x^2 e^x =$

$= e^x\left(2x + x^2\right)$

6.2. $g'(x) = (x - \ln x)' = (x)' - (\ln x)' = 1 - \frac{1}{x}$

6.3. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = e^x\left(2x + x^2\right) - \left(1 - \frac{1}{x}\right) =$

$= e^x\left(2x + x^2\right) - 1 + \frac{1}{x}$

7.1. $f'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$

$f'(a) = 2 \Leftrightarrow e^a = 2$

$g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$g'\left(e^a\right) = \frac{1}{e^a} = \frac{1}{2}$

7.2. $g'(a) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = 4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

$f'(\ln a) = e^{\ln a} = a = \frac{1}{4}$

8. $f'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$; $g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$f'(a) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow e^a = \frac{1}{3}$

$g'(f(a)) = g'\left(e^a\right) = g'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

A opção correta é a **(D)**.

9.1. $A(0, f(0))$

$f(0) = 0 - 2e^0 + 4 = -2 + 4 = 2$

Então, $A(0, 2)$.

9.2. *r*: tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*

$m_r = f'(0)$

$f'(x) = \left(x - 2e^x + 4\right)' = (x)' - \left(2e^x\right)' + (4)' =$

$= 1 - 2e^x + 0 = 1 - 2e^x$

Assim, $m_r = 1 - 2e^0 = -1$.

r: $y = -x + b$

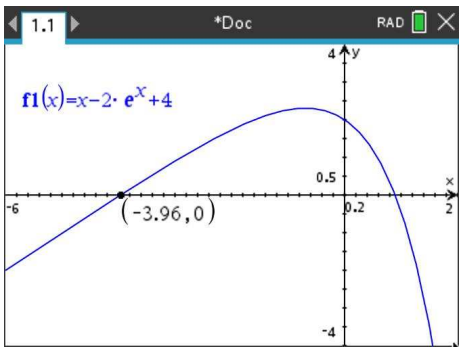
Como $A(0, 2) \in r$, tem-se: $2 = -0 + b \Leftrightarrow b = 2$

Uma equação, na forma reduzida, da reta *r* é $y = -x + 2$.

9.3. **a)** Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto B de abcissa -2. Então: $m_t = f'(-2) = 1 - 2e^{-2} \approx 0{,}73$

b) Pretende-se determinar o zero negativo da função f, ou seja, a solução negativa da equação $f(x) = 0$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Assim, conclui-se que o zero negativo da função f é, aproximadamente, $-3{,}96$.

Página 81 – Pratica

10. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8\ln x}{x} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \wedge x > 0$

$x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

Logo, $A(1, 0)$.

Como a reta tangente ao gráfico de f no ponto B é paralela ao eixo Ox, então o seu declive é nulo.

$$f'(x) = \left(\frac{8\ln x}{x}\right)' = \frac{(8\ln x)' \times x - (8\ln x) \times (x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{8}{x} \times x - 8\ln x \times 1}{x^2} = \frac{8 - 8\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8 - 8\ln x}{x^2} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8 - 8\ln x = 0 \wedge x > 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x > 0$$
$$\Leftrightarrow x = e \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e$$

$B(e, f(e))$

$$f(e) = \frac{8\ln e}{e} = \frac{8 \times 1}{e} = \frac{8}{e}$$

Logo, $B\left(e, \frac{8}{e}\right)$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-e)^2 + \left(0 - \frac{8}{e}\right)^2} = \sqrt{1 - 2e + e^2 + \frac{64}{e^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{e^2 - 2e^3 + e^4 + 64}{e^2}}$$

Logo, a medida da área do quadrado em que um dos lados é $[AB]$ é $\left(\overline{AB}\right)^2$, ou seja,

$$\frac{e^2 - 2e^2 + e^4 + 64}{e^2}.$$

11.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 0 \vee \ln x = 0) \wedge x > 0$
$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1) \wedge x > 0$
$\Leftrightarrow x = 1$

Logo, $A(1, 0)$.

$f(e) = e\ln e = e \times 1 = e \therefore B(e, e)$

11.2. $f'(x) = (x\ln x)' = (x)' \times \ln x + x \times (\ln x)' =$

$= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$

r: reta tangente ao gráfico de f no ponto A

$m_r = f'(1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$

r: $y = x + b$

Como $A(1, 0) \in r$, tem-se:

$0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$

r: $y = x - 1$

s: reta tangente ao gráfico de f no ponto B

$m_s = f'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2$

s: $y = 2x + b$

Como $B(e, e) \in s$, tem-se:

$e = 2e + b \Leftrightarrow b = -e$

s: $y = 2x - e$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 2x - e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - e = x - 1 \\ \text{---------} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e - 1 \\ x = e - 2 \end{cases}$$

As retas r e s intersetam-se no ponto de coordenadas $(e-1, e-2)$.

Página 82

12.1. $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

12.2. $\left(x^{1,5}\right)' = 1{,}5x^{1,5-1} = 1{,}5x^{0,5} = 1{,}5\sqrt{x}$

12.3. $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

13.1. $h(x) = (5x+1)^4$

$h = g \circ f$, sendo $f(x) = 5x+1$ e $g(x) = x^4$.

13.2. $f'(x) = 5$; $g'(x) = 4x^3$

$(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \times f'(0)$

$h'(0) = 20$

Cálculo auxiliar:

$f(0) = 5 \times 0 + 1 = 1$

$f'(0) = 5$

$g'(f(0)) \times f'(0) = g'(1) \times 5 = 4 \times 1^3 \times 5 = 20$

14.1. $h(x) = \frac{2}{x^3}$

$h = g \circ f$, sendo $f(x) = x^3$ e $g(x) = \frac{2}{x}$.

$f'(x) = 3x^2$

$g'(x) = \frac{(2)' \times x - 2 \times (x)'}{x^2} = \frac{0 \times x - 2 \times 1}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$

$h'(1) = (g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(1) \times 3 =$

$= -\frac{2}{1^2} \times 3 = -6$

14.2. $h(x) = \mathrm{e}^{3x+7}$

$h = g \circ f$, sendo $f(x) = 3x+7$ e $g(x) = \mathrm{e}^x$

$f'(x) = 3$; $g'(x) = \mathrm{e}^x$

$h'(1) = (g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(10) \times 3$

$= \mathrm{e}^{10} \times 3 = 3\mathrm{e}^{10}$

14.3. $h(x) = \ln(2x+5)$

$h = g \circ f$, sendo $f(x) = 2x+5$ e $g(x) = \ln x$

$f'(x) = 2$; $g'(x) = \frac{1}{x}$

$h'(1) = (g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(7) \times 2$

$= \frac{1}{7} \times 2 = \frac{2}{7}$

Página 83

15.1. $\left(x\sqrt{x}\right)' = (x)' \times \sqrt{x} + x \times \left(\sqrt{x}\right)' = 1 \times \sqrt{x} + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' x =$

$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \times x = \frac{\sqrt{x}}{\underset{\times 2\sqrt{x}}{1}} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

15.2. $\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)' = \left[(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]' = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} \times \underbrace{(x+1)'}_{1} =$

$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$

15.3. $\left(\ln\left(x^2+\mathrm{e}^x\right)\right)' = \frac{\left(x^2+\mathrm{e}^x\right)'}{x^2+\mathrm{e}^x} = \frac{2x+\mathrm{e}^x}{x^2+\mathrm{e}^x}$

15.4. $\left(\frac{\ln x}{\mathrm{e}^{3x}}\right)' = \frac{(\ln x)' \times \mathrm{e}^{3x} - \ln x \times \left(\mathrm{e}^{3x}\right)'}{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2} =$

$= \frac{\frac{1}{x} \times \mathrm{e}^{3x} - \ln x \times 3\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{6x}} = \frac{\mathrm{e}^{3x}\left(\frac{1}{x} - 3\ln x\right)}{\mathrm{e}^{6x}}$

$= \frac{\frac{1}{x} - 3\ln x}{\mathrm{e}^{3x}} = \frac{1-3x\ln x}{x\mathrm{e}^{3x}}$

16.1. O declive da reta r é igual a $f'(0)$.

$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{2x}\right)' = 2\mathrm{e}^{2x}$

Então, $m_r = f'(0) = 2\mathrm{e}^{2\times 0} = 2$.

16.2. $t \,//\, r \Leftrightarrow m_t = m_r \Leftrightarrow m_t = 2$

$B(b, g(b))$

$g'(x) = \left(\ln(x+1)\right)' = \frac{1}{x+1}$

$m_t = 2 \Leftrightarrow g'(b) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{b+1} = 2 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(2^{-1}\right) = -\ln 2$

Então, $B\left(-\frac{1}{2}, -\ln 2\right)$.

Página 84

17.1. $\left(5^{3x+2}\right)' = 5^{3x+2} \times \underbrace{(3x+2)'}_{3} \times \ln 5 = 3\ln 5 \times 5^{3x+2}$

17.2. $\left(2^{3-x}\right)' = 2^{3-x} \times \underbrace{(3-x)'}_{-1} \times \ln 2 = -\ln 2 \times 2^{3-x}$

17.3. $\left(\frac{1}{3^{2x}} - 3^{x+1}\right)' = \left(3^{-2x}\right)' - \left(3^{x+1}\right)' =$

$= 3^{-2x} \times \underbrace{(-2x)'}_{-2} \times \ln 3 - 3^{x+1} \times \underbrace{(x+1)'}_{1} \times \ln 3$

$= -2\ln 3 \times 3^{-2x} - \ln 3 \times 3^{x+1} = \ln 3\left(\frac{-2}{3^{2x}} - 3^{x+1}\right)$

17.4. $\left(\log_2(1-x)\right)' = \frac{(1-x)'}{(1-x)\ln 2} = \frac{-1}{(1-x)\ln 2}$

17.5. $\left(\log_3\left(\frac{2}{x+1}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right)'}{\frac{2}{x+1} \times \ln 3} = \frac{\frac{0 \times (x+1) - 2 \times 1}{(x+1)^2}}{\frac{2}{x+1}\ln 3} =$

$= \frac{-\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{2\ln 3}{x+1}} = -\frac{1}{(x+1)\ln 3}$

18.1. $f'(x) = \left(\log_2\left(x^2+2\right)\right)' = \frac{\left(x^2+2\right)'}{\left(x^2+2\right)\ln 2} = \frac{2x}{\left(x^2+2\right)\ln 2}$

Logo, $f'\left(\sqrt{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{4\ln 2} = \frac{\sqrt{2}}{2\ln 2} = \frac{\sqrt{2}}{\ln\left(2^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\ln 4}$.

18.2. $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = 3 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+2\right) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 2^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$

Como $x_B < 0$, conclui-se que $x_B = -\sqrt{6}$.

$m = f'\left(-\sqrt{6}\right) = \frac{-2\sqrt{6}}{8\ln 2} = -\frac{\sqrt{6}}{4\ln 2} = -\frac{\sqrt{6}}{\ln\left(2^4\right)} = -\frac{\sqrt{6}}{\ln 16}$

Página 85

19.1. $\left(\sin(3x)\right)' = (3x)'\cos(3x) = 3\cos(3x)$

19.2. $\left(\sin(2x) + \cos(5x)\right)' = (2x)'\cos(2x) - (5x)'\sin(5x)$

$= 2\cos(2x) - 5\sin(5x)$

19.3. $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \frac{\left(\sin(x)\right)' \times x - \sin(x) \times (x)'}{x^2} =$

$= \frac{\cos x \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

19.4. $\left(x\cos(2x)\right)' = \underbrace{(x)'}_{1} \times \cos(2x) + x \times \underbrace{\left(\cos(2x)\right)'}_{-2\sin(2x)} =$

$= \cos(2x) - 2x\sin(2x)$

19.5. $\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

19.6. $(\sin x \cos x)' = (\sin x)' \times \cos x + \sin x \times (\cos x)' =$

$= \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

19.7. $\left(\frac{x}{\pi}\tan(\pi x)\right)' = \left(\frac{x}{\pi}\right)' \times \tan(\pi x) + \frac{x}{\pi} \times \left(\tan(\pi x)\right)' =$

$= \frac{1}{\pi} \times \tan(\pi x) + \frac{x}{\pi} \times \frac{\pi}{\cos^2(\pi x)} = \frac{\tan(\pi x)}{\pi} + \frac{x}{\cos^2(\pi x)}$

20.1. $f'(x) = \left(x - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)'\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

20.2. $A\left(-2\pi, f\left(-2\pi\right)\right)$, $B\left(-2\pi, f'\left(-2\pi\right)\right)$, $C\left(\pi, f\left(\pi\right)\right)$ e $D\left(\pi, f'\left(\pi\right)\right)$

$f\left(-2\pi\right) = -2\pi - \sin\left(-\pi\right) = -2\pi - 0 = -2\pi$

$f'\left(-2\pi\right) = 1 - \frac{1}{2}\cos\left(-\pi\right) = 1 - \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{3}{2}$

$f\left(\pi\right) = \pi - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1$

$f'\left(\pi\right) = 1 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} \times 0 = 1$

$A\left(-2\pi, -2\pi\right)$, $B\left(-2\pi, \frac{3}{2}\right)$, $C\left(\pi, \pi - 1\right)$ e $D\left(\pi, 1\right)$.

Página 86 – Pratica

21.1. $A\left(1, y_A\right)$ e r: $y = x - 3$

Como $A \in r$, então $y_A = 1 - 3 = -2$.

Logo, $A(1, -2)$

21.2. $g'(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)' = -\left(\frac{\pi x}{4}\right)'\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

21.3. Como A pertence ao gráfico de f, então $f\left(1\right) = -2$.

O declive da reta r é 1. Então, $f'\left(1\right) = 1$.

$(g \circ f)'(1) = g'\left(f\left(1\right)\right) \times f'\left(1\right) = g'\left(-2\right) \times 1 =$

$= -\frac{\pi}{4}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \times (-1) = \frac{\pi}{4}$

22. **(1)** $f'(x)=\left(\frac{1}{x^2}\right)=\left(x^{-2}\right)'=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$

(2) $f'(x)=\left(1+\ln\left(x^2\right)\right)'=0+\frac{\left(x^2\right)'}{x^2}=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$

(3) $f'(x)=\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)'=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{x}}=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{\sqrt{x}}=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=$

$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}$

		(A)	(B)	(C)
		$f'(x)=\frac{2}{x}$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{2}{x^3}$
(1)	$f(x)=\frac{1}{x^2}$			**X**
(2)	$f(x)=1+\ln\left(x^2\right)$	**X**		
(3)	$f(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right)$			

(D)	(E)
$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=\frac{1}{2x}$
	X

Página 87 – Pratica

23.1. $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8}\right)'=\left[\left(x^2+8\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=$

$=\frac{1}{2}\left(x^2+8\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(x^2+8\right)'$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+8}}\times(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

$f(1)=\sqrt{1^2+8}=3$, então $A(1,3)$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto A.

$m_r=f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+8}}=\frac{1}{3}$

r: $y=\frac{1}{3}x+b$

Como o ponto A, de coordenadas $(1,3)$, pertence à reta r, tem-se: $3=\frac{1}{3}\times1+b\Leftrightarrow\frac{8}{3}=b$

r: $y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$

23.2. $B\left(1,f'(1)\right)$

$f'(1)=\frac{1}{3}$, logo $B\left(1,\frac{1}{3}\right)$.

24. **(1)** $f'(x)=\left(\frac{e^{2x-3}}{x-1}\right)'=\frac{\left(e^{2x-3}\right)'\times(x-1)-e^{2x-3}\times(x-1)'}{(x-1)^2}=$

$=\frac{2e^{2x-3}\times(x-1)-e^{2x-3}\times1}{(x-1)^2}=\frac{e^{2x-3}(2x-2-1)}{(x-1)^2}$

$=\frac{e^{2x-3}(2x-3)}{(x-1)^2}$

Então, $f'(2)=\frac{e^{2\times2-3}(2\times2-3)}{(2-1)^2}=e$.

(2) $g'(x)=\left(x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=(x)'\times\ln\left(\frac{1}{x}\right)+x\times\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=$

$=1\times\ln\left(\frac{1}{x}\right)+x\times\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}}=\ln\left(\frac{1}{x}\right)+x\times\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\ln\left(\frac{1}{x}\right)-1$

Então, $g'(e)=\ln\left(\frac{1}{e}\right)-1=-1-1=-2$.

(3) $h'(x)=\left(\sin(3\pi x)\right)'=(3\pi x)'\cos(3\pi x)=3\pi\cos(3\pi x)$

Então, $h'\left(\frac{1}{3}\right)=3\pi\cos(\pi)=3\pi\times(-1)=-3\pi$.

(4) $i'(x)=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right)'=-\left(\frac{2\pi}{x}\right)'\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)=\frac{2\pi}{x^2}\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$

Então, $i'(4)=\frac{2\pi}{16}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}\times1=\frac{\pi}{8}$.

(1)	(2)	(3)
$f(x)=\frac{e^{2x-3}}{x-1}$	$g(x)=x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$	$h(x)=\sin(3\pi x)$
$f'(2)=e$	$g'(e)=-2$	$h'\left(\frac{1}{3}\right)=-3\pi$

(4)
$i(x)=\cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)$
$i'(4)=\frac{\pi}{8}$

25.1. $f(x)=1 \Leftrightarrow 2^{3x}=1 \Leftrightarrow 3x=0 \Leftrightarrow x=0$

$P(0,1) \quad m=f'(0)$

$f'(x)=\left(2^{3x}\right)'=2^{3x}\times\underbrace{(3x)'}_{3}\times\ln 2=2^{x}\times 3\ln 2$

Logo, $m=2^{0}\times 3\ln 2=3\ln 2=\ln\left(2^{3}\right)=\ln 8$.

25.2. $m=g'(1)$

$g'(x)=\left(x\log_2(x+1)\right)'$

$=(x)'\times\log_2(x+1)+x\times\left(\log_2(x+1)\right)'$

$=1\times\log_2(x+1)+x\times\dfrac{(x+1)'}{(x+1)\ln 2}$

$=\log_2(x+1)+\dfrac{x}{(x+1)\ln 2}$

Logo, $m=\log_2 2+\dfrac{1}{2\ln 2}=1+\dfrac{1}{\ln\left(2^{2}\right)}=1+\dfrac{1}{\ln 4}$.

26. **1.ª etapa**

$f'(x)=\left(x^{2}2^{x}\right)'=\left(x^{2}\right)'\times 2^{x}+x^{2}\times\left(2^{x}\right)'=$

$=2x\times 2^{x}+x^{2}\times 2^{x}\ln 2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\times 2^{x}+x^{2}\times 2^{x}\ln 2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x2^{x}(2+x\ln 2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee \underbrace{2^{x}=0}_{\text{equação impossível}} \vee 2+x\ln 2=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-\dfrac{2}{\ln 2}$

Como a abcissa de *A* é negativa, conclui-se que

$x_A=-\dfrac{2}{\ln 2}$

2.ª etapa

A reta *r* é paralela ao eixo Ox e passa no ponto *A* de coordenadas $\left(-\dfrac{2}{\ln 2}, f\left(-\dfrac{2}{\ln 2}\right)\right)$.

$f\left(-\dfrac{2}{\ln 2}\right)=\left(-\dfrac{2}{\ln 2}\right)^{2}\times 2^{-\frac{2}{\ln 2}}=\dfrac{4}{\ln^{2}2}\times 2^{-\frac{2}{\ln 2}}$

r: $y=\dfrac{4}{\ln^{2}2}\times 2^{-\frac{2}{\ln 2}}$

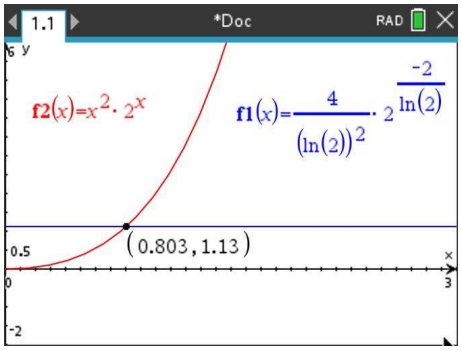
Logo, $k=\dfrac{4}{\ln^{2}2}\times 2^{-\frac{2}{\ln 2}}$.

3.ª etapa

Pretende-se resolver graficamente a condição:

$f(x)=\dfrac{4}{\ln^{2}2}\times 2^{-\frac{2}{\ln 2}} \wedge x>0$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que $x\approx 0{,}80$.

Página 88

27.1. $f'(x)=\left(\dfrac{x^{3}}{3}-x^{2}-3x+3\right)'=x^{2}-2x-3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^{2}-2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3 \vee x=-1$

Zeros de f': –1 e 3

27.2.

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
f	↗	$f(-1)$	↘	$f(3)$	↗

Máximo relativo: $f(-1)=\dfrac{(-1)^{3}}{3}-(-1)^{2}-3(-1)+3=\dfrac{14}{3}$

Mínimo relativo: $f(3)=\dfrac{3^{3}}{3}-3^{2}-3\times 3+3=-6$

Então, $A\left(-1,\dfrac{14}{3}\right)$ e $B(3,-6)$.

Página 89

28.1. a) $f(x)=0 \Leftrightarrow x\ln x=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=0 \vee \ln x=0) \wedge x>0 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=1) \wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=1$

Zero de *f*: 1

b) $f'(x)=(x\ln x)'=(x)'\times\ln x+x\times(\ln x)'$

$=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln(x)+1$

28.2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-1} \wedge x>0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

x	**0**		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$

Monotonia: f é decrescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ e

crescente em $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$

Extremos: $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ é mínimo

(absoluto)

29. $g(x) = \frac{2+\ln x}{x}$; $D_g = \mathbb{R}^+$

$$g'(x) = \left(\frac{2+\ln x}{x}\right)' = \frac{(2+\ln x)'\times x - (2+\ln x)\times(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\times x - (2+\ln x)\times 1}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\ln x}{x^2} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1-\ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	**0**		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$-1-\ln x$		$+$	0	$-$
x^2		$+$	$+$	$+$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
g		$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{e}\right)$	$\searrow$

Monotonia: g é crescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ e

decrescente em $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Extremos: $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = \frac{2+(-1)}{\frac{1}{e}} = e$ é

máximo (absoluto).

Página 90

30.1. $P(x, f(x))$; $x > 1$; $P(x, 2x\ln x)$; $x > 1$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\ln x = 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x = 0 \vee \ln x = 0) \wedge x > 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1) \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$A(1, 0)$; $B(0, 2x\ln x)$; $x > 1$

$$A_{[OAPB]} = \frac{\overline{BP} + \overline{OA}}{2} \times \overline{OB}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{2} \times (2x\ln x) = (x+1)\times x\ln x = (x^2+x)\ln x$$

30.2. $g'(x) = \left((x^2+x)\ln x\right)' = (x^2+x)'\times\ln x + (x^2+x)\times(\ln x)'$

$$= (2x+1)\ln x + (x^2+x)\times\frac{1}{x} = (2x+1)\ln x + \frac{x^2+x}{x}$$

$$= (2x+1)\ln x + x + 1 = x + 1 + (2x+1)\ln x$$

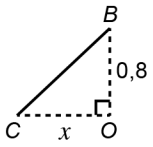
Página 91 – Tarefa 2

1. $\overline{OC} = x$, com $x \in [0, 2]$

$\overline{AC} = \overline{AO} - \overline{OC} = 2 - x$

$\overline{CB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 \Leftrightarrow \overline{CB}^2 = x^2 + 0{,}8^2$

$\underset{\overline{CB}>0}{\Leftrightarrow} \overline{CB} = \sqrt{x^2 + 0{,}64}$



2.1. $p(0) = 4\times(2-0) + 5\times 0{,}8 = 12$

$p(0)$ representa o preço da construção do canal, em milhares de euros, no caso em que o canal liga A a O e O a B, ou seja, o ponto C coincide com O.

$p(2) = 5\times\sqrt{2^2 + 0{,}64} \approx 10{,}770$ milhares de euros

10,770 milhares de euros = 10 770 euros

Significa que o preço de construção do canal que liga diretamente A a B (quando C coincide com A) é de, aproximadamente, 10 770 euros.

2.2. a) $p(x) = 4\times\overline{AC} + 5\times\overline{CB} = 4(2-x) + 5\sqrt{x^2+0{,}64}$

b) $p'(x) = \left(4(2-x) + 5\sqrt{x^2+0{,}64}\right)' =$

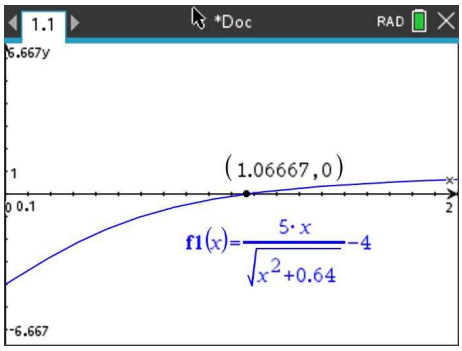
$$= 4(-1) + 5\times\left((x^2+0{,}64)^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= -4 + 5\left(\frac{1}{2}\times(x^2+0{,}64)^{-\frac{1}{2}}\times(x^2+0{,}64)'\right)$$

$$= -4 + 5\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+0{,}64}}\times 2x\right) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+0{,}64}} - 4$$

3. Pretende-se resolver graficamente a condição $p'(x) = 0 \wedge x \in]0, 2[$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que $x \approx 1{,}07$.

x	0		1,07		2
$p'(x)$		−	0	+	
p		↘	$p(1{,}07)$	↗	

A função p tem um mínimo quando $x \approx 1{,}07$.

4. O preço de construção do canal é mínimo quando $x = 1{,}07$ km.

Nesse caso, o ponto *C* deve ficar a 10,7 km, ou seja, 1070 metros do ponto *O*.

Página 92 – Pratica

31.1. $V(1) = (8 \times 1 - 8)e^{-0{,}2 \times 1} = 0$

No contexto apresentado significa que se a máquina engarrafar apenas 100 litros de vinho, então não há lucro nem prejuízo.

31.2. 350 litros $= 3{,}5$ centenas de litros

$V(3{,}5) = (8 \times 3{,}5 - 8)e^{-0{,}2 \times 3{,}5} \approx 9{,}932$

Nessa colheita o lucro foi, aproximadamente, 9,932 milhares de euros.

31.3. $V'(x) = \left((8x-8)e^{-0{,}2x}\right) =$

$= (8x-8)' \times e^{-0{,}2x} + (8x-8) \times \left(e^{-0{,}2x}\right)'$

$= 8e^{-0{,}2x} + (8x-8) \times \left(-0{,}2e^{-0{,}2x}\right)$

$= e^{-0{,}2x}\left(8 + (8x-8) \times (-0{,}2)\right)$

$= (-1{,}6x + 9{,}6)e^{-0{,}2x}$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow (-1{,}6x + 9{,}6)e^{-0{,}2x} = 0 \wedge x \in [0, 35] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-1{,}6x + 9{,}6 = 0 \vee \underbrace{e^{-0{,}2x} = 0}_{\text{equação impossível}} \right) \wedge x \in [0, 35] \Leftrightarrow x = 6$

x	0		6		35
$v'(x)$	+	+	0	−	−
v	$v(0)$	↗	$v(6)$	↘	$v(35)$

Para atingir o lucro máximo, deve ser vendida a produção de 600 litros de vinho.

32.1. $L(0) = (2 \times 0 - 3)e^0 = -3$

O prejuízo é de 30 000 €.

32.2. $L(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2x-3)\underbrace{e^{-0{,}1x}}_{+} \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1{,}5$

Não há prejuízo para uma produção não inferior a 1500 litros.

Assim, a produção mínima para que não haja prejuízo é de 1500 L.

32.3. $L'(x) = \left((2x-3)e^{-0{,}1x}\right)' =$

$= (2x-3)' \times e^{-0{,}1x} + (2x-3) \times \left(e^{-0{,}1x}\right)'$

$= 2 \times e^{-0{,}1x} + (2x-3) \times \left(-0{,}1e^{-0{,}1x}\right)$

$= e^{-0{,}1x}\left(2 + (2x-3) \times (-0{,}1)\right)$

$= e^{-0{,}1x}(2{,}3 - 0{,}2x)$

$L'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}1x}(2{,}3 - 0{,}2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2{,}3 - 0{,}2x = 0 \Leftrightarrow x = 11{,}5$

x	0		11,5		25
$L'(x)$		+	0	−	
L		↗	$L(11{,}5)$	↘	

$L(11{,}5) = 20e^{-1{,}15} \approx 6{,}3327$

Para obter lucro máximo devem ser produzidos mensalmente 11 500 L de tinta.

O lucro máximo é de 63 327 euros.

$L'(p) = 0 \Leftrightarrow 5000e^{-0{,}15p}(-0{,}15p + 1{,}9) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0{,}15p} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee -0{,}15p + 1{,}9 = 0 \Leftrightarrow p \approx 12{,}67$

p	0		12,67	+∞
$L'(p)$		+	0	−
L		↗	$L(12{,}67)$	↘

Para que o lucro mensal seja máximo, o preço por litro deve ser, aproximadamente, 12,67 euros.

Página 93 – Pratica

33.1. $A\left(x, f\left(x\right)\right)$

$f\left(x\right) = x^2 - \mathrm{e}^x$

t: tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*.

$m_t = f'\left(x\right)$

$f'\left(x\right) = \left(x^2 - \mathrm{e}^x\right)' = 2x - \mathrm{e}^x$

Seja *d* a função que a x, abcissa de *A*, faz corresponder o declive da reta *t*. Assim,

$d\left(x\right) = 2x - \mathrm{e}^x$.

Pretende-se estudar os extremos da função *d*.

$d'\left(x\right) = \left(2x - \mathrm{e}^x\right)' = 2 - \mathrm{e}^x$

$d'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 2 - \mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$d'(x)$	+	0	−
d	↗	$d(\ln 2)$	↘

Donde se conclui que a abcissa do ponto *A* é $\ln 2$.

33.2. Na alínea anterior obteve-se $\ln 2$ para abcissa do ponto *A*. Então, o declive da reta *t* é dado por $f'(\ln 2)$.

$f'\left(x\right) = 2x - \mathrm{e}^x$, logo $f'\left(\ln 2\right) = 2\ln 2 - \mathrm{e}^{\ln 2} = \ln 4 - 2$

34.1. a) $f'\left(x\right) = \left(-\ln x\right)' = -\frac{1}{x}$

$m_{AB} = f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\mathrm{e}$

AB: $y = -\mathrm{e}x + b$

$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\left(-1\right) = 1 \rightarrow P\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, 1\right)$

Como *P* pertence à reta *AB*, tem-se:

$1 = -\mathrm{e} \times \frac{1}{\mathrm{e}} + b \Leftrightarrow b = 2$

AB: $y = -\mathrm{e}x + 2$

b) $B\left(0, 2\right)$ e $A\left(x, 0\right)$, tal que $-\mathrm{e}x + 2 = 0$

$-\mathrm{e}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\mathrm{e}}$; $A\left(\frac{2}{\mathrm{e}}, 0\right)$

34.2. $A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\frac{2}{\mathrm{e}} \times 2}{2} = \frac{2}{\mathrm{e}}$

35.1. $g'\left(x\right) = \left(0{,}5x\left(1 - \ln x\right)^2\right)' =$

$= \left(0{,}5x\right)' \times \left(1 - \ln x\right)^2 + 0{,}5x \times \left[\left(1 - \ln x\right)^2\right]'$

$= 0{,}5\left(1 - \ln x\right)^2 + 0{,}5x \times 2\left(1 - \ln x\right) \times \left(1 - \ln x\right)'$

$= 0{,}5\left(1 - \ln x\right)^2 + 0{,}5\cancel{x} \times 2\left(1 - \ln x\right) \times \left(-\frac{1}{\cancel{x}}\right)$

$= 0{,}5\left(1 - \ln x\right)\left(1 - \ln x - 2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \ln x\right)\left(-\left(1 + \ln x\right)\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(1 - \ln x\right)\left(1 + \ln x\right)$

35.2. $g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(1 - \ln x\right)\left(1 + \ln x\right) = 0 \wedge x \in \left]0, 1\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1 - \ln x = 0 \vee 1 + \ln x = 0\right) \wedge x \in \left]0, 1\right[$

$\Leftrightarrow \left(\ln x = 1 \vee \ln x = -1\right) \wedge x \in \left]0, 1\right[$

$\Leftrightarrow \left(x = \mathrm{e} \vee x = \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \wedge x \in \left]0, 1\right[\Leftrightarrow x = \frac{1}{\mathrm{e}}$

x	**0**		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		**1**
$g'(x)$		+	0	−	
g		↗	$g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$	↘	

A área do triângulo [*AOB*] é máxima quando $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Nesse caso, $P\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)$.

$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$

Então, $P\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, -1\right)$.

Página 94

36.1. $f'\left(x\right) = \left(x\ln x\right)' = \underbrace{\left(x\right)'}_{1} \times \ln x + x \times \left(\ln x\right)' =$

$= \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$D_{f'} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge x > 0\right\} = \mathbb{R}^+$

36.2. $f''\left(x\right) = \left(f'\left(x\right)\right)' = \left(\ln x + 1\right)' = \frac{1}{x}$

$D_{f''} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_{f'} \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R}^+$

37.1. $g(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 + 5$

$g'(x) = \left(\frac{x^3}{2} - 3x^2 + 5\right)' = \frac{3x^2}{2} - 6x$

$g''(x) = (g'(x))' = \left(\frac{3x^2}{2} - 6x\right)' = 3x - 6$

37.2. $g(x) = \frac{1}{x} + 2\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$g'(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = -\frac{1}{x^2} + 2 \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} =$

$= -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{-1+2x}{x^2}$

$g''(x) = (g'(x)) = \left(\frac{-1+2x}{x^2}\right)'$

$= \frac{(-1+2x)' \times x^2 - (-1+2x) \times (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x^2 - (-1+2x) \times 2x}{x^4}$

$= \frac{x(2x - (-1+2x) \times 2)}{x^4} = \frac{2-2x}{x^3}$

37.3. $g(x) = \frac{\ln x}{e^x}$

$g'(x) = \left(\frac{\ln x}{e^x}\right)' = \frac{(\ln x)' \times e^x - \ln x \times (e^x)'}{(e^x)^2} =$

$= \frac{\frac{1}{x} \times e^x - \ln x \times e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)}{e^{2x}} =$

$= \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x} = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}$

$g''(x) = (g'(x))' = \left(\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}\right)' =$

$= \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)' \times e^{-x} + \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) \times (e^{-x})$

$= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) \times (-e^{-x})$

$= e^{-x}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \ln x\right)$

$= e^{-x}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \ln x\right)$

37.4. $g(x) = \ln(1+e^x)$

$g'(x) = (\ln(1+e^x))' = \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x}$

$g''(x) = (g'(x)) = \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)' =$

$= \frac{(e^x)' \times (1+e^x) - e^x \times (1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2}$

$= \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

37.5. $g(x) = 3^x - x^3$

$g'(x) = (3^x - x^3)' = 3^x \times \ln 3 - 3x^2$

$g''(x) = (g'(x))' = (3^x \times \ln 3 - 3x^2)' = (3^x \times \ln 3) \times \ln 3 - 6x =$

$= 3^x \ln^2 3 - 6x$

37.6. $g(x) = \sin(2x)$

$g'(x) = (\sin(2x))' = (2x)'\cos(2x) = 2\cos(2x)$

$g''(x) = (g'(x))' = (2\cos(2x))' = 2(-(2x)'\sin(2x)) =$

$= -4\sin(2x)$

37.7. $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$g'(x) = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = -\left(\frac{x}{2}\right)'\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$g''(x) = (g'(x))' = \left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{x}{2}\right)'\cos\left(\frac{x}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

37.8. $g(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

$g'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)' = \frac{(e^{-x})' \times x - e^{-x} \times (x)'}{x^2} =$

$= \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$

$g''(x) = (g'(x))' = \left(\frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}\right)' =$

$= \frac{(e^{-x}(-x-1))' \times x^2 - e^{-x}(-x-1) \times (x^2)'}{(x^2)^2}$

$= \frac{(-e^{-x}(-x-1) + e^{-x}(-1))x^2 - e^{-x}(-x-1) \times (2x)}{x^4}$

$= \frac{e^{-x}((x+1-1)x - (-2x-2))}{x^3} = \frac{e^{-x}(x^2+2x+2)}{x^3}$

37.9. $g(x) = e^x \sin x$

$g'(x) = (e^x \sin x)' = (e^x)' \times \sin x + e^x \times (\sin x)' =$

$= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

$$g''(x)=\left(g'(x)\right)'=\left(e^x\left(\sin x+\cos x\right)\right)'=$$
$$=\left(e^x\right)'\times\left(\sin x+\cos x\right)+e^x\times\left(\sin x+\cos x\right)'$$
$$=e^x\left(\sin x+\cos x\right)+e^x\times\left(\cos x-\sin x\right)$$
$$=e^x\left(\sin x+\cos x+\cos x-\sin x\right)$$
$$=e^x\left(2\cos x\right)$$
$$=2\cos(x)e^x$$

37.10. $g(x)=2^{x-1}x$

$$g'(x)=\left(2^{x-1}x\right)'=\left(2^{x-1}\right)'\times x+2^{x-1}\times(x)'=$$
$$=2^{x-1}\ln 2\times x+2^{x-1}\times 1=2^{x-1}\left(\ln 2\times x+1\right)$$

$$g''(x)=\left(g'(x)\right)'=\left(2^{x-1}\left(\ln 2\times x+1\right)\right)'=$$
$$=\left(2^{x-1}\right)'\times\left(\ln 2\times x+1\right)+2^{x-1}\times\left(\ln 2\times x+1\right)'$$
$$=2^{x-1}\ln 2\times\left(\ln 2\times x+1\right)+2^{x-1}\times\ln 2$$
$$=2^{x-1}\ln 2\left(\ln 2\times x+1+1\right)$$
$$=2^{x-1}\ln 2\left(x\ln 2+2\right)$$

Página 95 – Tarefa 3

1.1. a) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x+1\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{(x)'\times(x+1)-x\times(x+1)}{(x+1)^2}=$$
$$=\frac{\times+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$D_{f'}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_f\wedge(x+1)^2\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)'=\left((x+1)^{-2}\right)'=$$
$$=-2(x+1)^{-3}\times\underbrace{(x+1)'}_{1}=-2(x+1)^{-3}=\frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$D_{f''}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_{f'}\wedge(x+1)^3\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$$

Então, $f''(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^3}$, se $x\neq -1$.

b) $g(x)=x(x+\ln x)$

$$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\right\}=\mathbb{R}^+$$

$$g'(x)=\left(x(x+\ln x)\right)'=(x)'\times(x+\ln x)+x\times(x+\ln x)'$$
$$=1(x+\ln x)+x\left(1+\frac{1}{x}\right)=x+\ln x+x+1=\ln x+2x+1$$

$$D_{g'}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_g\wedge x>0\right\}=\mathbb{R}^+$$

$$g''(x)=\left(g'(x)\right)'=\left(\ln x+2x+1\right)'=\frac{1}{x}+2=\frac{2x+1}{x}$$

$$D_{g''}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_{g'}\wedge x\neq 0\right\}=\mathbb{R}^+$$

Então, $g''(x)=\dfrac{2x+1}{x}$, se $x>0$.

c) $h(x)=\tan x$

$$D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$h'(x)=(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$D_{h'}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_h\wedge\cos^2 x\neq 0\right\}=D_h$$

$$h''(x)=\left(h'(x)\right)'=\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)'=\left(\cos^{-2}x\right)'=$$
$$=-2\cos^{-3}x\times\underbrace{(\cos x)'}_{-\sin x}=2\sin x\cos^{-3}x$$
$$=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$D_{h''}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_{h'}\wedge\cos^3 x\neq 0\right\}=D_h$$

Então, $h''(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$, se

$$x\in\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

1.2. $g''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x+1}{x}=0\wedge x>0\Leftrightarrow 2x+1=0\wedge x>0$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\wedge x>0\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Conclusão: A função g' não tem zeros.

2.1. $f(x)=x^4-8x^2$

$$D_f=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=\left(x^4-8x^2\right)'=4x^3-16x$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-16x=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 4x=0\vee x^2-4=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2\vee x=-2$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$4x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$

Assim, conclui-se que $x_0=-2$ e $x_1=2$.

2.2. $f''(x)=(f'(x))'=(4x^3-16x)'=12x^2-16$

$f''(x_0)=f''(-2)=12\times(-2)^2-16=32$

$f''(x_1)=f''(2)=12\times 2^2-16=32$

$f''(x_0)=f''(x_1)=32$

3.1. O ponto A pertence à reta r, definida pele equação $y=x+3$, e tem abcissa 2.

Então, $y_A=2+3=5$

A opção correta é a **(C)**.

3.2. $g''(2)=(g'(2))'=m_r=1$

A opção correta é a **(D)**.

Página 96

38.1. Por observação gráfica, sabe-se que $f''(a)<0$.

Então, o sinal de $f''(a)$ é negativo.

38.2. Por observação gráfica, sabe-se que $f'(b)<0$.

Então, o sinal de $f'(b)$ é negativo.

38.3. Por observação gráfica, sabe-se que $f''(c)>0$.

Então, o sinal de $f''(c)$ é positivo.

38.4. Como $f''(a)<0$ e $f'(b)<0$, então

$f''(a)\times f'(b)>0$.

Então, o sinal de $f''(a)\times f'(b)$ é positivo.

Página 97

39.1. $f'(x)=\left(\frac{x^4}{2}-3x^2+3\right)'=\frac{4x^3}{2}-6x=2x^3-6x$

$f''(x)=(f'(x))'=(2x^3-6x)'=6x^2-6$

39.2. $f''(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1\vee x=-1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
f	∪	$\frac{1}{2}$	∩	$\frac{1}{2}$	∪

$f(-1)=\frac{(-1)^4}{2}+-3(-1)^2+3=\frac{1}{2}$

$f(1)=\frac{1}{2}$

Pontos de inflexão: $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ e $B\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

Página 98

40.1. $f(x)=0{,}25(x-1)^4-8x \qquad D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(0{,}25(x-1)^4-8x\right)'=0{,}25\times 4(x-1)^3\times\underbrace{(x-1)'}_{1}-8$

$=(x-1)^3-8$

40.2. $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^3-8=0\Leftrightarrow(x-1)^3=8\Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{8}$

$\Leftrightarrow x-1=2\Leftrightarrow x=3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
f	↘	$f(3)$	↗

$f(3)=0{,}25(3-1)^4-8\times 3=-20$

A função é decrescente em $]-\infty,3[$ e crescente $]3,+\infty[$.

A função tem um mínimo igual a -20.

40.3. $f''(x)=(f'(x))'=\left((x-1)^3-8\right)'=3(x-1)^2\times\underbrace{(x-1)'}_{1}-0$

$=3(x-1)^2$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 3(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	+
f	∪	-8	∪

O gráfico de f não tem pontos de inflexão.

41.1. $D_f=\mathbb{R}^+$ e $f(x)=2x^2+\ln x$

$f'(x)=(2x^2+\ln x)'=4x+\frac{1}{x}$

$f''(x)=(f'(x))'=\left(4x+\frac{1}{x}\right)'=4-\frac{1}{x^2}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 4-\frac{1}{x^2}=0\wedge x>0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x=\frac{1}{2}\vee x=-\frac{1}{2}\right)\wedge x>0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

x	**0**		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
f		$\cap$	$\frac{1}{2}-\ln 2$	$\cup$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{4}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln 2$

O gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ e voltada para cima em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

O gráfico de *f* tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\ln 2\right)$.

41.2. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ e $f(x)=\frac{x}{x-1}$

$f'(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)'=\frac{(x)'\times(x-1)-x\times(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$

$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)'=\left(-(x-1)^{-2}\right)'=$

$=2(x-1)^{-3}\times\underbrace{(x-1)'}_{1}=2(x-1)^{-3}=\frac{2}{(x-1)^3}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{2}{(x-1)^3}=0\Leftrightarrow\underbrace{2=0}_{\text{Impossível}}\wedge x\neq 1$

x	$-\infty$	**1**	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
f	$\cap$		$\cup$

O gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,1[$ e voltada para cima em $]1,+\infty[$

O gráfico de *f* não tem pontos de inflexão.

41.3. $D_f=]-1,+\infty[$ e $f(x)=\ln(x+1)-x$

$f'(x)=\left(\ln(x+1)-x\right)'=\frac{(x+1)'}{x+1}-1=\frac{1}{x+1}-1$

$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{1}{x+1}-1\right)'=\frac{0(x+1)-1\times 1}{(x-1)^2}-0=$

$=\frac{-1}{(x-1)^2}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-1}{(x-1)^2}=0\wedge x>-1\Leftrightarrow\underbrace{-1=0}_{\text{Impossível}}\wedge x>-1$

x	-1	$+\infty$
$f''(x)$		$-$
f		$\cap$

O gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $]-1,+\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

41.4. $D_f=\mathbb{R}$ e $f(x)=e^{1-x^2}$

$f'(x)=\left(e^{1-x^2}\right)'=\left(1-x^2\right)'e^{1-x^2}=-2xe^{1-x^2}$

$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(-2xe^{1-x^2}\right)'=$

$=(-2x)'\times e^{1-x^2}+(-2x)\times\left(e^{1-x^2}\right)'$

$=-2e^{1-x^2}+(-2x)\left(-2xe^{1-x^2}\right)$

$=-2e^{1-x^2}+4x^2e^{1-x^2}$

$=e^{1-x^2}\left(-2+4x^2\right)$

$f''(x)=0\Leftrightarrow e^{1-x^2}\left(-2+4x^2\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\underbrace{e^{1-x^2}=0}_{\text{equação impossível}}\vee -2+4x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}\vee x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$\sqrt{e}$	$\cap$	$\sqrt{e}$	$\cup$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{1-\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{e}$

O gráfico de *f* tem concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ e em $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ e concavidade voltada para baixo em $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

O gráfico de *f* tem dois pontos de inflexão de coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$

Página 99 – Tarefa 4

1.1. I – f ; II – f'

1.2.

x	0,7	–1	1,9
$f''(x)$	+	–	–

2.1. a) A função h não é a segunda derivada da função m porque $m''(x_1)>0$ e $h(x_1)<0$.

b) A função g não é a segunda derivada da função h porque $h''(x_2)>0$ e $g(x_2)>0$.

2.2. a) $m'=h$

b) $g'=m$

c) $g''=h$

3.1. $D_f=\mathbb{R}$ e $f(x)=x^4-2x^3+3x-2$

$f'(x)=\left(x^4-2x^3+3x-2\right)'=4x^3-6x^2+3$

$f''(x)=\left(4x^3-6x^2+3\right)'=12x^2-12x$

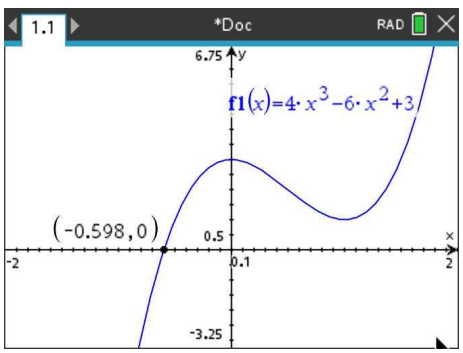
$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-12x=0 \Leftrightarrow 12x(x-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
f	$\cup$	–2	$\cap$	0	$\cup$

$f(0)=-2$; $f(1)=1-2+3-2=0$

Como A e B são os pontos de inflexão do gráfico de f e $x_A>x_B$, então $A(1,0)$ e $B(0,-2)$.

3.2. $t \parallel Ox$, logo $m_t=0$. Como t é tangente ao gráfico de f no ponto C e $m_t=0$, sabe-se que nesse ponto $f'(x)=0$. Pretende-se resolver graficamente a equação $f'(x)=0$, ou seja, $4x^3-6x^2+3=0$. Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $x_C \approx -0{,}598$.

$f(-0{,}598)=(-0{,}598)^4-2(-0{,}598)^3+3(-0{,}598)-2$
$\approx -3{,}238$

Assim, as coordenadas do ponto C, com arredondamento às centésimas, são $(-0{,}6;-3{,}2)$.

Página 100 – Pratica

42.1. $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x)=\left(x^3-\frac{1}{x}\right)'=3x^2-\frac{0\times x-1\times 1}{x^2}=3x^2+\frac{1}{x^2}$

$D_{f'}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge x^2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f''(x)=\left(3x^2+\frac{1}{x^2}\right)'=6x+\frac{0\times x^2-1\times 2x}{x^4}=6x-\frac{2}{x^3}$

$D_{f''}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_{f'} \wedge x^3\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

42.2. $f(x)=\frac{x^4}{2}-3x^2+1$; $D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(\frac{x^4}{2}-3x^2+1\right)'=2x^3-6x$; $D_{f'}=\mathbb{R}$

$f''(x)=\left(2x^3-6x\right)'=6x^2-6$; $D_{f''}=\mathbb{R}$

42.3. $f(x)=x^2-\sin(2x)$; $D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(x^2-\sin(2x)\right)'=2x-2\cos(2x)$; $D_{f'}=\mathbb{R}$

$f''(x)=\left(2x-2\cos(2x)\right)'$; $D_{f''}=\mathbb{R}$
$=2-2\left(-2\sin(2x)\right)=2+4\sin(2x)$

42.4. $f(x)=\frac{1}{x}-\log_3 x$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0 \wedge x>0\}=\mathbb{R}^+$

$f'(x)=\left(\frac{1}{x}-\log_3 x\right)'=\frac{0\times x-1\times 1}{x^2}-\frac{1}{x\ln 3}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\ln 3}$

$D_{f'}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge x\neq 0\}=\mathbb{R}^+$

$f''(x)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\ln 3}\right)'=$

$=-\frac{0\times x^2-1\times 2x}{x^4}-\frac{0\times x\ln 3-1\times\ln 3}{(x\ln 3)^2}$

$=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2\ln 3}$

$D_{f''}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_{f'} \wedge x\neq 0\}=\mathbb{R}^+$

42.5. $f(x)=\ln\left(x\mathrm{e}^{x}\right)$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{+}>0\right\}=\mathbb{R}^{+}$

$f'(x)=\left(\ln\left(x\mathrm{e}^{x}\right)\right)'=\dfrac{\left(x\mathrm{e}^{x}\right)'}{x\mathrm{e}^{x}}=\dfrac{(x)'\times\mathrm{e}^{x}+x\times\left(\mathrm{e}^{x}\right)'}{x\mathrm{e}^{x}}=$

$=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{x}}{x\mathrm{e}^{x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}(1+x)}{x\mathrm{e}^{x}}=\dfrac{1+x}{x}$

$D_{f'}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_f\ \wedge\ x\neq 0\right\}=\mathbb{R}^{+}$

$f''(x)=\left(\dfrac{1+x}{x}\right)'=\dfrac{1\times x-(1+x)\times 1}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}$

$D_{f''}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_{f'}\ \wedge\ x^2\neq 0\right\}=\mathbb{R}^{+}$

42.6. $f(x)=\mathrm{e}^{x}\ln x$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\right\}=\mathbb{R}^{+}$

$f'(x)=\left(\mathrm{e}^{x}\ln x\right)'=\left(\mathrm{e}^{x}\right)'\times\ln x+\mathrm{e}^{x}\times(\ln x)'$

$=\mathrm{e}^{x}\ln x+\mathrm{e}^{x}\times\dfrac{1}{x}=\mathrm{e}^{x}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

$D_{f'}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_f\ \wedge\ x\neq 0\right\}=\mathbb{R}^{+}$

$f''(x)=\left(\mathrm{e}^{x}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)\right)'$

$=\left(\mathrm{e}^{x}\right)'\times\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+\mathrm{e}^{x}\times\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)'$

$=\mathrm{e}^{x}\times\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+\mathrm{e}^{x}\times\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\mathrm{e}^{x}\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$D_{f''}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_{f'}\ \wedge\ x\neq 0\right\}=\mathbb{R}^{+}$

43.1. $f(x)=\mathrm{e}^{2-x}$; $D_f=\mathbb{R}$

t: $y=-x+3\rightarrow$ reta tangente ao gráfico de f no ponto A de ordenada 1.

$A(x,1)\in t$, logo tem-se:

$1=-x+3\Leftrightarrow x=2$

Assim, $A(2,1)$.

43.2. $f'(x)=\left(\mathrm{e}^{2-x}\right)'=(2-x)'\mathrm{e}^{2-x}=-\mathrm{e}^{2-x}$

$f''(x)=\left(-\mathrm{e}^{2-x}\right)'=-\left(-\mathrm{e}^{2-x}\right)=\mathrm{e}^{2-x}$

Então, $f'(x)+f''(x)=-\mathrm{e}^{2-x}+\mathrm{e}^{2-x}=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

44. $f(x)=ax^3-bx^2+3$, $a,b\in\mathbb{R}$

$y=3x+4$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

44.1. $A(-1,y)$

$y_A=3\times(-1)+4=1$ pois A pertence à reta.

Assim, tem-se que $f(-1)=1$.

$f'(-1)=3$ (declive da reta tangente no ponto de abcissa -1).

$f'(x)=\left(ax^3-bx^2+3\right)'=3ax^2-2bx$

$\begin{cases}f(-1)=1\\f'(-1)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a-b+3=1\\3a+2b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\6-3b+2b=3\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{———}\\-b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$

$a=-1$ e $b=3$

44.2. Sendo $a=-1$ e $b=3$, então $f(x)=-x^3-3x^2+3$ e $f'(x)=-3x^2-6x$.

$f''(x)=\left(-3x^2-6x\right)'=-6x-6$

$f''(-2)=-6\times(-2)-6=6$

Página 101 – Pratica

45.1. $f(x)=-\dfrac{x^3}{2}+x^2+2x+1$; $D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(-\dfrac{x^3}{2}+x^2+2x+1\right)'=-\dfrac{3x^2}{2}+2x+2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow-\dfrac{3x^2}{2}+2x+2=0\Leftrightarrow-3x^2+4x+4=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+48}}{-6}\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}\vee x=2$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$f\left(-\frac{2}{3}\right)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$

$f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{7}{27}$; $f(2)=5$

f é decrescente em $\left]-\infty,-\dfrac{2}{3}\right[$ e em $]2,+\infty[$.

f é crescente em $\left]-\dfrac{2}{3},2\right[$.

Extremos: Mínimo $\dfrac{7}{27}$ e máximo 5

$A(2,5)$ e $B\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{7}{27}\right)$

45.2. $f''(x)=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{3x^2}{2}+2x+2\right)'=-3x+2$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -3x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	–
f	$\cup$	$\frac{71}{27}$	$\cap$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{71}{27}$

O gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$ e concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[$.

Como *C* é o ponto de inflexão do gráfico de *f*, então $C\left(\frac{2}{3},\frac{71}{27}\right)$.

46.1. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-4x\ln x$; $D_f=\mathbb{R}^+$

$f'(x)=\left(\frac{2}{3}x^3-4x\ln x\right)'=2x^2-\left(4\ln x+4x\times\frac{1}{x}\right)=$

$=2x^2-4\ln x-4$

$f''(x)=4x-\frac{4}{x}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4x-\frac{4}{x}=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2-4=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow x^2=1 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=1 \vee x=-1) \wedge x>0 \Leftrightarrow x=1$

x	**0**		**1**	$+\infty$
$f''(x)$		–	0	+
f		$\cap$	$\frac{2}{3}$	$\cup$

$f(1)=\frac{2}{3}-4\ln 1=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$

O gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $]0,1[$ e concavidade voltada para cima em $]1,+\infty[$.

Ponto de inflexão: $\left(1,\frac{2}{3}\right)$

46.2. $f(x)=ex^2-\frac{e^{2x}}{2}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(ex^2-\frac{e^{2x}}{2}\right)'=2ex-e^{2x}$

$f''(x)=\left(2ex-e^{2x}\right)'=2e-2e^{2x}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e-2e^{2x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}=e \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	–
f	$\cup$	$\frac{e}{4}$	$\cap$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}e=-\frac{e}{4}$

O gráfico de *f* tem concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ e voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Ponto de inflexão: $\left(\frac{1}{2},-\frac{e}{4}\right)$

46.3. $f(x)=xe^{-x}$

$D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(xe^{-x}\right)'=(x)'\times e^{-x}+x\times\left(e^{-x}\right)'=$

$=1\times e^{-x}+x\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

$f''(x)=\left(e^{-x}(1-x)\right)'=\left(e^{-x}\right)'\times(1-x)+e^{-x}\times(1-x)'=$

$=-e^{-x}(1-x)+e^{-x}\times(-1)=$

$=e^{-x}(-1+x-1)=e^{-x}(x-2)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{equação impossível}} \vee x-2=0$

$\Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	**2**	$+\infty$
$f''(x)$	–	0	+
f	$\cap$	$\frac{2}{e^2}$	$\cup$

O gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,2[$ e voltada para cima em $]2,+\infty[$

Ponto de inflexão: $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$

47.1. $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-\frac{x}{2}$; $D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(\ln\left(x^2+1\right)-\frac{x}{2}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}-\frac{1}{2}=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\right)'=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}-0=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow -2x^2+2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1\vee x=-1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	$f(-1)$	$\cup$	$f(1)$	$\cap$

$f(-1)=\ln 2+\frac{1}{2}$; $f(1)=\ln 2-\frac{1}{2}$

A e *B* são pontos de inflexão do gráfico de *f*.

Logo, $A\left(1,\ln 2-\frac{1}{2}\right)$ e $B\left(-1,\ln 2+\frac{1}{2}\right)$.

m: declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *B*.

$$m=f'(-1)=\frac{-2}{1+1}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

47.2. $A\left(1,\ln 2-\frac{1}{2}\right)$

$$y_A=\ln 2-\frac{1}{2}=\ln 2-\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\ln 2-\ln\left(\sqrt{e}\right)=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$$

48. $f(x)=\frac{2}{x^2+1}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

A e *B* são pontos de inflexão do gráfico de *f*

$$f'(x)=\left(\frac{2}{x^2+1}\right)'=\frac{0\times\left(x^2+1\right)-2(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)'$$

$$=\frac{-4\left(x^2+1\right)^2-(-4x)\left(2\left(x^2+1\right)(2x)\right)}{\left(\left(x^2+1\right)^2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+1\right)\left[-4\left(x^2+1\right)-(-4x)(4x)\right]}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$=\frac{-4x^2-4+16x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{12x^2-4}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{12x^2-4}{\left(x^2+1\right)^3}=0\Leftrightarrow 12x^2-4=0\wedge x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}\vee x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$\frac{3}{2}$	$\cap$	$\frac{3}{2}$	$\cup$

$f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3}{2}$; $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3}{2}$

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{2}\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$ e

$D\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$.

$$A_{[ABCD]}=\overline{CD}\times\overline{AD}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{3}{2}=\sqrt{3}$$

Página 102 – Consolida

1.

- $\left(2x+e^x\right)'=2+e^x$
- $\left(\frac{e^x}{x}+x\right)'=\frac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}+1=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+1$
- $\left(x^2e^x\right)'=2xe^x+x^2e^x=e^x\left(2x+x^2\right)$
- $\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)'=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{-1-x}{x^2}$
- $\left(\frac{\ln x}{2x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\times 2x-\ln x\times 2}{(2x)^2}=\frac{2-2\ln x}{4x^2}=\frac{1-\ln x}{2x^2}$
- $\left(x\ln x+x^3\right)'=1\ln x+x\times\frac{1}{x}+3x^2=\ln x+1+3x^2$
- $\left(x-2^x\right)'=1-2^x\ln 2$
- $\left(\frac{x+1}{2^x}\right)'=\frac{1\times 2^x-(x+1)\times 2^4\ln 2}{\left(2^x\right)^2}=\frac{1-(x+1)\ln 2}{2^x}$
- $\left(x^2-\log_3 x\right)'=2x-\frac{1}{x\ln 3}$
- $\left(x^2\log_2 x\right)'=2x\log_2 x+x^2\times\frac{1}{x\ln 2}=2x\log_2 x+\frac{x}{\ln 2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x)=2x+e^x$	$f'(x)=2+e^x$
$f(x)=\frac{e^x}{x}+x$	$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+1$
$f(x)=x^2e^x$	$f'(x)=e^x(2x+x^2)$
$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$	$f'(x)=\frac{-1-x}{x^2}$
$f(x)=\frac{\ln x}{2x}$	$f'(x)=\frac{1-\ln x}{2x^2}$
$f(x)=x\ln x+x^3$	$f'(x)=\ln x+1+3x^2$
$f(x)=x-2^x$	$f'(x)=1-2^x\ln 2$
$f(x)=\frac{x+1}{2^x}$	$f'(x)=\frac{1-(x+1)\ln 2}{2^x}$
$f(x)=x^2-\log_3 x$	$f'(x)=2x-\frac{1}{x\ln 3}$
$f(x)=x^2\log_2 4$	$f'(x)=2x\log_2 x+\frac{x}{\ln 2}$

2. $f(x)=x-e^x$ e $g(x)=x+\ln x$

$f'(x)=(x-e^x)'=1-e^x$ e $g'(x)=(x+\ln x)'=1+\frac{1}{x}$

2.1. $(f\times g)'(1)=f'(1)\times g(1)+f(1)\times g'(1)=$

$=(1-e)\times 1+(1-e)\times 2=1-e+2-2e=3-3e$

2.2. $(f-g)'(1)=f'(1)-g'(1)=(1-e)-2=-e-1$

2.3. $\left(\frac{g}{f}\right)'(1)=\frac{g'(1)\times f(1)-g(1)\times f'(1)}{(f(1))^2}=$

$=\frac{2\times(1-e)-1\times(1-e)}{(1-e)^2}=\frac{1}{1-e}$

3. **(A)** $f'(x)=(x+\sin x)'=1+\cos x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+0=1$

(B) $f'(x)=(x\cos x)'=1\times\cos x+x\times(-\sin x)$

$=\cos x-x\sin x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-\frac{\pi}{2}\times 1=-\frac{\pi}{2}$

(C) $f'(x)=(x-\cos x)'=1-(-\sin x)=1+\sin x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+1=2$

(D) $f'(x)=(x\sin x)'=1\times\sin x+x\times\cos x$

$=\sin x+x\cos x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\frac{\pi}{2}\times 0=1$

A opção correta é a **(B)**.

4. $D_f=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; $f(x)=\tan x$

4.1. $P\left(0,\underbrace{f(0)}_{0}\right)$

$f(0)=\tan 0=0$

$f'(x)=(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$m=f'(0)=\frac{1}{\cos^2 0}=\frac{1}{1^2}=1$

$y=x+b \overset{P(0,0)}{\rightarrow} 0=0+b\Leftrightarrow b=0$

$y=x$

4.2. $P\left(\frac{\pi}{4},\underbrace{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{1}\right)$ $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$m=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{2}{4}}=2$

$y=2x+b \overset{P\left(\frac{\pi}{4},1\right)}{\rightarrow} 1=2\times\frac{\pi}{4}+b\Leftrightarrow 1-\frac{\pi}{2}=b$

$y=2x+1-\frac{\pi}{2}$

5. $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ e $h(x)=2-x$

$f'(x)=2x$, $g'(x)=3$ e $h(x)=-1$

5.1. a) $(g\circ f)'(1)=g'(f(1)\times f'(1))=6$

Cálculo auxiliar:

$f(1)=1^2=1$ e $f'(1)=2\times 1=2$

$g'(f(1))\times f'(1)=g'(1)\times 2=3\times 2=6$

b) $(f\circ h)'(7)=f'\big(h(7)\times h'(7)\big)=10$

Cálculo auxiliar:

$h(7)=2-7=-5$ e $h'(7)=-1$

$f'\big(h(7)\big)\times h'(7)=f'(-5)\times(-1)=-10\times(-1)=10$

5.2. a) $(h\circ g)'(0)=h'\big(g(0)\big)\times g'(0)=h'(0)\times 3=$
$=-1\times 3=-3$

b) $(f\circ g)'(-2)=f'\big(g(-2)\big)\times g'(-2)=f'(-6)\times 3=$
$=-12\times 3=-36$

6. r: reta tangente ao gráfico de g no ponto A de abcissa 1

$r:\ y=-\frac{1}{2}x+3 \qquad A(1,\,y_A)$

Como $A\in r$, então $y_A=-\frac{1}{2}\times 1+3=\frac{5}{2}$.

$A\left(1,\frac{5}{2}\right)$ pertence ao gráfico de g, logo $g(1)=\frac{5}{2}$.

$m_r=-\frac{1}{2}$, logo $g'(1)=-\frac{1}{2}$.

6.1. $f(x)=\mathrm{e}^x$; $f'(x)=\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x$

$(g\circ f)'(0)=g'\big(f(0)\big)\times f'(0)=g'(1)\times 1=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$

6.2. $f'(x)=0{,}2x$; $f'\left(\frac{5}{2}\right)=0{,}2\times\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

$(f\circ g)'(1)=f'\big(g(1)\big)\times g'(1)=f'\left(\frac{5}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

7.

- $\left[(2x+1)^3\right]'=3(2x+1)^2\times\underbrace{(2x+1)'}_{2}=6(2x+1)^2$
- $\left(\mathrm{e}^{x^2+1}\right)'=\left(x^2+1\right)'\mathrm{e}^{x^2+1}=2x\mathrm{e}^{x^2+1}$
- $\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\times\underbrace{\left(x^2+1\right)'}_{2x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\left(\ln\left(\mathrm{e}^{2x+3}+1\right)\right)'=\frac{\left(\mathrm{e}^{2x+3}+1\right)'}{\mathrm{e}^{2x+3}+1}=\frac{2\mathrm{e}^{2x+3}}{\mathrm{e}^{2x+3}+1}$
- $\big(\cos(\pi-3x)\big)'=-(\pi-3x)'\sin(\pi-3x)$
$=3\sin(\pi-3x)$

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x)=(2x+1)^3$	$6(2x+1)^2$
$f(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}$	$2x\mathrm{e}^{x^2+1}$
$f(x)=\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{2x+3}+1\right)$	$\frac{2\mathrm{e}^{2x+3}}{\mathrm{e}^{2x+3}+1}$
$f(x)=\cos(\pi-3x)$	$3\sin(\pi-3x)$

Página 103 – Consolida

8.1. Se $f(x)=\sqrt[3]{x}$, então $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Logo, $f'(2)=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

8.2. Se $f(x)=\ln\left(x^2\right)$, então

$f'(x)=\left(\ln\left(x^2\right)\right)'=\frac{\left(x^2\right)'}{x^2}=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$.

Logo, $f'(\mathrm{e})=\frac{2}{\mathrm{e}}$.

8.3. Se $f(x)=\frac{1}{\ln(x)}$, então $f'(x)=\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)=$

$=\frac{0\times\ln x-1\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=-\frac{1}{x\ln^2 x}$

Logo, $f'(\mathrm{e})=-\frac{1}{\mathrm{e}\ln^2\mathrm{e}}=-\frac{1}{\mathrm{e}\times 1^2}=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

8.4. Se $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$, então $f'(x)=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Logo, $f'(4)=-\frac{1}{2}\times 4^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{4^3}}=-\frac{1}{16}$.

8.5. Se $f(x)=\cos(2x)$, então $f'(x)=\big(\cos(2x)\big)'=-2\sin(2x)$.

Logo, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\pi=-2\times 0=0$.

9.1. r: tangente ao gráfico de f no ponto $A(0,3)$

$f(x)=-\frac{x^3}{2}+2x^2-x+3$

$f'(x)=\left(-\frac{x^3}{2}+2x^2-x+3\right)'=-\frac{3x^2}{2}+4x-1$

$m_r=f'(0)=-1$; r: $y=-x+3$

9.2. s: tangente ao gráfico de f no ponto B

$s\perp r$, logo $m_s=-\frac{1}{m_r}=1$

$f'(x)=1\Leftrightarrow -\frac{3x^2}{2}+4x-1=1\Leftrightarrow -3x^2+8x-4=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{64-48}}{-6}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\vee x=2$

Como a abcissa do ponto B é maior do que 1, então $x_B=2$. $f(2)=5$

Assim, $B(2,5)$.

10. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$f(x)=\frac{1}{x-2}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)'=\frac{0\times(x-2)-1\times 1}{(x-2)^2}=\frac{-1}{(x-2)^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f'(x)<0$

Assim, a afirmação é falsa pois todas as tangentes ao gráfico de f têm declive negativo, logo não podem ser perpendiculares já que o produto dos seus declives é positivo (não é igual a -1).

11.1. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2^{3-x}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}\Leftrightarrow 2^{3-x}=\left(2^{-2}\right)^{-x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{3-x}=2^{2x}\Leftrightarrow 3-x=2x\Leftrightarrow x=1$

$f(1)=2^2=4$. Então, $A(1,4)$.

11.2. $f'(x)=\left(2^{3-x}\right)'=-1\times 2^{3-x}\times\ln 2=-\ln 2\times 2^{3-x}$

$g'(x)=\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}\right)'=\left(4^x\right)'=4^x\times\ln 4$

Designando por r e s, respetivamente, as retas tangentes aos gráficos de f e g no ponto A, sabe-se que:

$m_r=f'(1)=-\ln 2\times 2^2=-4\ln 2$

$m_s=g'(1)=4\times\ln 4=4\ln 4$

$m_r+m_s=-4\ln 2+4\ln 4=4(\ln 4-\ln 2)=4\ln\left(\frac{4}{2}\right)=$

$=4\ln 2=\ln\left(2^4\right)=\ln 16$

12. $f(x)=-x^2+9$; $P(x,f(x))$, $x\in]0,3[$

Seja h a função que a x, abcissa de P, faz se corresponder a área do retângulo.

Então, $h(x)=x\times f(x)=x\left(-x^2+9\right)=-x^3+9x$, com $x\in]0,3[$.

$h'(x)=\left(-x^3+9x\right)'=-3x^2+9$

$h'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+9=0\wedge x\in]0,3[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=3\wedge x\in]0,3[$

$\Leftrightarrow\left(x=\sqrt{3}\vee x=-\sqrt{3}\right)\wedge x\in]0,3[$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$

x	0		$\sqrt{3}$		3
$h'(x)$		+	0	−	
h		↗	$6\left(\sqrt{3}\right)$	↘	

$h\left(\sqrt{3}\right)=-\left(\sqrt{3}\right)^3+9\sqrt{3}=-3\sqrt{3}+9\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

A área do retângulo é máxima quando $x=\sqrt{3}$, sendo as coordenadas do ponto P iguais a $\left(\sqrt{3},f\left(\sqrt{3}\right)\right)=\left(\sqrt{3},6\right)$.

Página 104 – Consolida

13.1. $f(x)=e^{2-x}-1$

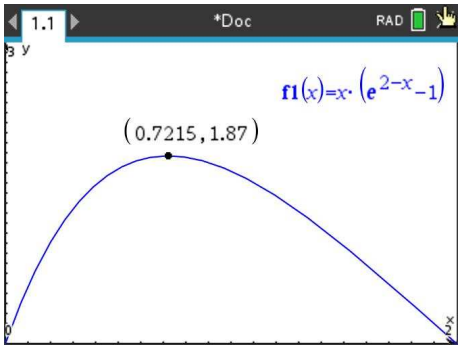
$P(x,f(x))$, $x\in]0,2[$

g: função que a x, abcissa de P, faz corresponder a área do retângulo.

$g(x)=x\times f(x)=x\left(e^{2-x}-1\right)$, com $x\in]0,2[$

Pretende-se determinar as coordenadas do ponto P para as quais a área do retângulo é máxima.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



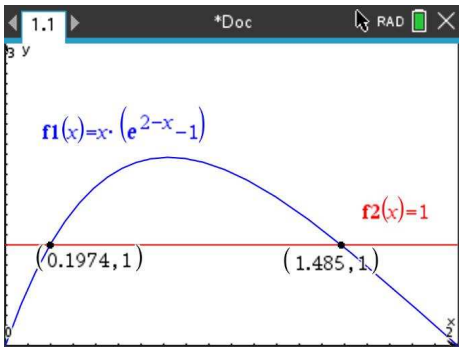
A função *g* atinge o valor máximo no ponto de abcissa $x \approx 0{,}7215$.

$f(0{,}7215) = e^{2-0{,}7215} - 1 \approx 2{,}5912$

Assim, as coordenadas do ponto *P*, arredondadas às décimas, são $(0{,}7;\ 2{,}6)$.

13.2. Pretende-se resolver graficamente a equação $g(x) = 1$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que as soluções da equação $g(x) = 1$, arredondadas às décimas, são 0,2 e 1,5.

No contexto apresentado, significa que a medida da área do triângulo é 1 quando o ponto *P* tem abcissa 0,2 ou 1,5.

14.1. $T(t) = \dfrac{20\ln t}{t},\ t \geq 1$

$$T'(t) = \left(\frac{20\ln t}{t}\right)' = \frac{\frac{20}{t} \times t - 20\ln t \times 1}{t^2} =$$

$$= \frac{20 - 20\ln t}{t^2} = \frac{20(1 - \ln t)}{t^2}$$

14.2. $T'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{20(1-\ln t)}{t^2} = 0 \wedge t \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \ln t = 0 \wedge t \geq 1 \Leftrightarrow \ln t = 1 \wedge t \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = e \wedge t \geq 1 \Leftrightarrow t = e$

t	0		e	$+\infty$
$T'(t)$	+	+	0	−
T	0	↗	$\frac{20}{3}$	↘

A temperatura é máxima quando $t = e$.

$e \approx 2{,}7183$

$0{,}7183 \times 60 \approx 43$

Assim, a temperatura é máxima ao fim de, aproximadamente, 2 minutos e 43 segundos.

15.1. 1 h 30 min $\rightarrow t = 1{,}5$; $Q(1{,}5) = \dfrac{60 \times 1{,}5}{1{,}5^2 + 9} = 8$

8 centenas de litros = 800 litros

Após 1 hora e 30 minutos havia no reservatório 800 litros de água.

15.2. $Q'(t) = \left(\dfrac{60t}{t^2+9}\right)' = \dfrac{60(t^2+9) - 60t(2t)}{(t^2+9)^2}$

$$= \frac{60t^2 + 540 - 120t^2}{(t^2+9)^2} = \frac{-60t^2 + 540}{(t^2+9)^2}$$

$Q'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-60t^2 + 540}{(t^2+9)^2} = 0 \wedge t \geq 0$

$\Leftrightarrow -60t^2 + 540 = 0 \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow t^2 = 9 \wedge t \geq 0$

$\Leftrightarrow (t = 3 \vee t = -3) \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow t = 3$

t	0		3	$+\infty$
$Q'(t)$	+	+	0	−
Q	0	↗	10	↘

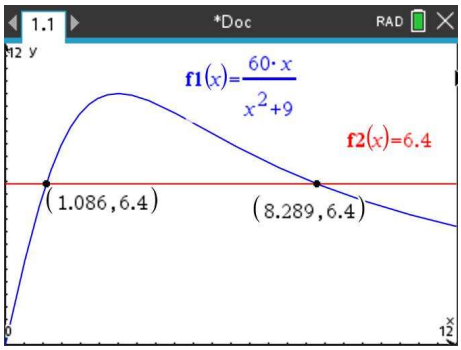
$Q(3) = \dfrac{60 \times 3}{3^2 + 9} = 10$

Q é crescente em $]0,\ 3[$ e decrescente em $]3,\ +\infty[$. *Q* tem um máximo igual a 10.

15.3. 640 L = 6,4 centenas de litros

Pretende-se resolver graficamente a condição $Q(t) > 6{,}4$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que $1{,}086 < t < 8{,}289$

$8{,}289 - 1{,}086 = 7{,}203$

$0{,}203 \times 60 = 12{,}18 \approx 12$

7,203 h ≈ 7 h 12 min

A quantidade de água no reservatório foi superior a 640 litros durante, aproximadamente, 7 horas e 12 minutos.

16. $y = ax^3 - x^2 + bx + 1,\ a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

$D = \mathbb{R}$

16.1. a) Sendo $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{2}$, então $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)' = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

$f''(x) = \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)' = 2x - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$	$\frac{5}{4}$	$\cup$

$f(1) = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]1, +\infty[$. Ponto de inflexão: $\left(1, \frac{5}{6}\right)$

b) Sendo $a = -1$ e $b = 4$, então

$f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 1$.

$f'(x) = \left(-x^3 - x^2 + 4x + 1\right)' = -3x^2 - 2x + 4$

$f''(x) = \left(-3x^2 - 2x + 4\right)' = -6x - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
f	$\cup$	$-\frac{11}{27}$	$\cap$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{4}{3} + 1 = -\frac{11}{27}$

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ e concavidade voltada para baixo em $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

Ponto de inflexão: $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{11}{27}\right)$

c) Sendo $a = 1$ e $b = 2$, então

$f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$.

$f'(x) = \left(x^3 - x^2 + 2x + 1\right)' = 3x^2 - 2x + 2$

$f''(x) = \left(3x^2 - 2x + 2\right)' = 6x - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$	$\frac{43}{27}$	$\cup$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{43}{27}$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ e concavidade voltada para cima em $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

Ponto de inflexão: $\left(\frac{1}{3}, \frac{43}{27}\right)$

16.2. $g(x) = ax^3 - x^2 + bx + 1$

Como a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 tem declive -3, sabe-se que $g'(1) = -3$.

$g'(x) = \left(ax^3 - x^2 + bx + 1\right)' = 3ax^2 - 2x + b$

$g''(x) = \left(3ax^2 - 2x + b\right)' = 6ax - 2$

$\begin{cases} g'(1) = -3 \\ g''(-1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2 + b = -3 \\ -6a - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 - 2 + b = -3 \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -1 \end{cases}$

$a = -1$ e $b = 2$

$g(x) = -x^3 - x^2 + 2x + 1$

Página 105 – Consolida

17. $D_f = \mathbb{R}^+;\ f(x) = \ln^2(x)$

17.1. $f'(x) = \left(\ln^2 x\right)' = 2\ln x \times (\ln x)' = 2\ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	**0**		**1**	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$

f é decrescente em $]0,1[$ e crescente em $]1,+\infty[$.

f tem um mínimo igual a 0.

17.2. $f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2-2\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-2\ln x=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x=1 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=\mathrm{e} \wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=\mathrm{e}$

x	**0**		**e**	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$
f		$\cup$	1	$\cap$

$f(\mathrm{e})=\ln^2 \mathrm{e}=1^2=1$

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]0,\mathrm{e}[$ e concavidade voltada para baixo em $]\mathrm{e},+\infty[$

Há um ponto de inflexão de coordenadas: $(\mathrm{e},1)$

18.1. $f'(x)=\left(\dfrac{x+20\ln x}{x}\right)'$

$=\dfrac{(x+20\ln x)'\times x-(x+20\ln x)\times(x)'}{x^2}$

$=\dfrac{\left(1+20\times\dfrac{1}{x}\right)x-(x+20\ln x)\times 1}{x^2}$

$=\dfrac{x+20-x-20\ln x}{x^2}$

$=\dfrac{20-20\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{20-20\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 20-20\ln x=0 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow \ln x=1 \wedge x>0 \Leftrightarrow x=\mathrm{e} \wedge x>0 \Leftrightarrow x=\mathrm{e}$

x	**0**		**e**	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$	$f(\mathrm{e})$	$\searrow$

Sabe-se que a função f admite um extremo no ponto A.

Então, a abcissa do ponto A é e.

18.2. $f''(x)=\left(\dfrac{20-20\ln x}{x^2}\right)'$

$=\dfrac{(20-20\ln x)'\times x^2-(20-20\ln x)\times\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}$

$=\dfrac{\left(-20\times\dfrac{1}{x}\right)\times x^2-(20-20\ln x)\times(2x)}{x^4}$

$=\dfrac{-20-2(20-20\ln x)}{x^3}=\dfrac{-60+40\ln x}{x^3}=20\left(\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}\right)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 20\left(\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}\right)=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3+2\ln x=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \ln x=\dfrac{3}{2} \wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \wedge x>0 \Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$

x	**0**		$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
f		$\cap$	$f\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$	$\cup$

Como B é o ponto de inflexão do gráfico de f, então a sua abcissa é $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.

19.1. $f(x)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$; $D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)'=2\mathrm{e}^x+\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)=2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$

$f''(x)=\left(2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)'=2\mathrm{e}^x-\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$

Então, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=f(x)$.

19.2. Retas paralelas ao eixo Ox têm declive nulo.

Sendo as retas tangentes ao gráfico de f, então $f'(x)=0$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}=0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=0$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{2x}-1=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2x=-\ln(2) \Leftrightarrow x=\dfrac{-\ln 2}{2}$

$f\left(-\dfrac{\ln 2}{2}\right)=2\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{2}}=2\mathrm{e}^{\ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)}+\mathrm{e}^{\ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)}$

$=2\times 2^{-\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

Equação da reta paralela ao eixo Ox que é tangente ao gráfico de f: $y=2\sqrt{2}$.

19.3. $f''(x) = 2e^{x} + e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} > 0 \wedge e^{-x} > 0$

Logo, $\forall x \in \mathbb{R},\ 2e^{x} + e^{-x} > 0$, isto é,

$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) > 0$.

Assim, o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$ e não tem pontos de inflexão.

20.1. O gráfico da função representada em **II** tem a concavidade voltada para cima, logo, nesse caso, a função segunda derivada é sempre positiva. A função representada em **III** muda de sinal.
Assim, a afirmação é falsa.

20.2. Se a representação gráfica **III** for a da função f', então há um ponto onde a derivada se anula e a derivada, nesse ponto, passa de negativa a positiva.
Assim, a função teria de ter um mínimo relativo nesse ponto, o que não acontece com a representação gráfica **I** (nesse caso, a função *f* é decrescente e não tem extremos).
Donde se conclui que a afirmação dada é falsa.

21.1. *C*: ponto de interseção do gráfico de *f* com o eixo Ox

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{x^2 \ln x}{2} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x^2 \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x^2(1 + 2\ln x) = 0 \wedge x > 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 = 0 \vee 1 + 2\ln x = 0\right) \wedge x > 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee \ln x = -\frac{1}{2}\right) \wedge x > 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = e^{-\frac{1}{2}}\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

A abcissa do ponto *C* é $\frac{\sqrt{e}}{e}$.

21.2. $f'(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^2 \ln x}{2}\right)' = \frac{2x}{4} + \frac{1}{2}\left(2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x}\right) =$

$$= \frac{x}{2} + x\ln x + \frac{x}{2} = x + x\ln x = x(1 + \ln x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 + \ln x) = 0 \wedge x > 0$$
$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee \ln x = -1) \wedge x > 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = e^{-1}\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	**0**		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	$-\frac{1}{4e^2}$	$\nearrow$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\frac{1}{e^2}}{4} + \frac{\frac{1}{e^2}\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{2} = \frac{1}{4e^2} + \frac{-\frac{1}{e^2}}{2} = \frac{1}{4e^2} - \frac{1}{2e^2} = -\frac{1}{4e^2}$$

f é decrescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ e crescente em $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

f tem um mínimo (absoluto) igual a $-\frac{1}{4e^2}$.

21.3. *B*: mínimo da função *f*

$B\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{4e^2}\right)$

A reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *B* é horizontal.

Uma equação dessa reta é $y = -\frac{1}{4e^2}$.

21.4. $f''(x) = (x + x\ln x)' = 1 + 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln x + 1 = 2 + \ln x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x = e^{-2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$

x	**0**		$\frac{1}{e^2}$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
f		$\cap$	$-\frac{3}{4e^4}$	$\cup$

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{\frac{1}{e^4}}{4} + \frac{\frac{1}{e^4}\overbrace{\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)}^{-2}}{2} = \frac{1}{4e^4} - \frac{1}{e^4} = \frac{3}{4e^4}$$

O gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $\left]0, \frac{1}{e^2}\right[$ e para cima em $\left]\frac{1}{e^2}, +\infty\right[$.

Ponto de inflexão: $\left(\frac{1}{e^2}, -\frac{3}{4e^4}\right)$

Página 106 – Avalia 1: Parte 1 – Verificação rápida

1. $D_f = \mathbb{R}^+$; $y = \frac{1}{e}x + 3 \rightarrow$ reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e.

Então, sabe-se que $f(e) = \frac{1}{e} \times e + 3 = 4$ e

$f'(e) = \frac{1}{e}$.

(A) $f(e) = \frac{1}{e}$ X

(B) $f(e) = \ln e = 1$ X

(C) $f(e) = 3\ln e = 3$ X

(D) $f(e) = 3 + \ln e = 3 + 1 = 4$

$f'(x) = (3 + \ln x)' = \frac{1}{x}$

$f'(e) = \frac{1}{e}$

A opção correta é a **(D)**.

2. $g(x) = ax^2$; $a > 0$

$f(x) = mx + b$; $m < 0$ e $b > 0$

$h = f \times g$

h é uma função cúbica (com dois zeros), logo excluem-se as opções **(A)** e **(C)**.

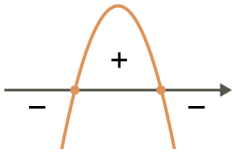
$h(x) = ax^2(mx + b) = amx^3 + abx^2$

$h'(x) = 3amx^2 + 2abx$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3amx^2 + 2abx = 0 \Leftrightarrow ax(3mx + 2b) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-2b}{3m}$

h vai ter dois extremos.



A opção **(D)** também se exclui, pois a função derivada de f tem dois zeros.

A opção correta é a **(B)**.

3. $D_f = [0, +\infty[$; $f(x) = x + \sqrt{2x}$

$f'(x) = \left(x + \sqrt{2x}\right)' = (x)' + \left((2x)^{\frac{1}{2}}\right)' = 1 + \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}} \times \underbrace{(2x)'}_{2}$

$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$D_f' = \left\{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge 2x \geq 0 \wedge \underbrace{\sqrt{2x}}_{x \neq 0} \neq 0\right\} =]0, +\infty[$

A opção correta é a **(B)**.

4. $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = x - e^{-x}$

I: $\left(0, \underbrace{f'(0)}_{-1}\right)$ $\quad f'(0) = 0 - e^0 = -1$ **c)**

II: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0$

Recorrendo à calculadora gráfica, conclui-se que $x \approx 0{,}57$. **b)**

III: $f''(x) = \left(x - e^{-x}\right) = 1 - \left(-e^{-x}\right) = 1 + e^{-x}$ **b)**

IV: $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) > 0$

Logo, o gráfico de f não tem pontos de inflexão **a)**

Conclusão: I – c); **II – b)**; **III – b)**; **IV – a)**

Página 107 – Avalia 1: Parte 2 – Questões de desenvolvimento

1.1. $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$

$f(0) = \frac{0+1}{e^0} = 1 \quad \cap Oy: (0, 1)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \wedge \underbrace{e^x}_{x \in \mathbb{R}} \neq 0 \Leftrightarrow x = -1$

Interseção com o eixo Ox: $(-1, 0)$

O gráfico de f interseta os eixos coordenados nos pontos de coordenadas $(-1, 0)$ e $(0, 1)$.

1.2. $f'(x) = \left(\frac{x+1}{e^x}\right)' = \frac{(x+1)' \times e^x - (x+1) \times (e^x)'}{(e^x)^2} =$

$= \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1 - x - 1)}{e^{2x}} = -\frac{x}{e^x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–
f	↗	1	↘

f é crescente em $]-\infty, 0[$ e decrescente em $]0, +\infty[$.

f tem um máximo (absoluto) igual a 1.

1.3. $f''(x)=\left(-\frac{x}{e^x}\right)'=-\frac{1\times e^x-x\times e^x}{\left(e^x\right)^2}=$

$=-\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=$

$=-\frac{1-x}{e^x}$

$=\frac{x-1}{e^x}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{e^x}=0\Leftrightarrow x-1=0\wedge\underbrace{e^x\neq 0}_{x\in\mathbb{R}}\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	**1**	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$	$\frac{2}{e}$	$\cup$

$f(1)=\frac{2}{e}$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,1[$ e concavidade voltada para cima em $]1,+\infty[$.

Ponto de inflexão: $\left(1,\frac{2}{e}\right)$

2.1. $f(x)=e^{ax}+b,\ a,b\in\mathbb{R}$

$A(0,3)$ pertence ao gráfico de f, logo $f(0)=3$.

r: $y=1{,}5x+3$ é tangente ao gráfico de f no ponto A, logo $f'(0)=1{,}5$.

$f'(x)=\left(e^{ax}+b\right)'=ae^{ax}$

$\begin{cases}f(0)=3\\f'(0)=1{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^0+b=3\\ae^0=1{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\a=1{,}5\end{cases}$

Então, $f(x)=e^{1{,}5x}+2$

2.2. $f'(x)=1{,}5e^{1{,}5x}$

$f''(x)=\left(1{,}5e^{1{,}5x}\right)'=1{,}5\left(1{,}5e^{1{,}5x}\right)=2{,}25e^{1{,}5x}$

$f''(x)=9\Leftrightarrow 2{,}25e^{1{,}5x}=9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{1{,}5x}=4$

$\Leftrightarrow 1{,}5x=\ln 4$

$\Leftrightarrow x=\frac{\ln 4}{1{,}5}$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\ln 4}{3}$

3.1. $C(t)=\frac{25t}{t^2+4}$, com $0\le t\le 5$

$C'(t)=\left(\frac{25t}{t^2+4}\right)'=\frac{(25t)'\times\left(t^2+4\right)-(25t)\times\left(t^2+4\right)'}{\left(t^2+4\right)^2}$

$=\frac{25\times\left(t^2+4\right)-(25t)\times(2t)}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{-25t^2+100}{\left(t^2+4\right)^2}$

$C'(t)=0\Leftrightarrow\frac{-25t^2+100}{\left(t^2+4\right)^2}=0\wedge 0\le t\le 5$

$\Leftrightarrow -25t^2+100=0\wedge 0\le t\le 5\Leftrightarrow t^2=4\wedge 0\le t\le 5$

$\Leftrightarrow(t=2\vee t=-2)\wedge 0\le t\le 5\Leftrightarrow t=2$

t	**0**		**2**		**5**
$C'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
C	0	$\nearrow$	6,25	$\searrow$	4,31

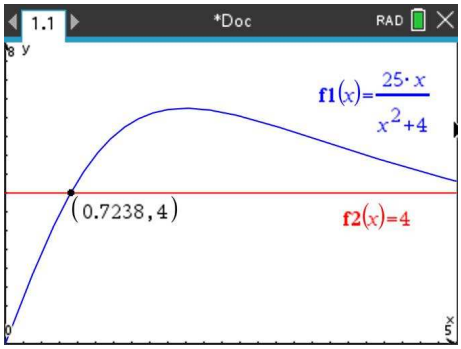
$C(2)=\frac{25\times 2}{2^2+4}=6{,}25$

$C(5)=\frac{25\times 5}{5^2+4}\approx 4{,}31$

O valor máximo do "consumo aos 100" foi atingido 2 horas após o início da viagem e é de 6,25 L/100 km.

3.2. Pretende-se resolver graficamente a condição $C(t)<4\wedge 0\le t\le 5$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que $0\le t<0{,}7238$.

$0{,}7238\times 60\approx 43$

Assim, no monitor foi indicado um "consumo aos 100" inferior a 4 L durante, aproximadamente, 43 minutos.

Tema 2: Funções contínuas e deriváveis

Página 108 – Tarefa inicial

1.1. Quando $x \to 14$, então $f(x) \to 60$.

1.2. Quando $x \to 0^+$, então $f(x) \to 60$.

1.3. Quando $x \to 20^-$, então $f(x) \to 60$.

1.4. Quando $x \to 20^+$, então $f(x) \to 120$.

2.1. $\lim\limits_{x \to 25} f(x) = 120$

2.2. $\lim\limits_{x \to 40^-} f(x) = 120$

2.3. $\lim\limits_{x \to 40^+} f(x) = 300$

2.4. $\lim\limits_{x \to 60^-} f(x) = 300$

2.5. $\lim\limits_{x \to 60^+} f(x) = 500$

2.6. $\lim\limits_{x \to 73} f(x) = 500$

3.1. O traçado do gráfico de *f* tem descontinuidade quando $x = 20$, $x = 40$ e $x = 60$.

3.2. Por exemplo, $x = 10$.

Página 109

49.1. Ponto de descontinuidade: ponto de abcissa 2

49.2. a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(x^2 - x\right) = (-1)^2 - (-1) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 - x\right) = 0^2 - 0 = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - x\right) = 1^2 - 1 = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (2x - 6) = 2 \times 3 - 6 = 0$

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2 - x\right) = 2^2 - 2 = 2$

f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - 6) = 2 \times 2 - 6 = -2$

Página 110

50. $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 0{,}4x + 1 & \text{se } x > 10 \end{cases}$

x : quantidade de fio em metros

$f(x)$: preço, em euros

A função *f* é contínua em $]5, 10[$ e em $]10, 15[$, porque é definida por expressões polinomiais.

Temos de verificar se a função *f* é contínua em $x = 10$ porque há uma mudança de ramo.

$f(x) = 0{,}5 \times 10 = 5$

$\lim\limits_{x \to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} (0{,}5x) = 0{,}5 \times 10 = 5$

$\lim\limits_{x \to 10^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} (0{,}4x + 1) = 0{,}4 \times 10 + 1 = 5$

A função *f* é contínua em $x = 10$, porque $\lim\limits_{x \to 10} f(x) = f(10)$.

Conclusão: Sim, a função *f* é contínua no intervalo $]5, 15[$.

51. $f(x) = \begin{cases} kx + 3 & \text{se } x > 1 \\ 2^{x-1} & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

Como a função *f* é contínua, sabe-se que *f* é contínua em $x = 1$.

$f(1) = 2^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2^{x-1} = 2^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (kx + 3) = k \times 1 + 3 = k + 3$

Então, *f* é contínua em $x = 1$ se:

$k + 3 = 1 \Leftrightarrow k = -2$

A opção correta é a **(B)**.

Página 111

52.1. $D_f = D_g = \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^x$, $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 5}$

A função *f* é contínua (em $\mathbb{R}$) por ser o produto de duas funções contínuas (uma polinomial e uma exponencial).

A função *g* é contínua (em $\mathbb{R}$) por ser o quociente entre duas funções contínuas (ambas polinomiais).

52.2. a) A função $f + g$ é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$.

b) A função $g - f$ é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$.

c) A função $f \times g$ é contínua em $\mathbb{R}$ por ser o produto de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$.

52.3. $D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} =$

$= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Logo, $0 \in D_{\frac{g}{f}}$.

A função $\frac{g}{f}$ não é contínua em $\mathbb{R}$ pois, como $-1 \notin D_{\frac{g}{f}}$, $\frac{g}{f}$ não é contínua em $x = -1$.

52.4. $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} =$

$= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{x^2+5} = 0 \underset{x \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$0 \notin D_{\frac{f}{g}}$, logo a função $\frac{f}{g}$ não é contínua em $x = 0$.

Assim, a função $\frac{f}{g}$ não é contínua em $\mathbb{R}$.

Página 112 – Pratica

53. $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \text{ se } x \leq 2 \\ \frac{1}{x} \text{ se } x > 2 \end{cases}$

53.1. a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2^{-x} = 2^0 = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} 2^{-x} = 2^1 = 2$

53.2. $f(x) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2^{-x} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, conclui-se que não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Logo, e função *f* é descontínua em $x = 2$.

54. $D_f = D_g = \mathbb{R}$, $f(x) = x - e^x$ e $g(x) = x^2 + x$

54.1. a) A função *f* é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (uma polinomial e uma exponencial).

A função *g* é contínua em $\mathbb{R}$ por ser polinomial.

A função $f + g$ é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (*f* e *g*).

A função $f \times g$ é contínua em $\mathbb{R}$ por ser o produto de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (*f* e *g*).

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} =$
$= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

54.2. A função $\frac{f}{g}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ por ser o quociente de duas funções contínuas.

Como $]-1, 0[\subset \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, então a função $\frac{f}{g}$ é contínua em $]-1, 0[$.

Página 113 – Pratica

55. $T(m) = \begin{cases} k \text{ se } 0 < m \leq 10 \\ 2{,}5m + 30 \text{ se } 10 < m \leq 50 \end{cases}$, $k \in [0, 60[$

m: massa da bagagem, em quilogramas
T: preço a pagar, em euros

55.1. $m = 15$

$T(15) = 2{,}5 \times 15 + 30 = 67{,}5$

Se a massa da bagagem de porão for 15 kg, então o preço a pagar é de 67,5 €.

55.2. Se $x \in]10, 50[$, então $T(m) = 2{,}5m + 30$.

A função *T* é contínua em $]10, 50[$, porque é uma função polinomial.

55.3.

- Se $m \in]0, 10[$, então $T(m) = k$

  Logo, *T* é contínua em $m \in]0, 10[$.

- Se $m \in]10, 50]$, então $T(m) = 2{,}5m + 30$

  Logo, T é contínua em $]10, 50]$.

- Resta verificar se T é contínua em $m = 10$

  $T(10) = k$

  $\lim\limits_{m \to 10^-} T(m) = \lim\limits_{m \to 10^-} k = k$

  $\lim\limits_{m \to 10^+} T(m) = \lim\limits_{m \to 10^+} (2{,}5m + 30) = 2{,}5 \times 10 + 30 = 55$

  Logo, T é contínua em $m = 10$ se

  $k = 55 \wedge k \in [0, 60[$, ou seja, $k = 55$

Conclusão: T é contínua quando $k = 55$.

56. $f(x) = \begin{cases} 1 + 3^x \text{ se } x < 1 \\ k \text{ se } 1 \leq x < 3 \\ \log_3(x-2) \text{ se } x \geq 3 \end{cases}$; $k \in \mathbb{R}$

56.1. a) $f(1) = k$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (1 + 3^x) = 1 + 3^1 = 4$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} k = k$

Assim, f é contínua em $x = 1$ se $k = 4$.

b) $f(3) = \log_3(3-2) = \log_3 1 = 0$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} k = k$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (\log_3(x-2)) = \log_3 1 = 0$

Assim, f é contínua em $x = 3$ se $k = 0$.

56.2. A função f não pode ser contínua (no seu domínio), porque não existe nenhum valor de k de modo que f seja simultaneamente contínua em $x = 1$ e em $x = 3$.

57. $D_f =]-1, +\infty[$; $a, b \in \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} x \log_2(x+1) \text{ se } -1 < x \leq 3 \\ ax + b \text{ se } x > 3 \end{cases}$

- $f(3) = 3\log_2 4 = 3 \times 2 = 6$

  $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x \log_2(x+1)) = 3\log_2(3+1) = 6$

  $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (ax + b) = 3a + b$

  Como f é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x = 3$.

  Logo, $3a + b = 6$, ou seja, $b = 6 - 3a$

- $f(5) = 0 \Leftrightarrow 5a + b = 0 \Leftrightarrow b = -5a$

- Então:

  $\begin{cases} b = 6 - 3a \\ b = -5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---------} \\ 6 - 3a = -5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 15 \\ a = -3 \end{cases}$

  Assim, se $x > 3$, então $f(x) = -3x + 15$.

- Logo, $f\left(\frac{10}{3}\right) = -3 \times \frac{10}{3} + 15 = 5$

A opção correta é a **(C)**.

58. Por exemplo:

$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ se } x \geq 0 \\ 3x + 1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ 1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$

- $D_f = D_g = \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x + 1) = 3 \times 0 + 1 = 1$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2 = 2$

  $f(0) = 2$

  Então, f é descontínua em $x = 0$.

  Logo, f é descontínua.

- $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$

  $g(0) = 0$

  Então, g é descontínua em $x = 0$.

  Logo, g é descontínua.

- $(f+g)(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ se } x \geq 0 \\ 3x + 2 \text{ se } x < 0 \end{cases}$

  $\lim\limits_{x \to 0^-} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x + 2) = 3 \times 0 + 2 = 2$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 2) = 0 + 2 = 2$

  $(f+g)(0) = 0 + 2 = 2$

  Então, $f + g$ é contínua em $x = 0$.

  $f + g$ é contínua em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ por ser definida por expressões polinomiais.

  Assim, $f + g$ é contínua (em $\mathbb{R}$).

Página 114

59. $f(x) = 2 + e^x$; $g(x) = 1 - x^2$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$

59.1. a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2+\mathrm{e}^{x}\right) = 2+\mathrm{e}^{0} = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^{2}\right) = 1-0^{2} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right) = 3+1 = 4$

d) $\lim\limits_{x\to 0}(g-f)(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)-f(x)\right) = 1-3 = -2$

59.2. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\mathrm{e}^{-x}\right) = 2+0 = 2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-x^{2}\right) = 1-(-\infty)^{2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+g(x)\right) = 2+(-\infty) = -\infty$

59.3. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\times g(x)\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\mathrm{e}^{x}\right)\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x^{2}\right)$

$= +\infty\times(-\infty) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\times g(x)\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\times\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\mathrm{e}^{x}\right)\times\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-x^{2}\right) =$

$= +\infty\times(-\infty) = -\infty$

Página 115

60.1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^{2}}{x+5} = \dfrac{9}{8}$

60.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x+1}} = \dfrac{-1}{1} = -1$

60.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{2^{x}} = \dfrac{-3}{0^{+}} = -\infty$

60.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\mathrm{e}^{x}}{2^{x}} = \dfrac{1+0}{0^{+}} = +\infty$

60.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{2}}{\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{+\infty}{0^{+}} = +\infty$

61. $f(x) = x^{n}$, $n\in\mathbb{N}$

61.1. Se n é par: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{3^{-x}} = \dfrac{+\infty}{0^{+}} = +\infty$

61.2. Se n é ímpar: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{3^{-x}} = \dfrac{+\infty}{0^{+}} = +\infty$

61.3. Se n é par: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{2^{x}} = \dfrac{+\infty}{0^{+}} = +\infty$

61.4. Se n é ímpar: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{1+5^{x}} = \dfrac{-\infty}{0^{+}} = -\infty$

Página 116

62.1. $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, 0\}$, tem-se:

$$\frac{2x^{3}-8x}{x^{3}+2x^{2}} = \frac{2x\left(x^{2}-4\right)}{x^{2}(x+2)} \underset{x\neq 0}{=} \frac{2\left(x^{2}-4\right)}{x(x+2)} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \underset{x\neq -2}{=} \frac{2(x-2)}{x}$$

62.2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^{2}-8x}{x^{3}+2x^{2}} \overset{\text{por 62.1.}}{=} \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2(x-2)}{x} = \dfrac{2(-2-2)}{-2} = 4$

62.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^{2}-8x}{x^{3}+2x^{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(x-2)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x}-\dfrac{4}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{4}{x}\right) = 2-0 = 2$

63.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{3}-1}{x^{2}+x-2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{2}+x+1\right)}{(x-1)(x+2)} \overset{x\neq 1}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2}+x+1}{x+2} =$

$= \dfrac{1+1+1}{1+2} = 1$

Cálculo auxiliar:

	1	0	0	−1
1		1	1	1
	1	1	1	0

	1	1	−2
1		1	2
	1	2	0

63.2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^{2}-2x-3}{(x-3)^{3}} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^{3}} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)}{(x-3)^{2}}$

$= \dfrac{4}{0^{+}} = +\infty$

Cálculo auxiliar:

	1	−2	−3
3		3	3
	1	1	0

64.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x+1))'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$.

64.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-e^{1-x}}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-e^{1-x}\right)'}{\left(x^2-1\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+e^{1-x}}{2x}=\dfrac{1+1}{2}=1$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-e^{1-x}}{x^2-1}=1$.

Página 117

65.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2+3x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

65.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2x}{2x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{2x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

65.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x}{3x^4+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{3x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{3x}=0$

65.4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-4x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x\left(x^2-4\right)}{x(x+2)}\overset{x\neq 0}{=}\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}=$

$\overset{x\neq -2}{=}\lim\limits_{x\to-2}(x-2)=-4$

65.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\dfrac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\dfrac{1}{1+0}+\dfrac{1}{1+0}=2$

66.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=\dfrac{2}{+\infty}=0$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=0$.

66.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right)=0$.

66.3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2e^{x-2}-x}{x^2-4}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(2e^{x-2}-x\right)'}{\left(x^2-4\right)'}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2e^{x-2}-1}{2x}=\dfrac{1}{4}$.

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2e^{x-2}-x}{x^2-4}=\dfrac{1}{4}$.

66.4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2^{-x}+2x}{1-x^2}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\left(2^{-x}+2x\right)'}{\left(1-x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-2^{-x}\times\ln 2+2}{-2x}=\dfrac{-2\ln 2+2}{2}=-\ln 2+1$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2^{-x}+2x}{1-x^2}=-\ln 2+1$

66.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin(3x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos(3x)}{1}=\dfrac{3}{1}=3$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}=3$

66.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=$

$=0-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2\right)'}{(x+1)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{1}=-\infty$

Então, pela regra de L´Hôpital:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)=-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=-(-\infty)=+\infty$

Página 118 – Tarefa 5

1.1. **Coluna A:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=\dfrac{1}{1}=1$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

1.2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^x}{x} & \text{se } x<0\\ k+\ln(x+1) & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

Sabendo que *f* é uma função contínua, então *f* é contínua em $x=0$.

$f(0)=k+\ln(0+1)=k+0=k$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\left(e^x-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}\underset{\text{por 1.1.}}{=}-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(k+\ln(x+1)\right)=k+\ln(0+1)=k$

Assim, *f* é contínua e $x=0$ se $k=-1$.

2.1. **Coluna B:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(x+1))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$.

2.2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+1)}{x}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$

$$\underset{\text{por 2.1.}}{=}1\times\frac{1}{0+1}=1$$

Então, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$.

3.1. **Coluna C:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

3.2. $$f(x)=\begin{cases}x+\mathrm{e}^x & \text{se } x\le 0\\ \dfrac{x-2\sin x}{x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

$f(0)=0+\mathrm{e}^0=1$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x+\mathrm{e}^x\right)=0+\mathrm{e}^0=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-2\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}-\frac{2\sin x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{2\sin x}{x}\right)=1-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\underset{\text{por 3.1.}}{=}1-2\times 1=-1$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Logo, *f* é descontínua em $x=0$.

Assim, a função *f* é descontínua.

4.1. **Coluna D:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a(x)}{x^p}=\dfrac{\infty}{\infty};\ a>1$ e $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_a(x))'}{(x^p)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln a}}{px^{p-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{px^p\ln a}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a(x)}{x^p}=0;\ a>1\wedge p\notin\mathbb{N}$.

4.2. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3}{\log_2 x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\frac{\log_2 x}{x^3}}=\frac{3}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_2 x}{x^3}}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

5.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2}{1}=+\infty$$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^2}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2}{2x}=\frac{\infty}{\infty}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^x\ln 2)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x(\ln 2)^2}{2}=+\infty$$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^2}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^3}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2}{3x^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^x\ln 2)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x(\ln 2)^2}{6x}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^x(\ln 2)^2)'}{(6x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x(\ln 2)^3}{6}=+\infty$$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^3}=+\infty$

5.2. Atendendo aos resultados obtidos em **5.1.** e fazendo uma generalização, podemos fazer a seguinte conjetura:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^p}=+\infty$, com $a>1\wedge p\in\mathbb{N}$

5.3. $$\lim_{x\to+\infty}\left(x^5\mathrm{e}^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{\mathrm{e}^x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^5}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Página 119

67.1. $$\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^x-2}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{3x}=\frac{2}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}}_{\substack{\text{limite}\\ \text{vetorial}}}=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

67.2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{\substack{\text{limite}\\ \text{notável}}}=1+1=2$$

67.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(x+1)^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2\ln(x+1)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right)=1+2\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{limite notável}}=1+2\times 1=3$

67.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x}+\dfrac{\ln x}{x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=+\infty+0=+\infty$

67.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{-4}3^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x^4}=+\infty$

67.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x^5 2^x}=\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{x^5}}_{\text{limite notável}}=+\infty$

$+\infty$

67.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{e}^x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}_{\text{limite notável}}}=\dfrac{1}{1}=1$

68.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-\mathrm{e}^x}{x^2}=\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}}_{\text{limite notável}}-\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}}_{\text{limite notável}}=0-(+\infty)=-\infty$

68.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{5x}-1}{3x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\mathrm{e}^{5x}-1\right)'}{(3x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\mathrm{e}^{5x}}{3}=\dfrac{5\times 1}{3}=\dfrac{5}{3}$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{5x}-1}{3x}=\dfrac{5}{3}$.

68.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(5x-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1}=$

$=\dfrac{-5-\frac{1}{2}\times 1}{1}=5-\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\dfrac{9}{2}$.

68.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+0}=1$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}=1$

Página 120 – Pratica

69. $f(x)=2x+3$, $g(x)=x^2+2$ e $h(x)=(x-1)^2$

69.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)=2\times(-\infty)+3=-\infty$

69.2. $\lim\limits_{x\to -1}g(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+2\right)=(-1)^2+2=3$

69.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)^2=(-\infty)^2=+\infty$

69.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x+3}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

69.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{h(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{(x-1)^2}=\dfrac{2}{(-\infty)^2}=\dfrac{2}{+\infty}=0$

69.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)+h(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+2+(x-1)^2\right)=+\infty+(+\infty)$

$=+\infty$

69.7. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+3}{(x-1)^2}=\dfrac{2\times 1+3}{(1-1)^2}=\dfrac{5}{0^+}=+\infty$

69.8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\times g(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x+3)\times\left(x^2+2\right)\right)=$

$=(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$

69.9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2}{(x-1)^2}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

70. $f(x)=\mathrm{e}^x$ e $g(x)=\ln\left(x^2+1\right)$; $D_f=D_g=\mathbb{R}$

70.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

70.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln\left(x^2+1\right)}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

70.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\mathrm{e}^x-1\right)'}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}=1$

70.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln\left(x^2+1\right)}=\dfrac{0}{+\infty}=0$

Página 121 – Pratica

71. $f(x)=x^3-x^2$, $g(x)=2x^2+3$ e $h(x)=(x-1)^2$

71.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x^2}{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}=-\infty$

A função *f* tem maior magnitude do que *g* em $-\infty$.

71.2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{h(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{x^3-x^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2}=\dfrac{0}{1}=0$

A função *h* tem menor magnitude do que *f* em 1.

71.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}2=2$

As funções *g* e *h* têm a mesma magnitude.

72.1. **Processo 1:** Aplicar a Regra de L'Hôpital:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{\cos x}=\dfrac{1}{1}=1$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}=1$.

Processo 2: Recorrer aos limites notáveis:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$

72.2. **Processo 1:** Aplicar a Regra de L'Hôpital:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{2x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{2}=\dfrac{0}{2}=0$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{2x}=0$.

Processo 2: Recorrer aos limites notáveis:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{2x}-\dfrac{\sin x}{2x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times1=0$

72.3. **Processo 1:** Aplicar a Regra de L'Hôpital

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{e^x-1}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\ln(x+1))'}{(e^x-1)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{e^x}=\dfrac{1}{1}=1$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{e^x-1}=1$

Processo 2: Recorrer aos limites notáveis

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$

72.4. **Processo 1:** Aplicar a Regra de L'Hôpital

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 3^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3^x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2)'}{(3^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{3^x\ln3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x)'}{(3^x\ln3)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3^x(\ln3)^2}=\dfrac{2}{+\infty}=0$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 3^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3^x}=0$

Processo 2: Recorrer aos limites notáveis

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 3^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{3^x}{x^2}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x}{x^2}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

73. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-2x}}{3x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-e^{-2x})'}{(3x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{2x}}{3}=\dfrac{2}{3}$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-2x}}{3x}=\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\ln x}{x^2}=\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{x^2}}_{\text{limite notável}}+\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x^2}}_{\text{limite notável}}=+\infty+0=+\infty$

Os resultados são iguais aos apresentados, pois

$\dfrac{2}{3}\approx0{,}6667$.

74. $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=\ln x$ e $h(x)=x^2$

74.1. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{-x}=1$ e $\lim\limits_{x\to0}h(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2=0^2=0$

Logo, $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)+h(x)\right)=1$.

74.2. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}e^{-x}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ e $\lim\limits_{x\to1}h(x)=\lim\limits_{x\to1}x^2=1^2=1$

Logo, $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)\times h(x)\right)=\dfrac{1}{e}$.

74.3. $\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}(\ln x)=\ln1=0$ e

$\lim\limits_{x\to1}h(x)=\lim\limits_{x\to1}x^2=1^2=1$

Logo, $\lim\limits_{x\to1}\left(h(x)-g(x)\right)=1$.

74.4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2\mathrm{e}^{x}\right) = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$$

Então, pela regra de L´Hôpital $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{h(x)}{f(x)} = +\infty$.

75. $f(x) = \dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{x}}{x^2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

75.1. Por observação gráfica estima-se que

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

75.2. $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{x}}{x^2} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{(\cos x - \mathrm{e}^{x})'}{(x^2)'} = \lim_{x\to0^-} \frac{\sin x - \mathrm{e}^{x}}{2x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{x}}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{x}}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(\cos x - \mathrm{e}^{x})'}{(x^2)'} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x - \mathrm{e}^{x}}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{x}}{x^2} = -\infty$$

As estimativas efetuadas em **75.1.** confirmam-se, pois $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

Página 122

76.1. $f(x) = \dfrac{5}{(x+1)} - 3$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \left(\dfrac{5}{x+1} - 3\right) = \dfrac{5}{0^-} - 3 = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \left(\dfrac{5}{x+1} - 3\right) = \dfrac{5}{0^+} - 3 = +\infty$

  Donde se conclui que a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5}{x+1} - 3\right) = \dfrac{5}{+\infty} - 3 = -3$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{5}{x+1} - 3\right) = \dfrac{5}{-\infty} - 3 = -3$

  Donde se conclui que a reta de equação $y = -3$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

76.2. $f(x) = \dfrac{3}{x-4} + 2$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{4\}$

- $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to4^-} \left(\dfrac{3}{x-4} + 2\right) = \dfrac{3}{0^-} + 2 = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+} \left(\dfrac{3}{x-4} + 2\right) = \dfrac{3}{0^+} + 2 = +\infty$

  A reta de equação $x = 4$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3}{x-4} + 2\right) = \dfrac{3}{+\infty} + 2 = 2$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{3}{x-4} + 2\right) = \dfrac{3}{-\infty} + 2 = 2$

  A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

76.3. $f(x) = \dfrac{4}{3-x} + 5$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

- $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} \left(\dfrac{4}{3-x} + 5\right) = \dfrac{4}{0^+} + 5 = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} \left(\dfrac{4}{3-x} + 5\right) = \dfrac{4}{0^-} + 5 = -\infty$

  A reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3-x} + 5\right) = \dfrac{4}{-\infty} + 5 = 5$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{4}{3-x} + 5\right) = \dfrac{4}{+\infty} + 5 = 5$

  A reta de equação $y = 5$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

76.4. $f(x) = \dfrac{-2}{x+3} - 4$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

- $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-3^-} \left(\dfrac{-2}{x+3} - 4\right) = \dfrac{-2}{0^-} - 4 = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-3^+} \left(\dfrac{-2}{x+3} - 4\right) = \dfrac{-2}{0^+} - 4 = -\infty$

  A reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-2}{x+3} - 4\right) = \dfrac{-2}{+\infty} - 4 = -4$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-2}{x+3} - 4\right) = \dfrac{-2}{-\infty} - 4 = -4$

  A reta de equação $y = -4$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

77. $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$; $D_g=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

77.1. Aplicando o algoritmo da divisão, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x}+0 & x-2 \\ \hline \cancel{-x}+2 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Logo, $g(x)=1+\dfrac{2}{x-2}$.

77.2.

- $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)=1+\dfrac{2}{0^-}=-\infty$

  $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)=1+\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

  A reta de equação $x=2$ é assíntota vertical ao gráfico de *g*.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)=1+\dfrac{2}{+\infty}=1$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)=1+\dfrac{2}{-\infty}=1$

  A reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de *g*.

Assim, as coordenadas do ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de *g* são $(2,1)$.

78. $h(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$; $D_h=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Aplicando o algoritmo da divisão, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2x}+3 & x+1 \\ \hline \cancel{-2x}-2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Logo, $h(x)=2+\dfrac{1}{x+1}$.

- $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)=2+\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

  $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)=2+\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

  A reta de equação $x=-1$ é assíntota vertical ao gráfico de *h*.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)=2+\dfrac{1}{+\infty}=2$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)=2+\dfrac{1}{-\infty}=2$

  A reta de equação $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de *h*.

- Assim, as coordenadas do ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de *h* são $(-1,2)$.

Página 123

79.

- $y=-1$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x\to-\infty$.

  Logo, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, ou seja, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+1=0$

- $y=4x+1$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$

  Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(4x+1)\right)=0$, ou seja,

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-4x-1\right)=0$.

- Donde se conclui que:
  (A) F; **(B)** V; **(C)** F; **(D)** F; **(E)** V

Página 124 – Tarefa 6

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{x} & \text{se } x<0\\[2mm] \dfrac{x^2+3}{x+1} & \text{se } x\geq 0\end{cases}$; $D_f=\mathbb{R}$

1.1. $f(0)=\dfrac{0^2+3}{0+1}=3$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+3}{x+1}=\dfrac{3}{1}=3$

A função *f* não é contínua em $x=0$, porque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

1.2. O gráfico de *f* pode admitir no máximo uma assíntota vertical porque *f* é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

1.3. Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

Conclui-se que a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

1.4. I) $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2+3}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{x^2+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

II) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x+1}-x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3-x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x}=-1$

Equação da assíntota não vertical ao gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$: $y=x-1$

III) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{e^x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\dfrac{0}{+\infty}=0$

Se existir assíntota não vertical ao gráfico de *f*, quando $x\to-\infty$, então será horizontal.

2. $g(x)=5x+2e^{-x}$; $D_g=\mathbb{R}$

2.1. **a)** Não há assíntotas verticais ao gráfico de *g* porque a função *g* é contínua em $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-5x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x+2e^{-x}-5x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{-x}\right)=0$

A reta de equação $y=5x$ é assíntota ao gráfico de *g*, porque $\lim\limits_{x\to0^-}\left(g(x)-5x\right)=0$.

2.2. Para $x\to-\infty$:

$y=mx+b$, com $m, b\in\mathbb{R}$

- $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+2e^{-x}}{x}=5+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^{-x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2e^{-x}\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2e^{-x}}{1}=-\infty$

Então, pela regra de L´Hôpital:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=5+(-\infty)=-\infty$

Como $m\notin\mathbb{R}$, conclui-se que não existe assíntota não vertical ao gráfico de *g*, quando $x\to-\infty$.

2.3. $g'(x)=\left(5x+2e^{-x}\right)'=5-2e^{-x}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-2e^{-x}\right)=5-2\times0=5$

A reta de equação $y=5$ é assíntota horizontal ao gráfico da função *g'*, quando $x\to+\infty$.

- $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-2e^{-x}}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(5-2e^{-x}\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^{-x}}{1}=+\infty$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-2e^{-x}}{x}=+\infty$.

Como $m\notin\mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico de *g'* não admite assíntota não vertical, quando $x\to-\infty$.

Página 125 – Tarefa 7

1. $T(t)=18+62e^{-kt}$, $k\in\mathbb{R}^+$

T: temperatura do chá, em ºC

t: tempo após ser servido, em minutos

1.1. $T(5)=50\Leftrightarrow18+62e^{-5k}=50\Leftrightarrow62e^{-5k}=32\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-5k}=\dfrac{16}{31}\Leftrightarrow-5k=\ln\left(\dfrac{16}{31}\right)\Leftrightarrow k\approx0{,}13$

1.2. Sendo $k\approx0{,}13$, então $T(t)=18+62e^{-0{,}13t}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty}T(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(18+62e^{-0{,}13t}\right)=18+62\times0=18$

No contexto apresentado, significa que, com o decorrer do tempo, a temperatura do chá aproxima-se de 18 ºC.

2.1. Não. Basta pensar que pode haver a possibilidade de a assíntota intersetar o gráfico da função *T*.

2.2. $T(t)=\dfrac{t^3-4t^2+5}{t^2+1}$, $t\geq0$

a) Assíntota oblíqua: $y=mx+b$, $m, b\in\mathbb{R}$

$m=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{T(t)}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^3-4t^2+5}{t^3+t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^3}{t^3}=1$

$b=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(T(t)-mt\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{t^3-4t^2+5}{t^2+1}-t\right)$

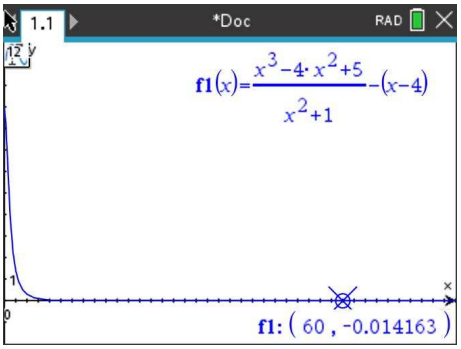
$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^3-4t^2+5-t^3-t}{t^2+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-4t^2}{t^2}=-4$

Conclui-se que a reta de equação $y=t-4$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função *T*.

Pretende-se recorrer à tecnologia para saber qual é a diferença entre a temperatura dada pela função e a temperatura dada pela assíntota ao fim de uma hora.

Seja *d* a função definida por

$d(t)=T(t)-(t-4)$.

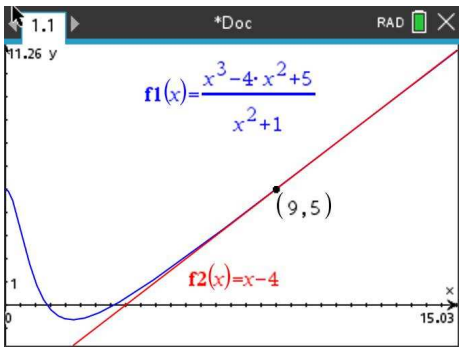


Então, $d(60)\approx-0{,}014$.

Assim, ao fim de uma hora, a diferença entre a temperatura dada pela função e a temperatura dada pela assíntota não está entre 0,01 e 0,02.

b) Pretende-se determinar graficamente as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função *T* com a assíntota oblíqua, ou seja, resolver graficamente a equação $T(t) = t - 4$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Donde se conclui que as coordenadas do ponto de interseção pedido são $(9, 5)$.

Página 126 – Pratica

80.1. $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

- Como *f* é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$, só a reta de equação $x = -4$ poderá ser assíntota vertical.

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = \lim_{x \to -4^-} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = \lim_{x \to -4^+} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = -4$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

80.2. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- Como *f* é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ só a reta de equação $x = -1$ poderá ser assíntota vertical.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x-2}{x+1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x-2}{x+1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-2}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

80.3. $f(x) = \dfrac{2x-1}{2-x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

- Como *f* é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, só a reta de equação $x = 2$ poderá ser assíntota vertical.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x+1}{2-x} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x+1}{2-x} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{2-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{-x} = -2$

A reta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

80.4. $f(x) = \dfrac{1-3x}{6-2x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

- Como *f* é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, só a reta de equação $x = 3$ poderá ser assíntota vertical.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{1-3x}{6-2x} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{1-3x}{6-2x} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-3x}{6-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x}{-2x} = \dfrac{3}{2}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-3x}{6-2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{-2x} = \frac{3}{2}$$

A reta de equação $y = \dfrac{3}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

81. $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x+2};\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

81.1. $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{3x^2-1}{x+2}=\dfrac{11}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{3x^2-1}{x+2}=\dfrac{11}{0^-}=-\infty$

Como $\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=-\infty$, conclui-se que a reta de equação $x=-2$ é assíntota vertical (bilateral) ao gráfico de *f*.

81.2.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+0x-1 & x+2 \\ \hline -3x^2-6x & 3x-6 \\ \hline -6x-1 & \\ 6x+12 & \\ \hline 11 & \end{array}$$

$f(x)=3x-6+\dfrac{11}{x+2}\Leftrightarrow f(x)-(3x-6)=\dfrac{11}{x+2}$

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(3x-6)\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{11}{x+2}=0$, conclui-se que a reta de equação $y=3x-6$ é assíntota não vertical ao gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

82.1. Sendo *f* uma função contínua de domínio $]-1,+\infty[$ e sabendo que o gráfico de *f* admite uma assíntota vertical, então a equação dessa assíntota é $x=-1$.

A reta de equação $y=x+1$ é assíntota ao gráfico de *f* e *P* é o ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de *f*.

$\begin{cases} x=-1 \\ y=x+1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases};\ P(-1,0)$

A opção correta é a **(D)**.

82.2. Sabe-se que a reta de equação $y=x+1$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$.

Então, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=0$, ou seja,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x-1\right)=0$.

A opção correta é a **(A)**.

83.1. $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+2}\ ;\ \ D_f=\mathbb{R}$

- Como *f* é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x}{x^3+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+x}{x^2+2}-x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x-x^3-2x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=0$

De forma análoga se prova que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$. Assim, conclui-se que a reta de equação $y=x$ é assíntota não vertical ao gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

83.2. $f(x)=\begin{cases} x+\mathrm{e}^{-x} & \text{se } x\geq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & \text{se } x<0 \end{cases}\ ;\ \ D_f=\mathbb{R}$

- Como *f* é contínua em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$, só a reta de equação $x=0$ poderá ser assíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\mathrm{e}^{-x}\right)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

A reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

A reta de equação $y=x$ é assíntota não vertical ao gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)=1+0=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\mathrm{e}^{-x}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$

A reta de equação $y=x$ é assíntota não vertical ao gráfico de *f*, quando $x\to-\infty$.

83.3. $f(x)=2x+\ln x\ ;\ \ D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\}=]0,+\infty[$

- Como *f* é contínua em $]0,+\infty[$, só a reta de equação $x=0$ poderá ser assíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x+\ln x\right)=0+(-\infty)=-\infty$

Logo, a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x}+\dfrac{\ln x}{x}\right)=$

$=2+\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}}=2+0=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\ln x-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Logo, o gráfico de *f* não admite assíntota não vertical.

83.4. $f(x)=\dfrac{2e^x}{x+1}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

- Como *f* é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, só a reta de equação $x=-1$ poderá ser assíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2e^x}{x+1}=\dfrac{2e^{-1}}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2e^x}{x+1}=\dfrac{2e^{-1}}{0^+}=+\infty$

A reta de equação $x=-1$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x}{x(x+1)}=\dfrac{0}{+\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x}{x+1}=\dfrac{0}{-\infty}=0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal, quando $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$

$=\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}}_{\text{limite notável}}\times=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty\times2=+\infty$

Logo, o gráfico de *f* não admite assíntota não vertical, quando $x\to+\infty$.

83.5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{se } x<1\\ \ln(ex) & \text{se } x\geq1\end{cases}$; $D_f=\mathbb{R}$

- Como *f* é contínua em $]-\infty,1[$ e em $]1,+\infty[$, só a reta de equação $x=1$ poderá ser assíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\ln(ex)\right)=\ln e=1$

A reta de equação $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*, quando $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(ex)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(ex))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e}{ex}}{1}$

$=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(ex)\right)=+\infty$

Logo, o gráfico de *f* não admite assíntota não vertical, quando $x\to+\infty$.

83.6. $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}-3 & \text{se } x<0\\ \dfrac{2}{\ln(e+x)} & \text{se } x\geq0\end{cases}$; $D_f=\mathbb{R}$

- Como *f* é contínua em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$, só a reta de equação $x=0$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de *f*.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}-3\right)=0-3=-3$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{\ln(e+x)}=\dfrac{2}{\ln e}=\dfrac{2}{1}=2$

A reta de equação $x=0$ não é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-3\right)=1-3=-2$

A reta de equação $y=-2$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*, quando $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\ln(e+x)}=\dfrac{2}{+\infty}=0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$.

84. No máximo, o gráfico de uma função pode admitir duas assíntotas não verticais, uma quando $x\to-\infty$ e outra quando $x\to+\infty$.

Página 127 – Pratica

85. $D_f=]0,+\infty[$, tal que $f(x)=0{,}5x+\ln\left(1-e^{-x}\right)$

85.1. $r:\ y=mx+b,\ m,b\in\mathbb{R}$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{0{,}5x+\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(0{,}5+\frac{\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}{x}\right)=0{,}5+\frac{0}{+\infty}=0{,}5+0=0{,}5$$

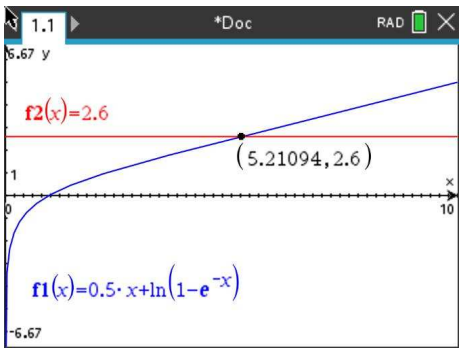
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(0{,}5x+\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)-0{,}5x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\right)=\ln(1-0)=0$$

$r:\ y=0{,}5x$

85.2. g: restrição de f ao intervalo $[3,10]$.

Pretende-se resolver graficamente a equação $g(x)=2{,}6$.



Então, $x\approx 5{,}211$.

Substituindo x por 5,211 na equação da assíntota ao gráfico de f, tem-se:

$y=0{,}5\times 5{,}211\Leftrightarrow y=2{,}6055\Leftrightarrow y\approx 2{,}606$

A altura da água no riacho, dada pela assíntota ao gráfico de f, é, aproximadamente, 2,606 m.

Página 128

86.1. Por observação da representação gráfica, parece que a função f é contínua no ponto $x=-2$

86.2. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) Como $-2\notin D_f$, a função f não é contínua em $x=-2$.

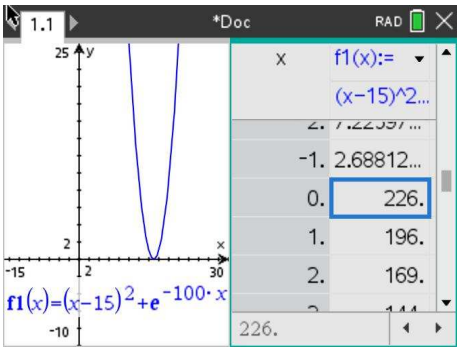
c) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}\underset{x\neq -2}{=}x-2$ e $x=-2$

Página 129

87. $f(x)=(x-15)^2+\mathrm{e}^{-100x}$, $D_f=\mathbb{R}$

87.1. a) Pretende-se verificar, utilizando a calculadora gráfica, se o gráfico de f interseta o eixo Oy.

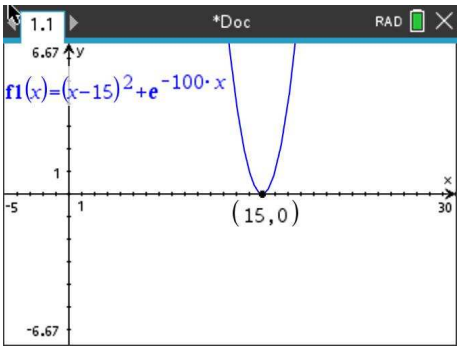
Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, conclui-se que sim, o gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,226)$.

b) Pretende-se verificar, graficamente, se a função f tem zeros, ou seja, resolver, graficamente, a equação $f(x)=0$.

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $x=15$.

Graficamente, conclui-se que a função f tem um zero: 15.

87.2. a) $f(0)=(0-15)^2+\mathrm{e}^0=226$

Assim, conclui-se que o gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,226)$.

b) Sabe-se que $\forall x\in\mathbb{R},\ (x-15)^2\geq 0$ e que $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-100x}>0$.

Donde se conclui que

$\forall x\in\mathbb{R},\ (x-15)^2+\mathrm{e}^{-100x}>0$, ou seja,

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>0$.

Assim, a função f não tem zeros.

Página 130 – Tarefa 8

$L(x)=(5x-10)\mathrm{e}^{-0,08x}$; $D=\mathbb{R}^+$

L: lucro, em dezenas de milhares de euros.

x : tempo, em semanas, desde a assinatura do contrato até ao prazo limite de entrega.

1. A: ponto de interseção do gráfico de L com o eixo Ox

$L(x)=0 \Leftrightarrow (5x-10)\mathrm{e}^{-0,08x}=0 \Leftrightarrow 5x-10=2 \Leftrightarrow x=2$

$A(2,0) \rightarrow$ Significa que 2 semanas após a assinatura do contrato, o lucro resultante desse contrato é nulo.

2. $L'(x)=\left[(5x-10)\mathrm{e}^{-0,08x}\right]'$

$=(5x-10)'\times \mathrm{e}^{-0,08x}+(5x-10)\times\left(\mathrm{e}^{-0,08x}\right)'$

$=5\times \mathrm{e}^{-0,08x}+(5x-10)\times\left(-0,08\mathrm{e}^{-0,08x}\right)$

$=\mathrm{e}^{-0,08x}(-0,4x+5,8)$

$L'(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,08x}(-0,4x+5,8)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,4x+5,8=0 \Leftrightarrow x=14,5$

x	**0**	**14,5**	$+\infty$
$L'(x)$	+	0	–
L	↗	$L(14,5)$	↘

$L(14,5)\approx 19,593$

A função L é crescente $]0;14,5[$ e decrescente em $]14,5;+\infty[$.

A função L tem um máximo absoluto, aproximadamente, igual a 19,593.

$B(14,5;19,593) \rightarrow$ Significa que 14,5 segundos após a assinatura do contrato se obtém o lucro máximo de, aproximadamente, 195 930 €.

3. $L''(x)=(-0,864+0,032x)\mathrm{e}^{-0,08x}$

$L''(x)=0 \Leftrightarrow (-0,864+0,032x)\mathrm{e}^{-0,08x}=0$

$\Leftrightarrow -0,864+0,032x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{0,864}{0,032} \Leftrightarrow x=27$

x	**0**	**27**	$+\infty$
$L''(x)$	–	0	+
L	∩	$L(27)$	∪

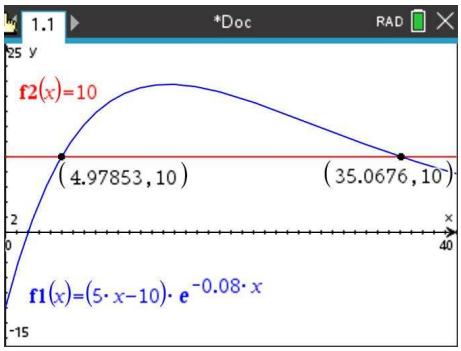
$L(27)\approx 14,416$

Sendo C o ponto de inflexão do gráfico de L, então $C(27;14,416)$.

4. Lucro: 100 000 €

Prazo de entrega: superior a meio ano

Pretende-se resolver graficamente a condição $L(x)=10 \wedge x>6$.



$L(x)=10 \wedge x>6 \Leftrightarrow (x\approx 5 \vee x\approx 35) \wedge x>6 \Leftrightarrow x\approx 35$

Donde se conclui que a duração do tempo dado para a produção da encomenda foi de, aproximadamente, 35 semanas.

Página 131 – Tarefa 9

$f(x)=6,24+\dfrac{\mathrm{e}^{0,2x-2}+\mathrm{e}^{-0,2x+2}}{2}$

$\overline{OA}$: altura do 1.º poste; $P(x,f(x))$

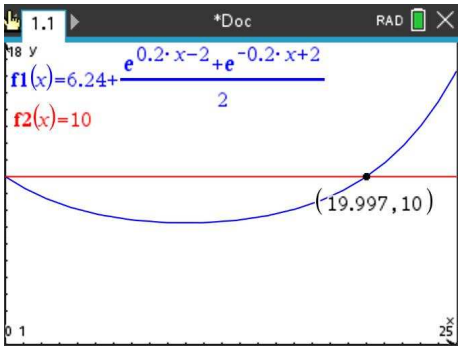
x : distância, em metros, de P ao 1.º poste.

$f(x)$: distância, em metros, de P ao solo.

1. A altura do 1.º poste é dada por $f(0)$.

$f(0)=6,24+\dfrac{\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{2}}{2}\approx 10$

Pretende-se determinar a distância entre os dois postes. Para tal, temos de resolver a equação $f(x)=10$.



Donde se conclui que $x\approx 20 \vee x=0$.

Assim, a distância entre os dois postes é, aproximadamente, 20 metros.

2. Para determinar as coordenadas do ponto do fio que está à menor distância do solo é preciso determinar o mínimo da função *f*.

$$f'(x)=\left(6{,}24+\frac{e^{0{,}2x-2}+e^{-0{,}2x+2}}{2}\right)'=0+\frac{0{,}2e^{0{,}2x-2}-0{,}2e^{-0{,}2x+2}}{2}$$
$$=0{,}1e^{0{,}2x-2}-0{,}1e^{-0{,}2x+2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 0{,}1e^{0{,}2x-2}-0{,}1e^{-0{,}2x+2}=0\Leftrightarrow e^{0{,}2x-2}=e^{-0{,}2x+2}$$
$$\Leftrightarrow 0{,}2x-2=-0{,}2x+2\Leftrightarrow 0{,}4x=4\Leftrightarrow x=10$$

x	**0**		**10**		**20**
$f'(x)$	–	–	0	+	+
f	10	↘	$f(10)$	↗	10

$f(10)\approx 7{,}24$

As coordenadas do ponto do fio que está a menor distância do solo são $(10;\,7{,}24)$.

3. $x_S=20-7=13$; $y_S=f(13)\approx 7{,}425$

$y_R=8$; $y_R-y_S=8-7{,}425=0{,}575$

$0{,}578\text{ m}=57{,}8\text{ cm}\approx 58\text{ cm}$

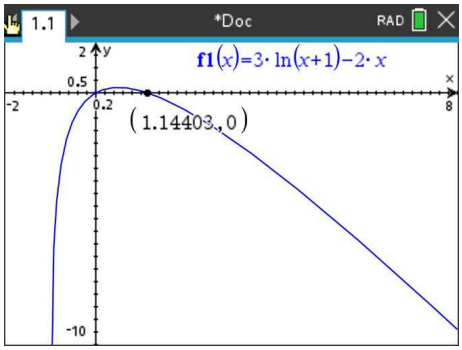
A diferença entre as distâncias ao solo do pássaro que está em *R* e do pássaro que está em *S* é, aproximadamente, 58 cm.

Página 132 – Pratica

88. $D_f=\left]-1,+\infty\right[$; $f(x)=3\ln(x+1)-2x$

88.1. $f(0)=3\ln 1-2\times 0=0-0=0$, logo 0 é um dos zeros da função.

Pretende-se determinar o outro zero graficamente, ou seja, determinar a solução não nula da equação $f(x)=0$.



Donde se conclui que o valor arredondado às milésimas, do outro zero da função *f* é 1,144.

88.2. $f'(x)=\left(3\ln(x+1)-2x\right)'=3\times\frac{1}{x+1}-2=$

$=\frac{3-2x-2}{x+1}=\frac{1-2x}{x+1}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-2x}{x+1}=0\Leftrightarrow 1-2x=0\wedge x>-1\Leftrightarrow x=0{,}5$

x	**–1**		**0,5**	+∞
$f'(x)$		+	0	–
f		↗	$f(0{,}5)$	↘

A função *f* atinge um extremo (máximo absoluto) no ponto de abcissa 0,5 (ponto *A*).

88.3. $f''(x)=\left(\frac{1-2x}{x+1}\right)'=\frac{-2(x+1)-(1-2x)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{-3}{(x+1)^2}$

$\forall x\in\left]-1,+\infty\right[,\ f''(x)<0$

Logo, o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio e não tem pontos de inflexão.

88.4.

- Como *f* é contínua em $\left]-1,+\infty\right[$, só a reta de equação $x=-1$ poderá ser assíntota vertical.

  $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(3\ln(x+1)-2x\right)=-\infty+2=-\infty$

  Donde se conclui que a reta $x=-1$ é assíntota vertical ao seu gráfico.

- Assíntota não vertical: $y=mx+b$, $m,b\in\mathbb{R}$

  $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln(x+1)-2x}{x}=$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3\ln(x+1)}{x}-\frac{2x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln(x+1)}{x}-2$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(3\ln(x+1)\right)'}{(x)'}-2=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x+1}}{1}-2$

  $=0-2=-2$

  $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln(x+1)-2x+2x\right)$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln(x+1)\right)=+\infty$

  Como $b\notin\mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico de *f* não admite assíntota não vertical.

  Conclusão: O gráfico de *f* só admite uma assíntota vertical, a reta de equação $x=-1$.

89.1. $f(x)=x^2-e^{2-x}+10\qquad D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=2x-\left(-e^{2-x}\right)=2x+e^{2-x}$

$f''(x) = 2 - e^{2-x}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^{2-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2-x} = 2 \Leftrightarrow 2 - x = \ln 2$
$\Leftrightarrow x = 2 - \ln 2$

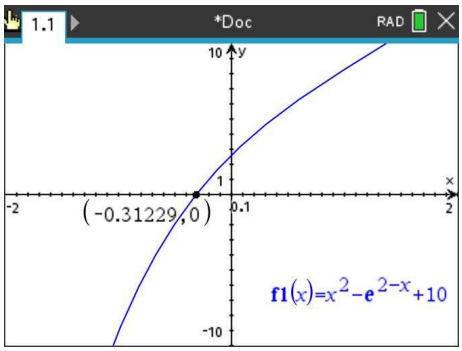
x	$-\infty$	$2 - \ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$	$f(2-\ln 2)$	$\cup$

Apesar de a representação gráfica da função *f* não evidenciar a existência de pontos de inflexão, por processos analíticos verifica-se que o gráfico de *f* tem um ponto de inflexão de abcissa $2 - \ln 2$.

89.2. Pretende-se determinar graficamente o zero de *f*.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - e^{2-x} + 10 = 0$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $x \approx -0{,}312$. Zero de *f*: $-0{,}312$

90. $f(x) = x^2 - e^{-2x}$

r é a reta tangente ao gráfico de *f* que tem menor declive e é tangente no ponto *A*.

90.1. $A(x, f(x))$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* em *A* é dado por $f'(x)$.

$f'(x) = (x^2 - e^{-2x})' = 2x + 2e^{-2x}$

Seja *d* a função que a x faz corresponder o declive da tangente em *A*.

Assim, $d(x) = 2x + 2e^{-2x}$.

Pretende-se determinar o mínimo da função *d*.

$d'(x) = (2x + 2e^{-2x})' = 2 - 4e^{-2x}$

$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -2x = -\ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 2$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}\ln 2$	$+\infty$
$d'(x)$	$-$	0	$+$
d	$\searrow$	$d\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)$	$\nearrow$

A função *d* é mínima quando $x = \frac{1}{2}\ln 2$.

Donde se conclui que a abcissa de *A* é $\frac{1}{2}\ln 2$.

90.2. $f''(x) = 2 - 4e^{-2x}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 2$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}\ln 2$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$	$f\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)$	$\cup$

Assim, o ponto *A*, de abcissa $\frac{1}{2}\ln 2$, é ponto de inflexão do gráfico de *f*.

Página 133 – Pratica

91. $D_f =]-\infty, 3[$

A reta *r* é assíntota (oblíqua) ao gráfico de *f*.

91.1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m_r > 0$

A opção correta é a **(B)**.

91.2. Por **91.1.** sabe-se que $m_r > 0$.

Por observação gráfica, sabe-se que $b_r > 0$.

A opção correta é a **(C)**.

91.3. $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 2}{x - 3}$

- Como *f* é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, só a reta de equação $x = 3$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de *f*.

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} \frac{x^2 + 5x - 2}{x - 3} = \frac{22}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} \frac{x^2 + 5x - 2}{x - 3} = \frac{22}{0^+} = +\infty$

A reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

- Assíntota não vertical: $y = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+5x-2}{x^2-3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+5x-2}{x^2-3x} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{8x-2}{x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{x} = 8$$

De modo análogo se prova que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = 8$. Então, conclui-se que a reta de equação $y = x + 8$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f*, quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$.

Confirmam-se as respostas dadas em **91.1.** e em **91.2.**.

Assíntota ao gráfico de *f*: $x = 3$ e $y = x + 8$

92. $D_f = \mathbb{R}^+;\ f(x) = \frac{5\ln x}{x}$

92.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5\ln x}{x} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 5\ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

Zero de *f*: 1

92.2. $f'(x) = \left(\frac{5\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{5}{x}\times x - 5\ln x \times 1}{x^2} = \frac{5 - 5\ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5-5\ln x}{x^2} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$

x	0		e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−
f		↗	$\frac{5}{\mathrm{e}}$	↘

$f(\mathrm{e}) = \frac{5\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \frac{5}{\mathrm{e}}$

f é crescente em $]0, \mathrm{e}[$ e decrescente em $]\mathrm{e}, +\infty[$.

f tem um máximo (absoluto) igual a $\frac{5}{\mathrm{e}}$.

92.3. Assíntotas verticais

Como *f* é contínua em $\mathbb{R}^+$, só a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical ao seu gráfico.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{5\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5\ln x}{x} = 5 \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} = 5\times0 = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

93. $r(t) = \frac{2t}{\mathrm{e}^{0,2t-1}}$, com $t \in]0, 20[$

r: medida do raio, em metros

t: tempo após o mecanismo ser ligado, em horas

93.1. $r'(t) = \frac{2\left(\mathrm{e}^{0,2t-1} - 2t\left(0,2\mathrm{e}^{0,2t-1}\right)\right)}{\left(\mathrm{e}^{0,2t-1}\right)^2} = \frac{\mathrm{e}^{0,2t-1}(2-0,4t)}{\left(\mathrm{e}^{0,2t-1}\right)^2} =$

$= \frac{2-0,4t}{\mathrm{e}^{0,2t-1}}$

$r'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-0,4t}{\mathrm{e}^{0,2t-1}} = 0 \Leftrightarrow 2 - 0,4t = 0 \Leftrightarrow t = 5$

t	0		5		20
$r'(t)$		+	0	−	
r		↗	10	↘	

$r(5) = \frac{10}{\mathrm{e}^0} = 10$

r é crescente em $]0, 5[$ e decrescente em $]5, 20[$.

r tem um máximo (absoluto) igual a 10 e um mínimo (absoluto) igual a 0.

No contexto, significa que o raio dos círculos aumenta durante as primeiras 5 horas após o mecanismo ser ligado, atinge o valor máximo de 10 metros (5 horas após ser ligado) e a partir daí começa a diminuir até que o sistema se desligue.

93.2. Raio máximo: 10 m

Área do círculo $= \pi r^2$; $A_{\text{máxima}} = \pi \times 10^2 = 100\pi$

A área máxima que o mecanismo consegue regar é $100\pi\ \mathrm{m}^2$.

93.3. $r''(t) = \frac{0,08t - 0,8}{\mathrm{e}^{0,2t-1}};\ t \in]0, 20[$

$r''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{0,08t-0,8}{\mathrm{e}^{0,2t-1}} = 0 \Leftrightarrow 0,08t - 0,8 = 0 \Leftrightarrow t = 10$

t	0		10		20
$r''(t)$		+	0	−	
r		∩	$\frac{20}{\mathrm{e}}$	∪	

$r(10) = \frac{20}{\mathrm{e}}$

O gráfico de *r* tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(\underbrace{10}_{t}, \underbrace{\frac{20}{\mathrm{e}}}_{\text{raio}}\right)$

Raio: $\frac{20}{\mathrm{e}}$

$A_{\text{círculo}} = \pi \times \left(\frac{20}{\mathrm{e}}\right)^2 = \frac{400\pi}{\mathrm{e}^2} \approx 170$

A medida da área do círculo correspondente ao raio quando o gráfico tem um ponto de inflexão é, aproximadamente, $170\ \text{m}^2$.

Página 134 – Tarefa 10

1.1. Não, apenas se sabe que a temperatura da Inês à 1:00 e às 2:30 foi 38 ºC. Não se sabe o que se passou com a temperatura entre a 1:00 e as 2:30

1.2. Não, apenas se sabe que a temperatura da Inês às 2:30 foi 38 ºC e às 4:00 foi 37 ºC. Não se sabe o que se passou com a temperatura entre as 2:30 e as 4:00.

1.3. Sim, porque a temperatura é uma função que tem uma evolução contínua. Se às 4:00 a temperatura foi 37 ºC e às 7:00 foi 39 ºC, então entre as 4:00 e as 7:00 atingiu todos os valores entre 37 ºC e 39 ºC. Logo, pode-se concluir que há pelo menos um instante entre as 4:00 e as 7:00 em que a temperatura da Inês foi 38,5 ºC.

2.1. Sim, nesta situação, se *k* é um número entre $f(1)$ e $f(3)$, então existe $c \in]1, 3[$, tal que $f(c) = k$.

2.2. Não. Se $k = \frac{5}{2}$, então não existe $c \in]1, 3[$, tal que $g(c) = k$.

2.3. Não. Se $k \in [3, 4[$, então não existe $c \in]1, 3[$, tal que $h(c) = k$.

Página 135

94. $x^4 - x = 5$

Seja *f* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 - x$.

94.1.

- A função *f* é contínua em $\mathbb{R}$ porque é polinomial. Como $[-2, -1] \subset \mathbb{R}$, então *f* é contínua em $[-2, -1]$.
- $f(-2) = (-2)^4 - (-2) = 18$

  $f(-1) = (-1)^4 - (-1) = 2$

  Então, $f(-1) < 5 < f(-2)$.
- Como *f* é contínua em $[-2, -1]$ e $f(-1) < 5 < f(-2)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in]-2, -1[$, tal que $f(c) = 5$, ou seja, a equação $f(x) = 5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]-2, -1[$.

94.2.

- A função *f* é contínua em $\mathbb{R}$ porque é polinomial. Como $\left[\frac{3}{2}, 2\right] \subset \mathbb{R}$, então *f* é contínua em $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{57}{16} = 3{,}5625$

  $f(2) = 2^4 - 2 = 14$

  Então, $f\left(\frac{3}{2}\right) < 5 < f(2)$.
- Como *f* é contínua em $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ e $f\left(\frac{3}{2}\right) < 5 < f(2)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$, tal que $f(c) = 5$, ou seja, a equação $f(x) = 5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

95. $g(x) = \frac{3 - x^3}{x^2 + 1}$; $D_g = \mathbb{R}$

95.1. Pretende-se provar que a equação $g(x) = -2$ tem uma solução no intervalo $]2, 3[$.

- *g* é contínua em $\mathbb{R}$ pois é o quociente de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$. Como $[2, 3] \subset \mathbb{R}$, então *g* é contínua em $[2, 3]$.
- $g(2) = \frac{3 - 2^3}{2^2 + 1} = -1$

  $g(3) = \frac{3 - 3^3}{3^2 + 1} = -\frac{12}{5} = -2{,}4$

  Então, $g(3) < -2 < g(2)$.

- Como g é contínua em $[2,3]$ e $g(3)<-2<g(2)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c\in\,]2,3[$, tal que $g(c)=-2$, ou seja, a equação $g(x)=-2$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]2,3[$.

95.2. A opção correta é a **(C)**.

- g é contínua em $\mathbb{R}$ e $\left[\frac{1}{2},1\right]\subset\mathbb{R}$, logo g é contínua em $\left[\frac{1}{2},1\right]$.
- $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3-\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=2{,}3$

  $g(1)=\frac{3-1^3}{1^2+1}=1$

  Então, $g(1)<2<g\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Como g é contínua $\left[\frac{1}{2},1\right]$ e $g(1)<2<g\left(\frac{1}{2}\right)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c\in\left]\frac{1}{2},1\right[$, tal que $g(c)=2$, ou seja, a equação $g(x)=2$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

Página 136

96. $f(x)=2^{-x}$ e $g(x)=x+7$; $D_f=D_g=\mathbb{R}$

96.1. $f(x)=x+5\Leftrightarrow f(x)-x-5=0$

Mostrar que a equação $f(x)=x+5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]-2,-1[$ equivale a mostrar que a função h, definida, em $\mathbb{R}$, por $h(x)=f(x)-x-5$, tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-2,-1[$.

- h é contínua em $\mathbb{R}$ pois é a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$. Como $[-2,-1]\subset\mathbb{R}$, então h é contínua em $[-2,-1]$.
- $h(-2)\times h(-1)=\left(f(-2)+2-5\right)\times\left(f(-1)+1-5\right)$
  $=(4-3)\times(2-4)=-2<0$
- Como h é contínua em $[-2,-1]$ e $h(-2)\times h(-1)<0$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c\in\,]-2,-1[$, tal que $h(c)=0$.

96.2. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$

Mostrar que a equação $f(x)=g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]-3,-2[$ equivale a mostrar que a função j, definida, em $\mathbb{R}$, por $j(x)=f(x)-g(x)$, tem pelo menos um zero no intervalo $]-3,-2[$.

- j é contínua em $\mathbb{R}$ pois é a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (f e g). Como $[-3,-2]\subset\mathbb{R}$, então j é contínua em $[-3,-2]$.
- $j(-3)\times j(-2)=\left(f(-3)-g(-3)\right)\times\left(f(-2)-g(-2)\right)$
  $=(8-4)\times(4-5)=-4<0$
- Como j é contínua em $[-3,-2]$ e $j(-3)\times j(-2)<0$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c\in\,]-3,-2[$, tal que $j(c)=0$.

96.3. $\frac{g(x)}{f(x)}=2$

Seja l a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $l(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$.

- A função l é contínua em $\mathbb{R}$ pois é o quociente entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$. Como $\left[-\frac{3}{2},-1\right]\subset\mathbb{R}$, então l é contínua em $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$.
- $l\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{g\left(-\frac{3}{2}\right)}{f\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{\frac{11}{2}}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{11}{2}}{\sqrt{2^3}}=\frac{11}{4\sqrt{2}}\approx 1{,}9445$

  $l(-1)=\frac{g(-1)}{f(-1)}=\frac{6}{2}=3$

  Então, $l\left(-\frac{3}{2}\right)<2<l(-1)$.

- Como I é contínua em $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$ e $I\left(-\frac{3}{2}\right)<2<I(-1)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c\in\left]-\frac{3}{2},-1\right[$, tal que $I(c)=0$, ou seja, a equação $\frac{g(x)}{f(x)}=2$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]-\frac{3}{2},-1\right[$.

Página 137 – Tarefa 11

1. $D_f=\mathbb{R}$; $f(x)=\begin{cases} x^2-2 \text{ se } x\leq -1 \\ x+\ln(x+2) \text{ se } x>-1 \end{cases}$

1.1.

- f é contínua em $]-\infty,-1[$ pois é polinomial.
- f é contínua em $]-1,+\infty[$ pois é a soma de duas funções contínuas em $]-1,+\infty[$.
- f é contínua em $x=-1$ se existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, ou seja, se $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$

  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(x^2-2\right)=1-2=-1$

  $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x+\ln(x+2)\right)=-1+\ln 1=-1$

  $f(-1)=(-1)^2-2=-1$

  Então, f é contínua em $x=-1$.

  Conclusão: f é contínua em $\mathbb{R}$.

1.2. a)

- f é contínua em $\mathbb{R}$ e $\left[-\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right]\subset\mathbb{R}$, logo f é contínua em $\left[-\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right]$.
- $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2=\frac{1}{4}$

  $f\left(-\frac{5}{4}\right)=\left(-\frac{5}{4}\right)^2-2=-\frac{7}{16}$

  Então, $f\left(-\frac{5}{4}\right)<0<f\left(-\frac{3}{2}\right)$
- Como f é contínua em $\left[-\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right]$ e $f\left(-\frac{5}{4}\right)<0<f\left(-\frac{3}{2}\right)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c\in\left]-\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right[$ tal que $f(c)=0$, ou seja, a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]-\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right[$.

b)

- f é contínua em $\mathbb{R}$ e $\left[-\frac{1}{2},0\right]\subset\mathbb{R}$, logo f é contínua em $\left[-\frac{1}{2},0\right]$.
- $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\ln\left(-\frac{1}{2}+2\right)=-\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{3}{2}\right)\approx -0{,}0945$

  $f(0)=0+\ln 2=\ln 2\approx 0{,}6931$

  Então, $f\left(-\frac{1}{2}\right)<0<f(0)$.
- Como f é contínua em $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right)<0<f(0)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c\in\left]-\frac{1}{2},0\right[$, tal que $f(c)=0$, ou seja, a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]-\frac{1}{2},0\right[$.

c)

- f é contínua em $\mathbb{R}$ e $\left[-\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right]\subset\mathbb{R}$, logo f é contínua em $\left[-\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right]$.
- $f\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{7}{16}$

  $f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}+\ln\left(\frac{7}{4}\right)\approx 0{,}3096$

  Então, $f\left(-\frac{5}{4}\right)<0<f\left(-\frac{1}{4}\right)$.
- Como f é contínua em $\left[-\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right]$ e $f\left(-\frac{5}{4}\right)<0<f\left(-\frac{1}{4}\right)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c\in\left]-\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right[$, tal que $f(c)=0$, ou seja, a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]-\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right[$.

2. $D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 2 \text{ se } x \leq 2 \\ \dfrac{3}{x-2} \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

2.1. $g(1) = 1^3 - 2 = -1$ e $g(3) = \dfrac{3}{3-2} = 3$

Logo, $g(1) < 0 < g(3)$.

2.2. Não podemos concluir, por aplicação do Teorema de Bolzano-Cauchy, que a função *g* tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1, 3[$ porque a função *g* não é contínua em $[1, 3]$ dado que não é contínua em $x = 2$ (basta repara que $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$).

2.3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 - 2 = 0 \wedge x \leq 2\right) \vee \left(\underbrace{\dfrac{3}{x-2} = 0}_{\text{equação impossível}} \wedge x > 2\right)$

$\Leftrightarrow \left(x = \sqrt[3]{2} \wedge x \leq 2\right) \vee x \in \varnothing \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$

Zero de *g*: $\sqrt[3]{2}$

3. $f(x) = x + 3^{1-x}$; $D_f = \mathbb{R}$

$P(x, f(x))$; $x > 0$

$B(0, f(0))$

$A(x, 0)$; $x > 0$

$A_{[OAPB]} = \dfrac{\overline{AP} + \overline{OB}}{2} \times \overline{OA}$

$\overline{AP} = f(x) = x + 3^{1-x}$

$f(0) = 0 + 3^1 = 3$, logo $B(0, 3)$ e $\overline{OB} = 3$.

$\overline{OA} = x$; $x > 0$

Então, $g(x) = \dfrac{x + 3^{1-x} + 3}{2} \times x = \dfrac{x^2 + x3^{1-x} + 3x}{2}$.

- *g* é contínua em $]0, +\infty[$ e $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right] \subset \mathbb{R}$, logo *g* é contínua em $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.
- $g\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \times 3^{-\frac{1}{2}} + 3 \times \frac{3}{2}}{2} \approx 3{,}808$

  $g(2) = \dfrac{2^2 + 2 \times 3^{-1} + 3 \times 2}{2} = \dfrac{16}{3} \approx 5{,}333$

  Então, $g\left(\dfrac{3}{2}\right) < 5 < g(2)$.
- Como *g* é contínua em $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ e $g\left(\dfrac{3}{2}\right) < 5 < g(2)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in \left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$, tal que $g(c) = 5$, ou seja, existe, pelo menos, um valor da abcissa do ponto *P* pertencente ao intervalo $\left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$, para o qual a medida da área do trapézio é igual a 5.

Página 138 – Pratica

97. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ se } x < 1 \\ 2x + \ln x \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$; $D_f = \mathbb{R}$

97.1. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x + \ln x) = 2 + \ln 1 = 2 + 0 = 2$

$f(1) = 2 \times 1 + \ln 1 = 2$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$, conclui-se que a função *f* é contínua em $x = 1$.

97.2.

- *f* é contínua em $]-\infty, 1[$ por ser o quociente entre duas funções contínuas.
- *f* é contínua em $]1, +\infty[$ por ser a soma de duas funções contínuas.
- *f* é contínua em $x = 1$ (provado em **97.1.**).

Donde se conclui que *f* é contínua em $\mathbb{R}$, porque é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

97.3.

- *f* é contínua em $\mathbb{R}$ e $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right] \subset \mathbb{R}$, logo *f* é contínua em $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
- $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{\frac{1}{4} - 1}{-\frac{3}{2}} = \dfrac{-\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}$

  $f(1) = 2$

  Logo, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) < 1 < f(1)$.

- Como f é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right) < 1 < f(1)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$, tal que $f(c) = 1$, ou seja, a equação $f(x) = 1$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$.

98. $h(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x+1}{x+3} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$; $D_h = \mathbb{R}$

98.1. $h(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2-x}{x} = 0 \wedge x < 0\right) \vee \left(\frac{x+1}{x+3} = 0 \wedge x \geq 0\right)$

$\Leftrightarrow (x = 2 \wedge x \neq 0 \wedge x < 0) \vee (x = -1 \wedge x \neq -3 \wedge x \geq 0)$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing \vee x \in \varnothing \Leftrightarrow x \in \varnothing$

A função h não tem zeros.

98.2. $h(-2) = \frac{2-(-2)}{-2} = -2$ e $h(1) = \frac{1+1}{1+3} = \frac{1}{2}$

Logo, $h(-2) \times h(1) = -2 \times \frac{1}{2} = -1 < 0$.

Não é possível aplicar o Teorema de Bolzano-Cauchy ao intervalo $]-2, 1[$ porque h não é contínua em $[-2, 1]$ visto que não é contínua em $x = 0$ (basta constatar que $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = -\infty$).

99. $f(x) = -\ln\left(\frac{x}{4}\right)$; $D_f = \mathbb{R}^+$

A: ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox

$P(x, f(x))$; $0 < x < x_A$

g: função que a cada valor de x (abcissa de P) faz corresponder a medida da área do triângulo $[OAP]$.

99.1. $A_{[OAP]} = \frac{\overline{OA} \times y_P}{2}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4} = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 4$

$A(4, 0)$

Assim, $g(x) = \frac{4 \times f(x)}{2} = 2f(x) = -2\ln\left(\frac{x}{4}\right)$, com $0 < x < 4$.

99.2.

- A função g é contínua em $]0, 4[$ e $[1, 2] \subset]0, 4[$, logo g é contínua em $[1, 2]$.
- $g(1) = -2\ln\left(\frac{1}{4}\right) = 2\ln 4 \approx 2{,}7726$

  $g(2) = -2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2 \approx 1{,}3863$

  Logo, $g(2) < 2 < g(1)$.
- Como g é contínua em $[1, 2]$ e $g(2) < 2 < g(1)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c \in]1, 2[$, tal que $g(c) = 2$, ou seja, existe um ponto P, de abcissa pertencente ao intervalo $]1, 2[$, para o qual a medida da área do triângulo $[OAP]$ é igual a 2.

100. $f(x) = \ln x$ e $g(x) = 3 - x^2$

$D_f = \mathbb{R}^+$ e $D_g = \mathbb{R}$

100.1. $f(x) = 3 - x \Leftrightarrow f(x) + x - 3 = 0$

Mostrar que a equação $f(x) = 3 - x$ tem uma solução no intervalo $]2, e[$ equivale a mostrar que a função h, definida em $\mathbb{R}^+$, por $h(x) = f(x) + x - 3$ tem um zero no intervalo $]2, e[$.

- h é contínua em $\mathbb{R}^+$ pois é a soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$. Como $[2, e] \subset \mathbb{R}^+$, então h é contínua em $[2, e]$.
- $h(2) \times h(e) = (f(2) + 2 - 3) \times (f(e) + e - 3)$

  $= (\ln 2 - 1) \times (\ln e + e - 3) = \underbrace{(\ln 2 - 1)}_{-} \times \underbrace{(e - 2)}_{+} < 0$
- Como h é contínua em $[2, e]$ e $h(2) \times h(e) < 0$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in]2, e[$, tal que $h(c) = 0$, ou seja, a função h tem um zero no intervalo $]2, e[$.

Logo, a equação $f(x) = 3 - x$ tem uma solução no intervalo $]2, e[$.

100.2. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$

Mostrar que a solução da equação $f(x)=g(x)$ pertence ao intervalo $]1, 2[$ equivale a mostrar que o zero da função *j* definida, em $\mathbb{R}^+$, por $j(x)=f(x)-g(x)$, pertence ao intervalo $]1, 2[$.

- A função *j* é contínua em $\mathbb{R}^+$ pois é a diferença entre duas funções contínuas (*f* e *g*) em $\mathbb{R}^+$. Como $[1, 2] \subset \mathbb{R}^+$, então *j* é contínua em $[1, 2]$.
- $j(1)\times j(2)=(f(1)-g(1))\times(f(2)-g(2))$
  $=(\ln 1-(3-1^2))\times(\ln 2-(3-2^2))$
  $=-2\times\underbrace{(\ln 2+1)}_{+}<0$
- Como *j* é contínua em $[1, 2]$ e $j(1)\times j(2)<0$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in]1, 2[$, tal que $j(c)=0$, ou seja, os gráficos das funções *f* e *g* intersetam-se num ponto (*A*) pertencente ao intervalo $]1, 2[$.

Página 139 – Pratica

101. $f(x)=x-\ln x;\ D_f=\mathbb{R}^+$

101.1. $f'(x)=(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow x=1$

x	**0**		**1**	$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+
f		↘	1	↗

$f(1)=1-\ln 1=1-0=1$

f é decrescente em $]0, 1[$ e crescente em $]1, +\infty[$.

f tem um extremo (mínimo absoluto) igual a 1.

101.2. a) A função *f* é contínua em $\mathbb{R}^+$ pois é a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$. Como $\left[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right] \subset \mathbb{R}^+$, então *f* é contínua em $\left[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right]$.

- $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}-\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}-(-2)=\frac{1}{e^2}+2 \approx 2{,}1353$
  $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-(-1)=\frac{1}{e}+1 \approx 1{,}3679$
  Logo, $f\left(\frac{1}{e}\right)<1{,}5<f\left(\frac{1}{e^2}\right)$.
- Como *f* é contínua em $\left[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right]$ e $f\left(\frac{1}{e}\right)<1{,}5<f\left(\frac{1}{e^2}\right)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in \left]\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right[$, tal que $f(c)=1{,}5$, ou seja, a equação $f(x)=1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right[$. Como no intervalo $\left]\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right[$ a função *f* é decrescente, então essa solução é única.

Assim, a equação $f(x)=1{,}5$ tem uma única solução no intervalo $\left]\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right[$.

b)

- A função *f* é contínua em $\mathbb{R}^+$ pois é a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$. Como $[1, e] \subset \mathbb{R}^+$, então *f* é contínua em $[1, e]$.
- $f(1)=1-\ln 1=1-0=1$
  $f(e)=e-\ln e=e-1 \approx 1{,}7183$
  Logo, $f(1)<1{,}5<f(e)$
- Como *f* é contínua em $[1, e]$ e $f(1)<1{,}5<f(e)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in]1, e[$, tal que $f(c)=1{,}5$, ou seja, a equação $f(x)=1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, e[$. Como no intervalo $]1, e[$ a função *f* é crescente, então essa solução é única.

Assim, a equação $f(x)=1{,}5$ tem uma única solução no intervalo $]1, e[$.

102. f e g são funções, de domínio $\mathbb{R}$, contínuas em $\mathbb{R}$.

$[a, b]$, com $a < b$.

Sabe-se que $f(a) = b$, $f(b) = a$, $g(a) = a - b$ e $g(b) = b - a$.

- A função $g \circ f$ é contínua em $[a, b]$ pois é a composta de duas funções contínuas (f é contínua em $[a, b]$ e g é contínua em $[f(a), f(b)]$.
- $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = b - a > 0$ (pois $a < b$)

  $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(a) = a - b < 0$ (pois $a < b$)

  Logo, $(g \circ f)(a) \times (g \circ f)(b) < 0$
- Como $(g \circ f)$ é contínua em $[a, b]$ e $(g \circ f)(a) \times (g \circ f)(b) < 0$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in]a, b[$, tal que $(g \circ f)(c) = 0$, ou seja, a função $g \circ f$ tem, pelo menos, um zero em $]a, b[$.

Página 140

103. $D_f =]0, +\infty[$ e $f(x) = x^3 + x - 3$.

c é o único zero de f.

103.1. Pretende-se mostrar, recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, que c pertence ao intervalo $]1, 2[$, ou seja, que a equação $f(x) = 0$ tem solução em $]1, 2[$.

- f é contínua em $]0, +\infty[$ pois é polinomial. Como $[1, 2] \subset]0, +\infty[$, então f é contínua em $[1, 2]$.
- $f(1) = 1^3 + 1 - 3 = -1$

  $f(2) = 2^3 + 2 - 3 = 7$

  Logo, $f(1) < 0 < f(2)$.
- Como f é contínua em $[1, 2]$ e $f(1) < 0 < f(2)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in]1, 2[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, a função f tem, pelo menos, um zero em $]1, 2[$. Como f tem um só zero, que é c, então $c \in]1, 2[$.

103.2. a) Pretende-se recorrer ao método da bisseção e encontrar um intervalo $]a, b[$ tal que

$c \in]a, b[$ e $b - a = \frac{1}{2}$.

Por **103.1.**, sabe-se que $c \in]1, 2[$.

Seja m_1 o ponto médio de $]1, 2[$.

$m_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

$f(m_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} - 3 = \frac{27}{8} + \frac{3}{2} - 3 = \frac{15}{8}$

Como $f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, conclui-se que $c \in \left]1, \frac{3}{2}\right[$.

O intervalo pedido é $\left]1, \frac{3}{2}\right[$.

b) Pretende-se recorrer ao método da bisseção e encontrar um intervalo $]a, b[$ tal que

$c \in]a, b[$ e $b - a = \frac{1}{4}$.

Por **103.2. a)**, sabe-se que $c \in \left]1, \frac{3}{2}\right[$.

Seja m_2 o ponto médio de $\left]1, \frac{3}{2}\right[$.

$m_2 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$

$f(m_2) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 + \frac{5}{4} - 3 = \frac{125}{64} + \frac{5}{4} - 3 = \frac{13}{64}$

Como $f(1) \times f\left(\frac{5}{4}\right) < 0$, conclui-se que

$c \in \left]1, \frac{5}{4}\right[$.

O intervalo pedido é $\left]1, \frac{5}{4}\right[$.

c) Pretende-se recorrer ao Método da Bisseção e encontrar um intervalo $]a, b[$ tal que

$c \in]a, b[$ e $b - a = \frac{1}{8}$.

Por **103.2. b)**, sabe-se que $c \in \left]1, \frac{5}{4}\right[$.

Seja m_3 o ponto médio de $\left]1, \frac{5}{4}\right[$.

$m_3 = \frac{1+\frac{5}{4}}{2} = \frac{9}{8}$

$f(m_3)=f\left(\frac{9}{8}\right)=\left(\frac{9}{8}\right)^3+\frac{9}{8}-3=\frac{729}{512}+\frac{9}{8}-3=-\frac{231}{512}$

Como $f\left(\frac{9}{8}\right)\times f\left(\frac{5}{4}\right)<0$, conclui-se que

$c\in\left]\frac{9}{8},\frac{5}{4}\right[$.

O intervalo pedido é $\left]\frac{9}{8},\frac{5}{4}\right[$.

104. A equação $x+2\ln x=0$ tem uma solução pertencente ao intervalo $\left]\frac{1}{2},2\right[$.

Seja f a função definida por $f(x)=x+2\ln x$.

Sabe-se que existe $c\in\left]\frac{1}{2},2\right[$, tal que $f(c)=0$.

Pretende-se recorrer ao método da bisseção e encontrar um intervalo $]a,b[$, tal que $c\in]a,b[$ e $b-a<0{,}4$.

- Seja m_1 o ponto médio de $\left]\frac{1}{2},2\right[$.

  $m_1=\frac{\frac{1}{2}+2}{2}=\frac{5}{4}$

- $f(m_1)=f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}+2\ln\left(\frac{5}{4}\right)>0$

  $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+2\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-2\ln 2<0$

  $f(2)=2+2\ln 2>0$

  Como $f\left(\frac{1}{2}\right)\times f\left(\frac{5}{4}\right)<0$, $c\in\left]\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right[$.

- Seja m_2 o ponto médio de $\left]\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right[$.

  $m_2=\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}}{2}=\frac{7}{8}$

  $f(m_2)=f\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{7}{8}+2\ln\left(\frac{7}{8}\right)>0$

  Como $f\left(\frac{1}{2}\right)\times f\left(\frac{7}{8}\right)<0$, $c\in\left]\frac{1}{2},\frac{7}{8}\right[$.

Amplitude do intervalo $\left]\frac{1}{2},\frac{7}{8}\right[$: $\frac{7}{8}-\frac{1}{2}=\frac{3}{8}=0{,}375$

$0{,}375<0{,}4$

Um intervalo que satisfaz as condições do enunciado é $\left]\frac{1}{2},\frac{7}{8}\right[$.

Página 141 – Tarefa 12

$x^3-5x=1\Leftrightarrow \underbrace{x^3-5x-1}_{f(x)}=0$

$f(x)=x^3-5x-1$. f é contínua em $\mathbb{R}$.

$x_0\in]1,3[\ :\ f(x_0)=0\rightarrow$ f tem um zero em $]1,3[$.

1.

Valor de $f(a)$	**Valor de $f(b)$**	**Sinal de $f(a)\times f(b)$**	**Valor de $x_0\in]a,b[$**
$f(1)=-5$	$f(3)=11$	–	$]1,3[$
$f\left(\frac{1+3}{2}\right)=-3$	$f(1)=-5$	+	$]2,3[$
$f\left(\frac{1+3}{2}\right)=-3$	$f(3)=11$	–	
$f(2{,}5)=2{,}125$	$f(2)$	–	$]2;2{,}5[$
$f(2{,}5)=2{,}125$	$f(3)$	+	
$f(2{,}25)=-\frac{55}{64}$	$f(2)$	+	$]2{,}25;2{,}5[$
$f(2{,}25)=-\frac{55}{64}$	$f(2{,}5)$	–	
$f(2{,}375)=\frac{267}{512}$	$f(2{,}25)$	–	$]2{,}25;2{,}375[$
$f(2{,}375)=\frac{267}{512}$	$f(2{,}5)$	+	

Valor aproximado por:		**Erro inferior a $\lvert b-a\rvert$**
defeito	**excesso**	
1	3	2 unidades
2	3	1 unidade
2	2,5	0,5 unidade
2,25	2,5	0,25 unidade
2,25	2,375	0,125 unidade

Valor aproximado de x_0 por defeito, com erro inferior a 0,2: 2,25

Valor aproximado de x_0 por excesso, com erro inferior a 0,2: 2,375

2. Recorrendo ao recurso associado a esta página, sabe-se que valores aproximados de x_0, por defeito e por excesso, com erro inferior a 10^{-2} são, por exemplo, 2,32 e 2,34.

3. Designemos por *n* o número de iterações $(n \in \mathbb{N})$.

Pretende-se determinar o menor valor de *n* de modo que $2 \times \frac{1}{2^n} < 10^{-3}$.

$2 \times \frac{1}{2^n} < 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{2}{2^n} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 2000 < 2^n \Leftrightarrow n > \log_2 2000$

Como $\log_2 2000 \approx 10{,}96578$, conclui-se que o menor valor de *n* para que a amplitude do intervalo seja menor do que 10^{-3} é 11.

Assim, a opção correta é a **(B)**.

Página 142

105. $f(x) = 0$, sendo $f(x) = x - 3\ln x$.

$A(1, 0)$

105.1. a) $f'(x) = 1 - \frac{3}{x}$

b) x_1: aproximação resultante da 1.ª iteração

$A(1, 0)$ e $x_0 = 1$

B: ponto do gráfico de *f* que tem abcissa igual à de *A*

$B(1, f(1))$ $\quad f(1) = 1 - 3\ln 1 = 1 - 3 \times 0 = 1$

$B(1, 1)$

Declive da reta tangente em *B*:

$m = f'(1) = 1 - \frac{3}{1} = -2$

$y = -2x + b \overset{B(1,1)}{\rightarrow} 1 = -2 + b \Leftrightarrow b = 3$

Equação da reta tangente em *B*: $y = -2x + 3$

A_1: ponto de interseção da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *B* com o eixo Ox

$0 = -2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$A_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

x_1: abcissa do ponto A_1

Então, $x_1 = \frac{3}{2}$, ou seja, $x_1 = 1{,}5$.

105.2. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Então, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}5 - \frac{f(1{,}5)}{f'(1{,}5)}$

$= 1{,}5 - \frac{1{,}5 - 3\ln(1{,}5)}{-1} = 3 - 3\ln(1{,}5) \approx 1{,}7836$

O valor de x_2 arredondado às décimas é 1,8.

Cálculo auxiliar: $f(1{,}5) = 1{,}5 - 3\ln(1{,}5)$

$f'(1{,}5) = 1 - \frac{3}{1{,}5} = 1 - 2 = -1$

Página 143 – Tarefa 13

$f(x) = 0$, sendo $f(x) = x^3 - 3x + 3$

f tem um e um só zero.

f admite extremos nos pontos de abcissas -1 e 1.

1. Como a função *f* admite extremos nos pontos de abcissas -1 e 1, então a escolha de um ponto *A* de coordenadas $(x_0, 0)$, no 1.º passo da aplicação do método é uma má escolha se $x_0 \in \{-1, 1\}$ pois, nesses casos, a reta tangente ao gráfico de *f* nos pontos de abcissas -1 e 1 é horizontal (não interseta o eixo Ox).

2. $A\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \rightarrow$ ponto de "partida" para aplicação do Método de Newton-Raphson.

2.1. $x_0 = -1{,}5 \qquad B(-1{,}5; f(-1{,}5))$

$f(-1{,}5) = (-1{,}5)^3 - 3 \times 1{,}5 + 3 = 4{,}125 \therefore B(-1{,}5; 4{,}125)$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(-1{,}5) = 3\times(-1{,}5)^2 - 3 = 3{,}75$

Declive da reta tangente ao gráfico de f em B: 3,75

$y = 3{,}75x + b \overset{B(-1{,}5;\,4{,}125)}{\rightarrow} 4{,}125 = -5{,}625 + b \Leftrightarrow b = 9{,}75$

Equação da reta tangente em B: $y = 3{,}75x + 9{,}75$

$0 = 3{,}75x + 9{,}75 \Leftrightarrow x = -2{,}6$

$A_1(-2{,}6;\,0)$ e $x_1 = -2{,}6$

2.2. Sabe-se que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Então, $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -2{,}6 - \dfrac{f(-2{,}6)}{f'(-2{,}6)}$.

$f(-2{,}6) = (-2{,}6)^3 - 3\times(-2{,}6) + 3 = -6{,}776$

$f'(-2{,}6) = 3\times(-2{,}6)^2 - 3 = 17{,}28$

Donde se conclui que:

$x_2 = -2{,}6 - \dfrac{-6{,}776}{17{,}28}$, ou seja, $x_2 \approx -2{,}208$

3. Executando o programa em Python, obtém-se $-2{,}1038$ (por excesso) ou $-2{,}1039$ (por defeito) para valor aproximado da solução da equação inicial com quatro casas decimais.

Página 144 – Pratica

106. $x = 3\ln x$, com $x > 0$

106.1. $x = 3\ln x \Leftrightarrow x - 3\ln x = 0$; $f(x) = x - 3\ln x$

$f(x) = 0$, sendo $f(x) = x - 3\ln x \quad (D_f = \mathbb{R}^+)$

106.2.

- A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$ pois é a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$. Como $[4, 5] \subset \mathbb{R}^+$, então f é contínua em $[4, 5]$.
- $f(4) = 4 - 3\ln 4 \approx -0{,}15888$

  $f(5) = 5 - 3\ln 5 \approx 0{,}17169$

  Logo, $f(4) < 0 < f(5)$.
- Como f é contínua em $[4, 5]$ e $f(4) < 0 < f(5)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $c \in]4, 5[$, tal que $f(c) = 0$, ou seja, a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]4, 5[$.

106.3. a) $]4{,}5;\,4{,}75[$; $|4{,}75 - 4{,}5| = 0{,}25 = 2{,}5\times10^{-1}$

Os extremos do intervalo $]4{,}5;\,4{,}75[$ são valores aproximados de s com erro inferior a $2{,}5\times10^{-1}$. A opção correta é a **(D)**.

b) Erro inferior a 5×10^{-2}

$5\times10^{-2} = 5\times0{,}01 = 0{,}05$

$]a, b[$	$f(a)$	$f(b)$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$]4, 5[$	−0,158 883	0,171 686	−0,012 232
$]4{,}5; 5[$	−0,012 232	0,171 686	0,075 566
$]4{,}5; 4{,}75[$	−0,012 232	0,075 566	0,030 571
$]4{,}5; 4{,}625[$	−0,012 232	0,030 571	0,008 888
$]4{,}5; 4{,}5625[$	−0,012 232	0,008 888	−0,001 744
$]4{,}53125; 4{,}5625[$	−0,001 744	0,008 888	0,003 554

$\lvert b-a\rvert$
1
0,5
0,25
0,125
0,0625
0,03125

$|b - a| = 0{,}03125 < 5\times10^{-2}$

Assim, os extremos do intervalo $]4{,}53125; 4{,}5625[$ são valores aproximados de s com erro inferior a 5×10^{-2}.

107. $f(x) = 2^x - x^3$; $D_f = \mathbb{R}$, com $x > 0$

107.1.

- f é contínua em $\mathbb{R}$ pois é a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$. Como $[0, 2] \subset \mathbb{R}$, então f é contínua em $[0, 2]$.
- $f(0) = 2^0 - 0^3 = 1$

  $f(2) = 2^2 - 2^3 = -4$

  Então, $f(2) < 0 < f(0)$.

- Como f é contínua em $[0, 2]$ e $f(2) < 0 < f(0)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in]0, 2[$, tal que $f(c) = 0$, ou seja, a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, 2[$.

107.2. a) Os extremos do intervalo na 3.ª iteração São 1,25 e 1,5.

b) $10^{-2} = 0{,}01$

Sabe-se que o processo iterativo termina quando os extremos do intervalo $]a, b[$ forem valores aproximados do zero da função, com erro inferior a 10^{-2}.

Recorrendo à aplicação GeoGebra associada à página 142 do manual, conclui-se que $a = 1{,}3671875$ e $b = 1{,}375...$

Página 145 – Pratica

108. $f(x) = 0{,}5x^2 - e^{x-1} - 2$

$A_1(-4, 0)$, $A_2(-1, 0)$ e $A_3(1, 0)$

108.1. $f'(x) = x - e^{x-1}$

$f'(-4) = -4 - e^{-5}$; $f'(-1) = -1 - e^{-2}$ e $f'(1) = 0$

108.2. Para iniciar a aplicação do Método de Newton-Raphson não escolher o ponto A_3 pois $f'(1) = 0$, ou seja, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 1$ não interseta o eixo Ox (pois é horizontal).

108.3. Com base na informação da tabela, estima-se que uma aproximação do zero da função f com erro inferior a 10^{-4} seja $-2{,}0241$ (por defeito) ou $-2{,}0242$ (por excesso).

109. $2^x = 3x$, com $x > 2$.

109.1. $2^x = 3x \wedge x > 2 \Leftrightarrow \underbrace{2^x - 3x}_{f(x)} = 0 \wedge x > 2$

$f(x) = 2^x - 3x$ e $D_f =]2, +\infty[$

Pretende-se provar que a função f tem um zero pertencente ao intervalo $]3, 4[$.

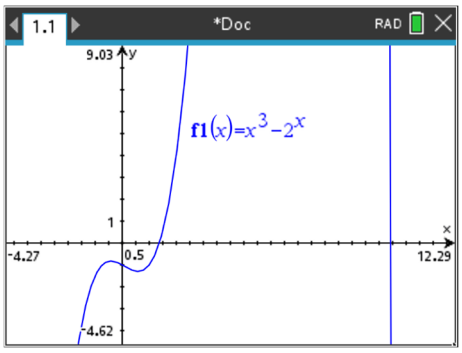
- f é contínua em $]2, +\infty[$, porque é a diferença entre duas funções contínuas em $]2, +\infty[$. Como $[3, 4] \subset]2, +\infty[$, então f é contínua em $[3, 4]$.
- $\left.\begin{array}{l} f(3) = 2^3 - 3 \times 3 = -1 \\ f(4) = 2^4 - 3 \times 4 = 4 \end{array}\right\rangle f(3) \times f(4) < 0$
- Como f é contínua em $[3, 4]$ e $f(3) \times f(4) < 0$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c \in]3, 4[$, tal que $f(c) = 0$, ou seja, a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]3, 4[$.

Logo, a equação $2^x = 3x$, com $x > 2$, tem solução pertencente ao intervalo $]3, 4[$.

109.2. Recorrendo à tecnologia para aplicar o Método de Newton-Raphson, sugere-se 3,3132 para aproximação da solução com quatro casas decimais.

110. $f(x) = x^3 - 2^x$

110.1. Uma representação gráfica da função f é:



110.2. Adaptação e aplicando o programa em Python associado à Tarefa 13, a página 145, conclui-se que uma aproximação, com cinco casas decimais, do zero da função f é 1,37346 (por defeito) ou 1,37347 (por excesso).

Página 146 – Consolida

1.1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x \text{ se } x \leq 1 \\ \dfrac{3 - 4x}{x} \text{ se } x > 1 \end{cases}$

f é contínua em $x=1$ se $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-2x\right)=1^2-2\times 1=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3-4x}{x}=\dfrac{3-4\times 1}{1}=-1$

$f(1)=1^2-2\times 1=-1$

Conclusão: f é contínua em $x=1$.

1.2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+1} \text{ se } x>-2\\ 1+\dfrac{x}{5} \text{ se } x\le -2\end{cases}$

f é contínua em $x=-2$ se

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)$.

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(1+\dfrac{x}{5}\right)=1+\dfrac{-2}{5}=\dfrac{3}{5}$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x+1}{x^2+1}=\dfrac{-2+1}{(-2)^2+1}=-\dfrac{1}{5}$

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, então f não é contínua em $x=-2$.

2. $g(x)=\begin{cases}3k-2\log_4\left(\sqrt{x}\right) \text{ se } x>2\\ 2^{1-x}+k \text{ se } x\le 2\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

g é contínua em $]-\infty,2[$ e em $]2,+\infty[$.

O único ponto onde g poderá não ser contínua é em $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2^{1-x}+k\right)=2^{-1}+k=\dfrac{1}{2}+k$

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(3k-2\log_4\left(\sqrt{x}\right)\right)=3k-2\log_4\sqrt{2}=$

$=3k-2\times\dfrac{1}{4}=3k-\dfrac{1}{2}$

$g(2)=2^{1-2}+k=\dfrac{1}{2}+k$

g é contínua em $x=2$ se:

$\dfrac{1}{2}+k=3k-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 1=2k\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2}$

Conclusão: A função g é contínua se $k=\dfrac{1}{2}$.

3. **Tarifário do serviço de mudanças:**

- Taxa fixa de saída: 5 €
- Custo por quilómetro para distâncias até 20 km: 2 €
- Para cada quilómetro além dos 20 km: 1,50 €

3.1. **a)** 12 km

$5+2\times 12=29$

Por um serviço cuja distância seja 12 km paga-se 29 €.

b) 32 km = 20 km + 12 km

$5+2\times 20+1{,}50\times 12=63$

Por um serviço cuja distância seja 32 km paga-se 63 €.

3.2. x : distância em km

C: custo do serviço em euros

$C(x)=\begin{cases}5+2x \text{ se } 0\le x\le 20\\ 1{,}5x+15 \text{ se } x>20\end{cases}$

Cálculo auxiliar:

Sendo $x>20$, então

$C(x)=5+2\times 20+1{,}5(x-20)$, ou seja,

$C(x)=1{,}5x+15$

a) $C(20)=5+2\times 20=45$

$\lim\limits_{x\to 20^-} C(x)=\lim\limits_{x\to 20^-}(5+2x)=45$

$\lim\limits_{x\to 20^+} C(x)=\lim\limits_{x\to 20^+}(1{,}5x+15)=45$

Como $\lim\limits_{x\to 20^-} C(x)=\lim\limits_{x\to 20^+} C(x)=C(20)$, conclui-se que a função C é contínua em $x=20$.

b) C é contínua em $]10,20[$ e em $]20,50[$ porque é definida por expressões polinomiais.

C é contínua em $x=20$ (provado na alínea anterior).

Logo, C é contínua em $]10,50[$.

4. $f(x)=1-2x$; $g(x)=x^2+3$; $h(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$.

4.1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$

4.2. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+3\right)=+\infty$

4.3. $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x^2+1}=\dfrac{0-2}{0^2+1}=-2$

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}(f\times g)(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\times\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)\times\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3\right)=1\times 3=3$

4.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x+4\right)=+\infty$

5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{se } x<-1\\ \dfrac{x}{x^2+1} & \text{se } x\geq -1\end{cases}$; $D_f=\mathbb{R}$

5.1. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{-2+1}=-1$

5.2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$

5.3. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{-\infty}=0$

5.4. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$

5.5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{0}{0+1}=1$

5.6. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

5.7. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

6. f e $g\to$ funções polinomiais

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-5$

Por exemplo, as funções f e g definidas por

$f(x)=3-10x$ e $g(x)=2x+1$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(3-10x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(2x+1)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3-10x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-10x}{2x}=\dfrac{-10}{2}-5$

Página 147 – Consolida

7. $f(x)=x^3+3x-4$; $g(x)=x^2-1$; $h(x)=3x^3+x-1$

7.1. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+3x-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty$

7.2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{h(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3+x-1}{x^3+3x-4}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3}{x^3}=3$

7.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3+3x-4}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)'}{(x^3+3x-4)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{3x^2+3}=\dfrac{2}{3+3}=\dfrac{1}{3}$

Então, pela regra de L´Hôpital:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3+3x-4}=\dfrac{1}{3}$

7.4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{g(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-1}{3x^3+x-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{3x^3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{3x}=0$

8. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{kx+\sin x}{x} & \text{se } x<0\\ 2 & \text{se } x=0\\ \dfrac{2k\ln(x+1)}{x} & \text{se } x>0\end{cases}$; $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

A função f apenas poderá não ser contínua em $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{kx+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{kx}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

  $=k+\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}}_{\text{limite notável}}=k+1$
- $f(0)=2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2k\ln(x+1)}{x}=2k\times\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=$

  $=2k\times 1=2k$

Então, f é contínua em $x=0$ se:

$k+1=2\wedge 2k=2\Leftrightarrow k=1\wedge k=1\Leftrightarrow k=1$

9.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x}-1)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}}{2}=\dfrac{3}{2}$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

9.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x}{\sin(2x)}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(xe^x)'}{(\sin(2x))'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+xe^x}{2\cos(2x)}=\dfrac{1+0}{2\times 1}=\dfrac{1}{2}$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x}{\sin(2x)}=\dfrac{1}{2}$.

9.3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{2x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{+\infty}{2}=+\infty$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$.

9.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\ln(x+1)}{x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+2\ln(x+1)\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+2\times\dfrac{1}{x+1}}{1}=\dfrac{0+2}{1}=2$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\ln(x+1)}{x}=2$

9.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2\ln(x+1)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2+2\ln(x+1)\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2\times\dfrac{1}{x+1}}{x}=$

$=\dfrac{+\infty+2\times 0}{1}=+\infty$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2\ln(x+1)}{x}=+\infty$

9.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2\right)'}{\left(2^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{2^x\ln 2}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x)'}{\left(2^x\ln 2\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{2^x(\ln 2)^2}=\dfrac{2}{+\infty}=0$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}=0$

10. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

10.1. Não se pode aplicar a Regra de L'Hôpital para determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$, porque não estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ ou $\dfrac{0}{0}$

10.2. Repara que, qualquer que seja x, tem-se que $\sin x$ pertence a $[-1,1]$, ou seja, é um número real, e que $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{x}\sin x$.

Como $\dfrac{1}{x}$ tende para 0 quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$, tem-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

11. Limites notáveis:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^p}=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^p}=+\infty$; $a>1$ e $p\in\mathbb{N}$

11.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{-3}\mathrm{e}^x\right)=\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}}_{\text{limite notável}}=+\infty$

11.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\log_2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^4}+\dfrac{\log_2 x}{x^4}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}+\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_2 x}{x^4}}_{\text{limite notável}}=0+0=0$

11.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{3^x}{x^3}}=\dfrac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x^3}}_{\text{limite notável}}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

11.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5}{\log_3 x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\log_3 x}{x^5}}=\dfrac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_3 x}{x^5}}_{\text{limite notável}}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

12. $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$

r // *Ox* e *r* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*.

12.1. *r* // *Ox*, logo $m_r=0$

$A(a,f(a))$; $m_r=0\Leftrightarrow f'(a)=0$

$f'(x)=\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x\right)'=2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x-1\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{e}^x=0}_{\substack{\text{equação}\\ \text{impossível}}}\vee 2\mathrm{e}^x-1=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x=-\ln 2$

$f(-\ln 2)=\mathrm{e}^{-2\ln 2}-\mathrm{e}^{-\ln 2}=\mathrm{e}^{\ln\left(2^{-2}\right)}-\mathrm{e}^{\ln\left(2^{-1}\right)}=$

$=2^{-2}-2^{-1}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$

Então, $A\left(-\ln 2,-\dfrac{1}{4}\right)$.

12.2. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x\right)=0-0=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)\right]=$

$=+\infty\times(+\infty)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x\times\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}}_{\text{limite notável}}=1\times 1=1$

Página 148 – Consolida

13. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2};\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

r: assíntota vertical ao gráfico de *f*

t: assíntota oblíqua ao gráfico de *f*

A: ponto de interseção das retas *r* e *t*

Assíntota vertical:

Como *f* é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, só a reta de equação $x=-2$ poderá ser assíntota vertical.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x=-2$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

r: $x=-2$

Assíntota não vertical: $y=mx+b,\ m,b\in\mathbb{R}$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2-2x}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x}=-2$$

A reta de equação $y=x-2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$ (e também quando $x\to-\infty$, sendo a demonstração análoga).

t: $y=x-2$

$$\begin{cases}x=-2\\y=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-4\end{cases}$$

$A(-2,-4)$

14. $f(x)=4x\mathrm{e}^{-x};\ D_f=\mathbb{R}$

14.1. O gráfico de *f* não admite assíntotas verticais porque *f* é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

14.2. Assíntota quando $x\to-\infty$: $y=mx+b,\ m,b\in\mathbb{R}$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x\mathrm{e}^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(4\mathrm{e}^{-x}\right)=+\infty$$

Como $m\notin\mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico de *f* não admite assíntota quando $x\to-\infty$.

14.3. Assíntota quando $x\to+\infty$: $y=mx+b,\ m,b\in\mathbb{R}$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x\mathrm{e}^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(4\mathrm{e}^{-x}\right)=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(4x\mathrm{e}^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\mathrm{e}^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}=\frac{4}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}}_{\text{limite notável}}}=\frac{4}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$.

15. $f(x)=\mathrm{e}^x-x;\ D_f=\mathbb{R}$

Assíntotas verticais

Como *f* é contínua em $\mathbb{R}$ (por ser a diferença entre duas funções contínuas) o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$y=mx+b,\ m,b\in\mathbb{R}$

Para $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x-x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1\right)$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}}_{\text{limite notável}}-1=+\infty-1=+\infty$$

Como $m\notin\mathbb{R}$, o gráfico de *f* não admite assíntota quando $x\to+\infty$.

Para $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1\right)=$$

$$=\frac{0}{-\infty}-1=0-1=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^x-x+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^x\right)=0$$

A reta de equação $y=-x$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x\to-\infty$.

Conclusão: O gráfico de *f* admite uma única assíntota, a reta de equação $y=-x$.

16.1. $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^2+2}\qquad D_f=\mathbb{R}$

Assíntotas verticais

Como *f* é contínua em $\mathbb{R}$ (por ser o quociente de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$), o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais: $y=mx+b,\ m,b\in\mathbb{R}$

Para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x^3+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3+1}{x^2+2} - 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1-2x^3-4x}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x+1}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x} = 0$$

A reta de equação $y = 2x$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x \to +\infty$.

Para $x \to -\infty$:

De forma análoga se prova que a reta de equação $y = 2x$ também é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x \to -\infty$.

16.2. $f(x) = 2x - \ln x,\ x > 0;\ D_f = \mathbb{R}^+$

Assíntotas verticais

Como *f* é contínua em $\mathbb{R}^+$ (por ser a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$), só a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (2x - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntotas não verticais: $y = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= 2 - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} = 2 - 0 = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} (2x - \ln x - 2x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-\ln x) = -\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, o gráfico de *f* não admite assíntota não vertical, quando $x \to +\infty$.

16.3. $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x},\ x > 0;\ D_f = \mathbb{R}^+$

Assíntotas verticais

Como *f* é contínua em $\mathbb{R}^+$, só a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x+\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntotas não verticais: $y = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}}_{\text{limite notável}} = 0 + 0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= 1 + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} = 1 + 0 = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x \to +\infty$.

16.4. $f(x) = 2x + e^x - 1\ ;\ D_f = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais

Como *f* é contínua em $\mathbb{R}^+$ (por ser a soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$), o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais: $y = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$

Para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+e^x-1}{x}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{limite notável}} + \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty + (2-0) = +\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de *f* não admite assíntota não vertical, quando $x \to +\infty$.

Para $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+e^x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} + 2 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 0 + 2 - 0 = 2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(2x + e^x - 1 - 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(e^x - 1\right) = 0 - 1 = -1$$

A reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x \to -\infty$.

16.5. $f(x) = x - e^{-x};\ D_f = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais

Como *f* é contínua em $\mathbb{R}$ (por ser a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$), o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais: $y = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$

Para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) = 1 - \frac{0}{+\infty} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - e^{-x} - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(-e^{-x}\right) = 0$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x \to +\infty$.

Para $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) =$$
$$= 1 - \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x}}_{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(e^{-x}\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty$$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$$m = 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 1 - (-\infty) = +\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de *f* não admite assíntota não vertical, quando $x \to -\infty$.

17. $f(x) = 2x + e^{-x} + 1;\ D_f = \mathbb{R}$

- *f* atinge um extremo no ponto *A*.
- $B(1, 3)$ e pertence à assíntota ao gráfico de *f* quando $x \to +\infty$.

17.1. a) $f'(x) = \left(2x + e^{-x} + 1\right)' = 2 - e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(-\ln 2)$	$\nearrow$

A função *f* atinge um extremo (mínimo) quando $x = -\ln 2$. Então, a abcissa do ponto *A* é $-\ln 2$.

b) $y = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + e^{-x} + 1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x}\right)$$
$$= 2 + 0 + 0 = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x + e^{-x} + 1 - 2x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

A reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x \to -\infty$, e passa em *B*.

17.2. $f''(x) = \left(2 - e^{-x}\right)' = 0 + e^{-x} = e^{-x}$

Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$, então o gráfico de *f* tem a concavidade sempre voltada para cima e não tem pontos de inflexão.

18. Sabe-se que $\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (-2x)\right) = 0$, ou seja,

$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) + 2x\right) = 0$.

$\lim_{x\to-\infty} \left((k+2)x + \log_2\left(3^x + 1\right)\right)$.

Se $k > -2$:

$\lim_{x\to-\infty} \left((k+2)x + \log_2\left(3^x + 1\right)\right) = -\infty + 0 = -\infty$

Se $k < -2$:

$\lim_{x\to-\infty} \left((k+2)x + \log_2\left(3^x + 1\right)\right) = +\infty + 0 = +\infty$

Se $k = -2$:

$\lim_{x\to-\infty} \left(0 + \log_2\left(3^x + 1\right)\right) = 0 + 0 = 0$

Se $k = -2$:

a reta de equação $y = -2x$ é assíntota ao gráfico de *f* quando $x \to -\infty$.

Página 149 – Consolida

19. $f(x) = 5 + 4x - 10\ln x,\ x \in [1, 5]$

x: quantidade de licor produzido, em litros

f: custo da produção, em euros

19.1. $f'(x) = (5 + 4x - 10\ln x)' = 4 - \frac{10}{x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{10}{x} = 0 \Leftrightarrow 4x - 10 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2{,}5$$

x	**1**		**2,5**		**5**
$f'(x)$	–6	–	0	+	2
f	$f(1)$	↘	$f(2,5)$	↗	$f(5)$

Para o custo ser mínimo, a produção deve ser 2,5 litros de licor.

19.2. $\dfrac{f(2,5)}{2,5}=\dfrac{5+4\times 2,5-10\ln 2,5}{2,5}=\dfrac{15-10\ln 2,5}{2,5}$

$=6-4\ln 2,5\approx 2,33$

Quando o custo de produção é mínimo, o preço por litro é $2,33\text{€}$.

19.3. a) $f(3)=5+4\times 3-10\ln 3=17-10\ln 3\approx 6,01$

Significa que o custo de produção dos 3 litros de licor é de $6,01\text{€}$.

b) $f'(3)=4-\dfrac{10}{3}=\dfrac{2}{3}\approx 0,67$

Significa que o custo marginal é de $0,67\text{€}$, ou seja, é o custo de um litro que excede a produção de 3 litros de licor.

20. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\qquad D_f=\mathbb{R}$

20.1. $f'(x)=\dfrac{1\left(x^2+1\right)-x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-1$

x	$-\infty$	**–1**		**1**	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
f	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

f é crescente em $]-1,1[$ e decrescente em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$.

f tem um mínimo igual a $-\dfrac{1}{2}$ e um máximo igual a $\dfrac{1}{2}$.

20.2. $f''(x)=\dfrac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}=0\Leftrightarrow 2x^3-6x=0$

$\Leftrightarrow 2x\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\sqrt{3}\vee x=-\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		**0**		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	–	–	–	0	+	+	+
x^2-3	+	0	–	–	–	0	+
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
f	∩	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	∪	0	∩	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	∪

$f\left(-\sqrt{3}\right)=\dfrac{-\sqrt{3}}{3+1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; $f(0)=\dfrac{0}{0+1}=0$;

$f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-\sqrt{3}[$ e em $]0,\sqrt{3}[$ e concavidade voltada para cima em $]-\sqrt{3},0[$ e em $]\sqrt{3},+\infty[$.

O gráfico de f tem três pontos de inflexão de coordenadas $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$ e $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

21. $g(x)=3\ln x-x\qquad D_g=\mathbb{R}^+$

21.1. Assíntotas verticais

Como g é contínua em $\mathbb{R}^+$ (por ser a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$), só a reta de equação $x=0$ poderá ser assíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3\ln x-x)=-\infty$

A reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

Assíntota não vertical: $y=mx+b$, $m,b\in\mathbb{R}$

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln x-x}{x}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3\ln x}{x}-1\right)$

$=3\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}}-1=3\times 0-1=-1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3\ln x-x+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3\ln x)$

$=+\infty$

Como $b\notin\mathbb{R}$, o gráfico de g não admite assíntota não vertical.

Conclusão: O gráfico de g admite uma única assíntota de equação $x=0$.

21.2. Pretende-se mostrar, recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $g(x)=-\frac{1}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,2[$.

- g é contínua em $\mathbb{R}^+$ e $[1,2]\subset\mathbb{R}^+$, logo g é contínua em $[1,2]$.
- $g(1)=3\ln 1-1=3\times 0-1=-1$

  $g(2)=3\ln 2-2\approx 0{,}0794$

  Logo, $g(1)<-\frac{1}{2}<g(2)$
- Como g é contínua em $[1,2]$ e $g(1)<-\frac{1}{2}<g(2)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c\in]1,2[$, tal que $g(c)=-\frac{1}{2}$, ou seja, a equação $g(x)=-\frac{1}{2}$, tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,2[$.

21.3. A função g tem um zero no intervalo $]3,5[$.

Pretende-se determinar, aplicando o Método da Bisseção, um intervalo $]a,b[$ a que pertença esse zero e que tenha amplitude inferior a 2×10^{-1}.

$b-a<2\times 10^{-1}\Leftrightarrow b-a<0{,}2$

$c\in]a,b[$, tal que $g(c)=0$.

- Sabe-se que $c\in]3,5[$.

  $g(3)=3\ln 3-3>0$

  $g(5)=3\ln 5-5<0$
- Seja m_1 o ponto médio de $]3,5[$.

  $m_1=\frac{3+5}{2}=4$

  $g(m_1)=g(4)=3\ln 4-4>0$

  Como $g(4)\times g(5)<0$, conclui-se que $c\in]4,5[$.
- Seja m_2 o ponto médio de $]4,5[$.

  $m_2=\frac{4+5}{2}=4{,}5$

  $g(m_2)=g(4{,}5)=3\ln(4{,}5)-4{,}5>0$

  Como $g(4{,}5)\times g(5)<0$, conclui-se que $c\in]4{,}5;5[$.
- Seja m_3 o ponto médio de $]4{,}5;5[$.

  $m_3=\frac{4{,}5+5}{2}=4{,}75$

  $g(m_3)=g(4{,}75)=3\ln(4{,}75)-4{,}75<0$

  Como $g(4{,}5)\times g(4{,}75)<0$, conclui-se que $c\in]4{,}5;4{,}75[$
- Seja m_4 o ponto médio de $]4{,}5;4{,}75[$

  $m_4=\frac{4{,}5+4{,}75}{2}=4{,}625$

  $g(4{,}625)=3\ln(4{,}625)-4{,}625<0$

  Como $g(4{,}5)\times g(4{,}625)<0$, conclui-se que $c\in]4{,}5;4{,}625[$.

Conclusão: O intervalo que satisfaz as condições do enunciado é $]4{,}5;4{,}625[$.

22. $f(x)=\frac{10-e^x}{x+1};\ D_f=\mathbb{R}^+$

22.1.

- f é contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser o quociente de duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$. Como $[2,3]\subset\mathbb{R}^+$, f é contínua em $[2,3]$.
- $f(2)=\frac{10-e^2}{3}\approx 0{,}8703$

  $f(3)=\frac{10-e^3}{4}\approx -2{,}5214$

  Logo, $f(3)<0<f(2)$.
- Como f é contínua em $[2,3]$ e $f(3)<0<f(2)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy (teorema dos valores intermédios), conclui-se que existe $c\in]2,3[$, tal que, $f(c)=0$, ou seja, a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]2,3[$.

22.2. Vamos estudar a função f quanto à monotonia para tentarmos concluir se o zero é ou não único.

$$f'(x)=\left(\frac{10-e^x}{x+1}\right)'$$
$$=\frac{(10-e^x)'\times(x+1)-(10-e^x)\times(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{-e^x(x+1)-(10-e^x)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{-xe^x-e^x-10+e^x}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{-xe^x-10}{(x+1)^2}$$

Como $x\in\mathbb{R}^+$, então $f'(x)<0$. Logo, a função *f* é decrescente em $\mathbb{R}^+$. Assim, conclui-se que o zero pertencente ao intervalo $]2,3[$ é único.

22.3. a) Conjetura do primeiro elemento da sucessão que tenha uma casa decimal exata: x_2

b) Conjetura do primeiro elemento da sucessão que tenha cinco casas decimais exatas: x_3

Página 150 – Avalia 2: Parte 1 – Verificação rápida

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1} \text{ se } x<1\\ k-\log_3(4x-1) \text{ se } x\geq 1\end{cases}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

f é contínua em $x=1$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$
$\overset{x\neq 1}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}(x+3)=4$

Cálculo auxiliar:

	1	2	−3
1		1	3
	1	3	0

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(k-\log_3(4x-1))=k-\log_3 3=k-1$
- $f(1)=k-\log_3 3=k-1$

Logo, *f* é contínua em $x=1$ se $k-1=4\Leftrightarrow k=5$.

A opção correta é a **(B)**.

2. **I:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{x}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^{2x})'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{2x}}{1}=-2$$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{x}=-2$

II: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{\ln x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{\ln x}=+\infty$

III: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=0$$

Então, pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

IV: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x+\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{1}}_{\text{limite notável}}=0+1=1$

Assim, a correspondência correta é a seguinte:
I – C; **II – A**; **III – D**; **IV – B**

3. *f* é contínua e $D_f=]-2,+\infty[$.

A reta de equação $y=-x+2$ é assíntota ao gráfico de *f*, logo sabe-se que

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(-x+2))=0$, ou seja,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x-2)=0$

A opção correta é a **(C)**.

4. $f(x)=x+e^{-x}$; $D_f=\mathbb{R}$

I: A reta de equação $y=x$ é assíntota ao gráfico de *f* quando $x\to+\infty$, porque $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(x+e^{-x}-x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{-x})=0$$

II: $y=mx+b$, $m,b\in\mathbb{R}$

Para $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+e^{-x}}{x}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+e^{-x})'}{(x)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{-x}}{1}=-\infty$$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+e^{-x}}{x}=-\infty$.

Como $m\notin\mathbb{R}$, o gráfico de *f* não admite assíntota quando $x\to-\infty$.

III: $f'(x)=\left(x+e^{-x}\right)'=1-e^{-x}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 1-e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{-x}=1 \Leftrightarrow -x=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+
f	↘	1	↗

$f(0)=0+e^0=1$

Mínimo absoluto de *f*: 1

IV: $f''(x)=\left(1-e^{-x}\right)=e^{-x}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)>0$

Logo, o gráfico de *f* tem sempre a concavidade voltada para cima e não tem pontos de inflexão.

Conclusão: A correspondência correta é:
I – b); **II – a)**; **III – a)**; **IV – c)**

Página 151 – Avalia 2: Parte 2 – Questões de desenvolvimento

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x^2-x} & \text{se } x>1\\ kx+e^{x-1} & \text{se } x\le 1\end{cases};\ k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

1.1. $y=mx+b,\ m,b\in\mathbb{R}$

Para $x\to+\infty$:

- $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-1}{x^3-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2-x}-x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-1-x^3+x^2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

A reta de equação $y=x+1$ é assíntota de *f*, quando $x\to+\infty$.

1.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(kx+e^{x-1}-kx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}\right)=0$,

logo a reta de equação $y=kx$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x\to-\infty$.

1.3. A única possibilidade de a função *f* não ser contínua é em $x=1$.

- $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(kx+e^{x-1}\right)=k+e^0=k+1$
- $f(1)=k\times1+e^{1-1}=k+1$
- $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-1}{x^2-x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\left(x^3-1\right)'}{\left(x^2-x\right)'}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x^2}{2x-1}=3$

Então, pela regra de L´Hôpital,

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-1}{x^2-x}=3$

Logo, *f* é contínua em $x=1$ se:

$k+1=3$, ou seja, $k=2$.

2. $f(x)=e^{-x}+x;\ D_f=\mathbb{R}$

2.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}+\dfrac{x}{x}\right)$

$=\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}}_{\text{limite notável}}+\lim\limits_{x\to0}1=1+1=2$

2.2. Pretende-se provar que a equação $f(x)=5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,2[$.

- *f* é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$. Como $[1,2]\subset\mathbb{R}$, então *f* é contínua em $[1,2]$.
- $f(1)=e+1\approx3{,}71828$

$f(2)=e^2+2\approx9{,}38906$

Logo, $f(1)<5<f(2)$.

- Como *f* é contínua em $[1,2]$ e $f(1)<5<f(2)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c\in]1,2[$, tal que $f(c)=5$, ou seja, a equação $f(x)=5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,2[$.

Monotonia e extremos

$f'(x)=\left(e^x+x\right)'=e^x+1$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)>0$, logo *f* é crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos.

Sabe-se que a equação $f(x)=5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,2[$ e que *f* é crescente em $\mathbb{R}$, logo essa solução é única.

3. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x;\ D_f=\mathbb{R}^+$

x_0 é o único zero da função *f*.

3.1.

- f é contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}^+$. Como $[1, 2] \subset \mathbb{R}^+$, então f é contínua em $[1, 2]$.
- $f(1) = \frac{1}{1} - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

  $f(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 \approx -0{,}19315$

  Logo, $f(2) < 0 < f(1)$.
- Como f é contínua em $[1, 2]$ e $f(2) < 0 < f(1)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in]1, 2[$, tal que $f(c) = 0$, ou seja, a função f tem, pelo menos, um zero em $]1, 2[$.
- Sendo x_0 o único zero da função f, $x_0 \in]1, 2[$.

3.2. Recorrendo ao método da bisseção, pretende-se determinar $]a, b[$ tal que $x_0 \in]a; b[$ e $b - a < 10^{-1}$.

$]a, b[$	a	b	$m = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$
$]1, 2[$	1	2	1,5	1
$]1{,}5; 2[$	1,5	2	1,75	0,261201559
$]1{,}75; 2[$	1,75	2	1,875	0,011812783
$]1{,}75; 1{,}875[$	1,75	1,875	1,8125	0,011812783
$]1{,}75; 1{,}8125[$	1,75	1,8125	1,78125	0,011812783

$f(m)$	$f(m)$	$f(b)$
0,261201559	0,261201559	–0,193147181
0,011812783	0,011812783	–0,193147181
–0,095275326	–0,095275326	–0,193147181
–0,04298297	–0,04298297	–0,095275326
–0,015911856	–0,015911856	–0,04298297

$f(a) \times f(m)$	$f(m) \times f(b)$	$b - a$
0,261201559	–0,050450345	1
0,003085517	–0,002281606	0,5
–0,001125467	0,018402161	0,25
–0,000507749	0,004095216	0,125
–0,000187963	0,000683939	0,0625

Conclusão: O intervalo que satisfaz as condições do enunciado é $]1{,}75; 1{,}8125[$.

Nota: Em alternativa pode-se construir uma tabela de valores recorrendo à calculadora gráfica.

3.3. $A(1, 0) \rightarrow$ ponto de "partida" para a aplicação do Método de Newton-Raphson.

- $x_0 = 1 \qquad B(1; f(1))$

  Como $f(1) = 1$, então $B(1, 1)$.
- $f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2}$

  t: reta tangente ao gráfico de f em B

  $m_t = f'(1) = -2$

  $y = -2x + b \overset{B(1,1)}{\rightarrow} 1 = -2 + b \Leftrightarrow 3 = b$

  Equação reduzida da reta t: $y = -2x + 3$
- $Ox: y = 0$

  $0 = -2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1{,}5$

  A abcissa do ponto de interseção da reta tangente em B com o eixo Ox é: 1,5.

Página 154 – Para Saber +

1. Depósito a prazo na modalidade de juro composto.
Taxa de juro anual: 3,6%
Montante inicial: 20 000 €

1.1. No contexto, a expressão $20\,000 \times 0{,}036$ representa o juro obtido ao fim de um ano.

1.2. No contexto, a expressão $20\,000(1 + 0{,}036)$ representa o capital acumulado ao fim de um ano.

2.

Tipo de capitalização	**$C_i = 20\,000$ €** **n: número de capitalizações num ano**	**Capital acumulado, C_n, ao fim de um ano (em €)**
Anual	$C_1 = 20\,000(1 + 0{,}036)$	20 720,00
Semestral	$C_2 = 20\,000\left(1 + \frac{0{,}036}{2}\right)^2$	20 726,48
Trimestral	$C_4 = 20\,000\left(1 + \frac{0{,}036}{4}\right)^4$	20 729,78
Mensal	$C_{12} = 20\,000\left(1 + \frac{0{,}036}{12}\right)^{12}$	20 732,00
Diária	$C_{365} = 20\,000\left(1 + \frac{0{,}036}{365}\right)^{365}$	20 733,08

No caso geral, sendo c_i o capital inicial, *j* a taxa de juro anual e *n* o número de capitalizações em cada ano, o capital acumulado ao fim de um ano é dado por $C_n = C_1\left(1+\frac{j}{n}\right)^n$.

2.1. Se as capitalizações forem semestrais e se o banco mantiver a taxa de juro anual de 3,6%, então o capital acumulado ao fim de um ano é 20 726,48 €.

2.2. Se as capitalizações forem trimestrais e se o banco mantiver a taxa de juro anual de 3,6%, então o capital acumulado ao fim de um ano é 20 729,78 €.

2.3. Se as capitalizações forem mensais e se o banco mantiver a taxa de juro anual de 3,6%, então o capital acumulado ao fim de um ano é 20 732,00 €.

2.4. Se as capitalizações forem diárias e se o banco mantiver a taxa de juro anual de 3,6%, então o capital acumulado ao fim de um ano é 20 733,08 €.

Página 155 – Para Saber +

3. **I – b)**; **II – a)**; **III – c)**

4. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad e \approx 2{,}71828$

O montante obtido ao fim de um ano seria, aproximadamente, 2,72 €.

Página 158 – Questões tipo exame

1. $f(x) = b - a^x,\ a, b \in \mathbb{R}^+$

Como os pontos $A(-1, 0)$ e $B(0, 1)$ pertencem ao gráfico de *f*, então $f(-1) = 0$ e $f(0) = 1$.

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - a^{-1} = 0 \\ b - a^0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \frac{1}{a} = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

2. $\log_2\left(\sqrt{x}\right) = \log_2(3x+1) - 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2(3x+1) - 2 \wedge \sqrt{x} > 0 \wedge 3x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 x = \log_2(3x+1) - 2 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 2\log_2(3x+1) - 4 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2(3x+1)^2 - \log_2 16 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2\left[\frac{(3x+1)^2}{16}\right] \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{(3x+1)^2}{16} \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow 16x = 9x^2 + 6x + 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 10x + 1 = 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{18} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{9} \vee x = 1\right) \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \vee x = 1$$

$$S = \left\{\frac{1}{9}, 1\right\}$$

3. $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 1$ e $b > 1$

$$\log_b\left(\frac{a}{b^2}\right) = 4 \Leftrightarrow \log_b a - \log_b\left(b^2\right) = 4 \Leftrightarrow \log_b a - 2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_b a = 6 \Leftrightarrow a = b^6$$

Então, $\log_a b = \log_{b^6} b = \frac{1}{6}$.

A opção correta é a **(B)**.

4. $f(x) = 1 + 2^x;\ D_f = \mathbb{R}\ ;\ P(k, f(k));\ k > 0$

4.1. $Q(0, f(0));\ f(0) = 1 + 2^0 = 2$, logo $Q(0, 2)$

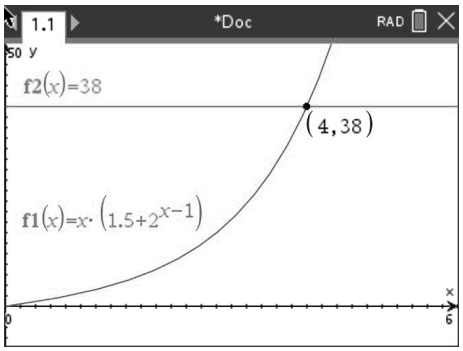
$R(k, 0);\ k > 0$

$$A_{[PQOR]} = \frac{\overline{PR} + \overline{QO}}{2} \times \overline{OR}$$

$$A(k) = \frac{f(k) + 2}{2} \times k = \frac{1 + 2^k + 2}{2} \times k =$$

$$= \frac{3 + 2^k}{2} \times k = \left(\frac{3}{2} + \frac{2^k}{2}\right) \times k = k\left(1{,}5 + 2^{k-1}\right)$$

4.2. Pretende-se resolver graficamente a equação $A(k)=38$ .Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, tem-se:



Então, $k=4$.

A medida da área do trapézio [PQOR] é 38 quando $k=4$.

Página 159 – Questões tipo exame

5. $f(x)=-1-\log_2\left(\frac{1}{x-1}\right),\ x\in\left]1,+\infty\right[$

$g(x)=5+\log_1 x,\ x\in\left]0,+\infty\right[$

r: $x=a$, com $a\in\left]1,8\right]$

$\overline{PQ}=5\Leftrightarrow g(a)-f(a)=5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5+\log_{\frac{1}{2}} a+1+\log_2\left(\frac{1}{a-1}\right)=5\wedge a\in\left]1,8\right]$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} a-\log_2(a-1)=-1\wedge a\in\left]1,8\right]$

$\Leftrightarrow -\log_2 a-\log_2(a-1)=-1\wedge a\in\left]1,8\right]$

$\Leftrightarrow \log_2 a+\log_2(a-1)=1\wedge a\in\left]1,8\right]$

$\Leftrightarrow \log_2\left(a^2-a\right)=1\wedge a\in\left]1,8\right]$

$\Leftrightarrow a^2-a=2\wedge a\in\left]1,8\right]$

$\Leftrightarrow a^2-a-2=0\wedge a\in\left]1,8\right]$

$\Leftrightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{8}}{2}\wedge a\in\left]1,8\right]$

$\Leftrightarrow (a=2\vee a=-1)\wedge a\in\left]1,8\right]$

$\Leftrightarrow a=2$

6. $x\in\mathbb{R}^+$

$-\log_{\frac{1}{9}} x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{9}}\left(x^{-1}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^{-1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{9}}\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{3}$

A opção correta é a **(A)**.

7. $N(t)=\frac{100}{1+49\times 2^{-t}},\ t\geq 0$

t: tempo (horas)

N: número de bactérias (milhões)

7.1. $\text{t.m.v.}_{[0,6]}=\frac{N(6)-N(0)}{6-0}=$

$=\frac{\frac{100}{1+49\times 2-6}-\frac{100}{1\times 49\times 20}}{6}\approx 9$

No contexto da situação descrita, significa que nas primeiras 6 horas o número de bactérias aumentou, em média, 9 milhões por hora.

7.2. $N(t)=\frac{100}{1+49\times 2^{-t}}\Leftrightarrow N(t)\times\left(1+49\times 2^{-t}\right)=100\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow N(t)+49N(t)\times 2^{-t}=100\Leftrightarrow 2^{-t}=\frac{100-N(t)}{49N(t)}$

$\Leftrightarrow -t=\log_2\left(\frac{100-N(t)}{49N(t)}\right)\Leftrightarrow t=-\log_2\left(\frac{100-N(t)}{49N(t)}\right)$

$\Leftrightarrow t=\log_2\left(\frac{49N(t)}{100-N(t)}\right)$

Página 160 – Questões tipo exame

8. $f(x)=3^{\frac{x}{3}}+1,\ x\in\mathbb{R}$

$g(x)=2\log_2\left(\frac{x}{2}\right),\ x\in\mathbb{R}^+$

A: ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Ox

D: ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy

B: pertence ao gráfico de f e tem a mesma ordenada de D

C: pertence ao gráfico de f e tem a mesma abcissa de B

8.1. $g(2)=2\log_3\left(\frac{2}{2}\right)=2\log_3 1=2\times 0=0$

Logo, 2 é zero de g.

8.2.

- $A(2,0)$
- $D(0,f(0))$; $f(0)=3^0+1=2$, logo $D(0,2)$.
- $B(x,2)$, tal que $g(x)=2$

$g(x)=2 \Leftrightarrow 2\log_3\left(\frac{x}{2}\right)=2 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x}{2}\right)=1 \wedge x>0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=3 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=6 \wedge x>0 \therefore B(6,2)$

- $C(6, f(6))$ $\quad f(6)=3^2+1=10$, logo $C(6,10)$
- $A_{[ABCD]}=A_{[ABD]}+A_{[BCD]}=\frac{6\times 2}{2}+\frac{6\times(10-2)}{2}$

$=6+24=30$

A opção correta é a **(B)**.

9. $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$f(x)=2\times 3^x-1$ e $(f\circ g)(x)=3$

$(f\circ g)(x)=3 \Leftrightarrow f(g(x))=3 \Leftrightarrow 2\times 3^{g(x)}-1=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\times 3^{g(x)}=4 \Leftrightarrow 3^{g(x)}=2 \Leftrightarrow g(x)=\log_3 2$

A opção correta é a **(A)**.

10. $D_f=]-2,+\infty[$

f é invertível e decrescente.

g é a inversa de *f*.

Sabe-se que $g(0)=2$, $g(1)=0$ e $g(2)=-1$.

Como *g* é a inversa de *f*, então $f(2)=0$, $f(0)=1$ e $f(-1)=2$.

$f(x)+f(2)=2 \Leftrightarrow f(x)+0=2 \Leftrightarrow f(x)=2$

$f(-1)=2$ e, como *f* é invertível, quaisquer dois elementos diferentes do seu domínio têm imagens diferentes, então -1 é a única solução da equação $f(x)=2$

A opção correta é a **(D)**.

Página 161 – Questões tipo exame

11. Taxa de juro anual: 1,2%

Juro composto e capitalizações trimestrais

$C_f=C_i(1{,}006)^t$

C_f: capital final; C_i: capital inicial

Depósito inicial: 25 000 €

Prazo: *n* anos

t: número de trimestres (número de capitalização)

11.1. *n* anos $\rightarrow$ 4*n* trimestres

$C_f=25\,000\times(1{,}006)^{4n}$

$J=C_f-25\,000=25\,000\times(1{,}006)^{4n}-25\,000=$

$=25\,000\left((1{,}006)^{4n}-1\right)$

11.2. Prazo inicial: *n* anos $(n<12)$

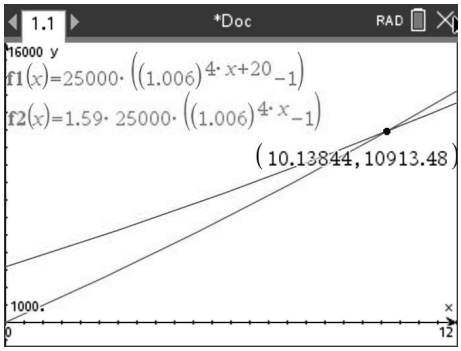
Prazo após prolongamento: $\underbrace{(n+5) \text{ anos}}_{\substack{\text{corresponde a } (4n+20)\\ \text{trimestres}}}$

Juro no final do prazo inicial: $J(n)=25\,000\left((1{,}006)^{4n}-1\right)$

Juro após prolongamento do prazo sofre acréscimo de 59%.

A equação que traduz o problema é: $J(4n+20)=1{,}59J(n)$

Recorrendo à calculadora gráfica, tem-se:



Então, $x\approx 10{,}14$. Conclui-se que o prazo inicial foi de 10 anos.

12. $D_f=]1,+\infty[$

$f(x)=b+\log_a(x-1);\ a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ e $b\in\mathbb{R}$

Os pontos $A(-3,4)$ e $B(-2,2)$ pertencem ao gráfico de f^{-1}, ou seja, $f^{-1}(-3)=4$ e $f^{-1}(-2)=2$.

Logo, $f(4)=-3$ e $f(2)=-2$.

$\begin{cases} f(4)=-3 \\ f(2)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+\log_a 3=-3 \\ b+\log_a 1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a 3=-3-b \\ b+0=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a 3=-1 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{-1}=3 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-2 \end{cases}$

$f(x)=-2+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

$f(x)=y \Leftrightarrow -2+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)=y \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-1)=y+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=\left(\frac{1}{3}\right)^{y+2} \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{3}\right)^{y+2}+1$

$f^{-1}(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}+1$

13. $f(x)=x^2-4x;\ D_f=\mathbb{R}$

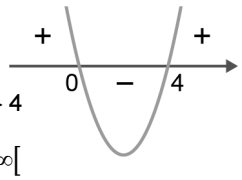
$g(x)=\log_2 x;\ D_g=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\}=\mathbb{R}^+$

$D_{g\circ f}=\{x:\ x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}$

$=\left\{x:\ x\in\mathbb{R}\wedge \underbrace{f(x)\in\mathbb{R}^+}_{f(x)>0}\right\}$

$f(x)>0\Leftrightarrow x^2-4x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-4)>0\Leftrightarrow x<0\vee x>4$



Então, $D_{g\circ f}=]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$

A opção correta é a **(B)**.

Página 162 – Questões tipo exame

1. $f''(3)<0$ porque em $x=3$ o gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo.

A opção correta é a **(C)**.

2. $f(x)=\begin{cases}2-xe^{x+1} \text{ se } x\le 0\\ \dfrac{x+\ln(x+1)}{x} \text{ se } x>0\end{cases}$

2.1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2-xe^{x+1}\right)=2-0\times e^1=2$

$f(0)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}+\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{limite notável}}$

$=1+1=2$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, então a função *f* é contínua em $x=0$.

2.2. Se $x\in]-\infty,0[$, então $f(x)=2-xe^{x+1}$.

$f'(x)=\left(2-xe^{x+1}\right)'=0-\left(1e^{x+1}+xe^{x+1}\right)=$

$=-e^{x+1}-xe^{x+1}=e^{x+1}(-1-x)$

$f'(x)=0\wedge x<0\Leftrightarrow e^{x+1}(-1-x)=0\wedge x<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1\wedge x<0\Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	**–1**		**0**
$f'(x)$	+	0	–	
f	↗	3	↘	

$f(-1)=2+e^0=3$

f é crescente em $]-\infty,-1[$ e decrescente em $]-1,0[$. *f* tem um máximo para $x=-1$.

2.3. Para $x\to+\infty:\ y=b$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln(x+1)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\ln(x+1))'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x+1}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)=1$

Então, pela regra de L´Hôpital, $b=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

A reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$.

3. $f(x)=x-e^{x^2-2};\ D_f=\mathbb{R}$

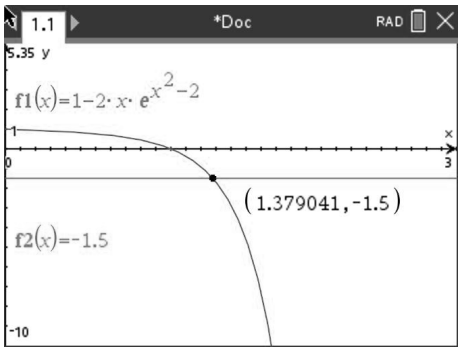
$A(a,f(a));\ a>0$

Como *t* é a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*, sabe-se que $m_t=f'(a)$.

$m_t=-1{,}5$, logo $f'(a)=-1{,}5$

$f'(x)=\left(x-e^{x^2-2}\right)'=1-2xe^{x^2-2}$

Pretende-se resolver graficamente a equação $f'(x)=-1{,}5$.



Então, $x\approx 1{,}379$, logo $a\approx 1{,}38$.

Página 163 – Questões tipo exame

4. $D_f=\mathbb{R}$ e *f* é diferenciável em $\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{2x-1}{e^{x^2-1}}$

4.1. *t*: reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa -1

$m_t=f'(-1)=\dfrac{2(-1)-1}{e^{(-1)^2-1}}=\dfrac{-3}{1}=-3$

r: reta perpendicular à reta *t*

$m_r = -\dfrac{1}{m_t} = \dfrac{1}{3}$

r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa -6, ou seja, passa no ponto de coordenadas $(-6, 0)$.

r: $y = \dfrac{1}{3}x + b \overset{(-6,\,0)}{\rightarrow} 0 = \dfrac{1}{3}\times(-6) + b \Leftrightarrow b = 2$

Equação reduzida da reta *r*: $y = \dfrac{1}{3}x + 2$.

4.2. $f''(x) = \left(\dfrac{2x-1}{e^{x^2-1}}\right)' = \dfrac{2e^{x^2-1}(2x-1)\left(2xe^{x^2-1}\right)}{\left(e^{x^2-1}\right)^2}$

$= \dfrac{2-(2x-1)(2x)}{e^{x^2-1}} = \dfrac{2-4x^2+2x}{e^{x^2-1}}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x^2+2x+2}{e^{x^2-1}} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x^2+2x+2 = 0 \Leftrightarrow -2x^2+x+1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \vee x = 1$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\cup$	$f(1)$	$\cap$

O gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$ e em $]1, +\infty[$ e concavidade voltada para cima em $\left]-\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

O gráfico de *f* tem dois pontos de inflexão de abcissas $-\dfrac{1}{2}$ e 1.

4.3.

- f' é contínua em $\mathbb{R}$ porque é o quociente entre duas funções contínuas.
  Como $[-2, -1] \subset \mathbb{R}$, então *f'* é contínua em $[-2, -1]$.
- $f'(-2) = \dfrac{-5}{e^3} \approx -0{,}2489$
  $f'(-1) = \dfrac{-3}{e^0} = -3$
  Logo, $f'(-1) < -1 < f'(-2)$.
- Como *f'* é contínua em $[-2, -1]$ e $f'(-1) < -1 < f'(-2)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in]-2, -1[$ tal que $f'(c) = -1$, ou seja, existe pelo menos um ponto, de abcissa entre –2 e –1, pertencente ao gráfico de *f*, tal que a reta tangente ao gráfico nesse ponto tem declive -1.

5. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} \text{ se } x < 0 \\ x - 1 - ke^{-x} \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$; $k \in \mathbb{R}^+$

5.1. $f(0) = 0 - 1 - ke^0 = -1 - k$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(x - 1 - ke^{-x}\right) = -1 - k$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{0-1}{0-1} = 1$

f é contínua em $x = 0$ se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, ou seja, se $-1-k = 1$.

$-1-k = 1 \Leftrightarrow k = -2$

5.2. Se $x \in]-\infty, 0[\setminus\{-1\}$, então $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

- Assíntota vertical
  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$
  Logo, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.
- Assíntota oblíqua: $y = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$

$m = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-1}{x^3-x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3-1}{x^2-1} - x\right)$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-1-x^3+x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* quando $x \to -\infty$.

5.3. Se a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota ao gráfico de *f*, quando $x \to +\infty$, então sabe-se que $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x-1)\right) = 0$, ou seja,

$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x + 1\right) = 0$.

A opção correta é a **(D)**.

Página 164 – Questões tipo exame

6. **Afirmação I:**

Como *f'* é contínua em $[-1, 1]$ e $f'(-1) \times f'(1) < 0$, conclui-se, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, que existe $c \in]-1, 1[$, tal que $f'(c) = 0$.

Sendo *f'* decrescente em $\mathbb{R}$, então a função *f* admite um máximo no intervalo $]-1, 1[$.

Assim, a afirmação I é falsa.

Afirmação II:

Se f' é decrescente em $\mathbb{R}$, então a função f'' é negativa em $\mathbb{R}$.

Assim, a afirmação II é falsa.

7. *f* é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ porque é ima função polinomial.

Como $P(-2, f(-2))$ é ponto de inflexão do gráfico de *f*, sabe-se que $f''(-2) = 0$.

t: $y = -x$ é tangente ao gráfico de *f* no ponto *P*.

Então, $f'(-2) = -1$ e $f(-2) = -(-2) = 2$.

Assim, $f(-2) + f'(-2) + f''(-2) = 2 + (-1) + 0 = 1$.

A opção correta é a **(A)**.

8. $D_f = [0, 2\pi]$ e $f(x) = x - \cos(2x)$

8.1. $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0$

Seja *g* a função, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $g(x) = f(x) + x$, ou seja, $g(x) = 2x - \cos(2x)$.

Pretende-se provar que a função *g* tem, pelo menos, um zero pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}\right[$.

- *g* é contínua em $[0, 2\pi]$ porque é a diferença entre duas funções contínuas. Como $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}\right] \subset [0, 2\pi]$, então *g* é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}\right]$.
- $g\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\left(\frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

  $= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}342$

  $g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

  $= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}078$

  Logo, $g\left(\frac{\pi}{12}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
- Como *g* é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}\right]$ e $g\left(\frac{\pi}{12}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{8}\right)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe $c \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}\right[$, tal que $g(c) = 0$, ou seja, a função *g* tem, pelo menos, um zero pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}\right[$.

  Donde se conclui que o gráfico de *f* interseta a bissetriz dos quadrantes pares em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}\right[$.

8.2. $A\left(\frac{\pi}{12}, 0\right) \rightarrow$ ponto inicial para a aplicação do Método de Newton-Raphson

$x_0 = \frac{\pi}{12}$

Seja $B\left(\frac{\pi}{12}, g\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$, ou seja, $B\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

O declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto *B* é dado por $g'\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$g'(x) = 2 - \left(-2\sin(2x)\right) = 2 + 2\sin(2x)$

$g'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 + 2\sin\left(2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

$y = 3x + b \overset{B \in \text{reta}}{\rightarrow} \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{\pi}{12}\right) + b$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} = b$

Equação da reta tangente ao gráfico de *g* em *B*:

$y = 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}$

$A_1(x, 0) \rightarrow$ ponto de interseção da reta tangente ao gráfico de *g*, no ponto *B*, com o eixo Ox.

$0 = 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{36}$

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{36}, 0\right)$

$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{36}$, ou seja, $x_1 \approx 0{,}38$.

Página 165 – Questões tipo exame

9. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $D_g = \mathbb{R}^+$

f e *g* são funções duas vezes diferenciáveis

Afirmação I

$2 \notin D_f$ pois $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, logo a função *f* não é contínua em $x = 2$.

Assim, a proposição I é falsa.

Afirmação II

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - 1 + x\right) = 0$, então a reta de equação $y = -x + 1$ é assíntota não vertical ao gráfico de *f*, quando $x \to -\infty$.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - x\right) = 0$, então a reta de equação $y = x$ é assíntota não vertical ao gráfico de *g*, quando $x \to +\infty$.

As retas $y = -x + 1$ e $y = x$ não são paralelas (pois têm declives diferentes).

Assim, a proposição II é falsa.

Afirmação III

Sendo *f* decrescente em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e *g* crescente em $\mathbb{R}^+$, então $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) \leq 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) \geq 0$.

Assim, pode concluir-se que $f'(x) \leq g'(x), \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{2\}$.

Logo, a afirmação III é falsa.

10. $D_f = [\pi, 2\pi]$ e $f(x) = e^{-x} + \sin x$.

f tem um zero no intervalo $]\pi, \frac{7\pi}{6}[$.

Atendendo à informação representada na tabela, conclui-se que:

- $c = \pi$
- $d = \frac{a+b}{2} = \frac{\pi + \frac{7\pi}{6}}{2} = \frac{13\pi}{12}$
- $e = f(\pi) \approx 0{,}043\,21$
- $f = f\left(\frac{13\pi}{12}\right) \approx -0{,}225\,56$