5. Sucessões

PÁG. 61

1.1 $a_1 = 50 - 4 \times 1 = 46$, $a_2 = 50 - 4 \times 2 = 42$, $a_3 = 50 - 4 \times 3 = 38$, $a_4 = 50 - 4 \times 4 = 34$.

1.2 $a_n > 0 \Leftrightarrow 50 - 4n > 0 \Leftrightarrow n < \frac{50}{4}$

Como $\frac{50}{4} = 12{,}5$, os doze primeiros termos da sucessão são positivos.

1.3 $a_n = -45 \Leftrightarrow 50 - 4n = -45 \Leftrightarrow n = \frac{95}{4} \notin \mathbb{N}$

-45 não é termo da sucessão.

$a_n = -126 \Leftrightarrow 50 - 4n = -126 \Leftrightarrow n = \frac{176}{4} \Leftrightarrow n = 44 \in \mathbb{N}$

-126 é o termo de ordem 44 da sucessão.

2.1 $a_{120} = 10 \times 120 - 0{,}5 \times 120^2 = -6000$

2.2 $a_n > 10 \Leftrightarrow 10n - 0{,}5n^2 > 10 \Leftrightarrow -0{,}5n^2 + 10n - 10 > 0$

$$10n - 0{,}5n^2 = 10 \Leftrightarrow -0{,}5n^2 + 10n - 10 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 20n + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \times 1 \times 20}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = \frac{20 \pm \sqrt{320}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{20 \pm 8\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow n = 10 - 4\sqrt{5} \vee n = 10 + 4\sqrt{5}$$

O gráfico da sucessão está contido numa parábola com a concavidade voltada para cima, pelo que

$\underbrace{10 - 4\sqrt{5}}_{\approx 1{,}06} < n < \underbrace{10 + 4\sqrt{5}}_{\approx 18{,}94}$.

São 17 termos, do a_2 ao a_{18} , incluindo-os.

3.1 $2 = 1 + 1 = 1^2 + 1$, $5 = 4 + 1 = 2^2 + 1$, $10 = 9 + 1 = 3^2 + 1$, $17 = 16 + 1 = 4^2 + 1$, $n^2 + 1$.

3.2 $3 = \frac{3}{1} = \frac{2 \times 1 + 1}{1}$, $\frac{5}{4} = \frac{2 \times 2 + 1}{2^2}$, $\frac{7}{16} = \frac{2 \times 3 + 1}{4^2}$, $\frac{9}{25} = \frac{2 \times 4 + 1}{5^2}$, $\frac{2n + 1}{n^2}$.

3.3 $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{(-1)^{1+1}}{(1+1)^3}$, $-\frac{1}{27} = -\frac{1}{3^3} = \frac{(-1)^{2+1}}{(2+1)^3}$, $\frac{1}{64} = \frac{1}{4^3} = \frac{(-1)^{3+1}}{(3+1)^3}$, $-\frac{1}{125} = -\frac{1}{5^3} = \frac{(-1)^{4+1}}{(4+1)^3}$, $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^3}$.

4. $a_n = 5 - n$

5.

(A) 1.° termo: $1^2 - 1 = 0$

(B) $n^2 + 10n > 0$, $\forall n$

(C) 10.° termo: $10 \times 10 - 10^2 = 0$

(D) 1.° termo: $1 - 1^2 = 0$

Opção correta: **(B)**

PÁG. 62

6.

	N.º de círculos pretos	N.º de círculos brancos	N.º total de círculos
1	1	0	1
2	3	0	$3=1+2$
3	5	1	$6=1+2+3$
4	7	3	$10=1+2+3+4$
5	9	6	$15=1+2+3+4+5$
...	...	...	...
n	$2n-1$		$1+2+3+4+\ldots+n$

O termo desta sucessão que tem um número total de círculos igual à soma dos 100 primeiros números naturais $1+2+3+4+\ldots+100$ é o 100.º termo.

O 100.º termo tem $2\times 100-1=199$ círculos pretos.

7.

	N.º de cordas
1	1
2	$3=1+2=\frac{2\times 3}{2}=\frac{2\times(2+1)}{2}$
3	$6=1+2+3=\frac{3\times 4}{2}=\frac{3\times(3+1)}{2}$
4	$10=1+2+3+4=\frac{4\times 5}{2}=\frac{4\times(4+1)}{2}$
5	$15=1+2+3+4+5=\frac{5\times 6}{2}=\frac{5\times(5+1)}{2}$
...	...
n	$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{n(n+1)}{2}=3321 \Leftrightarrow n(n+1)=6642 \Leftrightarrow n^2+n-6642=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-6642)}}{2\times 1} \Leftrightarrow n=\frac{-1\pm\sqrt{26569}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{-1-163}{2} \vee n=\frac{-1+163}{2} \Leftrightarrow n=-82 \vee n=81$$

$-82\notin\mathbb{N}$ e $81\in\mathbb{N}$. O termo de ordem 81 tem 3321 segmentos de reta.

8.1 $v_1 = 2$, $v_2 = v_1 + 5 = 2 + 5 = 7$, $v_3 = v_2 + 5 = 7 + 5 = 12$, $v_4 = v_3 + 5 = 12 + 5 = 17$.

8.2 $v_1 = 2 = 5 \times 1 - 3$, $v_2 = 7 = 5 \times 2 - 3$, $v_2 = 12 = 5 \times 3 - 3$, $v_4 = 17 = 5 \times 4 - 3$, … , $v_n = 5n - 3$.

PÁG. 63

9. $u_2 = 2u_1 + 10 = 2 \times (-3) + 10 = 4$, $u_3 = 2u_2 + 10 = 2 \times 4 + 10 = 18$.

Opção correta: **(D)**

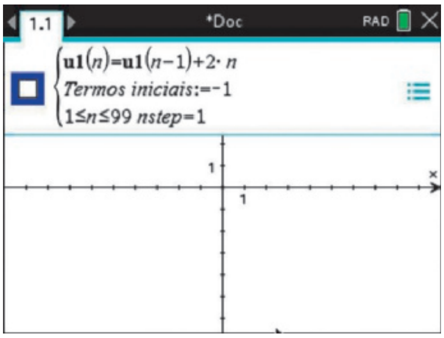
10.1 $a_2 = 2a_1 = 2 \times 5 = 10$, $a_3 = 2a_2 = 2 \times 10 = 20$.

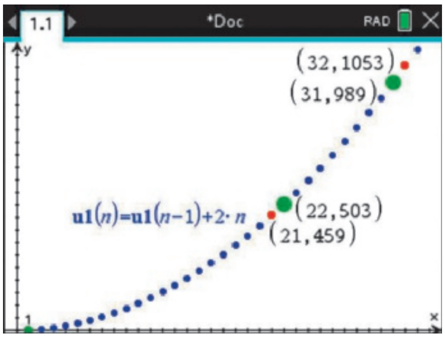
10.2 Não, pois 5012 não é divisível por 5 e todos os termos de (a_n) são divisíveis por 5 .

11. $u_2 = -\dfrac{1}{u_1} = -\dfrac{2}{-1} = 2$, $u_3 = -\dfrac{1}{u_2} = -\dfrac{2}{2} = -1$, $u_4 = -\dfrac{1}{u_3} = -\dfrac{2}{-1} = 2$.

12.1 $u_2 = u_1 + 2 \times 2 = -1 + 4 = 3$, $u_3 = u_2 + 2 \times 3 = 3 + 6 = 9$, $u_4 = u_3 + 2 \times 4 = 9 + 8 = 17$.

12.2





10 termos, todos entre o u_{22} e o u_{31} , incluindo estes.

13. Com exceção da primeira figura, cada figura tem mais 4 quadrados do que a anterior.

Logo, $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 4, \ n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$.

14.1 $\dfrac{10\,588{,}40}{1{,}028} = 10\,300$ €

Alternativamente:

$\dfrac{288{,}40}{0{,}028} = 10\,300$ €

14.2 $c_5 = 10\,588{,}40 + 288{,}40 \times 4 = 11\,742{,}00$ €

14.3 $10\,300 + 288{,}40n > 14\,000 \Leftrightarrow n > \dfrac{14\,000 - 10\,300}{288{,}40}$

Como $\dfrac{14\,000 - 10\,300}{288{,}40} \approx 12{,}83$, são necessários 13 anos $(c_{12} = 13\,760{,}80$ € e $c_{13} = 14\,049{,}20$ €$)$.

PÁG. 64

15.1 $u_2 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{5}$, $u_3 = \frac{1}{u_2} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$.

15.2 Os termos desta sucessão alternam entre 5 e $\frac{1}{5}$, os termos de ordem ímpar são iguais a 5 e os termos de ordem par são iguais a $\frac{1}{5}$.

Nos 100 primeiros termos há 50 termos iguais a 5 e 50 iguais a $\frac{1}{5}$.

Assim, a soma dos 100 primeiros termos desta sucessão é igual a $50 \times 5 + 50 \times \frac{1}{5} = 260$.

16. Da definição de (v_n) , conclui-se que a diferença entre dois termos consecutivos é igual a 2 .
Assim, $v_1 = 45 - 3 \times 2$, ou seja, $k = 39$.

17.1 $v_1 = 4$, $v_2 = v_1 - 2 = 4 - 2 = 2$, $v_3 = v_2 - 2 = 2 - 2 = 0$.

PÁG. 65

17.2 $v_{n+1} = v_n - 2 \iff v_{n+1} - v_n = -2$, para todo o n natural não nulo, pelo que (v_n) é uma progressão aritmética de razão -2 .

17.3 $v_n = 4 + (n-1)(-2) = -2n + 6$

17.4 $v_n < -500 \iff -2n + 6 < -500 \iff n > 253$
A partir da ordem 254 (inclusive).

18.1 $u_1 = 3 - 5 \times 1 = -2$, $u_2 = 3 - 5 \times 2 = -7$, $u_3 = 3 - 5 \times 3 = -12$.

18.2 $u_{n+1} - u_n = 3 - 5(n+1) - (3 - 5n) = 3 - 5n - 5 - 3 + 5n = -5$, para todo o n natural não nulo, pelo que (u_n) é uma progressão aritmética de razão -5 .

18.3 $-200 \leqslant u_n \leqslant -100 \iff -200 \leqslant 3 - 5n \leqslant -100 \iff -203 \leqslant -5n \leqslant -103 \iff$

$$\iff \frac{203}{5} \geqslant n \geqslant \frac{103}{5} \iff 20{,}6 \leqslant n \leqslant 40{,}6$$

São 20 termos, do u_{21} ao u_{40} , incluindo-os.

19.1 $u_n = 2 + (n-1) \times 5 = 5n - 3$

19.2 $u_n = 8 + (n-4) \times (-2) = -2n + 16$

19.3 $u_4 - u_2 = 2r \iff 6 - 12 = 2r \iff r = -3$ (r , razão da progressão aritmética (u_n))
$u_n = 12 + (n-2) \times (-3) = -3n + 18$

19.4 $u_5 - u_3 = 2r \iff 0 - 4 = 2r \iff r = -2$ (r , razão da progressão aritmética (u_n))
$u_n = 0 + (n-5) \times (-2) = -2n + 10$

20. Os termos de uma progressão aritmética são representados por pontos que, em referencial cartesiano do plano, se ajustam a uma reta. Como a razão da progressão é negativa, o declive da reta é negativo.

Opção correta: **(A)**

PÁG. 66

21. $v_4 - v_1 = 3r \Leftrightarrow 24 - 12 = 3r \Leftrightarrow r = 4$ (r, razão da progressão aritmética (v_n))

$v_n = 12 + (n-1) \times 4 = 4n + 8$

$v_n = 116 \Leftrightarrow 4n + 8 = 116 \Leftrightarrow n = 27$

Logo, 116 é o termo de ordem 27 da sucessão.

22. Seja r, a razão da progressão aritmética (u_n).

$$u_3 + u_5 = 218 \underset{\substack{u_3 = u_2 + r \\ u_5 = u_2 + 3r}}{\Leftrightarrow} u_2 + r + u_2 + 3r = 218 \Leftrightarrow 2u_2 + 4r = 218 \Leftrightarrow$$

$$\underset{u_2 = -10}{\Leftrightarrow} 2 \times (-10) + 4r = 218 \Leftrightarrow 4r = 218 + 20 \Leftrightarrow r = \frac{238}{4} \Leftrightarrow r = \frac{119}{2}$$

$$u_n = -10 + (n-2) \times \frac{119}{2} = 59{,}5n - 129$$

23. $u_n \times u_{n+1} = 24 \underset{u_{n+1} = u_n + 10}{\Leftrightarrow} u_n(u_n + 10) = 24 \Leftrightarrow (u_n)^2 + 10u_n - 24 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times 1 \times (-24)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-10-14}{2} \vee u_n = \frac{-10+14}{2} \Leftrightarrow u_n = -12 \vee u_n = 2$$

Como (u_n) tem termos positivos, conclui-se que $u_n = 2$ e $u_{n+1} = 2 + 10$.

Os dois termos consecutivos cujo produto é igual a 24 são 2 e 12.

24. Como (u_n) é uma progressão aritmética, a diferença entre termos consecutivos é constante.

Para $n = 1$, $u_2 - u_1 = k^2 - 9 + k$ e para $n = 2$, $u_3 - u_2 = (k^2 - 9) \times 2 + k$.

Assim: $(k^2 - 9) \times 2 + k = k^2 - 9 + k \Leftrightarrow 2k^2 - 18 + k = k^2 - 9 + k \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = -3 \vee k = 3$$

(u_n) é decrescente se $k = -3$, pelo que $k = -3$.

25. $a^2 - a = 10a - a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 11a = 0 \Leftrightarrow a(2a - 11) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee 2a - 11 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{a = 0}_{\text{impossível } (a \neq 0)} \vee a = \frac{11}{2}$$

Logo, $u_1 = \frac{11}{2}$, $u_2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$, $u_3 = 10 \times \frac{11}{2} = \frac{110}{2}$ e a razão da progressão aritmética (u_n) é

$r = u_2 - u_1 = \frac{121}{4} - \frac{11}{2} = \frac{99}{4}$.

Portanto, $u_{10} = u_1 + 9r = \frac{11}{2} + 9 \times \frac{99}{4} = \frac{913}{4} = 228{,}25$.

26.1 $S_{50}=\frac{v_1+v_{50}}{2}\times 50=\frac{(3\times 1+1)+(3\times 50+1)}{2}\times 50=3875$

26.2 $v_{12}=3\times 12+1=37$, $v_{100}=3\times 100+1=301$.

$$S=\frac{v_{12}+v_{100}}{2}\times 89=\frac{37+301}{2}\times 89=15\,041$$

27. $v_{n+1}=v_n+4 \Leftrightarrow v_{n+1}-v_n=4$, para todo o $n\in\mathbb{N}^+$, pelo que a razão da progressão aritmética (v_n) é 4 .

$v_{20}=1+19\times 4=77$

$$S_{20}=\frac{v_1+v_{20}}{2}\times 20=\frac{1+77}{2}\times 20=780$$

PÁG. 67

28. Seja r a razão da progressão aritmética (u_n) .

$$\begin{cases}u_5+u_8=-15\\ u_1=3u_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1+4r+u_1+7r=-15\\ u_1=3\,(u_1+2r)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2u_1+11r=-15\\ u_1=3u_1+6r\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-6r+11r=-15\\ 2u_1=-6r\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}r=-3\\ u_1=9\end{cases}$$

$$S_{15}=\frac{u_1+u_{15}}{2}\times 15=\frac{9+9+14(-3)}{2}\times 15=-180$$

29. Seja r a razão da progressão aritmética (u_n) .

$$S_{10}=250 \Leftrightarrow \frac{u_1+u_{10}}{2}\times 10=250 \Leftrightarrow u_1+u_{10}=\frac{250\times 2}{10} \Leftrightarrow$$

$$\underset{\substack{u_1=u_5-4r\\ u_{10}=u_5+5r}}{\Leftrightarrow} u_5-4r+u_5+5r=50 \Leftrightarrow 2u_5+r=50 \Leftrightarrow r=50-2\times 22 \Leftrightarrow r=6$$

$u_n=22+(n-5)\times 6=6n-8$

$u_n=3450 \Leftrightarrow 6n-8=3450 \Leftrightarrow n=\frac{1729}{3}\notin\mathbb{N}$

3450 não é termo da progressão.

30. Seja r a razão da progressão aritmética (u_n) .

$u_7=2u_2 \Leftrightarrow u_2+5r=2u_2 \Leftrightarrow u_2=5r$

$$S_{12}=57 \Leftrightarrow \frac{u_1+u_{12}}{2}\times 12=57 \Leftrightarrow u_1+u_{12}=\frac{57\times 2}{12} \Leftrightarrow$$

$$\underset{\substack{u_1=u_2-r\\ u_{12}=u_2+10r}}{\Leftrightarrow} u_2-r+u_2+10r=\frac{19}{2} \Leftrightarrow 2u_2+9r=\frac{19}{2} \Leftrightarrow 2\times 5r+9r=\frac{19}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 19r=\frac{19}{2} \Leftrightarrow r=\frac{1}{2}$$

$u_2=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$u_n=\frac{5}{2}+(n-2)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$

$u_n=500 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n+\frac{3}{2}=500 \Leftrightarrow n+3=1000 \Leftrightarrow n=997$

500 é o termo de ordem 997 .

31. A sucessão dos números ímpares tem termo geral $2n-1$.
Logo, a soma dos 340 primeiros números ímpares é

$$S_{340}=\frac{1+(2\times 340-1)}{2}\times 340=115\ 600\ .$$

32.

	1	2	3	...	n
Área do trapézio	$\frac{2+4}{2}\times 4=6\times 2=12$	$\frac{4+6}{2}\times 4=10\times 2=20$	$\frac{6+8}{2}\times 4=14\times 2=28$	...	$8n+4$

A sucessão que dá as áreas dos trapézios é uma progressão aritmética de razão $4\times 2=8$, pelo que o seu termo geral é $12+(n-1)\times 8=8n+4$.
Assim:

$$S_n=3840 \Leftrightarrow \frac{12+8n+4}{2}\times n=3840 \Leftrightarrow \frac{8n+16}{2}\times n=3840 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4n^2+8n=3840 \Leftrightarrow n^2+2n-960=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 1\times(-960)}}{2\times 1} \Leftrightarrow n=\frac{-2\pm\sqrt{3844}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{-2-62}{2} \vee n=\frac{-2+62}{2} \Leftrightarrow \underbrace{n=-32}_{\text{Impossível em } \mathbb{N}^+} \vee n=30$$

A composição geométrica é constituída por 30 trapézios.

33. O primeiro termo de ordem ímpar da progressão é $u_1=4+3\times 1=7$.
A razão da progressão (u_n) é 3 , pelo que a razão da progressão dos termos de ordem ímpar é 6 .
A progressão dos termos de ordem ímpar tem termo geral $7+(n-1)\times 6=6n+1$.
Logo, a soma dos 15 primeiros termos de ordem ímpar da sucessão é $\frac{7+6\times 15+1}{2}\times 15=735$.

34. $x^2-2x=6x-x^2 \Leftrightarrow 2x^2-8x=0 \Leftrightarrow 2x(x-4)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x=0 \vee x-4=0 \Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\text{impossível } (x\neq 0)} \vee x=4$$

Os primeiros três termos da progressão são $2\times 4=8$, $4^2=16$ e $6\times 4=24$.
A razão da progressão é $16-8=8$.
O termo geral da progressão é $u_n=8+(n-1)\times 8=8n$.
Assim, a soma pedida é igual a $\frac{8\times 10+8\times 25}{2}\times 16=2240$.

PÁG. 68

35. Seja r a razão da progressão aritmética (v_n) .

$$S_{20}=600 \Leftrightarrow \frac{v_1+v_{20}}{2}\times 20=600 \underset{\substack{v_1=v_3-2r\\ v_{20}=v_3+17r}}{\Leftrightarrow} v_3-2r+v_3+17r=\frac{600\times 2}{20} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2v_3+15r=60 \Leftrightarrow 2\times 0+15r=60 \Leftrightarrow r=4$$

$v_n=0+(n-3)\times 4=4n-12$

36. Seja r a razão da progressão aritmética (v_n) .

$$S_{20}=3\times S_{10} \Leftrightarrow \frac{v_1+v_{20}}{2}\times 20=3\times\frac{v_1+v_{10}}{2}\times 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (v_1+v_{20})\times 10=(v_1+v_{10})\times 15 \Leftrightarrow 10v_1+10v_{20}=15v_1+15v_{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10v_{20}-15v_{10}-5v_1=0 \underset{\div 5}{\Leftrightarrow} 2v_{20}-3v_{10}-v_1=0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\substack{v_{20}=v_6+14r\\ v_{10}=v_6+4r\\ v_1=v_6-5r}}{\Leftrightarrow} 2(v_6+14r)-3(v_6+4r)-(v_6-5r)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2v_6+28r-3v_6-12r-v_6+5r=0 \Leftrightarrow -2v_6+21r=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\times 15+21r=0 \Leftrightarrow r=\frac{30}{21} \Leftrightarrow r=\frac{10}{7}$$

$$v_n=15+(n-6)\times\frac{10}{7}=\frac{10}{7}n+\frac{45}{7} \quad W$$

$$v_n=85 \Leftrightarrow \frac{10}{7}n+\frac{45}{7}=85 \Leftrightarrow 10n+45=85\times 7 \Leftrightarrow n=55$$

85 é o termo de ordem 55 .

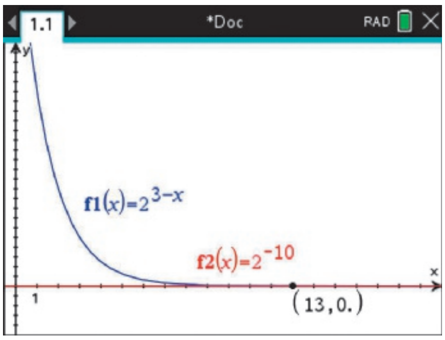
PÁG. 69

37.1 $v_1=4$, $v_2=\frac{v_1}{2}=\frac{4}{2}=2$, $v_3=\frac{v_2}{2}=\frac{2}{2}=1$.

37.2 $v_{n+1}=\frac{v_n}{2} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}$, para todo o n natural não nulo, pelo que (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

37.3 $v_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

37.4 $v_n<2^{-10} \Leftrightarrow 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<2^{-10} \Leftrightarrow 2^2\times 2^{1-n}<2^{-10} \Leftrightarrow 2^{3-n}<2^{-10}$



$n>13$; a partir da ordem 14 (inclusive).

38.1 $u_1=2\times 3^{-1}=\frac{2}{3}$, $u_2=2\times 3^{-2}=\frac{2}{9}$, $v_3=2\times 3^{-3}=\frac{2}{27}$.

38.2 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times 3^{-(n+1)}}{2\times 3^{-n}}=\frac{1}{3}$, para todo o n natural não nulo, pelo que (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

39.1 $u_n = -1 \times 2^{n-1} = -2^{n-1}$

39.2 $u_n = 8 \times (-2)^{n-4}$

39.3 $\frac{u_4}{u_2} = r^2 \Leftrightarrow \frac{18}{2} = r^2 \underset{r>0}{\Leftrightarrow} r = 3$ $(r$, razão da progressão geométrica $(u_n))$

$u_n = 2 \times 3^{n-2}$

39.4 $\frac{u_5}{u_3} = r^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = r^2 \underset{r<0}{\Leftrightarrow} r = -\frac{1}{2}$ $(r$, razão da progressão geométrica $(u_n))$

$u_n = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

40. $v_3 = 9v_1 \Leftrightarrow \frac{v_3}{v_1} = 9 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = \pm 3$ $(r$, razão da progressão geométrica $(u_n))$

$v_6 = 96 \times (\pm 3)^{6-4} = 96 \times 9 = 864$

41. Seja r a razão da progressão geométrica (u_n) .

$u_n + u_{n+1} = 120 \Leftrightarrow u_n + u_n \times r = 120 \Leftrightarrow u_n(1+r) = 120 \Leftrightarrow u_n = \frac{120}{1+r}$

$u_{n+1} - u_n = 40 \Leftrightarrow u_n \times r - u_n = 40 \Leftrightarrow u_n(r-1) = 40 \Leftrightarrow u_n = \frac{40}{r-1}$

Das duas igualdades anteriores, conclui-se, para $r \neq -1$ e $r \neq 1$, que:

$$\frac{120}{1+r} = \frac{40}{r-1} \Leftrightarrow 120(r-1) = 40(1+r) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 120r - 120 = 40 + 40r \Leftrightarrow 80r = 160 \Leftrightarrow r = 2$$

$u_n + u_{n+1} = 120 \Leftrightarrow u_{n+1} = 120 - u_n$

$120 - u_n - u_n = 40 \Leftrightarrow -2u_n = -80 \Leftrightarrow u_n = 40$

$u_{n+1} = 120 - 40 \Leftrightarrow u_{n+1} = 80$

A razão da progressão é 2 e os termos são 40 e 80 .

42. $\frac{v_5}{v_2} = r^3 \Leftrightarrow \frac{135}{40} = r^3 \Leftrightarrow \frac{27}{8} = r^3 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$

$v_7 = 40 \times \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{1215}{4}$

43. $u_5 = 27u_8 \Leftrightarrow \frac{u_8}{u_5} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$ $(r$, razão da progressão geométrica $(u_n))$

$u_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 3^3 = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

PÁG. 70

44. Sejam l , $4l$ e l^2 a medida do lado, o perímetro e a área de um quadrado, respetivamente.

$\frac{4l}{l} = \frac{l^2}{4l} \Leftrightarrow 4 = \frac{l}{4} \Leftrightarrow l = 16$

A área do quadrado é $16^2 = 256$.

45. $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{4\times 2^{n+1-1}}{4\times 2^{n-1}}=2^{n-n+1}=2$, para todo o n natural não nulo, pelo que (v_n) é uma progressão geométrica de razão 2 .

45.1 $S_{10}=4\times 2^{1-1}\times\frac{1-2^{10}}{1-2}=4092$

45.2 $S=4\times 2^{11-1}\times\frac{1-2^{10}}{1-2}=4\ 190\ 208$

46. $v_{n+1}=\frac{v_n}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}$, para todo o n natural não nulo, pelo que a razão da progressão geométrica (v_n) é $\frac{1}{2}$.

$$S_8=1000\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}}=1992{,}1875$$

47.1

	1	2	3	4
Perímetro do triângulo	12	$\frac{12}{2}=6$	$\frac{6}{2}=3$	$\frac{3}{2}=1{,}5$

47.2 Os perímetros dos triângulos são termos de uma progressão geométrica de 1.º termo 12 e razão $\frac{1}{2}$ (com exceção do primeiro, o perímetro de cada triângulo é metade do perímetro do anterior).

$$S_{20}=12\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-\frac{1}{2}}\approx 24$$

PÁG. 71

47.3 As áreas dos triângulos são termos de uma progressão geométrica de 1.º termo 6 e razão $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ (com exceção do primeiro, a área de cada triângulo é um quarto da área do anterior).

$$S_{10}=6\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1-\frac{1}{4}}\approx 8$$

48. $S_4=81{,}25\ \Leftrightarrow\ u_1\times\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^4}{1-\frac{3}{2}}=81{,}25\ \Leftrightarrow\ u_1=10$

$$u_4=10\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=33{,}75$$

49. $\frac{b+12}{b}=\frac{b+36}{b+12}\ \Leftrightarrow\ (b+12)^2=b(b+36)\ \Leftrightarrow\ b^2+24b+144=b^2+36b\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 144=36b-24b\ \Leftrightarrow\ 144=12b\ \Leftrightarrow\ b=12$

Portanto três termos consecutivos são 12 , $12+12=24$, $12+36=48$, pelo que a razão desta progressão geométrica é $\frac{48}{24}=\frac{24}{12}=2$.

Logo, a soma dos sete termos consecutivos desta progressão, a partir do termo igual a b , incluindo-o, é $S=12\times\frac{1-2^7}{1-2}=1524$.

50. A razão da progressão geométrica é $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$.

$$S_5=682 \Leftrightarrow u_1\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5}{1-\frac{1}{4}}=682 \Leftrightarrow u_1\times\frac{341}{256}=682 \Leftrightarrow u_1\times\frac{682\times 256}{341} \Leftrightarrow u_1=512$$

51. $u_7=12$ e seja r a razão da progressão geométrica, que vamos designar por (u_n) .

$$u_7+u_8+u_9=14{,}88 \Leftrightarrow u_7+u_7\times r+u_7\times r^2=14{,}88 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_7\left(1+r+r^2\right)=14{,}88 \Leftrightarrow 1+r+r^2=\frac{14{,}88}{12} \Leftrightarrow 1+r+r^2=1{,}24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2+r-0{,}24=0 \Leftrightarrow r=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-0{,}24)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r=\frac{-1\pm\sqrt{1{,}96}}{2} \Leftrightarrow r=\frac{-1-1{,}4}{2}\vee r=\frac{-1+1{,}4}{2} \Leftrightarrow r=-1{,}2\vee r=0{,}2$$

Como a razão da progressão é negativa, tem-se $r=-1{,}2$, e, assim, $u_8=12\times(-1{,}2)=-14{,}4$.

52.1

	1	**2**	**3**	**...**	**n**
Método A	2	$2\times 2=4$	$4\times 2=8$	...	2^n
Método B	20	20	20		20

Ao método A corresponde uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 2 , pelo que o termo geral é $2\times 2^{n-1}=2^n$, e ao método B corresponde uma sucessão constante, sempre igual a 20 .

52.2 Método A: $S_4=2\times\frac{1-2^4}{1-2}=30$ €

Método B: $20\times 4=80$ €

52.3 Método A: $S_6=2\times\frac{1-2^6}{1-2}=128\text{ €}<250\text{ €}$ e $S_7=2\times\frac{1-2^7}{1-2}=256\text{ €}>250\text{ €}$.

Método B: $20\times n=250 \Leftrightarrow n=12{,}5$

No método A, ao fim de 7 meses tem o dinheiro necessário; utilizando o método B, são necessários 13 meses.

PÁG. 72

53.

(A) $4^{n-2}=4^{-2}\times 4^n$

(B) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-n}=3^{n-5}=3^{-5}\times 3^n$

(C) $\frac{4^n}{3^{2n}}=\left(\frac{4}{9}\right)^n$

(D) $\frac{25^n}{5^n}=5^n$

Opção correta: **(C)**

54.

(A) $\dfrac{4^{n+2}}{2^{n+4}}=2^n$

(B) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5+n}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

(C) $6^{3-n}=\dfrac{6^3}{6^n}=6^3\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

(D) $\dfrac{100^{-n}}{5^n}=\dfrac{1}{500^n}=\left(\dfrac{1}{500}\right)^n$

Opção correta: **(A)**

55. Seja r a razão da progressão geométrica. Tem-se que $b=ar$ e $c=ar^2$.

$$a+b+c=7a \Leftrightarrow a+a\times r+a\times r^2=7a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ar^2+ar-6a=0 \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} r^2+r-6=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-6)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow r=\frac{-1-5}{2}\vee r=\frac{-1+5}{2} \Leftrightarrow r=-3\vee r=2$$

Como a progressão tem termos positivos, conclui-se que $r=2$.

A progressão é crescente, pois $r>1$ e o primeiro termo é um número positivo.

56.1 $S_n=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=2\times\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$ tende para $2\times(1-0)$, ou seja, a soma de todos os termos de (u_n) é 2 .

56.2 $u_n=5^{-n}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$, pelo que a razão da progressão geométrica é $\dfrac{1}{5}$.

$S_n=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{4}\times\left(1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right)$ tende para $\dfrac{1}{4}\times(1-0)$, ou seja, a soma de todos os termos de (u_n) é $\dfrac{1}{4}$.

56.3 $u_n=\dfrac{3^n}{9^n}=\left(\dfrac{3}{9}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, pelo que a razão da progressão geométrica é $\dfrac{1}{3}$.

$S_n=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ tende para $\dfrac{1}{2}\times(1-0)$, ou seja, a soma de todos os termos de (u_n) é $\dfrac{1}{2}$.

PÁG. 73

57. Os comprimentos das semicircunferências são termos consecutivos de uma progressão geométrica de primeiro termo $\frac{\pi \times 4}{2} = 2\pi$ e razão $\frac{1}{2}$.

$$S_n = 2\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 4\pi \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Podem-se tomar valores de n tão grandes quanto se queira, de modo que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ seja tão próximo de zero quanto se queira.

Assim, $S_n = 4\pi \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ tende para $4\pi \times (1 - 0)$, ou seja, o comprimento total da linha não ultrapassará os 4π cm .

58.1 $v_{n+1} = \frac{v_n}{3} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3}$, para todo o n natural não nulo, pelo que a razão da progressão geométrica (v_n) é $\frac{1}{3}$. Como $0 < r < 1$ e o primeiro termo é um número positivo, a progressão é decrescente.

58.2 $S_n = k \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3k}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ tende para $\frac{3k}{2} \times (1 - 0)$, ou seja, a soma de todos os termos de (v_n) é $\frac{3k}{2}$. Como a soma de todos os termos da progressão é igual a $0{,}9$, conclui-se que

$\frac{3k}{2} = 0{,}9 \Leftrightarrow k = \frac{0{,}9 \times 2}{3} \Leftrightarrow k = 0{,}6$.

59. As áreas dos quadrados que constituem as linhas são termos consecutivos de uma progressão geométrica de primeiro termo $4 \times 8 = 32$ e razão $\frac{1}{2}$.

$$S_n = 32 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 64 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Podem-se tomar valores de n tão grandes quanto se queira, de modo que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ seja tão próximo de zero quanto se queira.

Assim, $S_n = 64 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ tende para $64 \times (1 - 0)$, ou seja, a soma das áreas dos quadrados que constituem todas as linhas não ultrapassará os 64 dm^2.

$S_n = 64 \Leftrightarrow 64 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 64 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ impossível, logo, a soma das áreas nunca é igual a 64 dm^2.

60. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(k-1)\,k^{-(n+1)}}{(k-1)\,k^{-n}} = k^{-n-1+n} = k^{-1} = \frac{1}{k}$, para todo o n natural não nulo, pelo que a razão da progressão geométrica (v_n) é $\frac{1}{k}$.

$S_n = (k-1)\,k^{-1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{k}\right)^n}{1 - \frac{1}{k}} = \left(1 - \left(\frac{1}{k}\right)^n\right)$ tende para $1 - 0$, ou seja, a soma de todos os termos de (v_n) é 1.