3. Produto escalar

PÁG. 30

1.1 $m = 1$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg}\,\alpha = 1$; pelo que $\alpha = \text{tg}^{-1}(1) = 45°$.

1.2 $m = -1$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg}\,\alpha = -1$;
pelo que $\alpha = \text{tg}^{-1}(-1) + 180° = -45° + 180° = 135°$.

1.3 $2y + x = 5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
$m = -\frac{1}{2}$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}$;
pelo que $\alpha = \text{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 180° \approx -26{,}6° + 180° = 153{,}4°$.

1.4 $3y - 2x = 3 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + 1$
$m = \frac{2}{3}$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}$; pelo que $\alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33{,}7°$.

1.5 $m = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$; pelo que $\alpha = \text{tg}^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = 60°$.

1.6 $m = \frac{\sqrt{3}}{-3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
pelo que $\alpha = \text{tg}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 180° = -30° + 180° = 150°$.

2.1 $m = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$ e $b = 3$, $y = \sqrt{3}x + 3$.

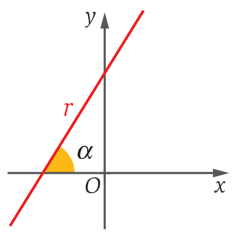
2.2 $m = \text{tg}\,150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.3 $m = \text{tg}\,0° = 0$ e $b = 3$; $y = 3$.

PÁG. 31

3. Como a inclinação de uma reta é a amplitude do ângulo convexo cujos lados são o semieixo positivo das abcissas e a semirreta que contém a origem e um ponto da reta com ordenada positiva e é um valor maior ou igual a $0°$ e menor do que $180°$, excluímos as opções (B) e (D).

Observando a figura, exclui-se a opção (C) (na imagem, α é a inclinação da reta r , que não pode ser $120°$).



Opção correta: **(A)**

4.1 $m = \frac{2 - 0}{0 - (-1)} = 2$ sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg}\,\alpha = 2$; pelo que $\alpha = \text{tg}^{-1}(2) \approx 63{,}4°$.

4.2 $m = \frac{4 - 0}{0 - 4} = -1$ sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg}\,\alpha = -1$;
pelo que $\alpha = \text{tg}^{-1}(-1) + 180° = -45° + 180° = 135°$.

5. A inclinação α da reta r é $\alpha + 30° + 90° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 60°$.

$m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$ e $0 = -2\sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 2\sqrt{3}$; $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

6. $\text{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\left(-\frac{4}{5}\right)^2} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{25}{16} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = \dfrac{25}{16} - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = \dfrac{9}{16} \underset{\substack{\text{inclinação}\,\alpha \\ \cos\alpha < 0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha < 0}}{\Leftrightarrow} \text{tg } \alpha = -\dfrac{3}{4}$

A equação reduzida da reta s é $y = -\dfrac{3}{4}x + 2$.

7. Como a reta s é tangente à circunferência e a reta r contém a origem, concluímos que as retas são perpendiculares e, logo, $m_s = -\dfrac{1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

O ponto T é o ponto de interseção da reta r com a circunferência.

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ y = -\sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-\sqrt{3}x)^2 = 4 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x^2 = 4 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \underset{T \in 4.°\text{Q}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$

$T\left(1 , -\sqrt{3}\right)$

$-\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow b = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

A equação reduzida da reta s é $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

PÁG. 33

8. Nenhum dos pares apresentados são vetores colineares, pelo que o ângulo por eles formado não pode ser raso ou nulo.

8.1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(-2) + (-1) \times 3 = -7 < 0$; obtuso

8.2 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times \dfrac{2}{3} + (-5) \times (-1) = 7 > 0$; agudo

8.3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} > 0$; agudo

8.4 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \times 2 + 2 \times 4 + 3(-2) = 0$; reto

8.5 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + (-1) \times (-2) + \sqrt{5} \times 0 = \dfrac{3}{2} > 0$; agudo

8.6 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(1 - \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt{3}\right) + 0(-2) + 1 \times 1 = -1 < 0$; obtuso

9. Como $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})=4\times 2\times\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})=8\times\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})$, dos valores dados, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ só não pode ser igual a 10 , pois, se fosse, teríamos $\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})=\frac{10}{8}>1$, o que é impossível.

Opção correta: **(A)**

10. O ângulo formado pelos vetores é agudo se o seu produto escalar for positivo e se os vetores não forem colineares.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-2(-k)+(1-k)\times 3=3-k$

$3-k>0 \Leftrightarrow k<3 \Leftrightarrow k\in\left]-\infty\,,3\right[$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se

$$\frac{3}{1-k}=\frac{-k}{-2} \Leftrightarrow -k(1-k)=-6 \Leftrightarrow k^2-k+6=0 \Leftrightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times6}}{2\times1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{-23}}{2}$$, o que é impossível.

Logo, $k\in\left]-\infty\,,3\right[$.

11. Os vetores são perpendiculares se o seu produto escalar for nulo.

$\vec{a}-\vec{b}$ tem coordenadas $(2-2k\,,\,1-k-(k+1))$, ou seja, $(2-2k\,,\,-2k)$.

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}==(2-2k)2k+(-2k)(k+1)=-6k^2+2k$

$-6k^2+2k=0 \Leftrightarrow 2k(-3k+1)=0 \Leftrightarrow 2k=0\vee-3k+1=0 \Leftrightarrow k=0\vee k=\frac{1}{3}$

12. $$(-\sqrt{15})^2+1=\frac{1}{(\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}))^2} \Leftrightarrow$$

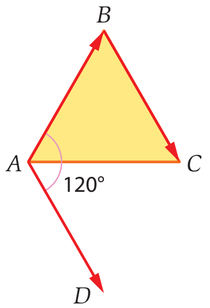
$$\Leftrightarrow (\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}))^2=\frac{1}{16} \underset{\substack{\operatorname{tg}(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})<0\Rightarrow\\ \Rightarrow\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})<0}}{\Leftrightarrow} \cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})=-\frac{1}{4}$$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times6\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{2}$

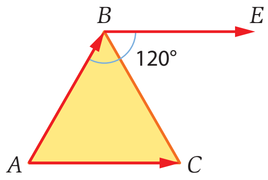
13. Como o triângulo é equilátero, conclui-se que os seus ângulos internos têm amplitude igual a $60°$ e como o perímetro é 18 , a medida do lado é 6 .

13.1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC})=6\times6\times\cos(60°)=36\times\frac{1}{2}=18$

13.2 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AD}\|\times\cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AD})=6\times6\times\cos(120°)=36\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-18$



13.3 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BE}\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA} \,\hat{,}\, \overrightarrow{BE}\right) = 6 \times 6 \times \cos(120°) = 36 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -18$



PÁG. 34

14.1 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, porque $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$.

14.2 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{DC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{DC}\right) = 3 \times 2 \times \cos(0°) = 6 \times 1 = 6$

14.3 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{DC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA} \,\hat{,}\, \overrightarrow{DC}\right) = 3 \times 2 \times \cos(180°) = 6 \times (-1) = -6$

14.4 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AD}\right)$

$\overline{AD}^2 = 1^2 + 2^2 \underset{\overline{AD}>0}{\Leftrightarrow} = \sqrt{5}$

$\cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

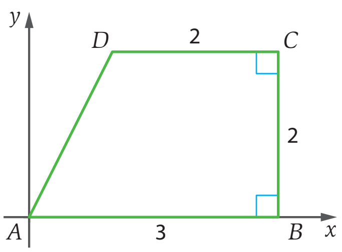
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 3$

14.5 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{DA}\| \times \|\overrightarrow{DC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{DA} \,\hat{,}\, \overrightarrow{DC}\right)$

$\cos\left(\overrightarrow{DA} \,\hat{,}\, \overrightarrow{DC}\right) = -\cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AD}\right)$, pois os ângulos são suplementares.

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \sqrt{5} \times 2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -2$

14.6



$A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(3, 2)$, $D(1, 2)$.

$\overrightarrow{DA}$ tem coordenadas $(0-1, 0-2) = (-1, -2)$.

$\overrightarrow{BC}$ tem coordenadas $(3-3, 2-0) = (0, 2)$.

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = -1 \times 0 + (-2) \times 2 = -4$

15.1 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{SR} = \|\overrightarrow{PQ}\| \times \|\overrightarrow{SR}\| \times \cos\left(\overrightarrow{PQ} \,\hat{,}\, \overrightarrow{SR}\right) = 5 \times 5 \times \cos(0°) = 25$

15.2 $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RX} = \|\overrightarrow{UP}\| \times \|\overrightarrow{RX}\| \times \cos\left(\overrightarrow{UP} \,\hat{,}\, \overrightarrow{RX}\right) = 3 \times 3 \times \cos(180°) = -9$

15.3 $\overrightarrow{TU} \cdot \overrightarrow{QV} = 0$, porque $\overrightarrow{TU} \perp \overrightarrow{QV}$.

15.4 $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QV} = 0$, porque $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QV}$.

15.5 $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SX} = 0$, porque $\overrightarrow{PS} \perp \overrightarrow{SX}$.

15.6 $\overrightarrow{VR} \cdot \overrightarrow{UP} = \overrightarrow{VR} \cdot \overrightarrow{VQ} = \|\overrightarrow{VR}\| \times \|\overrightarrow{VQ}\| \times \cos\left(\overrightarrow{VR} \,\hat{,}\, \overrightarrow{VQ}\right) = \overline{VR} \times 3 \times \dfrac{3}{\overline{VR}} = 9$

16. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right)$

$\dfrac{5}{\overline{AC}} = \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right) = 10 \times \overline{AC} \times \dfrac{5}{\overline{AC}} = 50$

17.1 $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(16-14\,,\,-4+7\,,\,10-4) = (2\,,\,3\,,\,6)$.

$\overrightarrow{CE}$ tem coordenadas $(8-10\,,\,5+6\,,\,0-13) = (-2\,,\,11\,,\,-13)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 2 \times (-2) + 3 \times 11 + 6 \times (-13) = -49$

17.2 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(2\,,\,3\,,\,6)$ e $\overrightarrow{BA}$ $(-2\,,\,-3\,,\,-6)$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \times 2 + (-3) \times 3 + (-6) \times 6 = -49$

17.3 $G = C + \overrightarrow{AE}$ tem coordenadas $(10\,,\,-6\,,\,13) + (8-14\,,\,5+7\,,\,0-4) = (4\,,\,6\,,\,9)$.

$\overrightarrow{AG}$ tem coordenadas $(4-14\,,\,6+7\,,\,9-4) = (-10\,,\,13\,,\,5)$.

$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AG} = -2 \times (-10) + 11 \times 13 + (-13) \times 5 = 98$

18.1 $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + (-1) \times 3 = -3$

$\cos\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right) = \dfrac{-3}{\sqrt{5} \times 3} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 117°$.

18.2 $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-3) \times 1 = -1$

$\cos\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{13} \times \sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{26}}$, $\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{26}}\right) \approx 101°$.

18.3 $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{11}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{8}^2} = 3$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3(-1) + \sqrt{2} \times \sqrt{8} = 1$

$\cos\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{11} \times 3} = \dfrac{1}{3\sqrt{11}}$, $\left(\vec{u} \,\hat{,}\, \vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3\sqrt{11}}\right) \approx 84°$.

PÁG. 35

19. $P\hat{Q}R = \overrightarrow{QP} \,\hat{,}\, \overrightarrow{QR}$

$\overrightarrow{QP}$ tem coordenadas $(-1-1\,,\,0-2\,,\,1+1) = (-2\,,\,-2\,,\,2)$.

$\overrightarrow{QR}$ tem coordenadas $(0-1\,,\,5-2\,,\,0+1) = (-1\,,\,3\,,\,1)$.

$\|\overrightarrow{QP}\| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{12}$ e $\|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{(-1)^2+3^2+1^2} = \sqrt{11}$.

$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = -2\times(-1) - 2\times 3 + 2\times 1 = -2$

$\cos\left(\overrightarrow{QP} \,\hat{,}\, \overrightarrow{QR}\right) = \dfrac{-2}{\sqrt{12}\sqrt{11}} = -\dfrac{2}{\sqrt{132}}$; $\overrightarrow{QP} \,\hat{,}\, \overrightarrow{QR} = \cos^{-1}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{132}}\right) \approx 100°$.

20.1 $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2\times(-2) = 4^2 + 4 = 20$

20.2 $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{v}\cdot\vec{w} - 2\vec{v}\cdot\vec{v} = 3 + (-2) - 2\times 0 - 2\times\|\vec{v}\|^2 = 1 - 2\times 4^2 = -31$

21. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 10^2 - 2\times 2 + 5^2 = 121$

Como $\|\vec{u} - \vec{v}\| > 0$, $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{121} = 11$.

22.1 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}_{0} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$

22.2 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}_{0} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

23.1 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PD} + \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}}_{0} \underset{\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{PD}}{=} 2\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PD} = 2\left\|\overrightarrow{PD}\right\|^2$

23.2 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{QC} = 50 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BC}\right) = 50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{QB}}_{0} + \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{QB} + \underbrace{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC}}_{0} = 50 \Leftrightarrow$

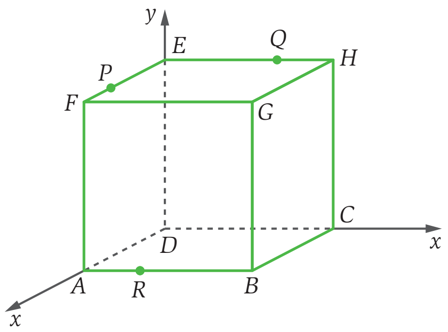
$\Leftrightarrow \overrightarrow{PD} \cdot \left(2\overrightarrow{PD}\right) + \left(2\overrightarrow{QB}\right) \cdot \overrightarrow{QB} = 50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PD} + 2\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QB} = 50 \Leftrightarrow 2\left\|\overrightarrow{PD}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{QB}\right\|^2 = 50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(\left\|\overrightarrow{PD}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{QB}\right\|^2\right) = 50 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{PD}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{QB}\right\|^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AQ}\right\|^2 = 25 \underset{\substack{\text{Teorema de} \\ \text{Pitágoras}}}{\Leftrightarrow} \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = 25 \underset{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| > 0}{\Leftrightarrow} \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = 5$

24. Representando o cubo num referencial o.n. $Oxyz$ em que D é a origem do referencial e A, C e E pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz.



$D(0,0,0)$; $A(a,0,0)$; $B(a,a,0)$; $C(0,a,0)$; $E(0,0,a)$; $F(a,0,a)$; $G(a,a,a)$;

$H(0,a,a)$; $P\left(\frac{3}{4}a,0,a\right)$; $Q\left(0,\frac{3}{4}a,a\right)$; $R\left(a,\frac{1}{4}a,0\right)$

24.1

a. $\overrightarrow{PQ}$ tem coordenadas $\left(0-\frac{3}{4}a,\frac{3}{4}a-0,a-a\right)=\left(-\frac{3}{4}a,\frac{3}{4}a,0\right)$.

$\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(a-a,a-0,0-0)=(0,a,0)$.

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}a\times 0+\frac{3}{4}a\times a+0\times 0=\frac{3}{4}a^2$

b. $\overrightarrow{PR}$ tem coordenadas $\left(a-\frac{3}{4}a,\frac{1}{4}a-0,0-a\right)=\left(\frac{1}{4}a,\frac{1}{4}a,-a\right)$.

$\overrightarrow{BG}$ tem coordenadas $(a-a,a-a,a-0)=(0,0,a)$.

$\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{BG}=\frac{1}{4}a\times 0+\frac{1}{4}a\times 0+(-a)\times a=-a^2$

24.2 $Q\hat{P}R=\overrightarrow{PQ}\hat{\ ,}\overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=-\frac{3}{4}a\times\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}a\times\frac{1}{4}a+0\times(-a)=0$, pelo que $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PQ}\hat{\ ,}\overrightarrow{PR}=90°$.

PÁG. 37

25.1 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow 2\times 4+(3-k)\times(-2)=0 \Leftrightarrow 8-6+2k=0 \Leftrightarrow k=-1$

25.2 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow (1-k)\times k+2k=0 \Leftrightarrow k-k^2+2k=0 \Leftrightarrow -k^2+3k=0 \Leftrightarrow k(-k+3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=0 \vee -k+3=0 \Leftrightarrow k=0 \vee k=3$

25.3 $u\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow 1\times 2k+(1+k)\times 1+(-1)\times 0=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k+1+k=0 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{3}$

25.4 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow 3k\times k+k^2\times(-1)+(-2)\times 2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3k^2-k^2-4=0 \Leftrightarrow 2k^2=4 \Leftrightarrow k^2=2 \Leftrightarrow k=-\sqrt{2}\vee k=\sqrt{2}$

26. $x+3y=9 \Leftrightarrow 3y=-x+9 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+3$

As retas perpendiculares a r têm declive $-\frac{1}{-\frac{1}{3}}=3$, pelo que um vetor diretor dessas retas tem coordenadas $(1\ ,\ 3)$.

Assim, uma equação vetorial da reta que contém o ponto de coordenadas $(0\ ,\ 5)$ e é perpendicular a r é $(x\ ,\ y)=(0\ ,\ 5)+k\,(1\ ,\ 3),\ k\in\mathbb{R}$.

27. A reta r tem declive $\frac{2}{-1}=-2$ e as retas perpendiculares a r têm declive $-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$.

Opção correta: **(D)**

28.1 A reta AB é paralela à reta CD , pelo que tem declive igual a $\operatorname{tg} 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

A ordenada na origem da reta AB é dada por: $2=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}+b \Leftrightarrow b=2-1 \Leftrightarrow b=1$.

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$

28.2 A reta BC é perpendicular à reta CD , pelo que tem declive igual a $-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$.

A ordenada na origem da reta AB é dada por: $2=-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+b \Leftrightarrow b=2+3 \Leftrightarrow b=5$.

$y=-\sqrt{3}\,x+5$

29. A opção (D) é excluída, pois a condição que apresenta define um plano.

Uma reta é perpendicular à reta s se os vetores diretores das duas retas forem perpendiculares.

Um vetor diretor da reta s tem coordenadas $(1\ ,\ -2\ ,\ 0)$.

(A) Um vetor diretor da reta definida por $x=1 \wedge y=2$ tem coordenadas $(0\ ,\ 0\ ,\ 1)$, pois é paralela ao eixo Oz . $(1\ ,\ -2\ ,\ 0)\cdot(0\ ,\ 0\ ,\ 1)=1\times0+(-2)\times0+0\times1=0$

(B) Um vetor diretor da reta definida por $x=1 \wedge z=2$ tem coordenadas $(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$, pois é paralela ao eixo Oy . $(1\ ,\ -2\ ,\ 0)\cdot(0\ ,\ 1\ ,\ 0)=1\times0+(-2)\times1+0\times0=-2\neq0$

(C) Um vetor diretor da reta definida por $y=1 \wedge z=2$ tem coordenadas $(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$, pois é paralela ao eixo Ox . $(1\ ,\ -2\ ,\ 0)\cdot(1\ ,\ 0\ ,\ 0)=1\times1+(-2)\times0+0\times0=1\neq0$

Opção correta: **(A)**

30. $C\,(0\ ,\ 0\ ,\ z_C)$

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B se $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(-1-2\ ,\ 1-1\ ,\ 1+3)=(-3\ ,\ 0\ ,\ 4)$.

$\overrightarrow{BC}$ tem coordenadas $(0+1\ ,\ 0-1\ ,\ z_C-1)=(1\ ,\ -1\ ,\ z_C-1)$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow -3\times1+0\times(-1)+4\,(z_C-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3+4z_C-4=0 \Leftrightarrow 4z_C=7 \Leftrightarrow z_C=\frac{7}{4}$$

$C\left(0\ ,\ 0\ ,\ \frac{7}{4}\right)$

PÁG. 38

31. $A(x_A, 0, 0)$, $B(x_A, x_A, 0)$; $\overrightarrow{AB}(0, x_A, 0)$

Como $\overrightarrow{AB}(0, 2, 0)$, concluímos que $x_A = 2$, e, portanto, o cubo tem aresta 2 .

O ponto $P(x_P, y_P, z_P)$ pertence ao plano que contém a face $[BCFG]$, pelo que, $y_P = 2$.

Como a cota do ponto P é o quadrado da abcissa, tem-se $P\left(x_P, 2, x_P^2\right)$.

$C(0, 2, 0)$, $E(2, 0, 2)$, $\overrightarrow{CE}(2, -2, 2)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{CE} \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 2x_P + 2 \times (-2) + 2x_P^2 = 0 \Leftrightarrow x_P^2 + x_P - 2 = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & x_P = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x_P = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & x_P = \frac{-1-3}{2} \vee x_P = \frac{-1+3}{2} \Leftrightarrow x_P = -2 \vee x_P = 1
\end{aligned}$$

Como a abcissa do ponto P é negativa, concluímos que $x_P = -2$ e $P(-2, 2, 4)$.

32. Tem-se que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, pelo que $\vec{v}(\cos\alpha, \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha - 1)$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \cos\alpha \times \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha \times \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \times (\operatorname{sen}\alpha - 1) = \\
&= \cos^2\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \times \cos\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha = \underbrace{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}_{1} + \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 1
\end{aligned}$$

Logo, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são perpendiculares.

33. A reta tangente à circunferência no ponto A é perpendicular à reta que passa pelo centro da circunferência e contém o ponto A .

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 20 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0-2)^2 + (y-3)^2 = 20 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)^2 = 16 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 3 = -4 \vee y - 3 = 4 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \vee y = 7 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

Logo, as coordenadas do ponto A são $(0, 7)$, e, sendo C o centro da circunferência, as suas coordenadas são $(2, 3)$. Assim, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ são $(2-0, 3-7) = (2, -4)$.

A reta AC tem declive $\frac{-4}{2} = -2$ e as retas perpendiculares a AC têm declive $\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

A equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto A é $y = \frac{1}{2}x + 7$.

34. $B(a\,,b)\ ;\ A(0\,,b)\ ;\ M\left(0\,,\frac{b}{2}\right)\ ;\ N\left(\frac{a}{2}\,,b\right)$.

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{MN}$ são $\left(\frac{a}{2}-0\,,\,b-\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}\,,\frac{b}{2}\right)$.

A reta MN tem declive $\dfrac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}}=\dfrac{b}{a}$ e as retas perpendiculares a esta têm declive $-\dfrac{1}{\frac{b}{a}}=-\dfrac{a}{b}$.

A equação reduzida da reta que passa no ponto A e é perpendicular à reta MN é $y=-\frac{a}{b}x+b$.

$$-\frac{a}{b}x+b=0 \iff -\frac{a}{b}x=-b \iff x=\frac{-b}{-\frac{a}{b}} \iff x=\frac{b^2}{a}$$

PÁG. 39

35.1 $\vec{r}(-1\,,1)$

$x+2y=3 \iff y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$; $\vec{s}(2\,,-1)$.

$\vec{r}\cdot\vec{s}=-1\times 2+1\times(-1)=-3$

$\|\vec{r}\|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ e $\|\vec{s}\|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

$\cos(r\hat{,}s)=\left|\cos(\vec{r}\hat{,}\vec{s})\right|=\dfrac{|-3|}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$; $(r\hat{,}s)=\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)\approx 18°$.

35.2 $\vec{r}(0\,,1)$

$2x-y=3 \iff y=2x-3$; $\vec{s}(1\,,2)$.

$\vec{r}\cdot\vec{s}=0\times 1+1\times 2=2$

$\|\vec{r}\|=\sqrt{0^2+1^2}=1$ e $\|\vec{s}\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

$\cos(r\hat{,}s)=\left|\cos(\vec{r}\hat{,}\vec{s})\right|=\dfrac{|2|}{1\times\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $(r\hat{,}s)=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\approx 27°$.

35.3 $\vec{r}(3\,,2\,,-1)$; $\vec{s}(-1\,,2\,,0)$.

$\vec{r}\cdot\vec{s}=3\times(-1)+2\times 2+(-1)\times 0=1$

$\|\vec{r}\|=\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$ e $\|\vec{s}\|=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$.

$\cos(r\hat{,}s)=\left|\cos(\vec{r}\hat{,}\vec{s})\right|=\dfrac{|1|}{\sqrt{14}\times\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{70}}$; $(r\hat{,}s)=\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{70}}\right)\approx 83°$.

36. A reta r contém os pontos de coordenadas $(3\,,0)$ e $(0\,,4)$, pelo que um seu vetor diretor tem coordenadas $(3-0\,,0-4)=(3\,,-4)$.

A reta s tem inclinação $180°-150°=30°$, pelo que um seu vetor diretor tem coordenadas $\left(3\,,\sqrt{3}\right)$.

$\vec{r}\cdot\vec{s}=3\times 3+(-4)\times\sqrt{3}=9-4\sqrt{3}$

$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$; $\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{12}$.

$\cos(r\hat{,}s)=\left|\cos(\vec{r}\hat{,}\vec{s})\right|=\dfrac{\left|9-4\sqrt{3}\right|}{5\times\sqrt{12}}=\dfrac{9-4\sqrt{3}}{5\sqrt{12}}$; $(r\hat{,}s)=\cos^{-1}\left(\dfrac{9-4\sqrt{3}}{5\sqrt{12}}\right)\approx 83{,}1°$.

PÁG. 40

37.1 Um vetor diretor da reta BH é o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $(-3\ ,\ 4\ ,\ 5)$.

$\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(14-6\ ,\ -7+13\ ,\ 0-0)=(8\ ,\ 6\ ,\ 0)$.

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=-3\times 8+4\times 6+5\times 0=0$, pelo que $(BH\,\hat{,}\,AB)=90°$.

Alternativamente:

Como $[ABCDEFGH]$ é um cubo, a diagonal facial $[BH]$ é perpendicular à aresta $[AB]$, pelo que as retas BH e AB são perpendiculares. Portanto, $(BH\,\hat{,}\,AB)=90°$.

37.2 A reta AF é paralela ao eixo das cotas, pelo que um seu vetor diretor, $\vec{v}$, tem coordenadas $(0\ ,\ 0\ ,\ 1)$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-3\times 0+4\times 0+5\times 1=5$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{(-3)^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}$; $\|\vec{v}\|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$.

$\cos(BH\,\hat{,}\,AF)=\left|\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})\right|=\dfrac{|5|}{\sqrt{50}\times 1}=\dfrac{5}{\sqrt{50}}$; $(BH\,\hat{,}\,AF)=\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{\sqrt{50}}\right)=45°$.

37.3 $\vec{u}\cdot\vec{w}=-3\times 1+4\times 0+5\times 0=-3$, em que $\vec{w}(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$ é um vetor diretor do eixo Ox ;

$\|\vec{w}\|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$.

$\cos(BH\,\hat{,}\,Ox)=\left|\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{w})\right|=\dfrac{|-3|}{\sqrt{50}\times 1}=\dfrac{3}{\sqrt{50}}$; $(BH\,\hat{,}\,Ox)=\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{50}}\right)\approx 65°$.

37.4 O ponto H tem coordenadas da forma $(14-3k\ ,\ -7+4k\ ,\ 5k)$, $k\in\mathbb{R}$.

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{8^2+6^2}=10$

Como o cubo tem aresta 10 , a cota do ponto H é 10, pelo que, $5k=10\iff k=2$.

Assim, $H(8\ ,\ 1\ ,\ 10)$.

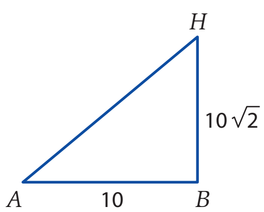
$\overrightarrow{AH}$ tem coordenadas $(8-6\ ,\ 1+13\ ,\ 10-0)=(2\ ,\ 14\ ,\ 10)$,

$\|\overrightarrow{AH}\|=\sqrt{2^2+14^2+10^2}=\sqrt{300}$ e $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}=-3\times 2+4\times 14+5\times 10=100$.

$\cos(BH\,\hat{,}\,AH)=\left|\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AH})\right|\dfrac{|100|}{\sqrt{50}\times\sqrt{300}}=\dfrac{100}{10\sqrt{150}}=\dfrac{10}{\sqrt{150}}$;

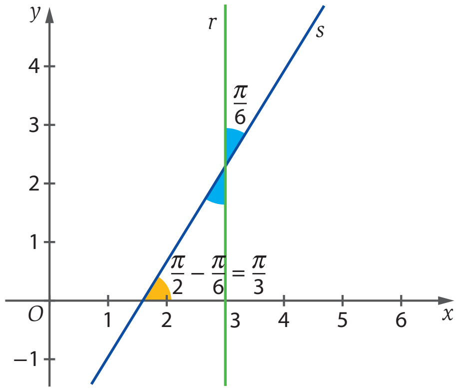
$(BH\,\hat{,}\,AH)=\cos^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{150}}\right)\approx 35°$

Alternativamente:



$\operatorname{tg}(A\hat{H}B)=\dfrac{10}{10\sqrt{2}}\iff A\hat{H}B=\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\iff A\hat{H}B\approx 35°$

38.



Considerando uma reta s de declive positivo, o declive da mesma é $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

Considerando, por exemplo, a reta s que passa na origem, a sua equação reduzida é $y=\sqrt{3}x$.

39.1 $A(x_A, 0, 0)$; $E(0, 0, x_A)$; $F(x_A, 0, x_A)$; $B(x_A, y_B, 0)$;
$C(0, y_B, 0)$; $D(0, y_B, x_A)$; $G(x_A, y_B, x_A)$.

$\overrightarrow{AD}$ tem coordenadas $(0-x_A, y_B-0, x_A-0)=(-x_A, y_B, x_A)$; $\overrightarrow{OF}(x_A, 0, x_A)$.

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OF}=-x_A^2+x_A^2=0$, pelo que $AD\perp OF$.

39.2 $\overline{AB}=3\overline{AO}$, $D(0, 3x_A, x_A)$, isto é, $y_B=3x_A$.

$\overrightarrow{AD}$ tem coordenadas $(0-x_A, 3x_A-0, x_A-0)=(-x_A, 3x_A, x_A)$.

$\overrightarrow{DE}$ tem coordenadas $(0-0, 0-3x_A, x_A-x_A)=(0, -3x_A, 0)$.

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DE}=-x_A\times 0+3x_A\times(-3x_A)+x_A\times 0=-9x_A^2$

$\|\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{(-x_A)^2+(3x_A)^2+(x_A)^2}=\sqrt{11x_A^2}$; $\|\overrightarrow{DE}\|=\sqrt{(-3x_A)^2}=\sqrt{9x_A^2}$.

$$\cos\left(AD\,\hat{,}\,DE\right)=\frac{\left|-9x_A^2\right|}{\sqrt{11x_A^2}\times\sqrt{9x_A^2}}\underset{x_A>0}{=}\frac{9x_A^2}{\sqrt{11}x_A\times 3x_A}=\frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$\left(AD\,\hat{,}\,DE\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)\approx 25{,}2°$$

PÁG. 42

40.1 $x-2y=1\wedge x=0\wedge z=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}\wedge x=0\wedge z=0$
$\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$

40.2 $x-2y=1 \Leftrightarrow x-2y+0z=1$

Um vetor normal a α tem coordenadas $(1, -2, 0)$.

Opção correta: **(A)**

40.3 $3-2\times(-1)=5\neq 1$, logo o ponto não pertence ao plano.

40.4 $k-2\times(-k^2)=1 \Leftrightarrow 2k^2+k-1=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times2\times(-1)}}{2\times1} \Leftrightarrow k=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{-1-3}{2} \vee k=\frac{-1+3}{2} \Leftrightarrow k=-2 \vee k=1$$

$P(-2\ ,-4\ ,-8)$ ou $P(1\ ,-1\ ,4)$.

41.1 $\overrightarrow{AB}(1\ ,0\ ,-1)$; $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=2-2=0$

O ponto B pertence ao plano α , pois A pertence ao plano α e $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$.

41.2 Uma equação do plano α é da forma $2x-y+2z+d=0$.

Substituindo as coordenadas de A , $2\times(-1)-2+2\times1+d=0 \Leftrightarrow d=2$.

$2x-y+2z+2=0$

42. $\overrightarrow{AF}$ é normal ao plano BCD e tem coordenadas $(1-3\ ,3-6\ ,-4-2)=(-2\ ,-3\ ,-6)$.

Logo, uma equação do plano BCD é da forma $-2x-3y-6z+d=0$.

Substituindo as coordenadas de A na equação, obtém-se:

$-2\times3-3\times6-6\times2+d=0 \Leftrightarrow d=36$

$-2x-3y-6z+36=0 \Leftrightarrow 2x+3y+6z-36=0$

Concluindo, uma equação do plano BCD na forma pedida é $2x+3y+6z-36=0$.

43. $V=\frac{81}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times\frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2}\times\overline{OC}=\frac{81}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times\frac{9\times\overline{OB}}{2}\times3=\frac{81}{4} \Leftrightarrow \overline{OB}=\frac{9}{2}$

$B\left(0\ ,\frac{9}{2}\ ,0\right)$

Por três pontos não colineares passa um único plano. Os pontos A , B e C são três pontos não colineares, pelo que se pertencerem ao plano definido por $x+2y+3z-9=0$, este plano é ABC .

Substituindo $A(9\ ,0\ ,0)$: $9+2\times0+3\times0-9=0 \Leftrightarrow 0=0 \longrightarrow$ Proposição verdadeira

Substituindo $B\left(0\ ,\frac{9}{2}\ ,0\right)$: $0+2\times\frac{9}{2}+3\times0-9=0 \Leftrightarrow 0=0 \longrightarrow$ Proposição verdadeira

Substituindo $C(0\ ,0\ ,3)$: $0+2\times0+3\times3-9=0 \Leftrightarrow 0=0 \longrightarrow$ Proposição verdadeira

Logo, uma equação cartesiana do plano ABC é $x+2y+3z-9=0$.

Alternativamente (após a determinação das coordenadas de B)**:**

$\overrightarrow{AC}$ tem coordenadas $(0-9\ ,0-0\ ,3-0)=(-9\ ,0\ ,3)$.

$\overrightarrow{BC}$ tem coordenadas $\left(0-0\ ,0-\frac{9}{2}\ ,3-0\right)=\left(0\ ,-\frac{9}{2}\ ,3\right)$.

Determinemos um vetor $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ perpendicular aos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$, que são vetores não colineares paralelos a ABC :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\wedge\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-9\ ,\ 0\ ,\ 3)=0\\ (a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot\left(0\ ,\ -\frac{9}{2}\ ,\ 3\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-9a+3c=0\\ -\frac{9}{2}b+3c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3c=9a\\ -\frac{9}{2}b=-3c\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c=3a\\ b=\frac{2}{9}\times 3c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=3a\\ b=\frac{2}{9}\times 3\times 3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=3a\\ b=2a\end{cases}$$

Portanto, as coordenadas dos vetores perpendiculares a $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ são da forma $(a\ ,\ 2a\ ,\ 3a),\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Assim, para $a=1$, por exemplo, obtemos $\vec{n}(1\ ,\ 2\ ,\ 3)$.

Logo uma equação do plano é da forma $x+2y-3z+d=0$.

Como o ponto A pertence ao plano, substituindo as coordenadas desse ponto na equação do plano, obtém-se $9+2\times 0+3\times 0+d=0 \Leftrightarrow d=-9$.

Assim, uma equação cartesiana do plano é ABC é $x+2y+3z-9=0$.

PÁG. 43

44.1 Substituindo as coordenadas de T na equação da superfície esférica obtemos uma proposição verdadeira: $(-1)^2+(2-1)^2+(1+2)^2=11 \Leftrightarrow 11=11$.

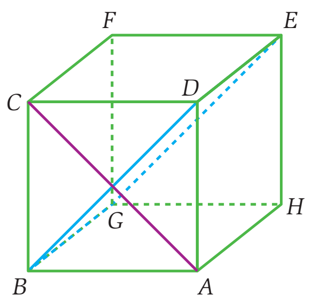
44.2 Sendo C o centro da superfície esférica, um vetor normal ao plano é $\overrightarrow{CT}$, que tem coordenadas $(-1-0\ ,\ 2-1\ ,\ 1+2)=(-1\ ,\ 1\ ,\ 3)$.

Logo, uma equação do plano é da forma $-x+y+3z+d=0$.

Substituindo as coordenadas de T , $-(-1)+2+3\times 1+d=0 \Leftrightarrow d=-6$.

Logo, uma equação do plano na forma pedida é $-x+y+3z-6=0$.

45.



$\overrightarrow{AC}$ tem coordenadas $(3-2\ ,\ 2-5\ ,\ 8-0)=(1\ ,\ -3\ ,\ 8)$ e é perpendicular ao plano DEG .

Assim, o plano DEG tem equação da forma $x-3y+8z+d=0$.

$M_{[AC]}\left(\frac{2+3}{2}\ ,\ \frac{5+2}{2}\ ,\ \frac{0+8}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\ ,\ \frac{7}{2}\ ,\ 4\right)$ pertence ao plano DEG (DEG é o plano mediador de $[AC]$).

Substituindo as coordenadas, $\frac{5}{2}-3\times\frac{7}{2}+8\times 4+d=0 \Leftrightarrow d=-24$

Uma equação do plano DEG é $x-3y+8z-24=0$.

46. As opções (A), (C) e (D) são excluídas, pois o ponto C não pertence aos planos definidos pelas equações dessas opções. O plano definido pela equação da opção (B) contém os pontos A , B e C .

Opção correta: **(B)**

47.1 $\overrightarrow{AD}$ tem coordenadas $(-3-3\ ,\ 3-5\ ,\ 6-3)=(-6\ ,\ -2\ ,\ 3)$.

$\|\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2+3^2}=7$

$V=7^3=343$

47.2 $\overrightarrow{AD}$ é um vetor normal a AEF , pelo que uma sua equação é da forma $-6x-2y+3z+d=0$.

Substituindo as coordenadas de A na equação, obtém-se:

$-6\times 3-2\times 5+3\times 3+d=0 \iff d=19$

Portanto, uma equação de AEF é $-6x-2y+3z+19=0$.

47.3 Os vetores $\overrightarrow{AD}(-6\ ,\ -2\ ,\ 3)$ e $\overrightarrow{AE}$ de coordenadas $(1-3\ ,\ 2-5\ ,\ -3-3)=(-2\ ,\ -3\ ,\ -6)$ são dois vetores não colineares paralelos a ADE .

Sendo $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ um vetor normal a ADE , tem-se:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\wedge\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0 \iff \begin{cases}(a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-6\ ,\ -2\ ,\ 3)=0\\(a\ ,\ b\ ,\ c)\cdot(-2\ ,\ -3\ ,\ -6)=0\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}-6a-2b+3c=0\\-2a-3b-6c=0\end{cases} \iff \begin{cases}-6a-2b+3c=0\\-2a=3b+6c\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}-6\left(-\frac{3}{2}b-3c\right)-2b+3c=0\\a=-\frac{3}{2}b-3c\end{cases} \iff \begin{cases}9b+18c-2b+3c=0\\a=-\frac{3}{2}b-3c\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}7b=-21c\\a=-\frac{3}{2}b-3c\end{cases} \iff \begin{cases}b=-3c\\a=-\frac{3}{2}\times(-3c)-3c\end{cases} \iff \begin{cases}b=-3c\\a=\frac{3}{2}c\end{cases}$$

Portanto, as coordenadas dos vetores perpendiculares a $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ são da forma $\left(\frac{3}{2}c\ ,\ -3c\ ,\ c\right),\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Assim, para $c=2$, por exemplo, obtemos $\vec{n}(3\ ,\ -6\ ,\ 2)$.

Logo uma equação do plano ADE é da forma $3x-6y+2z+d=0$.

Como o ponto A pertence ao plano, substituindo as coordenadas desse ponto na equação do plano, obtém-se $3\times 3-6\times 5+3\times 2+d=0 \iff d=15$.

Assim, uma equação cartesiana do plano é ADE é $3x-6y+2z+15=0$.

48.1 $(0\,,2\,,3)=(1\,,0\,,2)+k\,(1\,,-1\,,0)\,,\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}0=1+k\\2=0-k\\3=2\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$, impossível.

48.2 Seja $R\,(1\,,0\,,2)$.

O vetor $\overrightarrow{RA}$ tem coordenadas $(0-1\,,2-0\,,3-2)=(-1\,,2\,,1)$.

Determinemos um vetor $\vec{n}\,(a\,,b\,,c)$ perpendicular aos vetores $\vec{r}$ (vetor diretor da reta r) e $\overrightarrow{RA}$:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=0 \wedge \vec{n}\cdot\overrightarrow{RA}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(a\,,b\,,c)\cdot(1\,,-1\,,0)=0\\(a\,,b\,,c)\cdot(-1\,,2\,,1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-b=0\\-a+2b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=b\\-a+2a+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=a\\c=-a\end{cases}$$

Portanto, as coordenadas dos vetores perpendiculares a $\vec{r}$ e $\overrightarrow{RA}$ são da forma $(a\,,a\,,-a)$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Assim, para $a=1$, por exemplo, obtemos $\vec{n}\,(1\,,1\,,-1)$.

Logo uma equação do plano é da forma $x+y-z+d=0$.

Como o ponto A pertence ao plano, substituindo as coordenadas desse ponto na equação do plano, obtém-se $0+2-3+d=0 \Leftrightarrow d=1$.

Assim, uma equação cartesiana do plano é $x+y-z+1=0$.

PÁG. 44

49. $A\,(1\,,2\,,-1)$ e $B\,(10\,,8\,,2)$ são pontos das retas r e s, respetivamente.

As retas r e s não são paralelas, dado que os seus vetores diretores não são colineares.

Determinemos um vetor $\vec{n}\,(a\,,b\,,c)$ perpendicular aos vetores $\vec{r}\,(2\,,-1\,,1)$ (vetor diretor da reta r) e $\vec{s}\,(3\,,2\,,1)$ (vetor diretor da reta s):

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=0 \wedge \vec{n}\cdot\vec{s}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(a\,,b\,,c)\cdot(2\,,-1\,,1)=0\\(a\,,b\,,c)\cdot(3\,,2\,,1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a-b+c=0\\3a+2b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c=-2a+b\\3a+2b-2a+b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-2a+b\\a+3b=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c=-2\times(-3b)+b\\a=-3b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=7b\\a=-3b\end{cases}$$

Portanto, as coordenadas dos vetores perpendiculares a $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são da forma $(-3b\,,b\,,7b)$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Assim, para $b=1$, por exemplo, obtemos $\vec{n}\,(-3\,,1\,,7)$.

Logo uma equação do plano é da forma $-3x+y+7z+d=0$.

Como o ponto de coordenadas $(1\,,2\,,-1)$ pertence ao plano, substituindo na sua equação, tem-se $-3\times1+2+7\times(-1)+d=0 \Leftrightarrow d=8$, pelo que uma equação cartesiana do plano é $-3x+y+7z+8=0$.

PÁG. 45

50. Dois planos são perpendiculares se, e só se, os vetores normais aos planos são perpendiculares.

(A) $(1\ ,\ 3\ ,\ 0)\cdot(-1\ ,\ -3\ ,\ 0)=-1-9=-10\neq 0$

(B) $(1\ ,\ 3\ ,\ 0)\cdot(-1\ ,\ 1\ ,\ -1)=-1+3=2\neq 0$

(C) $(1\ ,\ 3\ ,\ 0)\cdot(1\ ,\ 3\ ,\ 0)=1+9=10\neq 0$

(D) $(1\ ,\ 3\ ,\ 0)\cdot(-3\ ,\ 1\ ,\ 2)=-3+3=0$

Opção correta: **(D)**

51. Uma reta é perpendicular a um plano se, e só se, o vetor diretor da reta e o vetor normal ao plano são colineares. Um vetor normal a α tem coordenadas $(1\ ,\ 3\ ,\ -1)$.

Opção correta: **(B)**

52. Para que uma reta seja paralela a um plano é necessário que o vetor diretor da reta seja perpendicular ao vetor normal ao plano.

(A) $(0\ ,\ 3\ ,\ 2)\cdot(-2\ ,\ 1\ ,\ 0)=3\neq 0$

(B) $(0\ ,\ 3\ ,\ 2)\cdot(1\ ,\ 2\ ,\ 0)=6\neq 0$

(C) $(0\ ,\ 3\ ,\ 2)\cdot(0\ ,\ 3\ ,\ 2)=13\neq 0$

(D) $(0\ ,\ 3\ ,\ 2)\cdot(0\ ,\ -2\ ,\ 3)=0$. Além disso, o ponto de coordenadas $(1\ ,\ 2\ ,\ 0)$, que é um ponto da reta, não pertence ao plano definido por $-2y+3z=0$.

Opção correta: **(D)**

53.1 $(1\ ,\ 2\ ,\ -1)\cdot(3\ ,\ -1\ ,\ 1)=3-2-1=0$, o vetor $\vec{r}(3\ ,\ -1\ ,\ 1)$, vetor diretor de r, e o vetor $\vec{n}(1\ ,\ 2\ ,\ -1)$, vetor normal a α, são perpendiculares.

O ponto de coordenadas $(0\ ,\ 1\ ,\ 3)$, que pertence a r, não pertence a α, pois $0+2\times 1-3=-1\neq 2$.

Portanto, como $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são perpendiculares e o ponto de coordenadas $(0\ ,\ 1\ ,\ 3)$ não pertence a α, a reta r é paralela ao plano α.

53.2

a. $3x-y+z+d=0$

$3\times 3-1+4+d=0 \Leftrightarrow d=-12$

$3x-y+z-12=0$

b. $x+2y-z+d=0$

$1+2\times 1-(-2)+d=0 \Leftrightarrow d=-5$

$x+2y-z-5=0$

53.3

a. Sendo a reta paralela à reta r, tem vetores diretores colineares aos de r, pelo que podemos considerar o vetor diretor de coordenadas $(3\ ,\ -1\ ,\ 1)$.
Assim, uma equação vetorial dessa reta é, por exemplo: $(x\ ,\ y\ ,\ z)=(3\ ,\ 1\ ,\ 4)+k\,(3\ ,\ -1\ ,\ 1)\ ,\ k\in\mathbb{R}$.

b. Sendo a reta perpendicular à reta r, tem vetores diretores perpendiculares aos de r, por exemplo, o vetor de coordenadas $(1\ ,\ 2\ ,\ -1)$, já que o produto escalar deste com o vetor diretor de r de coordenadas $(3\ ,\ -1\ ,\ 1)$ é nulo $(1\times 3+2\times(-1)+(-1)\times 1=0)$.
Assim, uma equação vetorial dessa reta é, por exemplo: $(x\ ,\ y\ ,\ z)=(1\ ,\ 1\ ,\ -2)+k\,(1\ ,\ 2\ ,\ -1)\ ,\ k\in\mathbb{R}$

54. A reta que contém a altura do cone contém o centro da base do cone e tem a direção do vetor normal ao plano que contém a base.

$x-4y=8 \wedge y=0 \wedge z=0 \iff x=8 \wedge y=0 \wedge z=0$; $A(8,0,0)$.

$x-4y=8 \wedge x=0 \wedge z=0 \iff y=-2 \wedge x=0 \wedge z=0$; $C(0,-2,0)$.

Como $[AC]$ é um diâmetro da base do cone, $M_{[AC]}\left(\frac{8+0}{2}, \frac{0-2}{2}, \frac{0+0}{2}\right)=(4,-1,0)$.

Logo, uma equação vetorial da reta que contém a altura do cone é

$(x,y,z)=(4,-1,0)+k(1,-4,0)$, $k \in \mathbb{R}$.

PÁG. 46

55.1 $3x+4y+d=0$, pois HEF é paralelo a ABC .

Substituindo as coordenadas de E nesta equação, obtém-se:

$3\times 10+4\times 8+d=0 \iff d=-62$

Logo, uma equação cartesiana do plano HEF é $3x+4y-62=0$.

55.2 $(x,y,z)=(10,8,6)+k(3,4,0)$, $k \in \mathbb{R}$

55.3 $3x+4y-12=0 \wedge y=0 \wedge z=0 \iff x=4 \wedge y=0 \wedge z=0$; $A(4,0,0)$.

$3x+4y-12=0 \wedge x=0 \wedge z=0 \iff y=3 \wedge x=0 \wedge z=0$; $B(0,3,0)$.

$\overrightarrow{AB}(-4,3,0)$; $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$.

$D(4,0,6)$

$\overrightarrow{DE}$ tem coordenadas $(10-4, 8-0, 6-6)=(6,8,0)$; $\|\overrightarrow{DE}\|=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

$\overrightarrow{AD}$ tem coordenadas $(4-4, 0-0, 6-0)=(0,0,6)$; $\|\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{6^2}=6$.

$V=5\times 6\times 10=300$

56. $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$; $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

A área da base da pirâmide é $\sqrt{2}^2=2$.

A altura da pirâmide é a cota do ponto E e o ponto E pertence ao plano DCE .

Como o plano DCE é perpendicular à reta de equação dada, o vetor normal ao plano e o vetor diretor da reta são colineares.

O plano DCE pode ser definido por uma equação cartesiana da forma $3x+3y+z+d=0$.

Substituindo as coordenadas de $C(1,2,0)$ na equação, obtém-se $3\times 1+3\times 2+0+d=0 \iff d=-9$.

Uma equação cartesiana do plano DCE é $3x+3y+z-9=0$.

$E(1,1,z)$, $3\times 1+3\times 1+z-9=0 \iff z=3$, pelo que a altura da pirâmide é 3 .

$V=\frac{1}{3}\times 2\times 3=2$

57. $V(x\,,\,y\,,\,z)$, $z=x^2$, $x>0$, ou seja $V\left(x\,,\,y\,,\,x^2\right)$.

Como V pertence ao plano ABV , substituindo as suas coordenadas na equação do plano, tem-se:

$$3x+x^2=10 \Leftrightarrow x^2+3x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-10)}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm7}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-3-7}{2} \vee x=\frac{-3+7}{2} \Leftrightarrow x=-5 \vee x=2$$

Como a abcissa de V é positiva, $x=2$ e $V(2\,,\,y\,,\,4)$.

V pertence ao plano ACV , substituindo as suas coordenadas na equação do plano, tem-se:
$y+4=4 \Leftrightarrow y=0$. O ponto V tem coordenadas $(2\,,\,0\,,\,4)$.

Uma equação vetorial da reta pedida é $(x\,,\,y\,,\,z)=(2\,,\,0\,,\,4)+k\,(0\,,\,0\,,\,1)\,,\,k\in\mathbb{R}$.

PÁG. 47

58.1 Uma equação do plano pedido é da forma $x+2y-2z+d=0$, pois é paralelo ao plano que contém a base do cone.

Substituindo as coordenadas de V , $1+2\times2-2\times6+d=0 \Leftrightarrow d=7$.

Portanto, uma equação cartesiana do plano pedido é $x+2y-2z+7=0$.

58.2 $(1\,,\,2\,,\,-2)\cdot(2\,,\,-1\,,\,1)=-2\neq0$, logo os planos não são perpendiculares.

58.3 Volume $=\frac{1}{3}\pi\times3^2\times\overline{VC}=3\pi\times\overline{VC}$

Uma equação vetorial de VC é $(x\,,\,y\,,\,z)=(1\,,\,2\,,\,6)+k\,(1\,,\,2\,,\,-2)\,,\,k\in\mathbb{R}$.

As coordenadas de um ponto genérico de VC são $(1+k\,,\,2+2k\,,\,6-2k)\,,\,k\in\mathbb{R}$.

Substituindo na equação de α , tem-se:

$$1+k+2(2+2k)-2(6-2k)=11 \Leftrightarrow 1+k+4+4k-12+4k=11 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9k=18 \Leftrightarrow k=2$$

Portanto, $C(1+2\,,\,2+2\times2\,,\,6-2\times2)$, ou seja, $C(3\,,\,6\,,\,2)$.

$$\overline{VC}=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2+(2-6)^2}=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6$$

Volume $=3\pi\times6=18\pi$

59. Os pontos de r têm coordenadas da forma $(-2\,,\,1-k\,,\,3+k)\,,\,k\in\mathbb{R}$.
$P(x\,,\,3\,,\,z)$, $1-k=3 \Leftrightarrow k=-2$ e $z=3-2=1$, logo $P(-2\,,\,3\,,\,1)$.

Vamos escrever uma equação vetorial da reta que passa no ponto P e é perpendicular ao plano α .

O vetor $\vec{n}(1\,,\,1\,,\,-1)$, vetor normal a α , é um vetor diretor desta reta e, portanto, uma equação vetorial da reta é $(x\,,\,y\,,\,z)=(-2\,,\,3\,,\,1)+k\,(1\,,\,1\,,\,-1)\,,\,k\in\mathbb{R}$.

As coordenadas de um ponto genérico desta reta são $(-2+k\,,\,3+k\,,\,1-k)\,,\,k\in\mathbb{R}$.

Substituindo na equação de α , tem-se:

$$-2+k+(3+k)-(1-k)=11 \Leftrightarrow -2+k+3+k-1+k=11 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3k=11 \Leftrightarrow k=\frac{11}{3}$$

Determinando as coordenadas do ponto de interseção desta reta com o plano α , projeção ortogonal do ponto P no plano α , que vamos designar por P' .

$P'\left(-2+\frac{11}{3}\ ,\ 3+\frac{11}{3}\ ,\ 1-\frac{11}{3}\right)$, ou seja, $P'\left(\frac{5}{3}\ ,\ \frac{20}{3}\ ,\ -\frac{8}{3}\right)$.

A distância do ponto P ao plano α é, então, dada por:

$$\overline{PP'}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}+2\right)^2+\left(\frac{20}{3}-3\right)^2+\left(-\frac{8}{3}-1\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2+\left(\frac{11}{3}\right)^2+\left(-\frac{11}{3}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{3\times\frac{121}{9}}=\sqrt{\frac{121}{3}}=\frac{11}{\sqrt{3}}$$

60. O plano FGH é paralelo ao plano ABC , pelo que tem equação da forma $2x+3y+6z+d=0$.

Substituindo as coordenadas de F , $2\times0+3\times1+6\times(-4)+d=0 \Leftrightarrow d=21$.

Assim, uma equação do plano FGH é $2x+3y+6z+21=0$.

A reta CH tem equação vetorial $(x\ ,\ y\ ,\ z)=(-1\ ,\ -4\ ,\ 7)+k\,(2\ ,\ 3\ ,\ 6),\ k\in\mathbb{R}$ e o ponto H tem coordenadas da forma $(-1+2k\ ,\ -4+3k\ ,\ 7+6k)$, $k\in\mathbb{R}$.

Substituindo na equação do plano FGH ,

$$2\,(-1+2k)+3\,(-4+3k)+6\,(7+6k)+21=0 \Leftrightarrow -2+4k-12+9k+42+36k+21=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 49k=-49 \Leftrightarrow k=-1$$

Logo, $H\,(-1-2\times(-1)\ ,\ -4+3\times(-1)\ ,\ 7+6\times(-1))$, ou seja, $H\,(-3\ ,\ -7\ ,\ 1)$.

61. O raio da esfera é igual à distância entre o centro da esfera e o ponto em que o plano é tangente à esfera, que é a projeção ortogonal do centro no plano.

Começamos por escrever uma equação vetorial da reta que passa no centro da esfera e é perpendicular ao plano.

Como a reta é perpendicular ao plano, o vetor $\vec{n}\left(0\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ 1\right)$, vetor normal ao plano, é um vetor diretor da reta e, portanto, uma equação vetorial da reta é:

$$(x\ ,\ y\ ,\ z)=(1\ ,\ -1\ ,\ 0)+k\left(0\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ 1\right),\ k\in\mathbb{R}$$

Em seguida, determinamos as coordenadas do ponto de interseção da reta com o plano, projeção ortogonal do centro da esfera no plano, que vamos designar por T .

Para tal, podemos escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta e substituir essas coordenadas na equação do plano.

As coordenadas de um ponto genérico da reta são $\left(1\ ,\ -1+\frac{3}{2}k\ ,\ k\right)$, $k\in\mathbb{R}$.

Substituindo na equação do plano, tem-se:

$\frac{3}{2}\times\left(-1+\frac{3}{2}k\right)+k-5=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}+\frac{9}{4}k+k-5=0 \Leftrightarrow 13k=26 \Leftrightarrow k=2$

Portanto, $T\left(1\ ,\ -1+\frac{3}{2}\times 2\ ,\ 2\right)$, ou seja, $T(1\ ,\ 2\ ,\ 2)$.

A distância do centro da esfera ao plano é, então, dada por:

$\overline{CT}=\sqrt{(1-1)^2+(2+1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{0+9+4}=\sqrt{13}$

$V=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{13}\right)^3$

62. O ponto de tangência é a projeção ortogonal do centro da superfície esférica no plano.

Começamos por escrever uma equação vetorial da reta que passa no centro da superfície esférica e é perpendicular ao plano.

Como a reta é perpendicular ao plano, o vetor $\vec{n}(1\ ,\ 1\ ,\ 2)$, vetor normal ao plano, é um vetor diretor da reta e, portanto, uma equação vetorial da reta é:

$(x\ ,\ y\ ,\ z)=(2\ ,\ -1\ ,\ 0)+k\,(1\ ,\ 1\ ,\ 2)\ ,\ k\in\mathbb{R}$

Em seguida, determinamos as coordenadas do ponto de interseção da reta com o plano, projeção ortogonal do centro da superfície esférica no plano, que vamos designar por T .

Para tal, podemos escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta e substituir essas coordenadas na equação do plano.

As coordenadas de um ponto genérico da reta são $(2+k\ ,\ -1+k\ ,\ 2k)\ ,\ k\in\mathbb{R}$.

Substituindo na equação do plano, tem-se:

$2+k+(-1+k)+2\times(2k)-7=0 \Leftrightarrow 2+k-1+k+4k-7=0 \Leftrightarrow 6k=6 \Leftrightarrow k=1$

Portanto, $T(2+1\ ,\ -1+1\ ,\ 2\times 1)$, ou seja, $T(3\ ,\ 0\ ,\ 2)$.