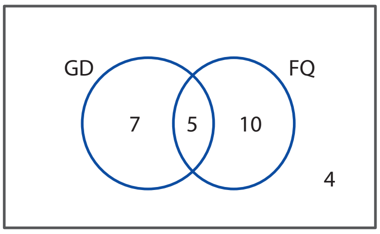
4. Contagem

PÁG. 48

1.1 Sabe-se que 12 alunos estão matriculados na disciplina de Geometria Descritiva A, 15 estão matriculados na disciplina de Física e Química A e 4 não estão matriculados em nenhuma dessas disciplinas. A turma tem 26 alunos, logo 5 alunos $((12+15+5)-26=5)$ estão matriculados nas disciplinas de Geometria Descritiva A e Física e Química A.

1.2 Estão matriculados 12 alunos na disciplina de Geometria Descritiva A e 5 alunos nas disciplinas de Geometria Descritiva A e Física e Química A, logo são $12-5=7$ os alunos que estão matriculados na disciplina de Geometria Descritiva A e não estão matriculados na disciplina de Física e Química A.

1.3 Os alunos que estão matriculados em pelo menos uma das duas disciplinas são os alunos que estão matriculados na disciplina de Geometria Descritiva A e não estão matriculados na disciplina de Física e Química A, os alunos que estão matriculados nas disciplinas de Geometria Descritiva A e Física e Química A e, ainda, os alunos que estão matriculados na disciplina de Física e Química A e não estão matriculados na disciplina de Geometria Descritiva A.



São $7+5+10=22$ alunos que estão matriculados em pelo menos uma das duas disciplinas.

Alternativamente:

Os alunos que estão matriculados em pelo menos uma das disciplinas são todos os alunos à exceção dos que não estão matriculados em qualquer uma das duas, ou seja, $26-4=22$.

2. Consideremos os seguintes conjuntos:

B : realiza o exame nacional de Biologia e Geologia

F : realiza o exame nacional de Filosofia .

$\#B=35$ $\quad\#F=20$ $\quad\#(\overline{B}\cap\overline{F})=15$

$(35+20+15)-50=20$

20 alunos vão realizar os dois exames nacionais: Biologia e Geologia, e Filosofia.

$\#(B\cap F)=20$

Assim, como há 20 alunos que vão realizar o exame de Filosofia e há 20 alunos que vão realizar os dois, os alunos que vão realizar o exame de Filosofia também vão realizar o de Biologia e Geologia.

Logo, nenhum aluno vai realizar apenas o exame de Filosofia.

PÁG. 49

3. Consideremos os seguintes conjuntos:

B : inscrito na aula de *Body Pump*

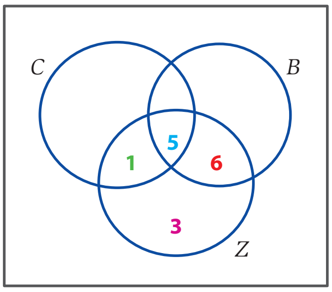
C : inscrito na aula de *Cycling*

Z : inscrito na aula de Zumba

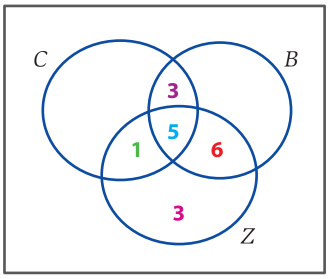
3.1 Increveram-se 5 alunos nas três aulas. Como se inscreveram 11 alunos nas aulas de Zumba e *Body Pump*, $\mathbf{11-5=6}$ inscreveram-se nas aulas de Zumba e de *Body Pump*, mas não nas de *Cycling*.

Como se inscreveram 6 alunos nas aulas de Cycling e de Zumba, $\mathbf{6-5=1}$ inscreveram-se nas aulas de *Cycling* e Zumba, mas não nas de *Body Pump*.

Finalmente, como se inscreveram 15 nas aulas de Zumba, inscreveram-se $\mathbf{15-5-6-1=3}$ apenas nas aulas de Zumba.

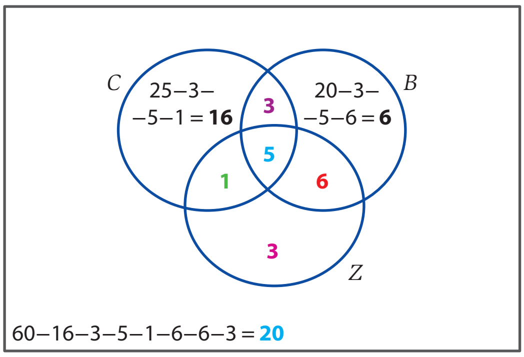


3.2 Como se inscreveram 8 alunos nas aulas de *Cycling* e de *Body Pump*, $\mathbf{8-5=3}$ inscreveram-se nas aulas de *Cycling* e *Body Pump*, mas não nas de Zumba.



Os alunos que se inscreveram em duas, e apenas duas, disciplinas são: $\mathbf{3}+\mathbf{1}+\mathbf{6}=10$.

3.3 Preenchendo o que falta do diagrama de Venn, obtemos:



Portanto, como são 60 sócios no total, o número de sócios que não se inscreveu em nenhuma das aulas é são $60-16-3-5-1-6-6-3=20$.

4. O Pedro tem seis possibilidades para a escolha da t-shirt, para a escolha dos calções tem três possibilidades e para a escolha das sapatilhas tem duas possibilidades. Logo, pelo princípio da multiplicação, o Pedro tem $6 \times 3 \times 2 = 36$ formas diferentes de escolher o equipamento.

5.1 Não é possível escrever o número 18, pois o algarismo das unidades é o número da face que fica voltada para cima no dado cúbico; logo, está compreendido entre 1 e 6 (inclusive).

5.2 Para o algarismo das dezenas temos oito possibilidades e, para o algarismo das unidades, temos seis possibilidades. Logo, pelo princípio da multiplicação, é possível escrever $8 \times 6 = 48$ números diferentes.

5.3 Para que os números estejam compreendidos entre 30 e 60, o algarismo das dezenas pode ser o 3, 4 ou 5, ou seja, temos três possibilidades. O algarismo das unidades tem seis possibilidades. Pelo que, podemos escrever $3 \times 6 = 18$ números compreendidos entre 30 e 60.

5.4 Para que um número seja múltiplo de 5, o algarismo das unidades tem de ser 5 ou 0. Como, neste caso, o algarismo das unidades é o número da face que fica voltada para cima no dado cúbico, só existe uma possibilidade, sair o 5. O algarismo das dezenas tem oito possibilidades.

É possível escrever $8 \times 1 = 8$ números múltiplos de 5.

PÁG. 50

6.1 O clube de Robótica tem 12 alunos. Para o projeto A temos 12 escolhas e para o projeto B temos 11 escolhas, pelo que podem ser sorteados os dois alunos de $12 \times 11 = 132$ formas diferentes.

6.2 Se a Sara apresenta o projeto A, só temos uma possibilidade para esta escolha.

Para o projeto B dispomos de 11 escolhas possíveis. Existem $1 \times 11 = 11$ formas diferentes de serem sorteados os dois alunos, de modo que a Sara apresente o projeto A.

6.3 Se a Sara apresenta um dos projetos, existem duas possibilidades: apresentar o projeto A ou o projeto B. Para o projeto que não será apresentado pela Sara vão existir 11 escolhas possíveis.

Podem ser sorteados os dois alunos, de modo que a Sara apresente um dos projetos, de $2 \times 11 = 22$ formas diferentes.

6.4 Se os alunos sorteados são do mesmo sexo, podem ser os dois do sexo masculino ou os dois do sexo feminino. Existem 8 alunos do sexo masculino, pelo que existem 8×7 formas de escolher dois alunos do sexo masculino. Existem 4 alunos do sexo feminino, pelo que existem 4×3 formas de escolher dois alunos do sexo feminino.

Logo, pelos princípios da adição e multiplicação, existem $8 \times 7 + 4 \times 3 = 68$ formas diferentes de serem sorteados dois alunos do mesmo sexo para apresentarem os projetos.

7.1 O primeiro dos amigos tem 5 lugares à escolha, o segundo tem 4, o terceiro tem 3, o quarto tem 2 e ao último dos amigos resta apenas um lugar.

Os cinco amigos podem sentar-se de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ formas diferentes.

7.2 Se o João fica na extremidade esquerda da fila, tem um lugar disponível. O mesmo acontece à Rita.

Os restantes três amigos têm $3 \times 2 \times 1$ maneiras diferentes de se sentar nos três lugares disponíveis.

São $1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ as formas diferentes de se sentarem os cinco amigos, de modo que o João fique sentado na extremidade esquerda da fila e a Rita na extremidade direita.

7.3 Existem 3 maneiras de o Pedro e o João se sentarem de modo que entre eles esteja sentada apenas uma das amigas: $\underline{P}\,\_\,\underline{J}\,\_\,\_$ $\_\,\underline{P}\,\_\,\underline{J}\,\_$ $\_\,\_\,\underline{P}\,\_\,\underline{J}$ podendo, para cada uma destas maneiras, o Pedro e o João trocar de lugar entre si.

Sentados o Pedro e o João, existem três lugares para as três amigas, ou seja, têm $3 \times 2 \times 1$ maneiras diferentes de se sentarem.

Logo, $3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 36$ é o número de maneiras diferentes de se sentarem os cinco amigos, de modo que entre o Pedro e o João esteja sentada apenas uma das três amigas.

8. A Maria vai ler cinco livros. Como começa pelo livro «Os Maias», só existe uma possibilidade para a primeira escolha. Tem 4 livros à escolha para a segunda leitura, 3 para a terceira leitura, 2 para a quarta e resta 1 para a última leitura.

A sequência de leitura dos livros pode ser feita de $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ formas diferentes.

9. Para que um número seja par, o algarismo das unidades tem 5 possibilidades, pode ser um dos algarismos 0 , 2 , 4 , 6 ou 8 . Para o algarismo das unidades de milhar existem 9 escolhas possíveis, dado que não pode tomar o valor 0 .

Os restantes têm 10 possibilidades, podem tomar qualquer um dos algarismos 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 ou 9 .

Os números pares de quatro algarismos são $9 \times 10 \times 10 \times 5 = 4500$.

10. Para o algarismo das unidades de milhar existem 9 escolhas possíveis, dado que não pode tomar o algarismo 0 , pelo que o algarismo das unidades tem apenas uma possibilidade, pois estes são iguais. Os restantes têm 10 possibilidades, pois podem tomar qualquer um dos algarismos 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 ou 9 .

Os números de quatro algarismos em que o algarismo das unidades é igual ao algarismo das unidades de milhar são $9 \times 10 \times 10 \times 1 = 900$.

11. Capicua é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda e da esquerda para a direita dá o mesmo número.

Para o algarismo das unidades de milhar existem 9 escolhas possíveis, dado que não pode tomar o algarismo 0 ; 10 possibilidades para o segundo algarismo e para o terceiro e quarto algarismo há apenas uma possibilidade, porque vão ser iguais, respetivamente, ao segundo e ao primeiro.

Portanto, são $9 \times 10 \times 1 \times 1 = 90$ capicuas.

PÁG. 51

12. Para cada algarismo, temos cinco possibilidades: 1 , 3 , 5 , 7 ou 9 .

Logo, existem $5^6 = 15\,625$ números de seis algarismos em que todos os algarismos são ímpares.

13. Cada um dos três amigos pode escolher um dos 7 sabores.

A escolha dos sabores dos gelados pelos três amigos pode ser feita de $7^3 = 343$ formas diferentes.
$\left({}^{7}A'_3 = 7^3 = 343\right.$ são todas as sequências de três sabores, não necessariamente diferentes, escolhidos entre os sete disponíveis$\left.\right)$.

14. O conjunto A tem 4 elementos. Dado um qualquer subconjunto de A , um certo elemento de A pode ou não pertencer a esse subconjunto, ou seja, para cada elemento de A , temos duas possibilidades. Portanto, o número de subconjuntos de A é $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$.

15. Para cada uma das dez perguntas de escolha múltipla existem quatro opções de resposta. Assim, as respostas possíveis são todas as sequências de dez elementos, não necessariamente diferentes, escolhidos entre quatro, ou seja, são ${}^{4}A'_{10} = 4^{10} = 1\ 048\ 576$.

16.1 Existem 10 escolhas para cada um dos 4 algarismos que constituem o código.
Portanto, é possível formar $10^4 = 10\ 000$ códigos diferentes.

16.2 Existem 9 escolhas possíveis para o primeiro algarismo porque o 0 não pode ser usado, 10 escolhas para o segundo e terceiro algarismos e, para o quarto, existem 5 escolhas possíveis, pode ser um dos algarismos 1 , 3 , 5 , 7 ou 9 .

Portanto, são $9 \times 10 \times 10 \times 5 = 4500$ códigos nestas condições.

16.3 Se, ao total de códigos diferentes que é possível formar, subtrairmos os códigos que têm todos os algarismos iguais, obtemos todos os códigos em que os quatro algarismos não são todos iguais.
São dez os códigos que têm os algarismos todos iguais: 0000 , 1111 , 2222 , … , 9999 .

Portanto, há $10^4 - 10 = 9990$ códigos nestas condições.

17. Cada um dos cinco amigos tem duas escolhas possíveis: ou vai no carro A ou no carro B. Os cinco amigos podem distribuir-se de 2^5 maneiras diferentes, em que estão incluídas as possibilidades de irem todos no carro A ou todos no carro B. Como pretendem utilizar ambos os carros, temos de retirar essas duas possibilidades, pelo que são $2^5 - 2 = 30$ as formas diferentes dos amigos se distribuírem pelos dois carros.

18.1 Das cinco bolas, extraem-se três bolas sucessivamente e com reposição. O número de maneiras de o fazer é ${}^{5}A'_{3} = 5^3 = 125$.

18.2 Para a primeira e segunda extrações, temos cinco possibilidades, para a terceira extração, só temos duas, pois pretendemos que o número formado seja par, logo o algarismo das unidades tem de ser o 2 ou o 4 . Portanto, é possível formar $5^2 \times 2 = 50$ números pares.

18.3 Para que a soma dos três algarismos seja par, vamos considerar dois casos disjuntos:

1.° caso: as três bolas têm algarismos pares.

Das duas bolas com número par, extraem-se três bolas sucessivamente e com reposição. O número de maneiras de o fazer é ${}^{2}A'_{3} = 2^3$.

2.° caso: duas bolas têm algarismos ímpares e uma bola tem algarismo par.

As bolas com os algarismos ímpares são três e são duas as extrações com números ímpares, pelo que o número de maneiras de o fazer é 3^2 (extração com reposição).

Para cada uma destas maneiras, existem duas possibilidades de escolher uma bola com o algarismo par, e, para cada uma destas possibilidades, existem ainda três posições possíveis para a bola com o algarismo par.

Logo, para este caso, temos $3^2 \times 2 \times 3$ maneiras de formar um número nas condições pedidas.

Portanto, existem $2^3 + 3^2 \times 2 \times 3 = 62$ números nestas condições.

PÁG. 52

19.1 O número de maneiras distintas de escolher, ordenadamente, duas letras maiúsculas, não necessariamente diferentes, é ${}^{26}A'_2 = 26^2$.

Para cada uma destas maneiras existem, ainda, ${}^{10}A'_4 = 10^4$ maneiras distintas de escolher, ordenadamente, os quatro algarismos, não necessariamente diferentes.

É possível formar $26^2 \times 10^4 = 6\ 760\ 000$ *passwords* diferentes.

19.2

a. Para a primeira letra maiúscula, existem 26 escolhas, e, para a segunda, existe apenas uma escolha, pois esta tem de ser igual à primeira. Para cada escolha das letras existem ${}^{10}A'_4 = 10^4$ maneiras distintas de escolher, ordenadamente, os quatro algarismos, não necessariamente diferentes.

Portanto, existem $26 \times 1 \times 10^4 = 260\ 000$ *passwords* nestas condições.

b. Se, ao total de *passwords* diferentes que é possível formar, subtrairmos aquelas em que os algarismos são todos iguais, obtemos aquelas em que os algarismos não são todos iguais.

${}^{26}A'_2 = 26^2$ é o número de maneiras distintas de escolher, ordenadamente, duas letras maiúsculas, não necessariamente diferentes.

Para cada uma destas escolhas, existem 10 possibilidades de os algarismos serem todos iguais (todos iguais a 0 , todos iguais a 1 , … , todos iguais a 9).

Assim, o número de *passwords* com os algarismos iguais é $26^2 \times 10$.

Portanto, existem $26^2 \times 10^4 - 26^2 \times 10 = 6\ 753\ 240$ *passwords* nestas condições.

20.1 O número de maneiras distintas de colorir, ordenadamente, as seis faces do cubo, não necessariamente de cores diferentes, é ${}^{8}A'_6 = 8^6 = 262\ 144$ (temos de escolher, ordenadamente, seis das oito cores, não necessariamente diferentes).

20.2 As faces com números pares são três e vão ser coloridas com a mesma cor, pelo que podem ser coloridas de 8 maneiras distintas. Sobram sete cores para as faces com um número ímpar, pelo que, existem ${}^{7}A'_3 = 7^3$ maneiras distintas de colorir as três faces com número ímpar, não necessariamente de cores diferentes (temos de escolher, ordenadamente, três entre as restantes sete cores, não necessariamente diferentes).

Assim, existem $8 \times 7^3 = 2744$ formas de colorir o cubo.

21. O algarismo 3 pode ser qualquer um dos 6 algarismos que constituem o número. Logo, existem 6 maneiras de colocar o algarismo três. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{8}A'_5 = 8^5$ maneiras de escolher os restantes cinco algarismos (depois de colocar o 3 restam oito algarismos para cinco posições, pelo que temos de escolher, ordenadamente, cinco dos restantes oito algarismos, não necessariamente diferentes, para as restantes cinco posições).

Logo, existem 6×8^5 números de seis algarismos com exatamente um algarismo igual a 3 .

Opção correta: **(D)**

22. Sendo n o número de carros, tem-se que 2^n é o número de maneiras de distribuir os carros por duas caixas (para cada carro há duas possibilidades, uma caixa ou a outra). Mas, como não queremos que nenhuma caixa fique vazia, temos de retirar os dois casos em que todos os carros ficam numa só caixa.

Assim, temos $2^n - 2$ maneiras de distribuir os carros pelas duas caixas.

Logo, $2^n - 2 = 1022 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$, ou seja, o número de carros é 10.

Já vimos que existem duas maneiras de distribuir os carros pelas duas caixas e uma delas ficar vazia: todos numa das caixas ou todos na outra caixa. O número de maneiras de distribuir os dez carros pelas duas caixas de modo que uma delas fique com apenas um carro é 20 (escolher a caixa para ter apenas um carro, duas possibilidades, e, para cada uma destas maneiras, existem dez maneiras de escolher um dos dez carros para essa caixa. Logo, temos $2 \times 10 = 20$ possibilidades).

Logo, existem $2^{10} - 20 - 2 = 1002$ maneiras distintas de colocar os carros nas caixas, de modo que cada caixa tenha pelo menos dois carros.

PÁG. 53

23. O número de formas de distribuir os cinco livros pelos cinco netos é $5! = 120$.

24. Como os seis algarismos do número $123\ 456$ são distintos, o número de maneiras de os permutar é $6! = 720$. Portanto, é possível formar 720 números.

25. Para dispor os jogadores e os elementos da equipa de arbitragem, vamos agrupar as três equipas em três blocos: um bloco para cada uma das equipas e um bloco para a equipa de arbitragem. Como se pretende que a equipa de arbitragem fique no meio, os blocos das equipas de jogadores ficam nos extremos e podem trocar entre si: existem, assim, duas maneiras de dispor estes dois blocos. Dentro de cada bloco de 11 jogadores, o número de maneiras de os ordenar é $11!$, e, dentro do bloco com os 3 elementos da equipa de arbitragem, o número de maneiras de os ordenar é $3!$.

Assim, existem $2 \times 11! \times 3! \times 11!$ maneiras de se disporem para uma fotografia.

26. Temos duas maneiras de dispor os dois maiores carros nas extremidades do expositor e, para cada uma destas maneiras, existem $6!$ maneiras de ordenar (permutar) os seis carros sobrantes.
É possível formar $2 \times 6! = 1440$ sequências.

27. Os três casais podem ordenar-se (permutar-se) de $3!$ maneiras diferentes e, para cada um dos pares de casais, existem $2!$ maneiras diferentes de sentar os dois elementos do casal.
Portanto, o número de formas de sentar os três casais, de modo que cada casal fique sentado frente a frente é $3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$.

28.1 O número de maneiras de ordenar (permutar) os doze livros é $12! = 479\ 001\ 600$.

28.2 Para ordenar os doze livros, de modo que os de banda desenhada fiquem todos juntos, começamos por agrupar os cinco livros de banda desenhada num bloco e vamos determinar o número de maneiras de ordenar o bloco e os restantes sete livros: o número de maneiras de o fazer é $8!$ (o bloco e os sete livros constituem 8 elementos para ordenar). Dentro do bloco o número de maneiras de ordenar (permutar) os cinco livros de banda desenhada é $5!$.

$$\underbrace{\boxed{5\,|\,4\,|\,3\,|\,2\,|\,1}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{5! \times 8!}$$

Portanto, existem $5! \times 8! = 4\ 838\ 400$ maneiras diferentes de dispor os livros.

28.3 Para ordenar os doze livros, de modo que os do mesmo tema fiquem juntos, começamos por agrupar os cinco livros de banda desenhada num bloco, os quatro de ficção científica num segundo bloco e os três de culinária num terceiro bloco. O número de maneiras de ordenar (permutar) os três blocos é $3!$ (os blocos constituem três elementos para ordenar).

Para cada uma destas possibilidades, dentro do bloco da banda desenhada, o número de maneiras de ordenar (permutar) os cinco livros de banda desenhada é $5!$, dentro do bloco de ficção científica, o número de maneiras de ordenar (permutar) os quatro livros de ficção científica é $4!$, e, dentro do bloco de culinária, o número de maneiras de ordenar (permutar) os três livros de culinária é $3!$.

$$\underbrace{\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\quad\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\quad\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}}_{3!\times 5!\times 4!\times 3!}$$

Portanto, existem $3!\times 5!\times 4!\times 3! = 103\ 680$ maneiras diferentes de dispor os livros.

29.1 O número de maneiras de ordenar (permutar) os dez amigos é $10!$.

Opção correta: **(A)**

29.2 Os cinco casais podem ordenar-se (permutar-se) de $5!$ maneiras diferentes. Para cada umas destas maneiras, cada um dos pares de casais pode sentar-se (ordenar-se) de $2!$ maneiras diferentes.

Portanto, o número de formas de sentar os cinco casais, de modo que os elementos de cada casal fiquem juntos, é $5!\times 2!\times 2!\times 2!\times 2!\times 2! = 5!\times 2^5 = 3840$.

PÁG. 54

30. No número $513\ 125$, os algarismos 1 e 5 repetem-se duas vezes cada um. Portanto, a quantidade de números que é possível formar é dada pelo número total de permutações dos seis algarismos do número $513\ 125$, dividido pelo produto do número de permutações do algarismo 1, $2!$, e pelo número de permutações do algarismo 5, $2!$.

Portanto, o número pedido é $\dfrac{6!}{2!\times 2!} = 180$.

31. O número de formas de dispor as nove peças no tabuleiro, sendo três verdes e seis vermelhas, é o número total de permutações das 9 peças, $9!$, dividido pelo produto do número de permutações das 3 peças verdes, $3!$, e pelo número de permutações das 6 peças vermelhas, $6!$.

Assim, o número pedido é $\dfrac{9!}{3!\times 6!} = 84$.

32. O número de maneiras de ordenar (permutar) os cinco amigos é $5!$.

Se, ao número de maneiras de sentarmos os cinco amigos, subtrairmos o número de maneiras de não haver amigos sintrenses sentados lado a lado, obtemos o número de maneiras de sentar os amigos, de modo que pelo menos dois sintrenses fiquem juntos.

Para sentar os amigos de modo a não haver dois amigos, sintrenses sentados lado a lado, estes têm de ser dispostos da seguinte forma: $\underline{S}\ \underline{A}\ \underline{S}\ \underline{A}\ \underline{S}$. Desta forma, o número de maneiras de sentar os três sintrenses é $3!$ (é o número de maneiras de ordenar os três naquelas três posições), e, para cada uma destas maneiras, existem $2!$ possibilidades de sentar os aveirenses (é o número de maneiras de ordenar os dois naquelas duas posições).

Portanto, o número pedido é $5! - 3!\times 2! = 108$.

33. Seja n o número de bolas brancas iguais. Pretende-se colocar em fila $n+2$ bolas. O número de formas de as dispor é igual ao número total de permutações das $n+2$ bolas, $(n+2)!$, dividido pelo número de permutações das n bolas brancas, $n!$ (pois existem n bolas brancas iguais).

Assim, o número de maneiras de dispor as $n+2$ bolas em fila é $\frac{(n+2)!}{n!}$.

Como sabemos que existem 132 formas diferentes de dispor as bolas, tem-se:

$$\frac{(n+2)!}{n!}=132 \Leftrightarrow \frac{(n+2)\times(n+1)\times n!}{n!}=132 \Leftrightarrow (n+2)\times(n+1)=132 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+3n+2=132 \Leftrightarrow n^2+3n-130=0 \Leftrightarrow n=-13 \vee n=10$$

Como $n\in\mathbb{N}$, conclui-se que $n=10$.

Logo, pretendem-se colocar doze bolas em fila.

34. Para formar semirretas, temos de escolher, ordenadamente, dois pontos distintos de entre os dezoito.

O número de maneiras de o fazer é ${}^{18}A_2=306$.

35. Destes doze atletas, escolhem-se, ordenadamente e sem repetição, três deles (uma vez que a mesma pessoa não pode ficar em dois lugares).

Assim, o pódio pode ser constituído de ${}^{12}A_3=1320$ formas distintas.

PÁG. 55

36. O número de maneiras de escolher e sentar os dois amigos do Porto nas extremidades é ${}^4A_2$ (dos quatro amigos do Porto, escolhem-se, ordenadamente, dois para ocuparem esses lugares). Para cada uma destas maneiras, existem $8!$ maneiras de permutar os restantes oito amigos pelos oito lugares disponíveis. Assim, a resposta é ${}^4A_2\times 8!$.

Opção correta: **(B)**

37.1 O número pedido corresponde ao número de sequências que se podem fazer com cinco algarismos distintos de entre os nove algarismos existentes, ou seja, corresponde ao número de maneiras de escolher, ordenadamente, cinco dos nove algarismos.
O número de maneiras de o fazer é ${}^9A_5=15\ 120$.

37.2 Existem cinco maneiras de escolher a posição do algarismo 9. Para cada uma destas, existem ${}^8A_4$ maneiras de escolher, ordenadamente, quatro algarismos distintos entre os restantes oito (já não se pode escolher o 9).
Assim, a resposta é $5\times{}^8A_4=8400$.

37.3 Para que um número seja par, o algarismo das unidades tem de ser par, ou seja, temos quatro possibilidades para esse algarismo. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^8A_4$ maneiras de escolher, ordenadamente, quatro algarismos distintos entre os restantes oito (já não se pode escolher o algarismo que foi escolhido para as unidades).
Assim, a resposta é $4\times{}^8A_4=6720$.

38. Existem cinco cartões com números ímpares.

Escolhem-se, ordenadamente, três algarismos ímpares distintos de entre os cinco, o número de maneiras de o fazer é ${}^5A_3$. Para cada uma destas maneiras, existem $6!$ maneiras distintas de permutar os restantes seis cartões pelas restantes seis posições.

Assim, a resposta é ${}^5A_3 \times 6! = 43\ 200$.

39. Vamos escolher de forma ordenada as duas faces do cubo que vão ser pintadas de verde e amarelo; o número de maneiras de o fazer é ${}^6A_2$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^5A_4$ maneiras de escolher, ordenadamente, as quatro cores distintas, de entre as cinco disponíveis, para pintar as restantes faces.

O número de formas diferentes de pintar é ${}^6A_2 \times {}^5A_4 = 3600$.

40. Apenas os amigos da ilha de Santa Maria têm carta de condução, pelo que têm de conduzir as motos. Assim, existem $4!$ maneiras de permutar quatro amigos da ilha de Santa Maria pelas quatro motas. Para cada uma destas possibilidades, existem ${}^4A_3$ maneiras de escolher, ordenadamente, três motas distintas entre as quatro, para distribuir os três amigos da ilha Terceira.

Assim, a resposta é $4! \times {}^4A_3 = 576$.

PÁG. 56

41.1 Dos dezasseis compartimentos escolhem-se, ordenadamente, doze para colocar os doze gelados. O número de maneiras de o fazer é ${}^{16}A_{12}$.

41.2 Cada fila tem oito compartimentos e são oito os sabores de fruta. Existem duas possibilidades para colocar os gelados com sabores de fruta na mesma fila. Para cada uma destas possibilidades, existem $8!$ maneiras de permutar os oito sabores de fruta pelos oito compartimentos. Por fim, para os restantes quatro gelados de sabores distintos, escolhem-se, ordenadamente, quatro dos oito restantes compartimentos, o número de maneiras de o fazer é ${}^8A_4$.

Portanto, uma expressão que dá o valor pedido é $2 \times 8! \times {}^8A_4$.

42. Um código é constituído por quatro algarismos distintos, sendo dois deles 1 e 9 . Existem ${}^4A_2$ maneiras distintas de escolher, ordenadamente, duas posições entre as quatro para os algarismos 1 e 9 . Para cada uma destas, existem ${}^8A_2$ maneiras de escolher, ordenadamente, os dois algarismos distintos entre os restantes oito para as restantes duas posições (já não se podem escolher o 1 e o 9).

Assim, a resposta é ${}^4A_2 \times {}^8A_2 = 672$.

43. Se, ao número total de códigos com cinco algarismos, subtrairmos o número de códigos com os algarismos todos diferentes, obtemos os códigos com, pelo menos, dois algarismos iguais.

O número de códigos com cinco algarismos é 10^5 . Para cada algarismo do código, existem dez possibilidades (podemos escolher algarismos de 0 a 9). O número de códigos com os algarismos diferentes é ${}^{10}A_5$, que é o número de sequências que se podem fazer com cinco algarismos distintos escolhidos entre os dez disponíveis.

Portanto, a resposta é $10^5 - {}^{10}A_5 = 69\ 760$.

44. Se ao número de sequências de quatro algarismos diferentes em que dois são pares, sendo um deles o quarto algarismo e dois são ímpares, subtrairmos o número de sequências de quatro algarismos diferentes começadas pelo 0, seguida de dois números ímpares e terminando num algarismo par diferente de zero, obtemos todos os números pares que têm exatamente dois algarismos ímpares.

O número de sequências de quatro algarismos diferentes em que dois são pares e dois são ímpares é $3 \times {}^5A_2 \times {}^5A_2$. O último algarismo tem de ser par, por isso temos três posições possíveis para o outro algarismo par.

Para cada uma destas maneiras, existem ${}^5A_2$ maneiras diferentes de escolher, ordenadamente, os dois algarismos pares distintos entre os cinco disponíveis, e ${}^5A_2$ maneiras diferentes de escolher, ordenadamente, os dois algarismos ímpares distintos, de entre os cinco disponíveis.

O número de sequências de quatro algarismos diferentes começadas pelo 0, seguida de dois números ímpares e terminando num algarismo par diferente de zero é $1 \times {}^5A_2 \times 4$.

Para o primeiro algarismo temos uma possibilidade, o zero, pelo que para o quarto algarismo, das unidades, temos quatro possibilidades (todos os pares à excepção do zero). Finalmente, para cada uma destas possibilidades, existem ${}^5A_2$ maneiras diferentes de escolher, ordenadamente, os dois algarismos ímpares distintos entre cinco disponíveis.

Portanto, existem $3 \times {}^5A_2 \times {}^5A_2 - 1 \times {}^5A_2 \times 4 = 1120$ números nas condições pedidas.

PÁG. 57

45. Realizaram-se tantos jogos quantos os conjuntos de duas equipas que se podem formar, isto é, para haver um jogo, escolhem-se duas das dez equipas, o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_2 = 45$.

46. O número de maneiras de dispor as seis peças no tabuleiro, corresponde ao número de maneiras de escolher seis das nove quadrículas. O número de maneiras de o fazer é ${}^9C_6 = 84$.

47.1 Para definir uma reta, são necessários dois pontos distintos. Temos, portanto, de escolher dois dos nove pontos, pelo que o número de retas que é possível definir é ${}^9C_2 = 36$.

47.2 Para formar um triângulo, escolhem-se três dos nove pontos dados. Como não há três pontos colineares, ${}^9C_3 = 84$ é o número de maneiras de escolher três pontos quaisquer dos nove pontos, sendo este o número de triângulos diferentes que é possível definir.

48. O número de subconjuntos que é possível formar com três elementos de um conjunto com cinco elementos é ${}^5C_3$ (escolhem-se três dos cinco).

O número de subconjuntos que é possível formar com quatro elementos de um conjunto com cinco elementos é ${}^5C_4$ (escolhem-se quatro dos cinco).

O número de subconjuntos que é possível formar com cinco elementos de um conjunto com cinco elementos é ${}^5C_5 = 1$ (escolhem-se os cinco).

Portanto, o número de subconjuntos com, pelo menos, três elementos de um conjunto com cinco elementos é ${}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 16$.

49. O número 1 122 188 tem 7 algarismos, o algarismo 1 repete-se três vezes e os algarismos 2 e 8 repetem-se cada um duas vezes.

Existem ${}^{7}C_3$ maneiras diferentes de escolher três das sete posições para os três algarismos 1 . Para cada uma destas, existem ${}^{4}C_2$ maneiras de escolher duas das restantes quatro posições dos dois algarismos 2 . Finalmente, as duas posições sobrantes são para os dois algarismos 8 , pelo que existe apenas uma maneira de os dispor.

Assim, a resposta é ${}^{7}C_3 \times {}^{4}C_2 \times 1 = 210$.

50. Pretende-se selecionar cinco livros para levar nas férias, de modo que pelo menos três sejam romances. Consideremos dois casos disjuntos:

1.° caso: três romances e dois dos outros.

Existem ${}^{4}C_3$ maneiras diferentes de escolher três dos quatro romances. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{6}C_2$ maneiras de escolher dois dos seis livros que não são romances. Portanto, para este caso, temos ${}^{4}C_3 \times {}^{6}C_2$ possibilidades.

2.° caso: quatro romances e um dos outros.

Existem ${}^{4}C_4$ maneiras diferentes de escolher quatro dos quatro romances. Para cada uma destas manerias, existem ${}^{6}C_1$ maneiras de escolher um dos seis livros que não são romances. Portanto, para este caso, temos ${}^{4}C_4 \times {}^{6}C_1$ possibilidades.

O valor pretendido é ${}^{4}C_3 \times {}^{6}C_2 + {}^{4}C_4 \times {}^{6}C_1 = 66$.

51. Como, no enunciado, o cubo não está representado no referencial o.n., vamos começar por verificar se o cubo tem faces paralelas ao plano xOy .

Os três pontos A , B e C estão contidos no plano de equação $z = 1$.

Como $\overline{AB} = \sqrt{(6-6)^2 + (5-1)^2 + (1-1)^2} = 4$, a aresta do cubo mede 4 , pelo que os planos que contêm as faces $[ABCD]$ e $[EFGH]$ do cubo são paralelos ao plano xOy , tal como as diferentes retas que é possível definir. Assim, utilizando dois dos quatro vértices que compõe cada uma destas faces são paralelas ao plano xOy .

O número de retas que é possível definir utilizando dois dos quatro vértices de cada uma das faces do cubo é ${}^{4}C_2$.

Portanto, como são duas faces, uma expressão que dá resposta ao problema é $2 \times {}^{4}C_2$.

52. Expressão 1

Existem ${}^{12}C_3$ maneiras diferentes de escolher três das doze faces para pintar de amarelo. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{9}C_2$ maneiras diferentes de escolher duas das nove faces sobrantes para pintar de verde.

As restantes sete faces são pintadas de azul. Assim, uma expressão que dá resposta ao problema é ${}^{12}C_3 \times {}^{9}C_2$.

Expressão 2

Existem ${}^{12}C_7$ maneiras diferentes de escolher sete das doze faces para pintar de azul. Para cada uma destas, existem ${}^{5}C_3$ maneiras diferentes de escolher três das cinco faces sobrantes para pintar de amarelo.

As restantes duas faces são pintadas de verde. Assim, uma expressão que dá resposta ao problema é ${}^{12}C_7 \times {}^{5}C_3$.

PÁG. 58

53. Os múltiplos de 3 são 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , …

Retirando três bolas do saco em simultâneo, a soma dos números das bolas retiradas é um múltiplo de 3 nos seguintes casos disjuntos:

1.° caso: três bolas com o número 2 .

Existem ${}^4C_3 = 4$ maneiras diferentes de escolher três das quatro bolas com o número 2 .

2.° caso: três bolas com o número 3 .

Existe ${}^3C_3 = 1$ maneira de escolher três das três bolas com o número 3 .

3.° caso: duas bolas com o número 2 e uma bola com o número 5 .

Existem ${}^2C_1$ maneiras de escolher uma das duas bolas com o número 5 . Para cada uma destas maneiras, existem ${}^4C_2$ maneiras de escolher duas das quatro bolas com o número 2 . Assim, para este caso, temos ${}^2C_1 \times {}^4C_2 = 12$ possibilidades.

4.° caso: duas bolas com o número 5 e uma bola com o número 2 .

Existem ${}^2C_2$ maneiras de escolher as duas bolas com o número 5 . Para cada uma destas, existem ${}^4C_1$ maneiras de escolher uma das quatro bolas com o número 2 . Assim, para este caso, temos ${}^2C_2 \times {}^4C_1 = 4$ possibilidades.

Portanto, o número pedido é $4 + 1 + 12 + 4 = 21$.

54. As comissões de três elementos serão mistas se tiverem dois elementos do sexo feminino e um elemento do sexo masculino ou dois elementos do sexo masculino e um do sexo feminino.

Seja n o número de elementos do sexo masculino.

O número de comissões com dois elementos do sexo feminino e um elemento do sexo masculino é ${}^{12}C_2 \times {}^nC_1$ (existem ${}^{12}C_2$ maneiras de escolher dois dos doze elementos do sexo feminino e, para cada uma destas, existem ${}^nC_1$ maneiras de escolher um dos n elementos do sexo masculino).

O número de comissões com dois elementos do sexo masculino e um elemento do sexo feminino é ${}^nC_2 \times {}^{12}C_1$ (existem ${}^nC_2$ maneiras de escolher dois dos doze elementos do sexo masculino e, para cada uma destas, existem ${}^{12}C_1$ maneiras de escolher um dos doze elementos do sexo feminino).

Assim, o número de comissões mistas é dado por ${}^{12}C_2 \times {}^nC_1 + {}^nC_2 \times {}^{12}C_1$, pelo que:

$$
\begin{aligned}
{}^{12}C_2 \times {}^nC_1 + {}^nC_2 \times {}^{12}C_1 = 2016 \iff\ & 66 \times n + \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} \times 12 = 2016 \iff \\
\iff\ & 66n + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)! \times 2} \times 12 = 2016 \iff \\
\iff\ & 66n + n \times (n-1) \times 6 = 2016 \iff \\
\iff\ & 6n^2 + 60n - 2016 = 0 \iff \\
\iff\ & n = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \times 6 \times (-2016)}}{12} \iff \\
\iff\ & n = -24 \lor n = 14
\end{aligned}
$$

Como n é um número natural não nulo, tem-se $n = 14$, pelo que o número de elementos do sexo masculino é 14 .

55.1 O chefe do departamento faz parte da comissão, pelo que precisamos de escolher cinco pessoas de entre os restantes dezanove trabalhadores.

O número de maneiras de o fazer é $^{19}C_5 = 11\ 628$.

55.2 Se, ao número total de comissões de seis trabalhadores, subtrairmos as comissões formadas apenas por trabalhadores portugueses e as comissões formadas apenas por trabalhadores espanhóis, obtemos as comissões com trabalhadores das duas nacionalidades.

O número de comissões com seis dos vinte trabalhadores é $^{20}C_6$.

O número de comissões com seis dos doze trabalhadores portugueses é $^{12}C_6$.

O número de comissões com seis dos oito trabalhadores espanhóis é $^{8}C_6$.

Portanto, o resultado é $^{20}C_6 - {}^{12}C_6 - {}^{8}C_6 = 37\ 808$.

56. Seja n o número de professores que participaram no congresso.

Foram dados tantos apertos de mão quantos são os conjuntos de dois professores que se podem formar, ou seja, $^{n}C_2$, isto é, para haver um aperto de mão entre dois professores, temos de escolher dois dos n professores.

$$^{n}C_2 = 7381 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 7381 \Leftrightarrow \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)! \times 2} = 7381 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 7381 \Leftrightarrow n^2 - n - 14762 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-14762)}}{2} \Leftrightarrow n = -121 \vee n = 122$$

Como n é um número natural não nulo, tem-se $n = 122$, pelo que são 122 o número de professores.

57.1 Existem $^{16}C_5$ maneiras distintas de escolher cinco das dezasseis casas para serem ocupadas pelas fichas brancas. Para cada uma destas maneiras, existem $^{11}C_4$ maneiras distintas de escolher quatro das onze casas sobrantes para colocar as fichas pretas.

Assim, o resultado é $^{16}C_5 \times {}^{11}C_4 = 1\ 441\ 440$.

57.2 O número de maneiras de colocar as fichas pretas na mesma linha é 4 , pois o tabuleiro tem quatro linhas (escolhe-se uma das quatro linhas, $^{4}C_1 = 4$). Para cada uma destas quatro possibilidades, existem $^{12}C_5$ maneiras distintas de escolher cinco das restantes doze casas para colocar as fichas brancas.

Assim, a resposta é $4 \times {}^{12}C_5 = 3168$.

57.3 Comecemos por preencher uma das duas diagonais com fichas brancas, temos 2 possibilidades (escolhe-se uma das duas diagonais, $^{2}C_1 = 2$); para cada uma destas, existem $^{12}C_4$ maneiras de escolher quatro das doze casas restantes para colocar as quatro fichas pretas, e $^{8}C_1$ maneiras de escolher uma de oito casas (as que sobraram após se colocarem as quatro pretas), para colocar a quinta peça branca.

Portanto, o número pedido é $2 \times {}^{12}C_4 \times {}^{8}C_1 = 7920$.

PÁG. 59

58.1 Existem ${}^9A_4$ maneiras diferentes de escolher, ordenadamente, quatro dos nove compartimentos para dispor as bolas de cores distintas. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^5C_4$ maneiras de escolher quatro dos restantes cinco compartimentos para dispor as bolas brancas.

Assim, o resultado é ${}^9A_4 \times {}^5C_4 = 15\ 120$.

58.2 Dispomos de oito compartimentos para colocar as oito bolas, uma vez que pretendemos que o compartimento central fique vazio.

Existem ${}^8A_4$ maneiras diferentes de escolher, ordenadamente, quatro dos oito compartimentos para dispor as bolas de cores distintas. Para cada uma destas maneiras, existe apenas uma forma de colocar as quatro bolas brancas nos restantes quatro compartimentos (escolhem-se os quatro compartimentos restantes, ${}^4C_4 = 1$).

Assim, o resultado é ${}^8A_4 \times 1 = 1680$.

58.3 Comecemos por escolher uma das linhas para preencher com bolas brancas. Podemos fazê-lo de três maneiras diferentes, pois temos três linhas (escolhe-se uma das três linhas, ${}^3C_1 = 3$). Para cada uma destas, existem ${}^6A_5$ maneiras diferentes de escolher, ordenadamente, cinco dos seis restantes compartimentos para dispor as cinco bolas de cores distintas.

Portanto, o resultado é $3 \times {}^6A_5 = 2160$.

59. Expressão 1

Existem ${}^5C_2$ maneiras diferentes de escolher duas posições entre as cinco para os dois algarismos 5 .

Para cada uma destas maneiras, existem ${}^8A_3$ maneiras distintas de escolher, ordenadamente, três dos oito algarismos sobrantes $(1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 \text{ ou } 9)$ que vão ocupar as restantes posições.

Assim, uma expressão que dá resposta a este problema é ${}^5C_2 \times {}^8A_3$.

Expressão 2

Comecemos por escolher três algarismos distintos de entre um conjunto de oito algarismos diferentes do 5 $(1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 \text{ ou } 9)$. O número de maneiras de o fazer é ${}^8C_3$.

Para cada uma destas, existem ${}^8A_3$ maneiras distintas de escolher, ordenadamente, três das cinco posições para os três algarismos escolhidos.

As restantes duas posições ficam preenchidas com um 5 , pelo que há apenas uma possibilidade para cada uma delas.

Assim, outra expressão que dá resposta a este problema é ${}^8C_3 \times {}^5A_3 \times 1 = {}^8C_3 \times {}^5A_3$.

60. A soma dos algarismos que constituem os números de três algarismos distintos é par em dois casos disjuntos:

1.° caso: os três algarismos são pares.

Existem ${}^4A_3$ maneiras diferentes de escolher, ordenadamente, os três algarismos pares diferentes, entre os quatro disponíveis $(2, 4, 6 \text{ ou } 8)$.

2.° caso: dois algarismos ímpares e um par.

Existem ${}^5C_2$ maneiras diferentes de escolher dois dos cinco números ímpares. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^4C_1 = 4$ maneiras de escolher um algarimos par entre os quatro disponíveis.

Agora que estão escolhidos os algarismos que vão formar o número só temos de os permutar/ordenar; o número de maneiras de o fazer é $3!$.

Assim, para este caso, temos ${}^5C_2 \times 4 \times 3!$ possibilidades.

Portanto, no total, existem ${}^4A_3 + {}^5C_2 \times 4 \times 3! = 264$ números distintos em que a soma dos algarismos que os constituem é par.

61. O conjunto formado pelos quatro ases, quatro damas, quatro valetes e quatro reis vamos designá-lo por A e tem dezasseis elementos. O conjunto formado por quatro duques, quatro ternos e quatro quinas, vamos designá-lo por B e tem doze elementos.

O número de grupos de seis cartas que podemos formar retirando três cartas de cada um dos conjuntos é ${}^{16}C_3 \times {}^{12}C_3$: das dezasseis cartas do conjunto A escolhem-se três, o número de maneiras de o fazer é ${}^{16}C_3$, e das doze cartas do conjunto B escolhem-se três, o número de maneiras de o fazer é ${}^{12}C_3$.

Depois de escolhidas as seis cartas que serão dispostas lado a lado numa fila, resta ordená-las.
O número de maneiras de o fazer é $6!$, que corresponde ao número de maneiras de permutar as seis cartas escolhidas.

Portanto, uma expressão que corresponde ao valor pedido é ${}^{16}C_3 \times {}^{12}C_3 \times 6!$.

62. Existem ${}^{6}C_2$ maneiras diferentes de escolher duas posições para os dois algarismos 9 . Para cada uma destas, existem 8^4 maneiras distintas de escolher, ordenadamente, os quatro algarismos diferentes de 9 , mas não necessariamente diferentes entre si.

Assim, a resposta é ${}^{6}C_2 \times 8^4 = 61\ 440$.

PÁG. 60

63. Existem três pares de lugares possíveis para a Fátima e a Maria se sentarem frente a frente. Para cada um destes pares de lugares, a Fátima e a Maria podem trocar de posição, ou seja, para cada uma das três maneiras de a Fátima e a Maria se sentarem frente a frente, temos duas possibilidades de as sentar.
Finalmente, para cada maneira de a Fátima e a Maria se sentarem, existem ${}^{4}A_2$ de escolher, ordenadamente, dois lugares entre os restantes quatro para os restantes dois amigos se sentarem.

Portanto, o resultado é $3 \times 2 \times {}^{4}A_2 = 72$.

64. O número de maneiras de sentar três dos quatro elementos da turma B nos três lugares da primeira fila é ${}^{4}A_3$, que é o número de maneiras de escolher, ordenadamente, três dos quatro elementos da turma B .
Para cada uma destas maneiras, existem $5!$ maneiras distintas de distribuir (permutar/ordenar) os restantes cinco alunos nos cinco lugares da segunda fila.
Assim, a resposta é ${}^{4}A_3 \times 5!$.

Opção correta: **(B)**

65. Para garantirmos que cada caixa tem pelo menos uma bola da cor da respetiva caixa, colocamos uma bola verde em cada uma das caixas 1 , 2 , 3 e 4 , e uma bola amarela em cada uma das caixas 5 , 6 , 7 e 8 . Sobram-nos duas bolas verdes e quatro amarelas para distribuir pelas oito caixas.

Existem ${}^{8}C_2$ maneiras distintas de escolher duas das oito caixas para colocar as bolas verdes e, como cada caixa tem no máximo duas bolas, existem ${}^{6}C_4$ maneiras distintas de escolher quatro das seis caixas, que têm apenas uma bola cada, para colocar as bolas amarelas.

Assim, a resposta é ${}^{8}C_2 \times {}^{6}C_4 = 420$.

66.1 Sabendo que cada código é formado por uma sequência de três vogais e quatro algarismos e que existem cinco vogais e que os algarismos podem tomar valores de 0 a 9, pelo princípio da multiplicação temos $5 \times 5 \times 5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 5^3 \times 10^4 = 1\ 250\ 000$ possibilidades.

Alternativamente:

Existem ${}^5A'_3 = 5^3$ maneiras distintas de escolher, ordenadamente, as três vogais, não necessariamente diferentes. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{10}A'_4 = 10^4$ maneiras distintas de escolher, ordenadamente, quatro algarismos entre os dez, não necessariamente diferentes.

Assim, a resposta é ${}^5A'_3 \times {}^{10}A'_4 = 5^3 \times 10^4 = 1\ 250\ 000$.

66.2 Sabendo que as vogais são iguais, existem 5 possibilidades para letras: escolher **aaa**, escolher **eee**, escolher **iii**, escolher **ooo**, ou escolher **uuu**. Para cada uma destas, existem ${}^{10}A'_4 = 10^4$ maneiras distintas de escolher, ordenadamente, quatro algarismos entre os dez, não necessariamente diferentes.
Portanto, a resposta é $5 \times {}^{10}A'_4 = 5 \times 10^4 = 50\ 000$.

66.3 Os códigos têm exatamente duas letras **a**, pelo que existem ${}^3C_2$ maneiras diferentes de escolher duas das três posições para as duas letras **a**. Para cada uma destas, existem quatro possibilidades (todas menos o **a**) para a terceira vogal. Assim, o número de sequências de vogais é ${}^3C_2 \times 4$.

A sequência numérica é maior do que 2000 e menor do que 5000, pelo que o primeiro algarismo só pode tomar os valores 2, 3 ou 4, existindo, portanto, três possibilidades para o primeiro algarismo. Para os restantes três algarismos (para as três últimas posições), como são todos diferentes, escolhem-se, ordenadamente três dos restantes nove disponíveis (todos menos o que foi escolhido para a primeira posição). O número de maneiras de o fazer é ${}^9A_3$.

Assim, o número de sequências numéricas é $3 \times {}^9A_3$.

Portanto, para cada uma das ${}^3C_2 \times 4$ sequências de vogais, existem $3 \times {}^9A_3$ sequências numéricas, pelo que o número de códigos nas condições do enunciado é ${}^3C_2 \times 4 \times 3 \times {}^9A_3 = 18\ 144$.