6. Funções cúbicas e funções quárticas. Operações com funções. Funções racionais

PÁG. 74

1.1 $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-3)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$

1.2 $f(x)=x \Leftrightarrow x^3-3x^2=x \Leftrightarrow x^3-3x^2-x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3x-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1} \Leftrightarrow$$

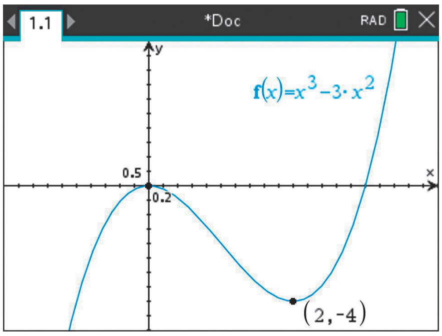
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \vee x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

1.3 Como o coeficiente do termo de grau 3 é positivo, tem-se:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2\right)=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2\right)=-\infty$

1.4



$A(0\,,0)$ e $B(2\,,-4)$.

$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$

2. Função f: O coeficiente do termo de grau 3 é negativo, pelo que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, o que não acontece na função representada graficamente na figura.

Função g: $g(0)=-3$ e, na função representada graficamente na figura, a imagem de 0 é um número positivo.

PÁG. 75

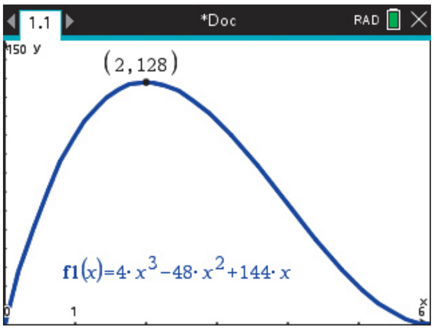
3. Uma função cúbica pode ter até três zeros, tendo sempre pelo menos um.

Opção correta: **(A)**

4.1 $D_V=]0\,,6[$, pois x é sempre positivo e não pode ser superior a metade do lado do cartão.

4.2 $V(x)=x(12-2x)^2=x\left(144-48x+4x^2\right)=4x^3-48x^2+144x$

4.3

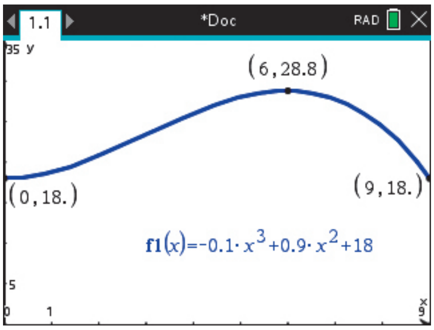


$x = 2$

5.1 $T(2) = -0{,}1 \times 2^3 + 0{,}9 \times 2^2 + 18 = 20{,}8$ °C

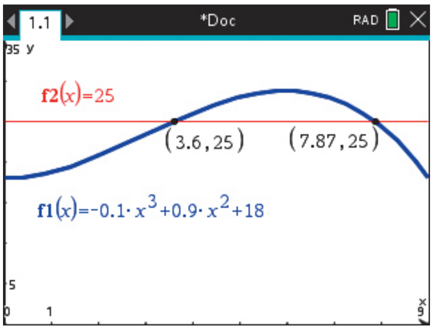
5.2

a.



A amplitude térmica é $28{,}8 - 10 = 10{,}8$ °C .

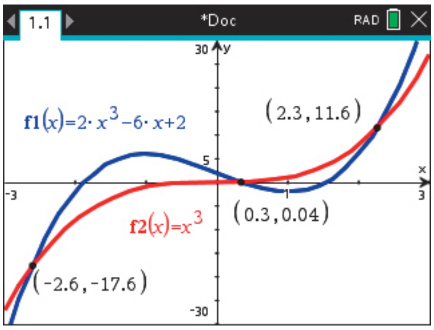
b.



$7{,}87 - 3{,}6 = 4{,}27$ e $0{,}27 \times 60 = 16{,}2$.

A temperatura ambiente foi superior a 25 °C durante 4 h 16 min .

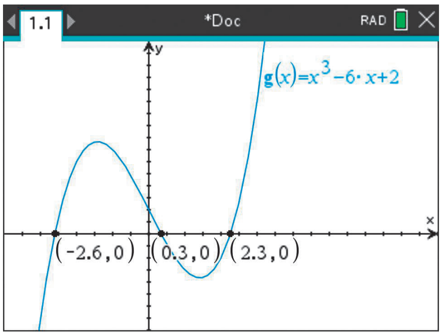
6. $g(x)=x^3$



Existem três pontos do gráfico cuja ordenada é o cubo da abcissa. As abcissas aproximadas desses pontos são: $-2,6$, $0,3$ e $2,3$.

Alternativamente:

$g(x)=x^3 \iff 2x^3-6x+2=x^3 \iff x^3-6x+2=0$



Existem três pontos do gráfico cuja ordenada é o cubo da abcissa. As abcissas aproximadas desses pontos são: $-2,6$, $0,3$ e $2,3$.

PÁG. 76

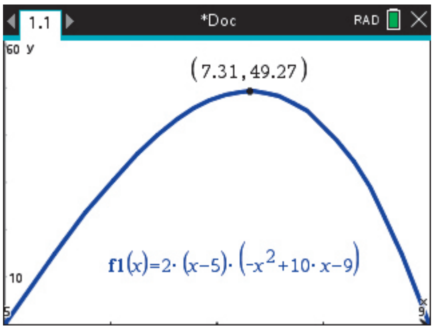
7.1 $f(x)=a(x-5)^2+16$, $a<0$

$f(9)=0 \iff a(9-5)^2+16=0 \iff a=-1$

$f(x)=-(x-5)^2+16=-\left(x^2-10x+25\right)+16=-x^2+10x-9$

7.2 $P(x\ ,\ f(x))$

$\text{A}_{[PQRS]}=\overline{RQ}\times\overline{PQ}=2(x-5)\left(-x^2+10x-9\right)=-2x^3+30x^2-118x+90$



A abcissa do ponto P para o qual a área do trapézio $[PQRS]$ é máxima é, aproximadamente, $7,31$.

8. $f(0)=5 \Leftrightarrow a\times 0^3+b\times 0^2+c=5 \Leftrightarrow c=5$

$f(-1)=9 \Leftrightarrow a\times(-1)^3+b\times(-1)^2+5=9 \Leftrightarrow -a+b=4$

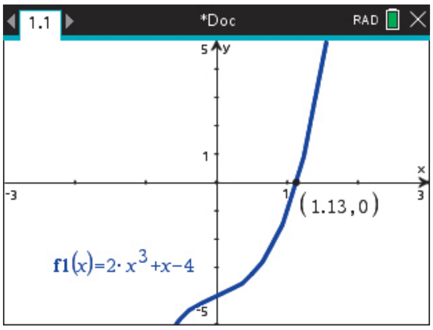
$f(1)=7 \Leftrightarrow a\times 1^3+b\times 1^2+5=7 \Leftrightarrow a+b=2$

$$\begin{cases}-a+b=4\\a+b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4+a\\a+4+a=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=3\\a=-1\end{cases}$$

9. $P\left(x\,,\,4\,,\,x^3\right)$

$A\hat{O}P=90° \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0 \Leftrightarrow 1\times x+(-1)\times 4+2\times x^3=0 \Leftrightarrow 2x^3+x-4=0$

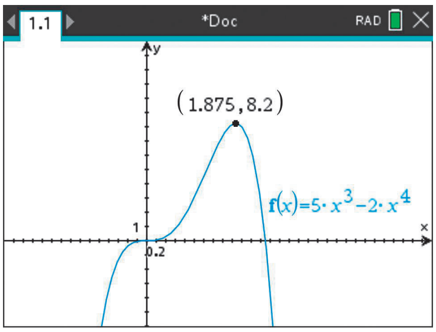


Logo, $x\approx 1{,}13$.

PÁG. 77

10.1 $f(x)=0 \Leftrightarrow 5x^3-2x^4=0 \Leftrightarrow x^3(5-2x)=0 \Leftrightarrow x^3=0 \vee 5-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{5}{2}$

10.2

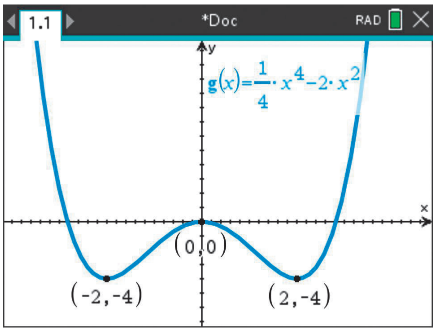


O valor de a corresponde ao máximo absoluto da função, pelo que $a\approx 8{,}2$.

11.1 $g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2-2\right)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee \frac{1}{4}x^2-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x^2=8 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\sqrt{8} \vee x=\sqrt{8}$

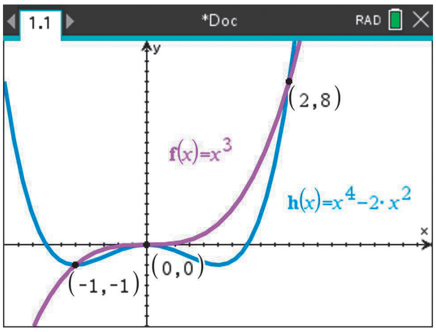
11.2

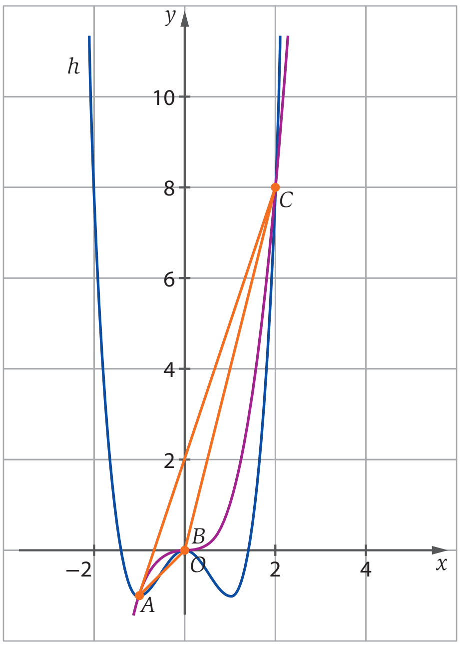


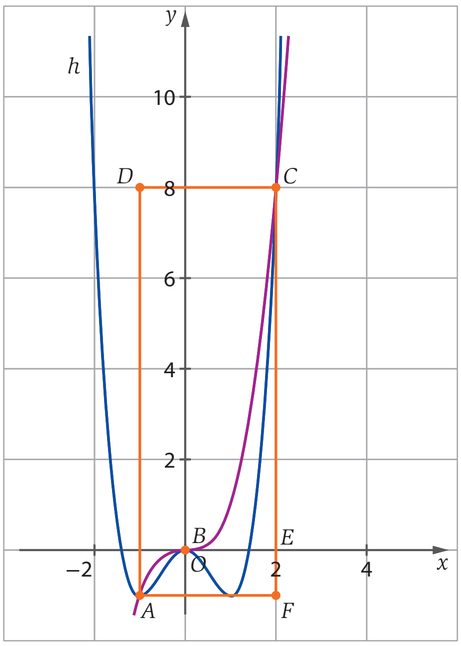
$$A=\frac{\overline{AB}\times |y_B|}{2}=\frac{4\times 4}{2}=8$$

12.1 Como $a=1>0$, quando $x\longrightarrow\pm\infty$, $f(x)\longrightarrow+\infty$.

12.2



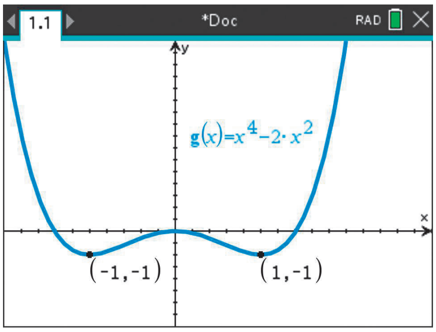




$$A_{[ABC]}=A_{[ADCF]}-\left(A_{[ADC]}+A_{[BCE]}+A_{[ABEF]}\right)=$$

$$=3\times 9-\left(\frac{3\times 9}{2}+\frac{2\times 8}{2}+\frac{2+3}{2}\times 1\right)=3$$

12.3



Como -1 é o mínimo absoluto da função h e $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = +\infty$, o seu contradomínio é $[-1, +\infty[$.

Assim, o contradomínio de g é $[k-1, +\infty[$.

Portanto, para que h não tenha zeros, tem de se verificar: $k-1>0$, ou seja, $k>1$.

PÁG. 78

13. $g(0)=b>0$

Sendo $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = -\infty$, tem de se ter $a<0$.

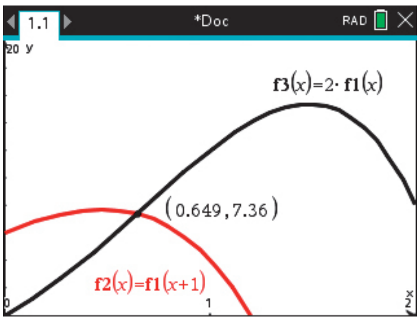
Opção correta: **(C)**

14. $P(x, f(x))$; $R(0, 4)$

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{OR}+\overline{PQ}}{2} \times \overline{OQ} = \frac{4+\left(-2x^3+6x+4\right)}{2} \times x = -x^4+3x^2+4x$$

Sendo $A(x) = -x^4+3x^2+4x$, tem-se:

$$A(x+1) = 2A(x)$$



(Na imagem, **f1** corresponde à função A.)

Logo, a abcissa de P é, aproximadamente, $0{,}649$, e a ordenada é $f(0{,}649) \approx 7{,}35$.

PÁG. 79

15.1 Grau do polinómio quociente: $2-1=1$

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -5x & +\ 1 & x+1 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -x & & x-6 \\ \cline{1-3}
 & -6x & +\ 1 & \\
 & 6x & +\ 6 & \\ \cline{2-3}
 & & 7 &
\end{array}$$

$Q(x)=x-6$ e $R(x)=7$.

15.2 Grau do polinómio quociente: $3-1=2$

$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & +\ x^2 & +\ 0x & -\ 5 & x+1 \\ \cline{5-5}
-4x^3 & -\ 4x^2 & & & 4x^2-3x+3 \\ \cline{1-4}
 & -\ 3x^2 & +\ 0x & -\ 5 & \\
 & 3x^2 & +\ 3x & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x & -\ 5 & \\
 & & -\ 3x & -\ 3 & \\ \cline{3-4}
 & & & -\ 8 &
\end{array}$$

$Q(x)=4x^2-3x+3$ e $R(x)=-8$.

15.3 Grau do polinómio quociente: $3-2=1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\ x^2 & -\ 3x & +\ 3 & x^2-x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\ x^2 & +\ x & & x+2 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & -\ 2x & +\ 3 & \\
 & -\ 2x^2 & +\ 2x & +\ 2 & \\ \cline{2-4}
 & & & 5 &
\end{array}$$

$Q(x)=x+2$ e $R(x)=5$.

15.4 Grau do polinómio quociente: $3-2=1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +\ 0x^2 & -\ 3x & -\ 1 & 3x^2-2x+1 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +\ \frac{4}{3}x^2 & -\ \frac{2}{3}x & & \frac{2}{3}x+\frac{4}{9} \\ \cline{1-4}
 & \frac{4}{3}x^2 & -\ \frac{11}{3}x & -\ 1 & \\
 & -\ \frac{4}{3}x^2 & +\ \frac{8}{9}x & -\ \frac{4}{9} & \\ \cline{2-4}
 & & -\ \frac{25}{9}x & -\ \frac{13}{9} &
\end{array}$$

$Q(x)=\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}$ e $R(x)=-\frac{25}{9}x-\frac{13}{9}$.

16.1

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-6x^3 & +6x^2 & -4x & +4 & x-1 \\ \cline{5-5}
6x^3 & -6x^2 & & & -6x^2-4 \\ \cline{1-4}
& & -4x & +4 & \\
& & 4x & -4 & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}
$$

Como o resto da divisão inteira de $D(x)$ por $d(x)$ é 0, $D(x)$ é divisível por $d(x)$.

16.2.

$$
\begin{array}{rrr|l}
-2x^2 & +4x & +6 & x-3 \\ \cline{4-4}
2x^2 & -6x & & -2x-2 \\ \cline{1-3}
& -2x & +6 & \\
& 2x & -6 & \\ \cline{2-3}
& & 0 &
\end{array}
$$

Como o resto da divisão inteira de $D(x)$ por $d(x)$ é 0, $D(x)$ é divisível por $d(x)$.

16.3

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-4x^3 & -2x^2 & -2x & -6 & -2x-1 \\ \cline{5-5}
4x^3 & +2x^2 & & & 2x^2+1 \\ \cline{1-4}
& & -2x & -6 & \\
& & 2x & +1 & \\ \cline{3-4}
& & & -5 &
\end{array}
$$

Como o resto da divisão inteira de $D(x)$ por $d(x)$ é $-5 \neq 0$, $D(x)$ não é divisível por $d(x)$.

17.1 $2-1=1$

17.2 $4-3=1$

17.3 $3-1=2$

18.1 $D(x)=(x+2)\left(x^2-x\right)+(-1)=x^3-x^2+2x^2-2x-1=x^3+x^2-2x-1$

18.2 $D(x)=(x+2)\left(x^3+1\right)+x^2=x^4+x+2x^3+2+x^2=x^4+2x^3+x^2+x+2$

18.3 $D(x)=(x+2)\left(2x^2-5x\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=2x^3-5x^2+4x^2-10x-\frac{1}{2}=2x^3-x^2-10x-\frac{1}{2}$

18.4 $D(x)=(x+2)\left(2x^3-5x^2-1\right)+1=2x^4-5x^3-x+4x^3-10x^2-2+1=2x^4-x^3-10x^2-x-1$

PÁG. 80

19.1

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -12 \\ 4 & & 4 & 20 \\ \hline & 1 & 5 & \boxed{8} \end{array}$$

$Q(x) = x + 5$ e $R(x) = 8$.

19.2

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -12 \\ -3 & & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{-6} \end{array}$$

$Q(x) = x - 2$ e $R(x) = -6$.

19.3

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{4} \end{array}$$

$Q(x) = x^2 + x + 2$ e $R(x) = 4$.

19.4

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -1 \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{1} \end{array}$$

$Q(x) = x - 2$ e $R(x) = 1$.

19.5

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} & \frac{5}{16} \\ \hline & 1 & -\frac{5}{4} & \boxed{\frac{17}{16}} \end{array}$$

$Q(x) = x - \frac{5}{4}$ e $R(x) = \frac{17}{16}$.

19.6

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
\frac{2}{3} & & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{28}{27} \\
\hline
 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{14}{9} & \boxed{-\frac{1}{27}}
\end{array}
$$

$Q(x)=x^2+\frac{2}{3}x-\frac{14}{9}$ e $R(x)=-\frac{1}{27}$.

PÁG. 81

20.1

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 0 & k & 1 \\
-1 & & -1 & 4 & -4 & -k+4 \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & k-4 & \boxed{-k+5}
\end{array}
$$

Logo, $-k+5=0 \Leftrightarrow -k=-5 \Leftrightarrow k=5$.

20.2

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 0 & k & 1 \\
2 & & 2 & -2 & -4 & 2k-8 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & k-4 & \boxed{2k-7}
\end{array}
$$

Logo, $2k-7=1 \Leftrightarrow 2k=8 \Leftrightarrow k=4$.

21.1 $A(1)=1^3+2\times1-1=2$

21.2 $A(-3)=(-3)^3+2\times(-3)-1=-34$

21.3 $A(0)=0^3+2\times0-1=-1$

22.1 $3^2-3-6=0$

22.2 $(-1)^4-2\times(-1)^2-1=-2$

22.3 $(-1)^3-6=-7$

22.4 $(-2)^4+3\times(-2)^3+2\times(-2)-1=-13$

23. $P(1) = -1^3 + 3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0$, pelo que 1 é raiz de $P(x)$.

	-1	3	-3	1
1		-1	2	-1
	-1	2	-1	0
1		-1	1	
	-1	1	0	
1		-1		
	-1	0		

Multiplicidade 3 .

PÁG. 82

24.1 $2(x-2)^2$

Multiplicidade 2 , dado que o fator quadrático do polinómio é $(x-2)^2$.

24.2 $-4x^4 = -4(x-0)^4$

Multiplicidade 4 .

24.3

	1	1	-5	3
1		1	2	-3
	1	2	-3	0
1		1	3	
	1	3	0	
1		1		
	1	4		

Multiplicidade 2 .

24.4

	1	-1	-9	9
-3		-3	12	-9
	1	-4	3	0
-3		-3	21	
	1	-7	24	

Multiplicidade 1 .

24.5 $(x+1)^3(x-1)=(x-(-1))^3(x-1)$

Multiplicidade 3.

24.6

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -1 & -3 & 1 & 2 \\
-1 & & -1 & 2 & 1 & -2 \\ \hline
 & 1 & -2 & -1 & 2 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 3 & -2 & \\ \hline
 & 1 & -3 & 2 & \boxed{0} & \\
-1 & & -1 & 4 & & \\ \hline
 & 1 & -4 & \boxed{6} & &
\end{array}$$

Multiplicidade 2.

25. $P(x)=a(x-1)^2(x-2)$

$P(0)=4 \Leftrightarrow a(0-1)^2(0-2)=4 \Leftrightarrow -2a=4 \Leftrightarrow a=-2$

$$P(x)=-2(x-1)^2(x-2)=(-2x+4)\left(x^2-2x+1\right)=$$
$$=-2x^3+4x^2-2x+4x^2-8x+4=-2x^3+8x^2-10x+4$$

26. $\begin{cases} Q(-1)=0 \\ Q(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(-1)^3+b(-1)^2+10=0 \\ a\times(2)^3+b\times(2)^2+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=-10 \\ 8a+4b=-10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a-10 \\ 4a+2(a-10)=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a-10 \\ 4a+2a-20=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{15}{2} \\ a=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

Logo, $Q(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{15}{2}x^2+10$, pelo que o resto da divisão inteira de $Q(x)$ por $x-1$ é

$Q(1)=\frac{5}{2}\times1^3-\frac{15}{2}\times1^2+10=5$.

27.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{4}{3} & 1 \\
\frac{3}{4} & & \frac{3}{4} & 0 & -1 \\ \hline
 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \boxed{0}
\end{array}$$

$P(x)=x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{3}x+1=\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x^2-\frac{4}{3}\right)=\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Raízes: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $\frac{3}{4}$.

PÁG. 83

28.1 $A\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{7}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0$

28.2

	1	$\frac{7}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$
	1	4	3	0

$$x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times3}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-4-2}{2}\vee x=\frac{-4+2}{2} \Leftrightarrow x=-3\vee x=-1$$

As raízes de $A(x)$ são -3, -1 e $\frac{1}{2}$, todas de multiplicidade 1.

28.3 Como -3, -1 e $\frac{1}{2}$ são as raízes de multiplicidade 1 de $A(x)$, tem-se:

$A(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)(x+1)$.

29.1 $f(x)=a(x+2)(x-0)(x-1)^2=ax(x+2)(x-1)^2$

$f(-1)=-4 \Leftrightarrow a\times(-1)\times(-1+2)\times(-1-1)^2=-4 \Leftrightarrow -4a=-4 \Leftrightarrow a=1$

$f(x)=x(x+2)(x-1)^2$

29.2 $g(x)=a(x+3)(x+2)(x-1)$

$g(-1)=8 \Leftrightarrow a(-1+3)\times(-1+2)\times(-1-1)=8 \Leftrightarrow -4a=8 \Leftrightarrow a=-2$

$g(x)=-2(x+3)(x+2)(x-1)$

30.1 -5, -2 e 1.

30.2 $g(x)=a(x+5)(x+2)(x-1)$

$g(0)=-2 \Leftrightarrow a(0+5)\times(0+2)\times(0-1)=-2 \Leftrightarrow -10a=-2 \Leftrightarrow a=\frac{1}{5}$

$$g(x)=\frac{1}{5}(x+5)(x+2)(x-1)=\left(\frac{1}{5}x+1\right)(x^2+x-2)=$$

$$=\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{5}x+x^2+x-2=\frac{1}{5}x^3+\frac{6}{5}x^2+\frac{3}{5}x-2$$

31. $h(x)=(x+1)^2(x-x_B)^2$

	1	-2	-3	4	4
-1		-1	3	0	-4
	1	-3	0	4	0
-1		-1	4	-4	
	1	-4	4	0	

Logo, $h(x)=(x+1)^2\underbrace{(x^2-4x+4)}_{(x-2)^2}=(x+1)^2(x-2)^2$.

Portanto, B tem coordenadas $(2\ ,\ 0)$, pelo que $\overline{AB}=3$.

A ordenada de C é $h\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+1\right)^2\left(\frac{1}{2}-2\right)^2=\frac{81}{16}$.

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times y_C}{2}=\frac{3\times\frac{81}{16}}{2}=\frac{243}{32}\approx 7{,}6$$

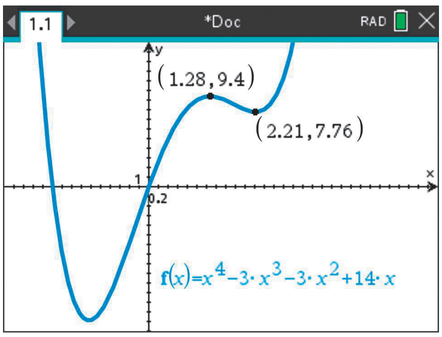
PÁG. 84

32.1 $x^4-3x^3-3x^2+14x=x\left(x^3-3x^2-3x+14\right)$

	1	-3	-3	14
-2		-2	10	-14
	1	-5	7	0

Logo, $x^4-3x^3-3x^2+14x=x\left(x^3-3x^2-3x+14\right)=x(x+2)\left(x^2-5x+7\right)$.

32.2



$k\in\left]-9{,}40\ ;\ -7{,}76\right[$

33.1 As raízes do polinómio são -1 e 5.

$2(x+1)(x-5)^2 = 2(x+1)(x-5)(x-5)$

33.2 1 é raiz do polinómio, dado que $1^3 - 7\times 1 + 6 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - 7x + 6 = (x-1)\left(x^2 + x - 6\right)$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times 1\times(-6)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1-5}{2} \vee x = \frac{-1+5}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$$

As raízes do polinómio são -3, 1 e 2.

$x^3 - 7x + 6 = (x+3)(x-1)(x-2)$

PÁG. 85

33.3

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 2 & -50 & -50 \\ 5 & & 10 & 60 & 50 \\ \hline & 2 & 12 & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^3 + 2x^2 - 50x - 50 = (x-5)\left(2x^2 + 12x + 10\right)$

$$2x^2 + 12x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\times 1\times 5}}{2\times 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-6-4}{2} \vee x = \frac{-6+4}{2} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = -1$$

As raízes do polinómio são -5, 1 e 5.

$2x^3 + 2x^2 - 50x - 50 = 2(x-5)(x+5)(x+1)$

33.4 $2x^4 - 6x^2 - 8 = 2\left(x^4 - 3x^2 - 4\right)$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3-5}{2} \vee x^2 = \frac{3+5}{2} \Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -1}_{\text{Impossível}} \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

As raízes do polinómio são -2 e 2.

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 2 & 0 & -6 & 0 & 8 \\
-2 & & -4 & 8 & -4 & 8 \\
\hline
 & 2 & -4 & 2 & -4 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 0 & 4 & \\
\hline
 & 2 & 0 & 2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Logo, $2x^4 - 6x^2 - 8 = (x+2)(x-2)\left(2x^2 + 2\right) = 2\left(x^2 + 1\right)(x+2)(x-2)$.

34. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 4 \times 2}}{2 \times 4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{8} \Leftrightarrow x^2 = \frac{9-7}{8} \vee x^2 = \frac{9+7}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{8} \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{4}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{4}} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Conjunto-solução: $\left\{-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right\}$

35. $A\left(x, 4, x^2\right)$

$$x^2 + 4^2 + \left(x^2\right)^2 = 36 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-20)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{-1-9}{2} \vee x^2 = \frac{-1+9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -5}_{\text{imp.}} \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Logo, as coordenadas do ponto A são $(-2, 4, 4)$ ou $(2, 4, 4)$.

36. $f(x)=6 \Leftrightarrow 2x^3-10x^2+4x+10=6 \Leftrightarrow 2x^3-10x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow x^3-5x^2+2x+2=0$

Como o gráfico de f e a reta de equação $y=6$ se intersetam no ponto de abcissa 1, 1 é raiz do polinómio x^3-5x^2+2x+2.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & & 1 & -4 & -2 \\ \hline & 1 & -4 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-5x^2+2x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x-2)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \vee x^2-4x-2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{4\pm\sqrt{24}}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{4\pm2\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=2-\sqrt{6} \vee x=2+\sqrt{6}$$

As abcissas dos outros dois pontos são $2-\sqrt{6}$ e $2+\sqrt{6}$.

37. $f(x)=a(x+1)(x-2)(x-4)$

$f(1)=g(1)=3{,}6\times1^2-16{,}8\times1+19{,}2=6$

$f(1)=6 \Leftrightarrow a(1+1)(1-2)(1-4)=6 \Leftrightarrow 6a=6 \Leftrightarrow a=1$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x-4)=x^3-5x^2+2x+8$

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3-5x^2+2x+8=3{,}6x^2-16{,}8x+19{,}2 \Leftrightarrow x^3-8{,}6x^2+18{,}8x-11{,}2=0$

Como os gráficos de f e de g se intersetam no ponto de abcissa 1, 1 é raiz do polinómio $x^3-8{,}6x^2+18{,}8x-11{,}2$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -8{,}6 & 18{,}8 & -11{,}2 \\ 1 & & 1 & -7{,}6 & -2 \\ \hline & 1 & -7{,}6 & 11{,}2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-8{,}6x^2+18{,}8x-11{,}2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-7{,}6x+11{,}2)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x^2-7{,}6x+11{,}2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x=\frac{-(-7{,}6)\pm\sqrt{(-7{,}6)^2-4\times1\times11{,}2}}{2\times1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{7{,}6\pm\sqrt{12{,}96}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{7{,}6-3{,}6}{2} \vee x=\frac{7{,}6+3{,}6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=2 \vee x=5{,}6$$

A solução pedida é $5{,}6$.

PÁG. 87

38.1 $f(x)=0 \Leftrightarrow 2(x^3+1)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x^3+1=0 \vee x^2-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3=-1 \vee x^2=4 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-2 \vee x=2$

Zeros: -2, -1 e 2.

x	$-\infty$	-2		-1		2	$+\infty$
x^3+1	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Sinal: negativa em $]-\infty, -2[\cup]-1, 2[$; positiva em $]-2, -1[\cup]2, +\infty[$.

38.2 Os divisores inteiros do termo independente do polinómio $g(x)$ são os possíveis zeros inteiros da função g.

Esses divisores pertencem ao conjunto $\{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$.

Como $g(-1)=0$, -1 é um zero de g.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 8 & 17 & 10 \\ -1 & & -1 & -7 & -10 \\ \hline & 1 & 7 & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=x^3+8x^2+17x+10=(x+1)(x^2+7x+10)$

$$x^2+7x+10=0 \Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times1\times10}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-7-3}{2} \vee x=\frac{-7+3}{2} \Leftrightarrow x=-5 \vee x=-2$$

Zeros: -5, -2 e -1.

x	$-\infty$	-5		-2		-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2+7x+10$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Sinal: negativa em $]-\infty, -5[\cup]-2, -1[$; positiva em $]-5, -2[\cup]-1, +\infty[$.

38.3 Os divisores inteiros do termo independente do polinómio $h(x)$ são os possíveis zeros inteiros da função h. Esses divisores pertencem ao conjunto $\{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$.

Como $h(1)=0$, -1 é um zero de h.

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & -1 & 8 & -17 & 10 \\
1 & & -1 & 7 & -10 \\
\hline
 & -1 & 7 & -10 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$$h(x) = -x^3 + 8x^2 - 17x + 10 = (x-1)\left(-x^2 + 7x - 10\right)$$

$$-x^2 + 7x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times (-1) \times (-10)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7-3}{-2} \vee x = \frac{-7+3}{-2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 2$$

Zeros: 1 , 2 e 5 .

x	$-\infty$	1		2		5	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x^2+7x-10$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Sinal: negativa em $]1, 2[\cup]5, +\infty[$; positiva em $]-\infty, 1[\cup]2, 5[$.

39.1 $4x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(4x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x(2x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x - 1 = 0 \vee 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4x^2-1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$4x^3-x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$4x^3 - x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

39.2 Os divisores inteiros do termo independente do polinómio $6x^3+5x^2-2x-1$ são as suas possíveis raízes inteiras. Esses divisores pertencem ao conjunto $\{-1\ ,\ 1\}$.

Como $6\times(-1)^3+5\times(-1)^2-2\times(-1)-1=0$, -1 é uma raiz de $6x^3+5x^2-2x-1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & & -6 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$6x^3+5x^2-2x-1=(x+1)\left(6x^2-x-1\right)$

$6x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times6\times(-1)}}{2\times6} \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1-5}{12} \vee x=\dfrac{1+5}{12} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3} \vee x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$6x^2-x-1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$6x^3+5x^2-2x-1$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$6x^3+5x^2-2x-1<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty\ ,-1\right[\cup\left]-\dfrac{1}{3}\ ,\dfrac{1}{2}\right[$

39.3 $-x^3+5x^2-3x\geqslant 9 \Leftrightarrow -x^3+5x^2-3x-9\geqslant 0$

Os divisores inteiros do termo independente do polinómio $-x^3+5x^2-3x-9$ são as suas possíveis raízes inteiras. Esses divisores pertencem ao conjunto $\{-3\ ,-1\ ,\ 1\ ,\ 3\}$.

Como $-(-1)^3+5\times(-1)^2-3\times(-1)-9=0$, -1 é uma raiz de $-x^3+5x^2-3x-9$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 5 & -3 & -9 \\ -1 & & 1 & -6 & 9 \\ \hline & -1 & 6 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$-x^3+5x^2-3x-9=(x+1)\left(-x^2+6x-9\right)=-(x+1)\left(x^2-6x+9\right)=-(x+1)(x-3)^2$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$-(x+1)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$(x-3)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$-x^3+5x^2-3x-9$	$+$	0	$-$	0	$-$

$-x^3+5x^2-3x-9\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty\ ,-1\right]\cup\{3\}$

40. Como $a > 0$, a parábola que representa graficamente o polinómio tem a concavidade voltada para cima; como o polinómio não tem raízes e a parábola tem a concavidade voltada para cima, o polinómio $A(x)$ é positivo em $\mathbb{R}$.

40.1 $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$A(x)$	+	+	+	+	+
$3x - 1$	–	–	0	+	+
$A(x)(3x-1)$	–	–	0	+	+

$A(x)(3x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$

40.2 $-x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$A(x)$	+	+	+	+	+
$-x^2+5$	–	0	+	0	–
$A(x)(-x^2+5)$	–	0	+	0	–

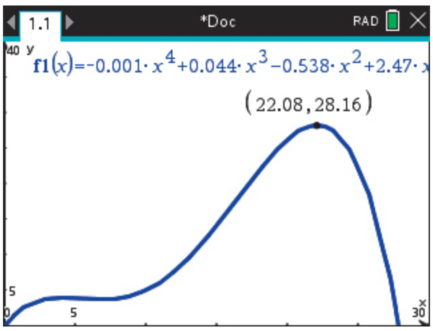
$A(x)(-x^2+5) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

40.3 $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$A(x)$	+	+	+	+	+
x^3	–	–	0	+	+
$x^3 A(x)$	–	–	0	+	+

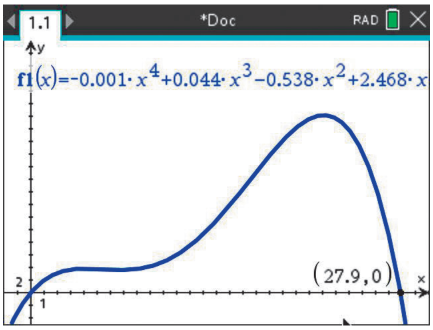
$x^3 A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[$

41.1



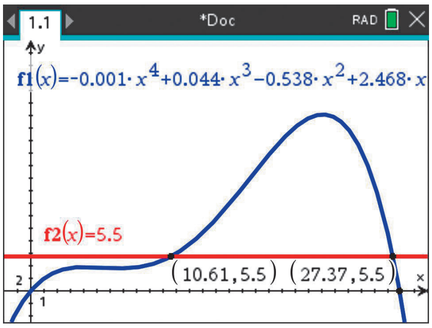
A altura máxima atingida pelo avião foi, aproximadamente, $28{,}16$ m.

41.2



O voo durou, aproximadamente, $27{,}9$ s .

41.3



$27{,}37 - 10{,}61 \approx 16{,}8$

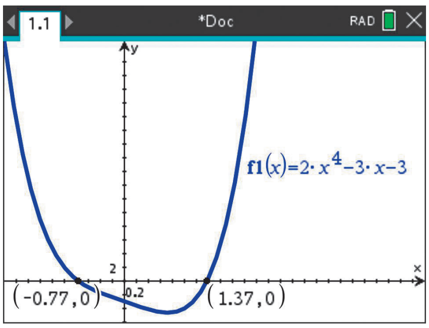
O avião esteve a mais de $5{,}5$ metros durante, aproximadamente, $16{,}8$ segundos.

PÁG. 88

42. $B\left(x\ ,\ x^4\ ,\ 3\right)$

O ângulo AOB é obtuso ou raso se $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$; $\overrightarrow{OB}\left(x\ ,\ x^4\ ,\ 3\right)$ e $\overrightarrow{OA}\left(-3\ ,\ 2\ ,\ -1\right)$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0 \iff -3x+2x^4-3<0 \iff 2x^4-3x-3<0$



Portanto, o ângulo AOB é obtuso ou raso se $x\in\left]-0{,}77\ ;\ 1{,}37\right[$ (valores aproximados às centésimas).

43.1

	1	−3	−6	8
4		4	4	−8
	1	1	−2	$\boxed{0}$

$f(x)=x^3-3x^2-6x+8=(x-4)(x^2+x-2)$

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-1-3}{2} \vee x=\frac{-1+3}{2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$

x	$-\infty$	-2		1		4	$+\infty$
$x-4$	−	−	−	−	−	0	+
x^2+x-2	+	0	−	0	+	+	+
$f(x)$	−	0	+	0	−	0	+

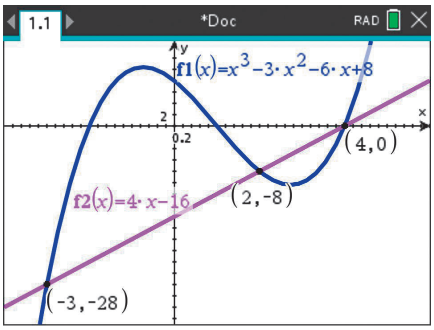
$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty\,,\,2\right[\cup\left]1\,,\,4\right[$

43.2 Tem-se $f(-3)=-28$, $A(-3\,,\,-28)$, $f(2)=-8$ e $B(2\,,\,-8)$.

A reta AB tem declive $\frac{-8+28}{2+3}=4$ e ordenada na origem $-8=4\times2+b \Leftrightarrow b=-16$.

Assim, a reta AB tem equação reduzida $y=4x-16$.

Resolução gráfica



As coordenadas do ponto C são $(4\,,\,0)$.

Resolução analítica

A reta AB tem equação reduzida $y = 4x - 16$.
Pretende-se determinar x , diferente de -3 e 2 , tal que:

$$f(x) = 4x - 16 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 4x - 16 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

Como o gráfico de f e a reta AB se intersetam nos pontos de abcissa -3 e 2 , -3 e 2 são raízes do polinómio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.

	1	-3	-10	24
-3		-3	18	-24
	1	-6	8	0
2		2	-8	
	1	-4	0	

Logo, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x+3)(x-2)(x-4)$, pelo que:

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \vee x-2=0 \vee x-4=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2 \vee x = 4$$

Como x é diferente de -3 e 2 , tem-se $x = 4$, pelo que as coordenadas de C são $(4 \, , \, 4 \times 4 - 16)$, ou seja, $(4 \, , \, 0)$.

PÁG. 89

44.1 $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = \left(0^2 - 0\right) + \left(0^2 + 0 - 2\right) = -2$

$(g-f)(3) = g(3) - f(3) = \left(3^2 + 3 - 2\right) - \left(3^2 - 3\right) = 10 - 6 = 4$

44.2 $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \vee x^2 + x - 2 = 0$

Cálculos auxiliares:

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1-3}{2} \vee x = \frac{-1+3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

Os zeros da função $f \times g$ são -2 , 0 e 1 .

44.3

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
$f(x)$	+	+	+	0	−	0	+
$g(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$\left(\frac{g}{f}\right)(x)$	+	0	−	N.D.	+	N.D.	+

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-2 \, , \, 0[$

45. (A) $(f\times g)(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\times g(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=0 \vee g(x)=0 \Leftrightarrow 3x+9=0 \vee x^2-9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-3 \vee x^2=9 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x=-3 \vee x=3$

(B) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(3x+9)+\left(x^2-9\right)=x^2+3x$

$(f+g)(x)=0 \Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-3$

(C) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x+9}{x^2-9}=\frac{3(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3}{x-3}\neq 0\,,\ \forall x\neq 3$

(D) $(g-f)(x)=g(x)-f(x)=\left(x^2-9\right)-(3x+9)=x^2-3x-18$

$\Delta=(-3)^2-4\times 1\times(-18)=81>0$, pelo que $g-f$ tem dois zeros.

Opção correta: **(C)**

46.1 $D_{\frac{g}{f}}=D_g\cap D_f\cap\left\{x\in\mathbb{R}: f(x)\neq 0\right\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\left\{x\in\mathbb{R}: 2x+4\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

46.2 Como g é quadrática, a reta de equação $x=0$ é o eixo de simetria do seu gráfico e $g(2)=g(-2)=0$, pelo que -2 e 2 são os zeros de g.

Além disso, como $g(3)<0$, o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo, pelo que g é positiva em $]-2\,,\,2[$ e negativa no resto do seu domínio.

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(g\times f)(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$(g\times f)(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,,\,2[\setminus\{-2\}$

46.3 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \wedge f(x)\neq 0 \Leftrightarrow (x=-2 \vee x=2)\wedge x\neq -2 \Leftrightarrow x=2$

PÁG. 90

47.1 $(f+g)(0)=f(0)+g(0)=6+\left(4-0^2\right)=6+4=10$

47.2 $D_{\frac{g}{f}}=D_g\cap D_f\cap\left\{x\in\mathbb{R}: f(x)\neq 0\right\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\setminus\{-2\,,\,1\,,\,3\}=\mathbb{R}\setminus\{-2\,,\,1\,,\,3\}$

47.3 $g(x)=0 \Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \wedge g(x)\neq 0 \Leftrightarrow (x=-2 \vee x=1 \vee x=3)\wedge(x\neq -2 \wedge x\neq 2) \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$

47.4

x	$-\infty$	-2		1		2		3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$(f\times g)(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$(f\times g)(x)\leqslant 0 \iff x\in\{-2\}\cup[1\,,\,2]\cup[3\,,\,+\infty[$

48. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=0 \iff f(x)=0\wedge g(x)\neq 0$

Cálculos auxiliares:

$f(x)=0 \iff (x+k)^2(x-6)=0 \iff (x+k)^2=0\vee x-6=0 \iff x=-k\vee x=6$

$g(x)=0 \iff x^2-5x-6=0 \iff x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times 1\times(-6)}}{2\times 1} \iff$

$\iff x=\dfrac{5\pm\sqrt{49}}{2} \iff x=\dfrac{5-7}{2}\vee x=\dfrac{5+7}{2} \iff x=-1\vee x=6$

Portanto, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=0 \iff f(x)=0\wedge g(x)\neq 0 \iff (x=-k\vee x=6)\wedge(x\neq -1\wedge x\neq 6)$.

Assim, $\dfrac{f}{g}$ tem zeros se $-k\neq -1$, ou seja, se $k\neq 1$, pelo que $\dfrac{f}{g}$ não tem zeros se, e somente se, $k=1$.

Opção correta: **(B)**

49.1 $(f+g)(0)=f(0)+g(0)=-1+3=2$

49.2 $D_{f\times g}=D_f\cap D_g=[-2\,,\,2]\cap\left[-1\,,\,\dfrac{11}{5}\right[=[-1\,,\,2]$

$D_{\frac{g}{f}}=D_g\cap D_f\cap\{x\in\mathbb{R}: f(x)\neq 0\}=\left[-1\,,\,\dfrac{11}{5}\right[\cap[-2\,,\,2]\cap\mathbb{R}\setminus\{-1\,,\,1\}=]-1\,,\,2]\setminus\{1\}$

49.3 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=0 \iff f(x)=0\wedge g(x)\neq 0 \iff (x=-1\vee x=1)\wedge g(x)\neq 0 \iff x=-1\vee x=1$

49.4 $(f-g)(x)=0 \iff f(x)-g(x)=0 \iff f(x)=g(x)$

Os gráficos das funções f e g intersetam-se num só ponto.

Opção correta: **(B)**

50. $D_{g\times h}=D_g\cap D_h=]0\,,\,6]\cap D_h$

(A) $]0\,,\,6]\cap]3\,,\,6[=]3\,,\,6[$

(B) $]0\,,\,6]\cap]3\,,\,5]=]3\,,\,5]$

(C) $]0\,,\,6]\cap]3\,,\,4]=]3\,,\,4]$

(D) $]0\,,\,6]\cap]3\,,\,7]=]3\,,\,6]$

Opção correta: **(D)**

PÁG. 91

51.1 Uma reta interseta uma parábola, no máximo, em dois pontos.

Opção correta: **(D)**

51.2 $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0$

A função f tem, necessariamente, um zero, dado que é uma função afim não constante.

Opção correta: **(A)**

51.3 Uma função quadrática tem, no máximo, dois zeros.

Opção correta: **(D)**

52.1 $D_{f+g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$

$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R}: x^3 - 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

Cálculo auxiliar:

$x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$

Opção correta: **(D)**

52.2 $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = -2 + 2 = 0$, pelo que 1 é um zero de $f+g$.

$(f+g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & -3 & 1 \\
1 & & 1 & 2 & -1 \\
\hline
 & 1 & 2 & -1 & \boxed{0}
\end{array}$$

$x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} \vee x = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 - \sqrt{2} \vee x = -1 + \sqrt{2}$

Os zeros de $f+g$ são $-1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}$ e 1.

PÁG. 92

53.1 $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Opção correta: **(A)**

53.2 $a = -1$

Opção correta: **(D)**

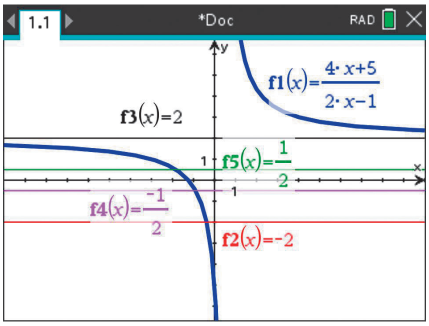
53.3 $g(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{2}{x+3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x+3} = 1 \underset{x \neq -3}{\Leftrightarrow} x + 3 = 2 \Leftrightarrow x = -1$

53.4 $g(x) = 3 \Leftrightarrow -1 + \frac{2}{x+3} = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{x+3} = 4 \underset{x \neq -3}{\Leftrightarrow} x + 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

54.1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Opção correta: **(D)**

54.2



Opção correta: **(B)**

54.3 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+5}{2x-1} = 0 \Leftrightarrow 4x + 5 = 0 \wedge 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} \wedge x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$

54.4 $f(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow \frac{4x+5}{2x-1} \geqslant 3 \Leftrightarrow \frac{4x+5}{2x-1} - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4x+5-6x+3}{2x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{8-2x}{2x-1} \geqslant 0$

Cálculos auxiliares:

$8 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x = -8 \Leftrightarrow x = 4$; $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		4	$+\infty$
$8-2x$	+	+	+	0	−
$2x-1$	−	0	+	+	+
$\frac{8-2x}{2x-1}$	−	N.D.	+	0	−

O conjunto-solução da condição é $\left]\frac{1}{2}, 4\right]$.

PÁG. 93

55.1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f(x) = \frac{2x-6}{x+2} = 2 - \frac{10}{x+2}$

$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rr|l} 2x & -\ 6 & x+2 \\ \cline{3-3} -2x & -\ 4 & 2 \\ \hline & -\ 10 & \end{array}$$

55.2 $f(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{2x-6}{x+2} = -2 \Leftrightarrow \frac{2x-6}{x+2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-6+2x+4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4x-2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow 4x-2=0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

55.3 Cálculos auxiliares:

$2x-6=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$; $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$2x-6$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	N.D.	$-$	0	$+$

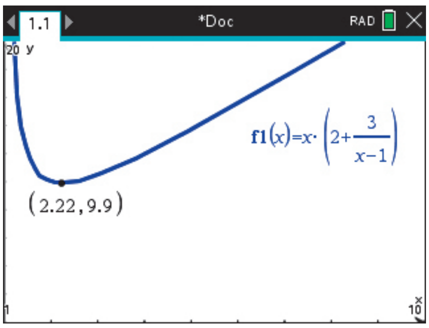
Positiva em $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$; negativa em $]-2, 3[$.

56. $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x+c \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-c\}$, pelo que $-c = 3 \Leftrightarrow c = -3$.

$a = -5$, dado que $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

$h(0) = -6 \Leftrightarrow -5 + \frac{b}{0-3} = -6 \Leftrightarrow b = 3$

57. $\text{A} = x\left(2 + \frac{3}{x-1}\right) = \frac{2x^2+x}{x-1}$



A área mínima do retângulo de diagonal $[OP]$ é, aproximadamente, $9{,}9$.

58. $h(x)=1+\frac{b}{x-3}=\frac{x-3+b}{x-3}$

(A) $h(1)=\frac{1-3+b}{1-3}=\frac{2-b}{2}$ e $\frac{2-b}{2}=0 \Leftrightarrow b=2>0$

(B) Não existe $h(3)$ porque $3 \notin D_h$.

(C) $h(5)=\frac{5-3+b}{5-3}=\frac{2+b}{2}$ e $\frac{2+b}{2}=0 \Leftrightarrow b=-2<0$

(D) $h(7)=\frac{7-3+b}{7-3}=\frac{4+b}{4}$ e $\frac{4+b}{4}=0 \Leftrightarrow b=-4<0$

Opção correta: **(A)**

Alternativamente:

$h(x)=0 \Leftrightarrow 1+\frac{b}{x-3}=0 \Leftrightarrow \frac{b}{x-3}=-1 \underset{x\neq -3}{\Leftrightarrow} b=3-x \Leftrightarrow x=3-b$, pelo que o zero de h é $3-b$.

Como $b>0$, tem-se $-b<0 \Leftrightarrow 3-b<3$.

Opção correta: **(A)**

59. Como f é crescente em $]-\infty\,,-3[$ e em $]-3\,,+\infty[$, concluímos que $b<0$, pelo que excluímos as opções (C) e (D).

Assumindo que $b=-8$ (valor das opções (A) e (B)), tem-se:

$$f(5)=0 \Leftrightarrow a-\frac{8}{5+3}=0 \Leftrightarrow a=1$$

Opção correta: **(A)**

PÁG. 94

60.1 $D_{f\times g}=D_f \cap D_g=\mathbb{R}\setminus\{-2\}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$D_{\frac{g}{f}}=D_g\cap D_f\cap\{x\in\mathbb{R}: f(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\setminus\{-2\}\cap\mathbb{R}\setminus\left\{-2\,,\frac{3}{2}\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-2\,,\frac{3}{2}\right\}$

Cálculo auxiliar:

$\frac{2x-3}{x+2}=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \wedge x+2\neq 0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\wedge x\neq -2$

60.2 $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{2x-3}{x+2}\times\left(x^3+x^2-4x-4\right)=$

$$=\frac{(2x-3)(x+2)\left(x^2-x-2\right)}{x+2}=(2x-3)\left(x^2-x-2\right)=$$

$$=2x^3-2x^2-4x-3x^2+3x+6=2x^3-5x^2-x+6$$

Cálculo auxiliar:

Os divisores inteiros do termo independente do polinómio x^3+x^2-4x-4 são as suas possíveis raízes inteiras. Esses divisores pertencem ao conjunto $\{-2\,,-1\,,1\,,2\}$.

Como $(-2)^3+(-2)^2-4\times(-2)-4=0$, -2 é uma raiz do polinómio x^3+x^2-4x-4.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -2 & & -2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Logo, $x^3+x^2-4x-4=(x+2)\left(x^2-x-2\right)$.

61.1 Em $]-\infty\,,5]$, f é crescente e $f(5)=5-5=0$, pelo que $f(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty\,,5]$.

Em $]5\,,+\infty[$, $\dfrac{4+2x}{x-5}=2+\dfrac{14}{x-5}$.

Logo, $f(x)>2 \Leftrightarrow x\in]5\,,+\infty[$.

Assim, $D'_f=]-\infty\,,0]\cup]2\,,+\infty[$.

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rr|l} 2x & +\ 4 & x-5 \\ \cline{3-3} -2x & +\ 10 & 2 \\ \cline{1-2} & 14 & \end{array}$$

61.2 Em $]5\,,+\infty[$,

$$f(x)\geqslant\frac{x}{4}+1 \Leftrightarrow \frac{4+2x}{x-5}\geqslant\frac{x}{4}+1 \Leftrightarrow \frac{4+2x}{x-5}-\frac{x}{4}-1\geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(4+2x)-x(x-5)-4(x-5)}{4(x-5)}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+9x+36}{4x-20}\geqslant 0$$

Cálculos auxiliares:

$$-x^2+9x+36=0 \Leftrightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\times(-1)\times 36}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{225}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-9-15}{-2}\vee x=\frac{-9+15}{-2} \Leftrightarrow x=12\vee x=-3$$

$4x-20=0 \Leftrightarrow 4x=20 \Leftrightarrow x=5$

x	5		12	$+\infty$
$-x^2+9x+36$	N.D.	+	0	–
$4x-20$	N.D.	+	+	+
$\dfrac{-x^2+9x+36}{4x-20}$	N.D.	+	0	–

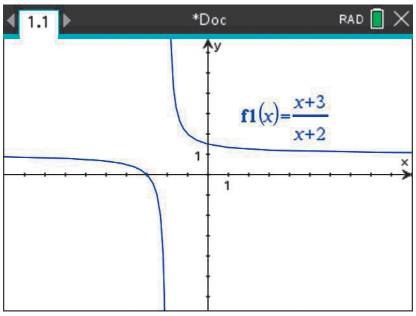
Em $]5\,,+\infty[$, o conjunto-solução da condição é $]5\,,12]$.

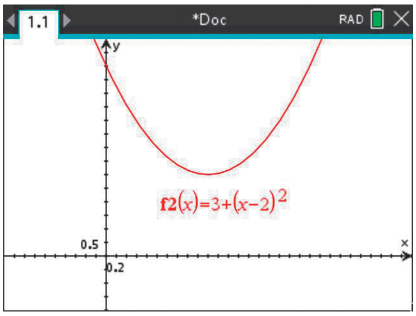
62. Em $]-\infty\,,-2[$,

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x+2}=0 \Leftrightarrow x+3=0 \wedge x+2\neq 0 \Leftrightarrow x=-3 \wedge x\neq -2 \Leftrightarrow x=-3$.

Em $[-2\,,+\infty[$, $f(x)=0 \Leftrightarrow 3+(x-2)^2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=-3$, é impossível.

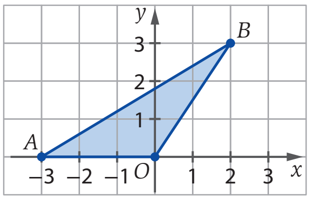
Assim, $A\,(-3\,,0)$.





Em $]-\infty\,,-2[$, f não tem mínimo relativo, mas em $[-2\,,+\infty[$, tem, é a ordenada do vértice da parábola.

Assim, B tem coordenadas $(2\,,3)$.



Logo, $A_{[ABO]}=\dfrac{\overline{AO}\times y_B}{2}=\dfrac{3\times 3}{2}=\dfrac{9}{2}$.

PÁG. 95

63.1 $h(x)=\dfrac{3x-1}{5-x}=-3+\dfrac{14}{5-x}$

Logo, a reta de equação $x=5$ é assíntota vertical ao gráfico de f e a reta de equação $y=-3$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rr|l} 3x & -\;\;1 & -x+5 \\ \cline{3-3} -3x & +\;15 & -3 \\ \hline & 14 & \end{array}$$

63.2 $y+2x\geqslant 4 \Leftrightarrow y\geqslant -2x+4$

$h(x)\geqslant -2x+4 \Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{5-x}\geqslant -2x+4 \Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{5-x}+2x-4\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x-1+(2x-4)(5-x)}{5-x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-1+10x-2x^2-20+4x}{5-x}\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2+17x-21}{5-x}\geqslant 0$

Cálculos auxiliares:

$$-2x^2+17x-21=0 \Leftrightarrow x=\frac{-17\pm\sqrt{17^2-4\times(-2)\times(-21)}}{2\times(-2)} \Leftrightarrow x=\frac{-17\pm\sqrt{121}}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-17-11}{-4} \vee x=\frac{-17+11}{-4} \Leftrightarrow x=7 \vee x=\frac{3}{2}$$

$5-x=0 \Leftrightarrow x=5$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		5		7	$+\infty$
$-2x^2+17x-21$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$5-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{-2x^2+17x-21}{5-x}$	$-$	0	$+$	N.D.	$-$	0	$+$

As abcissas dos pontos do gráfico de h que pertencem ao semiplano definido por $y+2x \geqslant 4$ pertencem ao conjunto $\left[\frac{3}{2}, 5\right[\cup [7, +\infty[$.

64.1 Opção correta: **(B)**

64.2 $a=3$, $c=-1$, dado que a reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal ao gráfico de h e a reta de equação $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

$h(-1)=0 \Leftrightarrow 3+\frac{b}{-1-1}=0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2}=-3 \Leftrightarrow b=6$

65.1 $h(x)=2+\frac{9}{2-2x}=2-\frac{\frac{9}{2}}{x-1}$, pelo que o gráfico de h à direita de reta de equação $x=1$, encontra-se abaixo da reta de equação $y=2$, donde $\lim_{x\to 1^+} h(x)=-\infty$.

Opção correta: **(C)**

65.2 $\lim_{x\to+\infty} h(x)=2$, dado que a reta de equação $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de h , quando $x \longrightarrow +\infty$.

Opção correta: **(B)**

66. $x=-4$ e $y=-3$ são equações das assíntotas ao gráfico de h .

O gráfico de f obtém-se do gráfico de h através da translação associada ao vetor de coordenadas $(-3, 2)$.

Assim, as equações das assíntotas ao gráfico de f são $x=-4-3=-7$ e $y=-3+2=-1$.

Opção correta: **(A)**

PÁG. 96

67. As retas de equações $x=b$ e $y=a$ são assíntotas ao gráfico de g, pelo que $a<0$ e $b>0$.

Opção correta: **(C)**

68.1 $N(0)=20 \Leftrightarrow \frac{20\,000\times 0+k}{4\times 0+10}=20 \Leftrightarrow \frac{k}{10}=20 \Leftrightarrow k=200$

68.2 $S(t)=20\,000-N(t)=20\,000-\frac{20\,000t+200}{4t+10}=\frac{20\,000(4t+10)-20\,000t-200}{4t+10}=$

$=\frac{80\,000t+200\,000-20\,000t-200}{4t+10}=$

$=\frac{60\,000t+199\,800}{4t+10}=15\,000+\frac{49\,800}{4t+10}$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rr|l} 60\,000t & +\ 199\,800 & 4t+10 \\ \cline{3-3} -60\,000t & -\ 150\,000 & 15\,000 \\ \hline & 49\,800 & \end{array}$$

Logo, a reta de equação $y=15\,000$ é assíntota horizontal ao gráfico de S.

Com o passar do tempo, o número de computadores não infetados tende para $15\,000$, não ultrapassando este valor.

69. $g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{8-x}{2+x}=0 \Leftrightarrow 8-x=0 \wedge 2+x\neq 0 \Leftrightarrow x=8 \wedge x\neq -2 \Leftrightarrow x=8$

Logo, as coordenadas do ponto A são $(8\,,\,0)$.

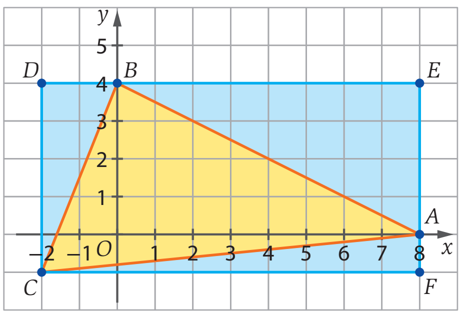
$g(0)=\frac{8-0}{2+0}=4$, pelo que as coordenadas do ponto B são $(0\,,\,4)$.

$g(x)=\frac{8-x}{2+x}=-1+\frac{10}{x+2}$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rr|l} -x & +\ 8 & x+2 \\ \cline{3-3} x & +\ 2 & -1 \\ \hline & 10 & \end{array}$$

Logo, as equações das assíntotas ao gráfico de g são $x=-2$ e $y=-1$, pelo que as coordenadas do ponto C são $(-2\,,\,1)$.



Logo, $A_{[ABC]}=A_{[CDEF]}-\left(A_{[BCD]}+A_{[ABE]}+A_{[AFC]}\right)=10\times 5-\left(\frac{2\times 5}{2}+\frac{8\times 4}{2}+\frac{10\times 1}{2}\right)=24$.

PÁG. 97

70.1 $T(0)=240-\dfrac{100}{0+3}\approx 207$ e $T(7)=\dfrac{160\times 7+260}{8\times 7-50}=230$.

No instante em que colocou o bolo no forno, a temperatura era aproximadamente igual a $207\ °C$, e no instante em que houve o corte de energia era igual a $230\ °C$.

70.2. Para $t\geqslant 7$, $T(t)=\dfrac{160t+260}{8t-50}=20+\dfrac{1260}{8t-50}$.

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rr|l} 160t & +\ \ 260 & 8t-50 \\ \hline -160t & +\ 1000 & 20 \\ \hline & 1260 & \end{array}$$

Logo, a reta de equação $y=20$ é assíntota horizontal ao gráfico de T , pelo que $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)=20$.

Portanto, a temperatura ambiente era igual a $20\ °C$.

70.3 Resolução analítica:

$$\text{Para } t\geqslant 7,\ T(t)\geqslant 50 \Leftrightarrow \frac{160t+260}{8t-50}\geqslant 50 \underset{t\geqslant 7\ \Rightarrow\ 8t-50>0}{\Leftrightarrow} 160t+260\geqslant 50(8t-50) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 160t+260\geqslant 400t-2500 \Leftrightarrow$$

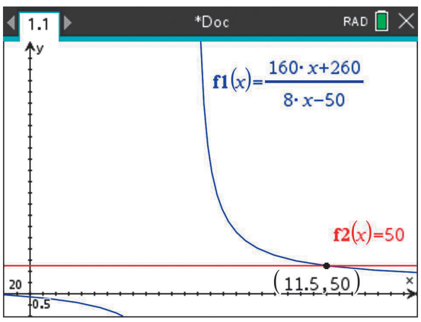
$$\Leftrightarrow 160t-400t\geqslant -2500-260 \Leftrightarrow -240t\geqslant -2760 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\leqslant \frac{-2760}{-240} \Leftrightarrow t\leqslant 11{,}5$$

Como $11{,}5-7<10$, não foi possível confecionar o prato.

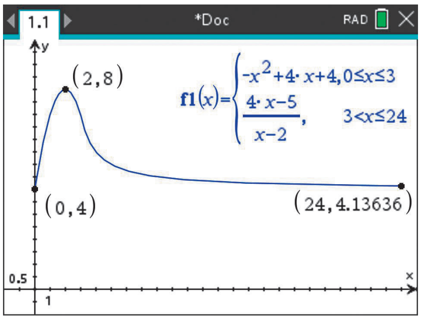
Resolução gráfica:

Para $t\geqslant 7$, $T(t)\geqslant 50 \Leftrightarrow \dfrac{160t+260}{8t-50}\geqslant 50 \Leftrightarrow t\leqslant 11{,}5$.



Como $11{,}5-7<10$, não foi possível confecionar o prato.

71.1 Consideremos a seguinte representação gráfica de V .



A rega iniciou-se quando a função atingiu o máximo, que, dada a representação gráfica, ocorreu antes das 3 horas.

Para $0 \leqslant t \leqslant 3$, V é quadrática, pelo que a ordenada do vértice da parábola que é o seu gráfico é o máximo de V .

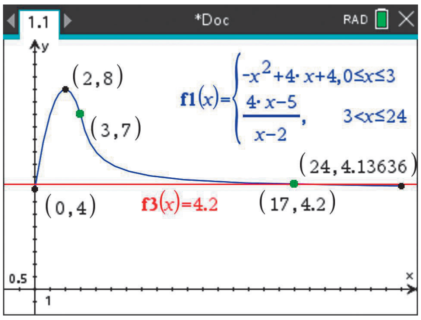
Determinando o vértice analiticamente:

$$-t^2+4t+4=-\left(t^2-4t\right)+4=-\left(\underbrace{t^2-4t+4}_{(t-2)^2}-4\right)+4=-(t-2)^2+4+4=-(t-2)^2+8$$

As coordenadas do vértice são $(2\ ,\ 8)$, pelo que a rega teve início às 2 horas e, nesse instante, a quantidade de água no depósito era de $800\ \text{dm}^3$.

71.2 Resolução gráfica:

$V(3)=7$ e $0{,}6\times 7=4{,}2$.



A fuga começou a ser reparada às 17 h .

Resolução analítica:

$V(3)=7$ e $0{,}6\times 700=420$.

Para $t>3$, $V(t)=0{,}6\times V(3) \Leftrightarrow \dfrac{4t-5}{t-2}=0{,}6\times\left(-3^2+4\times 3+4\right) \Leftrightarrow \dfrac{4t-5}{t-2}=4{,}2 \Leftrightarrow$

$$\underset{t>3\ \Rightarrow\ t-2>0}{\Leftrightarrow} 4t-5=4{,}2(t-2) \Leftrightarrow 4t-5=4{,}2t-8{,}4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t-4{,}2t=5-8{,}4 \Leftrightarrow -0{,}2t=-3{,}4 \Leftrightarrow t=\frac{-3{,}4}{-0{,}2} \Leftrightarrow t=17$$

A fuga começou a ser reparada às 17 h .