2. Funções trigonométricas

PÁG. 92

Diagnóstico

1. Opção correta: **(C)**, pois é a única opção que representa graficamente uma correspondência que a cada valor de x associa um único valor de y .

2.1 $D_f = [-3\,,\,5]\backslash\{-2\}$ e $D'_f = [-2\,,\,2]$.

2.2 $f(-3) = 2$ e $f(-1) = -2$.

2.3 $(0\,,\,-1)$

2.4 $f(x) = 2 \iff x \in \{-3\} \cup [3\,,\,5]$

2.5 Sim, a função tem uma infinidade de zeros: $f(x) = 0 \iff x \in [1\,,\,2]$.

3. Opção correta: **(A)**

4.1 $D_f =]-5\,,\,5]$ e $D'_f = [-4\,,\,5[$.

4.2 $f(x) = 0 \iff x = -1$

x	-5		-1		3		5
$f(x)$	N.D.	$+$	0	$-$	3	$+$	2

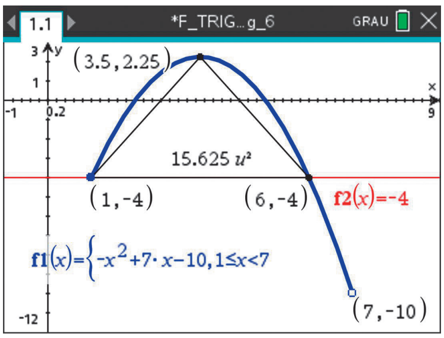
4.3 f é crescente em $]-5\,,\,-2]$ e em $[1\,,\,3]$; f é decrescente em $]-2\,,\,1]$ e em $[3\,,\,5]$.

f tem um máximo relativo 3 em $x = 3$, um mínimo relativo 2 em $x = 5$ e o mínimo absoluto -4 em $x = 1$.

5. f é crescente se $3 - m > 0 \iff m < 3 \iff m \in]-\infty\,,\,3[$

Opção correta: **(B)**

6.



6.1 $D'_g =]-10\ ;\ 2{,}25]$

6.2 $A_{[ABM]} = 15{,}625$

7. Numa expressão da forma $g(x) = a(x-h)^2 + k$, o sinal do parâmetro a indica o sentido da concavidade da parábola e $(h\ ,\ k)$ são as coordenadas do vértice da parábola.

A parábola representada na figura tem a concavidade voltada para cima, donde $a > 0$; o vértice da parábola tem abcissa e ordenada negativas, donde $h < 0$ e $k < 0$.

Opção correta: **(B)**

8. A parábola que representa a função f tem a concavidade voltada para cima e vértice no ponto de coordenadas $(2\ ,\ 1)$. A parábola que representa a função g tem a concavidade voltada para baixo e vértice no ponto de coordenadas $(3\ ,\ 0)$. O gráfico que representa a função g obtém-se do gráfico que representa a função f pela reflexão de eixo Ox composta com a translação associada ao vetor de coordenadas $(1\ ,\ 1)$.

Opção correta: **(D)**

9. $f(x) = h(x-1) + 3 = a(x-1-2)^2 + 3 = a(x-3)^2 + 3$

$f(3) = a(3-3)^2 + 3 = 3$

Opção correta: **(C)**

PÁG. 94
Tarefa 1

8. Os pontos do traço de P pertencem ao gráfico da função seno.

9. As coordenadas do ponto Q são $(c\ ,\ x(A))$, dado que a abcissa do ponto A corresponde ao cosseno do ângulo de amplitude c , em radianos.

PÁG. 97
Tarefa 2

Contradomínio: $[-1\ ,\ 1]$.

Zeros: $-2\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \pi\ ,\ 2\pi\ ,\ 3\pi$ e 4π .

Sinal: negativa em $]-\pi\ ,\ 0[\ ,\ ]\pi\ ,\ 2\pi[$ e $]3\pi\ ,\ 4\pi[$; positiva em $]-2\pi\ ,\ -\pi[\ ,\ ]0\ ,\ \pi[$ e $]2\pi\ ,\ 3\pi[$.

Extremos: valor máximo 1 e valor mínimo -1 .

Monotonia: decrescente em $\left[-\frac{3\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{5\pi}{2}\ ,\ \frac{7\pi}{2}\right]$; crescente em $\left[-2\pi\ ,\ -\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{7\pi}{2}\ ,\ 4\pi\right]$.

PÁG. 100
Tarefa 3

Contradomínio: $[-1\ ,\ 1]$.

Zeros: $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$.

Sinal: negativa em $\left]-3\pi\,,-\frac{5\pi}{2}\right[$, $\left]-\frac{3\pi}{2}\,,-\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2}\,,\frac{3\pi}{2}\right[$ e $\left]\frac{5\pi}{2}\,,3\pi\right[$; positiva em $\left]-\frac{5\pi}{2}\,,-\frac{3\pi}{2}\right[$, $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ e $\left]\frac{3\pi}{2}\,,\frac{5\pi}{2}\right[$.

Extremos: valor máximo 1 e valor mínimo -1 .

Monotonia: decrescente em $[-2\pi\,,-\pi]$, $[0\,,\pi]$ e $[2\pi\,,3\pi]$; crescente em $[-3\pi\,,-2\pi]$, $[-\pi\,,0]$ e $[\pi\,,2\pi]$.

PÁG. 104

Tarefa 4

10. Domínio: $[0\,,2\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\,,\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Contradomínio: $\mathbb{R}$.

Zeros: 0 , π e 2π .

Sinal: negativa em $\left]\frac{\pi}{2}\,,\pi\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2}\,,2\pi\right[$; positiva em $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\pi\,,\frac{3\pi}{2}\right[$.

Extremos: não tem.

Monotonia: crescente em $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2}\,,\frac{3\pi}{2}\right[$ e $\left]\frac{3\pi}{2}\,,2\pi\right]$.

Período positivo mínimo: π .

PÁG. 112

Aplicar

4. Opção correta: **(C)**, porque $\cos(0) = 1$.

PÁG. 113

Aplicar

5.1 O máximo absoluto da função seno é 1 , para $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

Opção correta: **(B)**

5.2

x	$-\pi$		0		π
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0

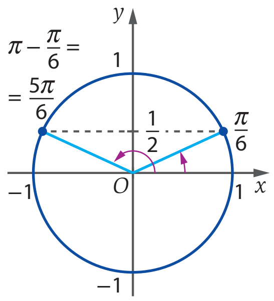
5.3 Máximo 1 em $x = -\frac{3\pi}{2}$ e em $x = \frac{\pi}{2}$. Mínimo -1 em $x = -\frac{\pi}{2}$ e em $x = \frac{3\pi}{2}$.

5.4 Por exemplo,

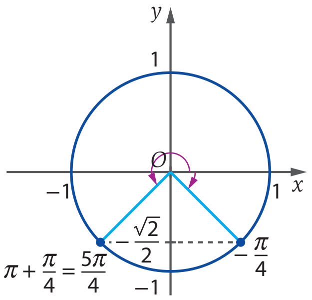
a. $f(x) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

c. $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$



d. $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$



5.5 Como $\operatorname{sen}(x + 6\pi) = \operatorname{sen}(x + 3 \times 2\pi) = \operatorname{sen} x$, verifica-se que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $x + 6\pi \in \mathbb{R} \wedge f(x + 6\pi) = f(x)$.

Portanto, 6π é período da função f .

6.1

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$	1	+	0	−	0	+	0	−	ND

6.2

x	-2π		$-\pi$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$g(x)$	1	↘	−1	↗	1	↘	−1	↗	ND

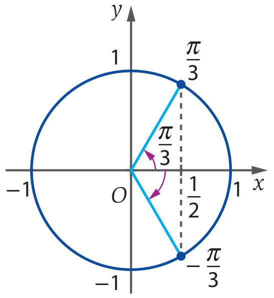
6.3

a. $g(x) = -1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi \vee x = \pi$

b. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2}$

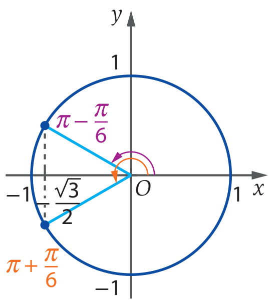
c. Em $[-2\pi, 0]$, $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2\pi + \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}$;

em $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.



d. Em $[-2\pi, 0]$, $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = -\pi - \frac{\pi}{6} \vee x = -\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{6} \vee x = -\frac{5\pi}{6}$;

em $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{6} \vee x = \pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6}$.



7.1 $h\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$, para todo o $k \in \mathbb{Z}$.

7.2 A função tangente é positiva na união dos intervalos da forma $\left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

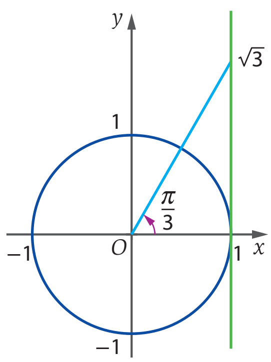
Opção correta: **(C)**

7.3 Por exemplo,

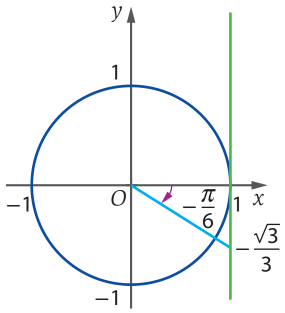
a. $h(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b. $h(x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c. $h(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



d. $h(x)=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ , } k\in\mathbb{Z}$



PÁG. 118

Aplicar

10.1 O período positivo mínimo da função f é $\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2\pi}{3}$.

Opção correta: **(B)**

10.2 Tendo em conta que o período de f é $\frac{1}{3}$ vezes inferior ao da função definida por $y=\operatorname{sen} x$, uma expressão geral dos zeros da função f é $\frac{1}{3}(k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, ou seja, $\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

10.3

x	$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0

10.4 f é decrescente em $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]$ e $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$. f é crescente em $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$.

11.1 $g(-3\pi)=-1 \Leftrightarrow \cos(c(-3\pi))=-1 \Leftrightarrow c(-3\pi)=\pi+2k\pi \text{ , } k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow c=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}k \text{ , } k\in\mathbb{Z}$

Se $k=-1$, $c=\frac{1}{3}$.

Opção correta: **(C)**

11.2 $\frac{3\pi}{2}+3k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

11.3 $\left]\frac{3\pi}{2}+6k\pi , \frac{9\pi}{2}+6k\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$

PÁG. 129

Aplicar

18.1 O domínio de f é $\mathbb{R}$, pois x pode assumir qualquer valor real.

18.2 O contradomínio da função seno é $[-1\ ,\ 1]$. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant \operatorname{sen}(\pi(x+1)) \leqslant 1 \iff -3 \leqslant 3\operatorname{sen}(\pi(x+1)) \leqslant 3 \iff$$

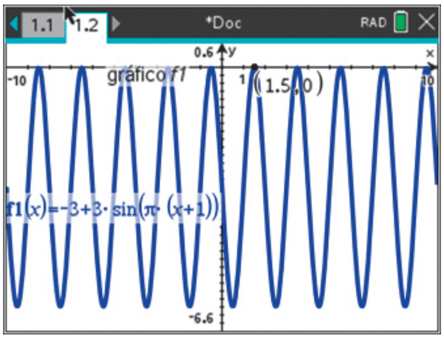
$$\iff -3-3 \leqslant -3+3\operatorname{sen}(\pi(x+1)) \leqslant -3+3 \iff -6 \leqslant f(x) \leqslant 0$$

Como f toma todos os valores reais entre -6 e 0, o seu contradomínio é $[-6\ ,\ 0]$.

18.3 O período positivo mínimo de f é $T=\frac{2\pi}{\pi}=2$ e a frequência de f é $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2}$.

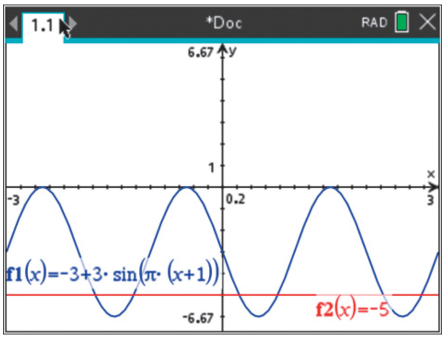
18.4

a.



$f(x)=0 \iff x=1{,}5+2k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

b.



No intervalo $[-3\ ,\ 3]$, a equação $f(x)=-5$ tem 6 soluções.

19.1 O contradomínio da função cosseno é $[-1\ ,\ 1]$. Para $x\in\mathbb{R}$, tem-se:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1 \iff -1+1 \leqslant \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1+1 \iff 0 \leqslant g(x) \leqslant 2$$

Como g toma todos os valores reais entre 0 e 2, o seu contradomínio é $[0\ ,\ 2]$.

19.2 Translação segundo o vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{6}\ ,\ 1\right)$.

19.3 Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: 0; maximizantes: $\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$;

minimizantes: $\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

19.4 A função é crescente em $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{7\pi}{6}\ ,\ \frac{13\pi}{6}\right]$.

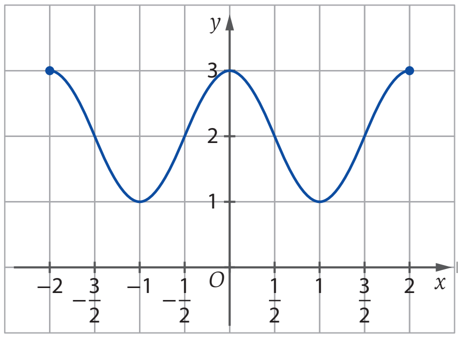
A função é decrescente em $\left[\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{7\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{13\pi}{6}\ ,\ 3\pi\right]$.

PÁG. 130

Aplicar

20.1

O gráfico de f obtém-se a partir do gráfico de $y = \text{sen}\, x$ através de uma translação associada ao vetor de coordenadas $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\right)$, seguida de uma contração horizontal de fator $\frac{1}{\pi}$.



20.2 $f(x) = 2 + \text{sen}\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 + \text{sen}\left(\pi\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right)$

Período positivo mínimo: $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, frequência: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$, amplitude: $|1| = 1$, valor médio: 2.

20.3 O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \text{sen}\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 + 2 \leqslant 2 + \text{sen}\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 1 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \leqslant f(x) \leqslant 3$$

Como f toma todos os valores reais entre 1 e 3, o seu contradomínio é $[1, 3]$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \text{sen}\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = -2$ impossível, logo a função não tem zeros.

$2 + \text{sen}\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo, f é positiva em $\mathbb{R}$.

3 é o valor máximo de f em $\pi x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, e 1 é o valor mínimo de f em $\pi x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

f é crescente nos intervalos da forma $[1 + 2k, 2 + 2k]$, $k \in \mathbb{Z}$, e f é decrescente nos intervalos da forma $[2k, 1 + 2k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

21. $g(0) = 5 \Leftrightarrow a + b\cos(0 - \pi) = 5 \Leftrightarrow a - b = 5$

$g(\pi) = -1 \Leftrightarrow a + b\cos(\pi - \pi) = -1 \Leftrightarrow a + b = -1$

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 + b \\ 5 + b + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Por outro processo:

$$a = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$$

$g(0) = 5 \Leftrightarrow 2 + b\cos(-\pi) = -1 \Leftrightarrow b = -3$

Opção correta: **(A)**

22.

$h(0) = 2 \Leftrightarrow -2 + 4\,\text{sen}\,(c(0 - d)) = 2 \Leftrightarrow \text{sen}\,(-cd) = 1$

Opção correta: **(D)**

Porque $-cd = -3 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

23. Tem-se $\text{sen}\,(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

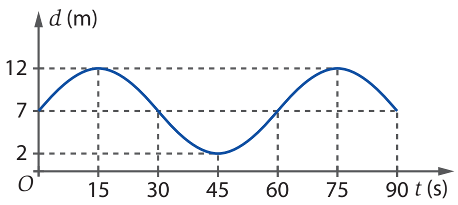
Logo, o gráfico de g pode ser obtido a partir do gráfico de f através da translação de vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

PÁG. 131

Tarefa 7

1. $d(0) = 7 + 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi \times 0}{30}\right) = 7$ m

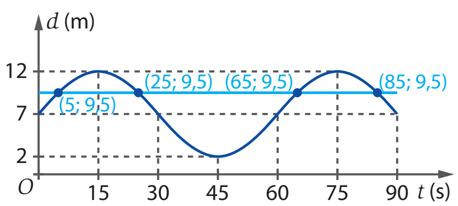
2.



a. 60 s

b. Sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, pois a função d é crescente em $[0, 15]$, pelo que a distância da cadeira 1 ao solo aumenta logo após a roda começar a girar.

3.



$d(t) = 9{,}5 \Leftrightarrow t \in \{5, 25, 65, 85\}$

A cadeira 1 demora 5 segundos a encontrar-se, pela primeira vez, a uma distância de 9,5 metros do solo, depois da roda gigante ter começado a girar.

4. O raio da roda gigante mede 5 metros, o que corresponde a metade da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da função d $(12 - 2 = 10)$.

5.

a. $d(t) = 7 + 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{15}\right)$

b. $d(t) = 7 + 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{60}\right)$

6. Sabendo que a distância a que a cadeira número 1 se encontra do solo no instante em que a roda gigante começa a girar é 7 metros e que o raio da roda gigante mede 5 metros, se a cadeira 1 partisse da posição indicada na figura para a cadeira 4, a distância a que a cadeira número 1 se encontraria do solo no instante em que a roda gigante começasse a girar seria $7 + 5 = 12$ metros:

$$d(0) = 12 \Leftrightarrow 7 + 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{30}(0 - k)\right) = 12 \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{30}(-k)\right) = 1$$

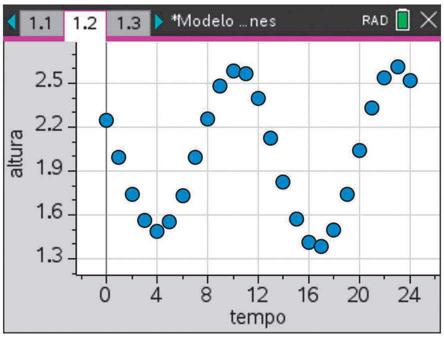
Assim, para que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{30}(-k)\right) = 1$, $\frac{\pi}{30}(-k)$ pode ser $\frac{\pi}{2}$, pelo que:

$$\frac{\pi}{30}(-k) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{\pi}{2} \times \frac{30}{\pi} \Leftrightarrow k = -15$$

PÁG. 134

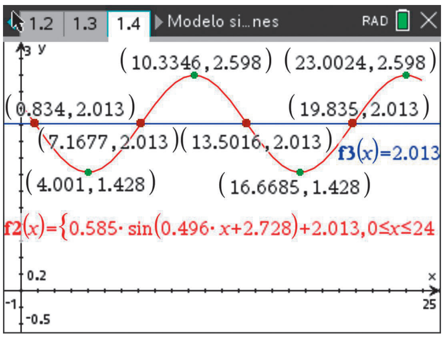
Tarefa 8

1.



3. $m(t) \approx 2{,}013 + 0{,}585\,\text{sen}\,(0{,}496t + 2{,}728)$

4.



a. $2{,}60$ m, às $10\text{h}20$ e às $23\text{h}00$.

b. $1{,}43$ m, às $4\text{h}00$ e às $16\text{h}40$.

c. A maré sobe nos intervalos $[4\text{h}00\,,\,10\text{h}20]$ e $[16\text{h}40\,,\,23\text{h}00]$.

A maré desce nos intervalos $[0\text{h}00\,,\,4\text{h}00]$, $[10\text{h}20\,,\,16\text{h}40]$ e $[23\text{h}00\,,\,24\text{h}00]$.

d. $0\text{h}50$, $7\text{h}10$, $13\text{h}30$ e $19\text{h}50$ (corresponde aos zeros da função).

e. 12h 40 min (corresponde à diferença temporal entre duas baixas-mar ou duas preias-mar).

PÁG. 137

Aplicar

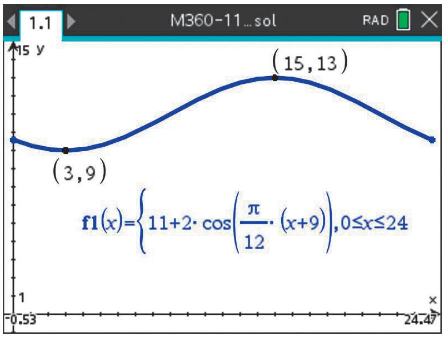
25.1 $T(7) = 11 + 2\cos\left(\frac{\pi}{12}(7+9)\right) = 11 + 2\cos\left(\frac{16\pi}{12}\right) =$

$$= 11 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 11 + 2\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 11 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 11 - 2\times\frac{1}{2} = 10\ °\text{C}$$

A temperatura às 7h00 era de 10 °C .

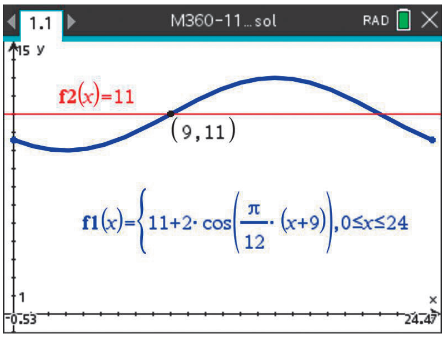
25.2

a.



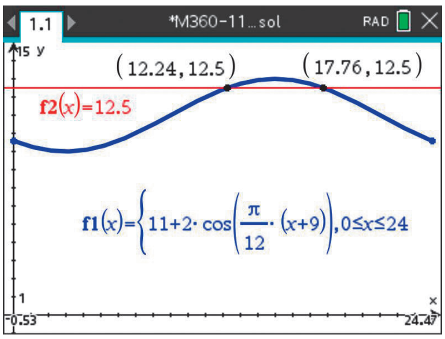
A temperatura mínima foi 9 °C às 3h00 e a temperatura máxima foi 13 °C às 15h00 .

b.



Às 9h00 .

c.



Durante, aproximadamente, $17{,}76 - 12{,}24 = 5{,}52$ horas, que corresponde a, aproximadamente, 5 h 31 min $(0{,}52 \times 60 \approx 31)$.

26.1 O valor máximo da função seno é 1. Para $t \geqslant 0$, tem-se:

$\text{sen}\, t \leqslant 1 \Leftrightarrow \text{sen}\,(100\pi t) \leqslant 1 \Leftrightarrow 325\,\text{sen}\,(100\pi t) \leqslant 325$

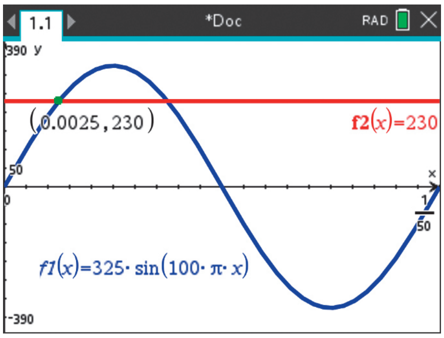
O valor máximo da tensão elétrica é 325 V.

26.2 $T = \dfrac{2\pi}{100\pi} = 0{,}02$ s

26.3 $f = \dfrac{1}{0{,}02} = 50$ Hz é o número de ciclos completos de oscilação que a tensão elétrica realiza por segundo.

26.4 A tensão elétrica tem valor nulo 100 vezes em cada segundo (como o período positivo mínimo é $0{,}02$ s e a função V tem dois zeros por período, em cada segundo, existem $\dfrac{1}{0{,}01} = 100$ zeros).

26.5 $t \approx 0{,}0025$ s



PÁG. 138

Aplicar

27.1 $T(20) = 21 + 2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}(20-10)\right) = 21 + 2\,\text{sen}\left(\dfrac{10\pi}{12}\right) =$

$$= 21 + 2\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 21 + 2\,\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 21 + 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 21 + 2 \times \frac{1}{2} = 22\ ^\circ\text{C}$$

27.2 O contradomínio da função seno é $[-1\,,\,1]$. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$-1 \leqslant \text{sen}\,x \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(x-10)\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(x-10)\right) \leqslant 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + 21 \leqslant 21 + 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(x-10)\right) \leqslant 2 + 21 \Leftrightarrow 19 \leqslant T(x) \leqslant 23$$

As temperaturas máxima e mínima (absolutas) da água do lago, nesse dia foram, respetivamente, $23\ ^\circ$C e $19\ ^\circ$C.

27.3 $T(t) = 19 \Leftrightarrow 21 + 2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}(t-10)\right) = 19 \Leftrightarrow \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}(t-10)\right) = -1 \Leftrightarrow$

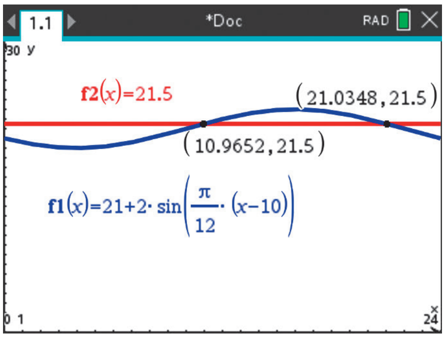
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}(t-10) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t - 10 = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \times \frac{12}{\pi},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 18 + 24k + 10,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 28 + 24k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, $t = 28 > 24$; se $k = -1$, $t = 28 - 24 = 4$.

A água esteve à temperatura mínima às 4 h.

27.4

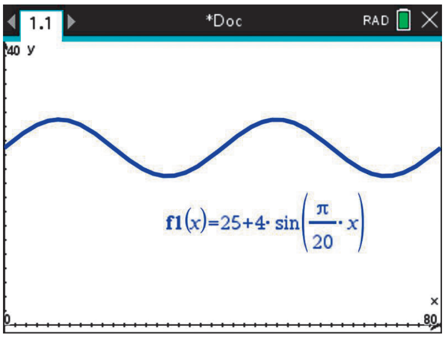


$0{,}9652 \times 60 = 57{,}75$ e $0{,}0348 \times 60 = 2{,}088$

A temperatura da água esteve de acordo com a preferência do banhista, aproximadamente, entre as $10 \text{ h } 58$ e as $21 \text{ h } 02$.

28.1 $y = h + A \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$, y, h , A, L , x em metros.

28.2 $y = 25 + 4 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{20}x\right)$



PÁG. 139

Aplicar +

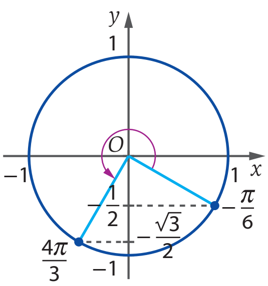
1. $\text{sen } x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}$

Opção correta: **(A)**

2. $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\text{sen}(\pi) = 0$ e a função seno é decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Opção correta: **(C)**

3. $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ e $\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Opção correta: **(A)**

4. $\text{sen}\, x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0 + 2k\pi\, ,\, \pi + 2k\pi\right[\, ,\, k \in \mathbb{Z}$

Opção correta: **(D)**

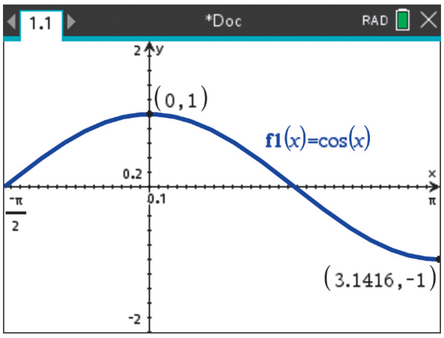
5. $\cos x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi\, ,\, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[\, ,\, k \in \mathbb{Z}$

Opção correta: **(C)**

6. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi\, ,\, k \in \mathbb{Z}$

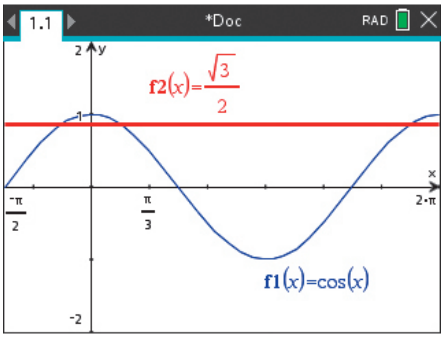
Opção correta: **(B)**

7.



Opção correta: **(B)**

8..



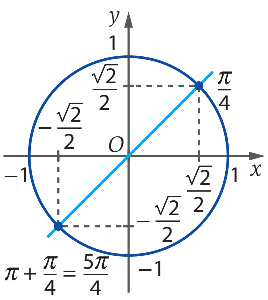
Opção correta: **(C)**

PÁG. 140

Aplicar +

9. $\text{sen}\, x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\, ,\, k \in \mathbb{Z}$

(A expressão $\frac{\pi}{4} + 2k\pi\, ,\, k \in \mathbb{Z}$ é equivalente à expressão $-\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\, ,\, k \in \mathbb{Z}$.)



Opção correta: **(D)**

10. A tangente de ângulos do 3.º quadrante é positiva, pelo que a função tangente é positiva em $\left]\pi , \frac{3\pi}{2}\right[$.

Opção correta: **(B)**

11. $\text{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}$

Opção correta: **(B)**

12. $\text{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \text{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e a função $\text{tg}\, x$ é crescente em $\left]\frac{\pi}{2} , \frac{5\pi}{6}\right]$.

Opção correta: **(A)**

13. O período positivo mínimo desta função é, por exemplo, $\pi - 0 = \pi$.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 141

14. $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Opção correta: **(B)**

15. O período positivo mínimo da função é $4\pi - (-4\pi) = 8\pi$, pelo que:

$$\frac{2\pi}{|c|} = 8\pi \Leftrightarrow |c| = \frac{1}{4} \underset{c>0}{\Leftrightarrow} c = \frac{1}{4}$$

Opção correta: **(A)**

16. O período positivo mínimo da função é $\pi - 0 = \pi$, pelo que: $\frac{2\pi}{|c|} = \pi \Leftrightarrow |c| = 2 \Leftrightarrow c = \pm 2$

Se $c = 2$, então, para $\frac{\pi}{4}$, $y = \text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, o que não pode ser dado que teria de ser negativo. Logo $c = -2$.

Opção correta: **(B)**

17. Se $c = \frac{11}{3}$, então $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{11}{3} \times \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{11\pi}{6} - 2\pi\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$.

Opção correta: **(C)**

PÁG. 142

18. $y = 1 - 3\cos\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - 3\cos\left(\frac{\pi}{4}(x + 2\pi)\right)$ e $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$.

Opção correta: **(D)**

19. $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(x + 4)\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + 2\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Opção correta: **(D)**

20.1 $f(x) = 3 + \text{sen}\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = 3 + \text{sen}\left(x + \left(-\frac{5\pi}{2} + 2\pi\right)\right) = 3 + \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 3 - \cos x$

20.2 Como $3 - \cos(x + 2\pi) = 3 - \cos x$, verifica-se que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R} \wedge f(x + 2\pi) = f(x)$. Portanto, 2π é período da função f.

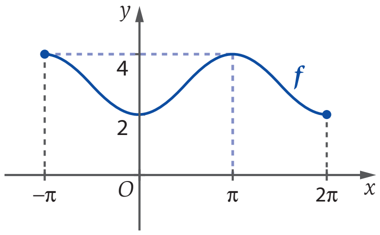
20.3 O contradomínio da função cosseno é $[-1\ ,\ 1]$. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant -\cos x \leqslant 1 \iff 3 - 1 \leqslant 3 - \cos x \leqslant 1 + 3 \iff 2 \leqslant f(x) \leqslant 4$

Como f toma todos os valores reais entre 2 e 4, o seu contradomínio é $[2\ ,\ 4]$.

20.4 f é decrescente em $[-\pi\ ,\ 0]$ e em $[\pi\ ,\ 2\pi]$, e é crescente em $[0\ ,\ \pi]$.

20.5



21.1 O contradomínio da função cosseno é $[-1\ ,\ 1]$. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1 \iff -2 \leqslant 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 2 \iff$

$\iff -2 + 1 \leqslant 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \leqslant 2 + 1 \iff -1 \leqslant g(x) \leqslant 3$

Como g toma todos os valores reais entre -1 e 3, o seu contradomínio é $[-1\ ,\ 3]$.

21.2 Máximo absoluto: 3, mínimo absoluto: -1.

21.3 $g(x) = 0 \iff 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0 \iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

Ora, para que, pela função cosseno, um objeto tenha imagem $-\frac{1}{2}$, esse objeto pode ser $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$; e, como a função cosseno tem período positivo mínimo 2π, podemos ter objetos resultantes de $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou de $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Assim, tem-se:

$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff$

$\iff x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Em $[0\ ,\ 2\pi]$, os zeros de g são $\left\{\frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

21.4 Maximizantes: $g(x) = 3 \Leftrightarrow 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 3 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

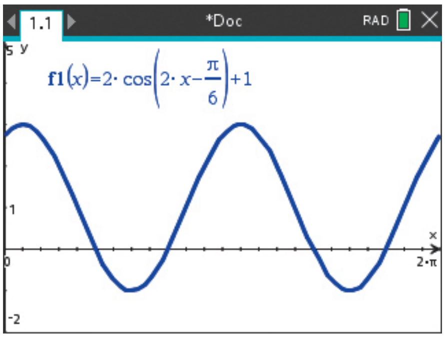
Logo, $2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Assim, no intervalo $[0\ ,\ 2\pi]$, os maximizantes de g são $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{13\pi}{12}$.

Minimizantes: $g(x) = -1 \Leftrightarrow 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = -1 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$

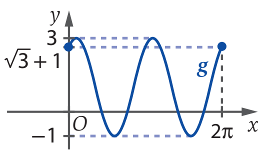
Logo, $2x - \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Assim, no intervalo $[0\ ,\ 2\pi]$, os minimizantes de g são $\frac{7\pi}{12}$ e $\frac{19\pi}{12}$.



Tendo em conta o gráfico da função g, conclui-se que g é decrescente em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ e em $\left[\frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right]$, e é crescente em $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{12}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right]$ e em $\left[\frac{19\pi}{12}, 2\pi\right]$.

21.5



PÁG. 143

Aplicar +

22.1 Observando o gráfico, verificamos que, para $t = 0$, $0 < x < 4$.

(A) $x(0) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right)\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

(B) $x(0) = 4\cos\left(\pi\left(0 + \frac{1}{2}\right)\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \times 0 = 0$

(C) $x(0) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\right)\right) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

(D) $x(0) = 4\cos\left(\pi\left(0 - \frac{1}{2}\right)\right) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4 \times 0 = 0$

Por outro lado, observando o gráfico, verificamos que o primeiro valor de t que anula x é tal que $0 < t < 1$.

(A) Como $\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$, com $k \in \mathbb{Z}$, o único valor de t $(0<t<1)$ tal que $x(t)=0$ é $\frac{1}{2}$:

$x\left(\frac{1}{2}\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

(C) Como $\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$, com $k \in \mathbb{Z}$, o único valor de t $(0<t<1)$ tal que $x(t)=0$ é $\frac{3}{2}$:

$x\left(\frac{3}{2}\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Opção correta: **(A)**

Observação: Alternativamente, pode-se recorrer à calculadora gráfica para representar as quatro funções definidas nas opções para verificar qual delas corresponde o gráfico dado.

22.2 Se a velocidade do ponto duplicasse, o intervalo de tempo entre zeros (ou máximos, ou mínimos) consecutivos passaria a ter metade da amplitude. Assim, podemos concluir que se teria de aplicar ao gráfico uma contração horizontal de fator $\frac{1}{2}$.

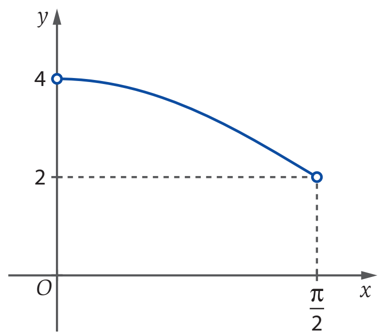
Opção correta: **(C)**

23.1 $\frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{1}=\cos x \Leftrightarrow \overline{AB}=2\cos x$, $f(x)=1+1+2\cos x=2+2\cos x$

23.2 $D_f=\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

23.3 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2+2\cos\frac{\pi}{4}=2+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$

23.4



23.5 Para $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$:

$f(x)=3 \Leftrightarrow 2+2\cos x=3 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$

23.6 Para $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, tem-se $0<\cos x<1 \Leftrightarrow 0<2\cos x<2 \Leftrightarrow 2<2+2\cos x<4$, ou seja, $D'_f=]2\,,4[$. Logo, não existe nenhum valor de x para o qual o perímetro do triângulo é 4 .

24.1 $x(0,5)=4\,\text{sen}\left(0,5\pi+\frac{\pi}{6}\right)=4\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$x(3)=4\,\text{sen}\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=4\,\text{sen}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=-4\times\frac{1}{2}=-2$

24.2 $x(t) = 4\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 4\ \text{sen}\left(\pi\left(t + \frac{1}{6}\right)\right)$

$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ e $f = \frac{1}{2}$.

24.3

a. $x(t) = 0 \iff 4\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \iff \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

Como os zeros da função seno são da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$\pi t + \frac{\pi}{6} = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff t = -\frac{1}{6} + k\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Portanto, para $t \in [0\ ,\ 6]$, a abcissa do ponto P é nula nos instantes $t \in \left\{\frac{5}{6}, \frac{11}{6}, \frac{17}{6}, \frac{23}{6}, \frac{29}{6}, \frac{35}{6}\right\}$.

b. O máximo da função seno é 1 , pelo que o máximo de $4\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, com $t \in \mathbb{R}$, é 4 .

$4\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 4 \iff \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 1$; então, considerando o período da função seno, tem-se:

$\pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff t = \frac{1}{3} + 2k\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Para $t \in [0\ ,\ 6]$, a abcissa do ponto P é máxima nos instantes $t \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right\}$.

c. Analogamente à alínea anterior, obtém-se:

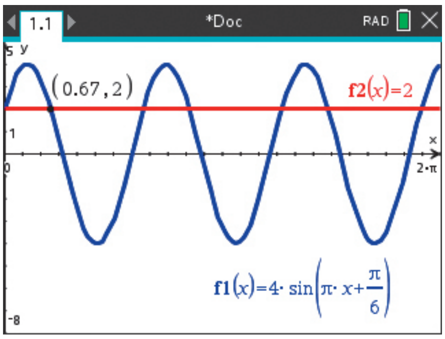
$x(t) = -1 \iff 4\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = -4 \iff \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \iff$

$\iff 4\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = -4 \iff \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = -1$;

$\pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff t = \frac{4}{3} + 2k\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Para $t \in [0\ ,\ 6]$, a abcissa do ponto P é mínima nos instantes $t \in \left\{\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, \frac{16}{3}\right\}$.

24.4



$t \approx 0{,}67$ s

PÁG. 144

Aplicar+

25.1 $A = 5$ cm , $T = 1{,}75 - 0{,}75 = 1$ s e $f = \frac{1}{1} = 1$ Hz .

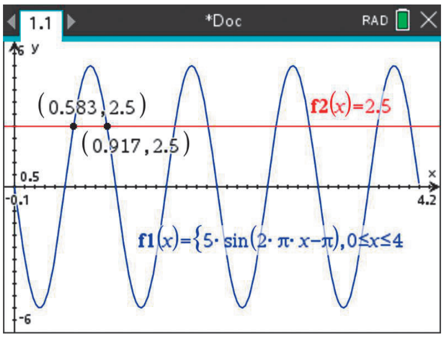
25.2 Por exemplo, $x(t) = -5 \text{ sen}(2\pi t)$.

$x(0) = x(0{,}5) = x(1) = \ldots = x(4) = 0$; $x(0{,}75) = x(1{,}75) = x(2{,}75) = x(3{,}75) = 5$;

$x(0{,}25) = x(1{,}25) = x(2{,}25) = x(3{,}25) = -5$

25.3 $t = 0{,}75 + k$, $k \in \{0 , 1 , 2 , 3\}$

25.4 Repara que $5 \text{ sen}(2\pi t - \pi) = -5 \text{ sen}(2\pi t)$.



$0{,}917 - 0{,}583 \approx 0{,}33$ s

26.1 $A = 2$, $T = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5}$ s e $f = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$ Hz .

26.2 $x(0) = 2 \text{ sen}(10\pi(0 - 0{,}25)) = 2 \text{ sen}(-2{,}5\pi) = -2 \text{ sen}(2{,}5\pi) = -2 \text{ sen}\left(\frac{5}{2}\pi\right) = -2 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$

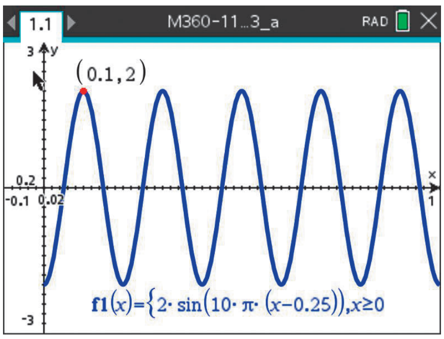
O ponto material foi largado a 2 unidades da origem da reta numérica.

PÁG. 145

Aplicar +

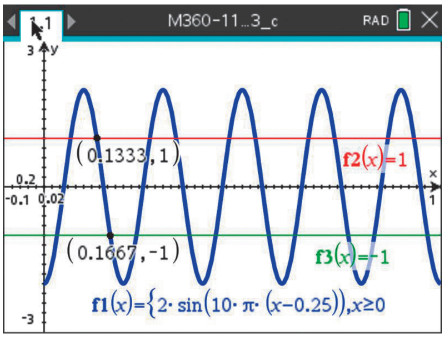
26.3

a. 0,1 s



b. 40 . Tendo em conta a representação gráfica de **26.3 a.**, no primeiro segundo o ponto material passa pela origem 10 vezes, pelo que nos primeiros quatro segundos passa pela origem 40 vezes.

c. 0,1667 – 0,1333 ≈ 0,033 s



27.1 O contradomínio da função seno é $[-1\ ,\ 1]$. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

Se $a > 0$,

$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant \operatorname{sen}(bx + c) \leqslant 1 \iff -a \leqslant a \operatorname{sen}(bx+c) \leqslant a \iff$

$\iff -a + d \leqslant a \operatorname{sen}(bx+c) + d \leqslant a + d$

O contradomínio da família de funções definidas por expressões da forma $y = a \operatorname{sen}(bx+c) + d$ é $[-a+d\ ,\ a+d]$ e a amplitude destes intervalos é $a + d - (-a+d) = 2a$.

Se $a < 0$,

$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant \operatorname{sen}(bx + c) \leqslant 1 \iff a \leqslant a \operatorname{sen}(bx+c) \leqslant -a \iff$

$\iff a + d \leqslant a \operatorname{sen}(bx+c) + d \leqslant -a + d$

O contradomínio da família de funções definidas por expressões da forma $y = a \operatorname{sen}(bx+c) + d$ é $[a+d\ ,\ -a+d]$ e a amplitude destes intervalos é $-a + d - (a+d) = -2a$.

Assim, a amplitude dos intervalos que representam os contradomínios das funções desta família é igual a $2\,|a|$.

27.2 $a \operatorname{sen}\left(b\left(x + \dfrac{2\pi}{b}\right) + c\right) + d = a \operatorname{sen}(bx + 2\pi + c) + d = a \operatorname{sen}(bx + c) + d$, donde o período é $\dfrac{2\pi}{b}$.

28.1 Tem-se $P(2\cos\alpha\ ,\ 2\operatorname{sen}\alpha)$, em que α é a amplitude do ângulo generalizado com lado extremidade $\dot{O}P$.

Como o ponto P se move com uma velocidade angular constante de 4 rad/s , no sentido positivo, tem-se $\alpha = 4t + d\ ,\ d \in \mathbb{R}$.

Assim, tem-se $y(t) = 2\operatorname{sen}(4t + d)$ e $x(t) = 2\cos(4t+d)$.

Para determinar d , sabe-se que $y(0) = 1$:

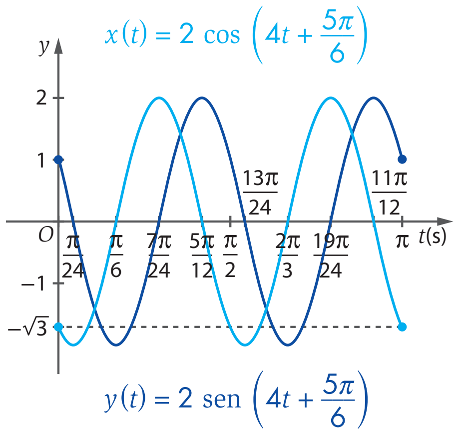
$2\operatorname{sen}(4 \times 0 + d) = 1 \iff \operatorname{sen}(d) = \dfrac{1}{2} \underset{\alpha \in 2.^{\circ}Q}{\iff} d = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Podemos tomar $k = 0$, ou seja, $d = \dfrac{5\pi}{6}$.

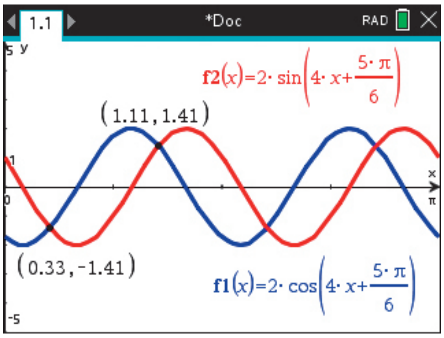
Conclui-se que $y(t) = 2\operatorname{sen}\left(4t + \dfrac{5\pi}{6}\right)$ e $x(t) = 2\cos\left(4t + \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

28.2 Como o ponto P percorre $4\,\text{rad}$ por segundo, o período do movimento do ponto é $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Portanto, o intervalo a considerar na representação gráfica é $\left[0\ ,\ 2 \times \frac{\pi}{2}\right]$ ou seja, $[0\ ,\ \pi]$.



28.3



Em $t \approx 0{,}33$, $P(-1{,}4\ ;\ -1{,}4)$ e em $t \approx 1{,}11$, $P(1{,}4\ ;\ 1{,}4)$.

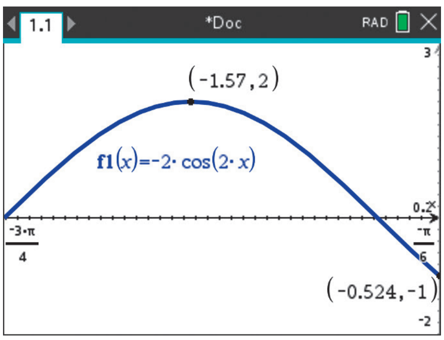
PÁG. 148

Autoavaliação

1. $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Opção correta: **(C)**

2.



Opção correta: **(D)**

3.1 $g(x) = 0 \iff \sqrt{2}\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff$

$$\iff x - \frac{\pi}{4} = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

3.2 $g(0)=\sqrt{2}\,\text{sen}\left(0-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-1$; $A\,(0\,,-1)$;

$g(\pi)=\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$; $C\,(\pi\,,1)$; $B\,(\pi\,,-1)$; $\text{A}_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2}=\frac{\pi\times 2}{2}=\pi$.

Opção correta: **(D)**

3.3 O mínimo da função g obtém-se quando $\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$, ou seja, quando $x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \iff \frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \iff x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$, sendo $\frac{7\pi}{4}$ o menor minimizante positivo.

Portanto, obtém-se $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=\text{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=\text{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

3.4 $g(x)>0 \iff \sqrt{2}\,\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0 \iff \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$

A função seno é positiva em $]0\,,\pi[$, pelo que: $0<x-\frac{\pi}{4}<\pi \iff \frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$.

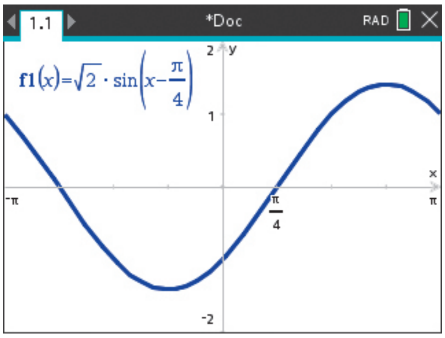
Como $x\in[-\pi\,,\pi[$, tem-se $g(x)>0$ em $\left]\frac{\pi}{4}\,,\pi\right[$.

A função seno também é positiva em $]-2\pi\,,\pi[$, pelo que $-2\pi<x-\frac{\pi}{4}<-\pi \iff -\frac{7\pi}{4}<x<-\frac{3\pi}{4}$.

Como $x\in\left[-\pi\,,-\frac{3}{4}\right[$, tem-se $g(x)>0$ em $\left]\frac{\pi}{4}\,,\pi\right[$.

Logo, em $[-\pi\,,\pi[$, $g(x)>0 \iff x\in\left[-\pi\,,-\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4}\,,\pi\right[$.

Graficamente:



$g(x)>0 \iff x\in\left[-\pi\,,-\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4}\,,\pi\right[$

4.1 O período positivo mínimo desta função é $\dfrac{\frac{5\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{3}\times 2=\pi$

Opção correta: **(A)**

4.2

a. $a=\frac{8+(-2)}{2}=-3$, $|b|=\frac{8-(-2)}{2}=5$.

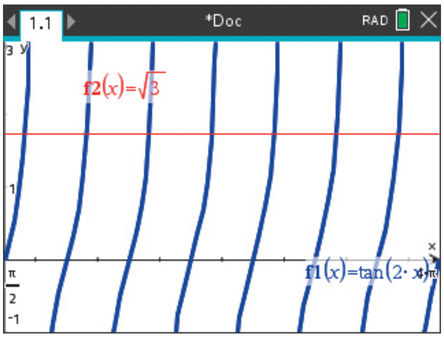
Como $b<0$, tem-se $b=-5$.

b. $f\left(-\frac{\pi}{5c}\right)=3 \Leftrightarrow 3-5\operatorname{sen}\left(c\left(-\frac{\pi}{5c}\right)+d\right)=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{5}+d\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{5}+d=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow d=\frac{\pi}{5}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

O maior valor negativo que d pode tomar é $\frac{\pi}{5}-\pi=-\frac{4\pi}{5}$.

5.



Opção correta: **(C)**

6.1 $d(1{,}25)=4+2\cos\left(1{,}25\pi+\frac{5\pi}{12}\right)$

$1{,}25\pi+\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{3}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}-2\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$d(1{,}25)=4+2\times\frac{1}{2}=5$ cm

Tem-se $15=d(t)+5+c \Leftrightarrow d(t)+c=10$.

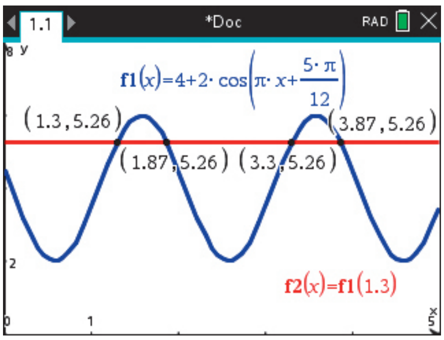
Ao fim de $1{,}25$ segundos, $c=10-d(1{,}25)=10-5=5$ cm .

6.2 Quando a mola atinge o seu alongamento máximo, a distância ao solo é mínima.

O mínimo da função cosseno é -1 e o mínimo da função d é $-1\times 2+4=2$.

Assim, $c=10-2=8$ cm .

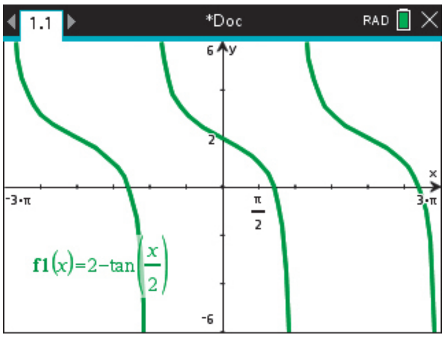
6.3 $d(t)=d(1\ ,\ 3)$



$t\approx 1{,}87$ s , $t=3{,}3$ s e $t\approx 3{,}87$ s .

7.

Representação gráfica de h na janela de visualização $[-3\pi , 3\pi] \times [-6 , 6]$:



I. $D_h = \left\{x \in \mathrm{IR} : \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbb{Z}\right\} = \{x \in \mathrm{IR} : x \neq \pi + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{IR} \backslash \{x = \pi + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}\}$, pelo que a afirmação I. é falsa.

II. Tem-se, por exemplo, que

$h(0) = 2 - \mathrm{tg}(0) = 2 - 0 = 2$ e $h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 - \mathrm{tg}\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{2}\right) = 2 - \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 - (-1) = 3$.

Assim, $0 < \frac{3\pi}{2}$ e $h(0) = 2 < 3 = h\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, pelo que h não é decrescente no seu domínio. Portanto, a afirmação II. é falsa.

III. Já vimos que $h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3$.

Como $h\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2 - \mathrm{tg}\left(\frac{\frac{4\pi}{3}}{2}\right) = 2 - \mathrm{tg}\left(\frac{4\pi}{6}\right) = 2 - \mathrm{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 - \left(-\sqrt{3}\right) = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73$, e, portanto, $h\left(\frac{4\pi}{3}\right) > 3$. Como $\frac{4\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right[\cup \left]\pi , \frac{3\pi}{2}\right]$, conclui-se que 3 não é o máximo da função h em $\left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right[\cup \left]\pi , \frac{3\pi}{2}\right]$, pelo que a afirmação III. é falsa.

8.

I. $x\left(\frac{7}{6}\right) = 4\ \mathrm{sen}\left(3\pi\frac{7}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 4\ \mathrm{sen}\left(\frac{11\pi}{3}\right) = 4\ \mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -4\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$

Opção correta: **a.**

II. 0 , por exemplo $x\left(\frac{5}{18}\right) = 4\ \mathrm{sen}\left(3\pi \times \frac{5}{18} + \frac{\pi}{6}\right) = 4\ \mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 4\ \mathrm{sen}(\pi) = 0$.

Opção correta: **b.**

III. $x(t) = 4\ \mathrm{sen}\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 4\ \mathrm{sen}\left(3\pi\left(t + \frac{1}{18}\right)\right)$

A frequência da função x é $\frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{2}$.

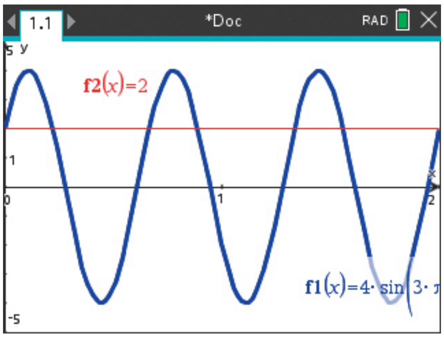
Opção correta: **c.**

IV. $x(0) = 4 \text{ sen}\left(3\pi \times 0 + \frac{\pi}{6}\right) = 4 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ e

$x(2) = 4 \text{ sen}\left(3\pi \times 2 + \frac{\pi}{6}\right) = 4 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

Portanto, em $t = 0$ e em $t = 2$, a abcissa de P é 2 .

Utilizando agora uma calculadora gráfica:



Opção correta: **b.**

PÁG. 151

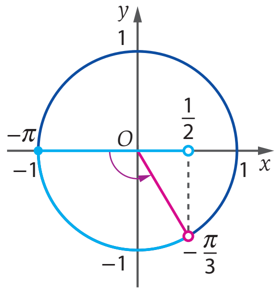
Começar a preparar o exame

1. $f(0) = 4 \Leftrightarrow 2 + b\cos(a \times 0 + \pi) = 4 \Leftrightarrow b\cos(\pi) = 2 \Leftrightarrow b(-1) = 2 \Leftrightarrow b = -2$

Como o período positivo mínimo de f é $\frac{\pi}{2}$, tem-se $\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{2} \underset{a>0}{\Leftrightarrow} \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 4$.

Opção correta: **(B)**

2. Para $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right[$, $-1 \leqslant \cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < -3\cos x \leqslant 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 1 - 3\cos x \leqslant 4$



Como g toma todos os valores reais entre $-\frac{1}{2}$ e 4 , o seu contradomínio é $\left]-\frac{1}{2}, 4\right]$.

Opção correta: **(C)**

3.1 $h(x) = \sqrt{3}\,\text{tg}\left(\frac{7\pi}{3}\right) + 3\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) - \text{sen}(2x - \pi) =$

$= \sqrt{3}\,\text{tg}\left(\frac{7\pi}{3} - 2\pi\right) + 3\left(-\text{sen}(2x)\right) - \left(-\text{sen}(2x)\right) =$

$= \sqrt{3}\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\,\text{sen}(2x) + \text{sen}(2x) =$

$= \sqrt{3} \times \sqrt{3} - 2\,\text{sen}(2x) = 3 - 2\,\text{sen}(2x)$

3.2 O contradomínio da função seno é $[-1\ ,\ 1]$. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant \text{sen}\,(2x) \leqslant 1 \iff -2 \leqslant -2\ \text{sen}\,(2x) \leqslant 2 \iff$$

$$\iff -2 + 3 \leqslant 3 - 2\ \text{sen}\,(2x) \leqslant 2 + 3 \iff 1 \leqslant h(x) \leqslant 5$$

Como h toma todos os valores reais entre 1 e 5, o seu contradomínio é $[1\ ,\ 5]$. Logo, a função h não tem zeros.

3.3 $f = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$

Opção correta: **(D)**

3.4 $h(x) = 5 \iff 3 - 2\ \text{sen}\,(2x) = 5 \iff \text{sen}\,(2x) = -1 \iff 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff$

$$\iff x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

3.5 $h\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \iff 3 - 2\ \text{sen}\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \iff 3 - 2\ \text{sen}\,(\alpha) = 2 \iff \text{sen}\,(\alpha) = \frac{1}{2}$

Como α é do 1.º quadrante, conclui-se que $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

$$h(\alpha) = h\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 - 2\ \text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 3 - 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3}$$

Opção correta: **(A)**

4.1 $f(x) = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{1 + \text{sen}\,(\pi + x)} + \dfrac{\cos\,(\pi - x)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}\, x} + \dfrac{-\cos x}{1 + \text{sen}\, x} = \dfrac{\cos x\,(1 + \text{sen}\, x) - \cos x\,(1 - \text{sen}\, x)}{(1 - \text{sen}\, x)\,(1 + \text{sen}\, x)} =$

$$= \frac{\cos x + \cos x\ \text{sen}x - \cos x + \cos x\ \text{sen}x}{1 - \text{sen}^2 x} = \frac{2\ \cos x\ \text{sen}x}{\cos^2 x} = 2\,\frac{\text{sen}x}{\cos x} = 2\ \text{tg}\, x$$

4.2 $f(x) = 0 \iff 2\ \text{tg}\,(x) = 0 \iff \text{tg}\,(x) = 0 \iff x = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

No intervalo $[-3\pi\ ,\ 2\pi[$, os zeros de f são $\{-3\pi\ ,\ -2\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \pi\}$.

4.3 $\cos\alpha = \text{sen}\,\alpha \iff \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ e, para $k \in \mathbb{Z}$,

$$f\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = 2\ \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = 2\ \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times 1 = 2\ .$$

Opção correta: **(B)**

4.4 $h(x) = 2 + f(kx) = 2 + 2\ \text{tg}\,(kx)$

Se $k = \frac{1}{2}$, $h(x) = 2 + 2\ \text{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$.

O período positivo mínimo da função h é $\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$. Portanto, h não admite 3π como período (3π não é múltiplo de 2π).

Opção correta: **(A)**

PÁG. 152

Começar a preparar o exame

4.5 $g(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) = 2\ \text{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$

a. O período positivo mínimo da função g é $\frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$. Assim, $a = \frac{4}{5}\pi + 2 \times 3\pi = \frac{34\pi}{5}$.

Opção correta: **(C)**

b. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{3\pi}{2} + 3k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c. $g(x) = 0 \iff 2\ \text{tg}\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \iff \text{tg}\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \iff \frac{x}{3} = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = 3k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

5. $B(1\ ,\ \text{tg}\,\alpha)$; $C(0\ ,\ \text{tg}\,\alpha)$; $D(1\ ,\ 0)$; $A(\cos\alpha\ ,\ \text{sen}\,\alpha)$

5.1 $A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times (y_B - y_A)}{2} = \frac{1 \times (\text{tg}\,\alpha - \text{sen}\,\alpha)}{2} = \frac{1}{2}(\text{tg}\,\alpha - \text{sen}\,\alpha)$

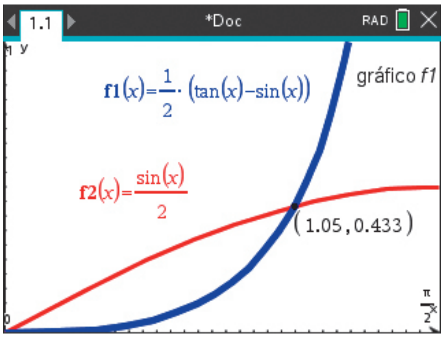
5.2 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$, então $A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$, dado que DOA e ABC são ângulos alternos internos.

Tem-se $\overline{CB} = 1$. Além disso, $\overline{OB} = 2$, pelo que $\overline{AB} = 1$.

Assim, como $\overline{CB} = 1$, $\overline{AB} = 1$ e $A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$, o triângulo $[ABC]$ é equilátero de lado 1 cuja área é $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5.3 $\alpha \approx 1{,}05$

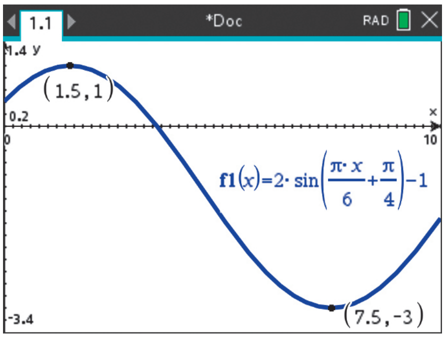


6.1 $x(t) = 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\left(t + \frac{6}{4}\right)\right) - 1$

$A = 2$, $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$, $f = \frac{1}{12}$ e valor médio: -1 .

6.2 $x(1{,}5) = 2\ \text{sen}\left(\frac{1{,}5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$

6.3

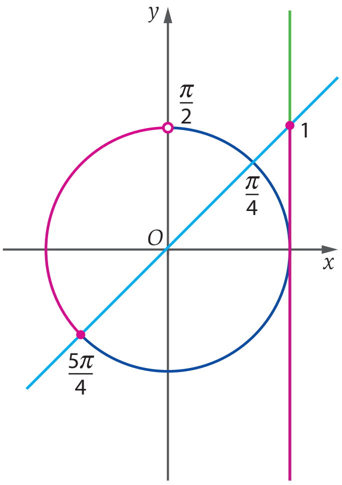


A distância do ponto P à origem da reta numérica é máxima ao fim de 7 min e 30 s .

PÁG. 153

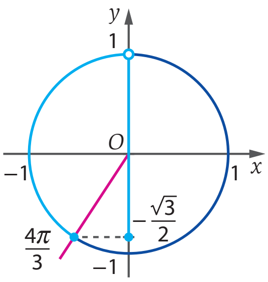
Começar a preparar o exame

7. Tendo em conta a figura seguinte, o único conjunto, dos apresentados, que pode ser o domínio D é $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$.



Opção correta: **(C)**

8.



Para $\frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{2\pi}{3}$, tem-se:

$$2 \times \frac{\pi}{4} < 2x \leqslant 2 \times \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2x \leqslant \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \operatorname{sen}(2x) < 1$$

A opção correta é **(D)**.

9.1 O contradomínio da função seno é $[-1\ ,\ 1]$. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) \leqslant 1 \iff -4 \leqslant 4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) \leqslant 4 \iff$$

$$\iff -4+2 \leqslant 2+4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) \leqslant 4+2 \iff -2 \leqslant g(x) \leqslant 6$$

Como g toma todos os valores reais entre -2 e 6 , o seu contradomínio é $[-2\ ,\ 6]$.

9.2 O contradomínio da função cosseno é $[-1\ ,\ 1]$. Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant \cos(cx+d) \leqslant 1 \iff -b \leqslant b\cos(cx+d) \leqslant b \iff a-b \leqslant a+b\cos(cx+d) \leqslant a+b$$

O contradomínio da função f é $[a-b\ ,\ a+b]$.

Como as funções f e g têm o mesmo contradomínio: $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=6 \end{cases} \iff \begin{cases} a=b-2 \\ b-2+b=6 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$

Alternativamente

Como f e g têm o mesmo contradomínio e $b>0$, então $a=2$ e $b=4$.

Assim, $f(x)=2+4\cos(cx+d)$.

Como os gráficos das funções f e g intersetam o eixo Oy no mesmo ponto e

$g(0)=2+4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi \times 0}{3}\right)=2+4\operatorname{sen}(0)=2$, então

$f(0)=2 \iff 2+4\cos(c\times 0+d)=2 \iff \cos(d)=0 \iff d=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

Como $2<d<5$, $d=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$ e $f(x)=2+4\cos\left(cx+\frac{3\pi}{2}\right)$.

O período positivo mínimo de f é $5-1=4$.

Assim, $\frac{2\pi}{|c|}=4 \underset{c>0}{\iff} c=\frac{\pi}{2}$.

9.3 $g(x)=-2 \iff 2+4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)=-2 \iff \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)=-1 \iff \frac{\pi x}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff$

$$\iff x=\frac{9}{2}+6k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

10.1 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{40}}=80$ segundos

10.2 $d(60)=9+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\times 60}{40}\right)=9+2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=9-2=7$

Assim, ao fim de 60 segundos, o ponto P está a 7 cm da reta r , que corresponde à distância mínima $(9-2=7)$. Logo, o ponto P está no ponto D .

Opção correta: **(D)**

10.3 O raio da circunferência corresponde à amplitude da função: 2 .

A distância mínima do ponto P à reta r é $9-2=7$ cm e a distância máxima é $9+2=11$ cm , pelo que o raio da circunferência é $\frac{11-7}{2}=2$ cm .

10.4 O ponto P desloca-se no sentido positivo, dado que a função que dá a distância do ponto à reta começa por ser crescente até atingir o seu máximo, ou seja, partindo de A, terá de ir para B. Em seguida, a função é decrescente, até atingir o seu valor mínimo, pelo que o ponto P terá de ir de B para C e, depois, para D. ($f(0)=9$, que corresponde à posição do ponto A; $f(20)=9+2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=9+2\times 1=11$, que corresponde à posição do ponto B, que está a maior distância da reta.)

PÁG. 154

Começar a preparar o exame

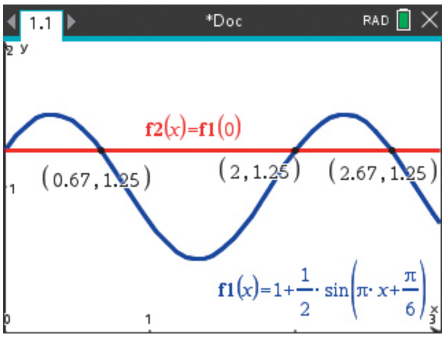
11.1 O mínimo da função seno é -1 e o mínimo da função d é $-1\times\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

Opção correta: **(B)**

11.2 $d(t+2)=1+\frac{1}{2}\text{sen}\left(\pi(t+2)+\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\text{sen}\left(\pi t+2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\text{sen}\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)=d(t)$

Fixado um qualquer instante de tempo, de dois em dois segundos, o ponto P está à mesma distância do ponto O.

11.3 $t\approx 0{,}67$ s, $t=2$ s e $t\approx 2{,}67$ s.



12.1 $d(1)=5+\frac{6}{1^2+1}\text{sen}\left(\frac{11\pi\times 1}{6}\right)=5+3\ \text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)=$

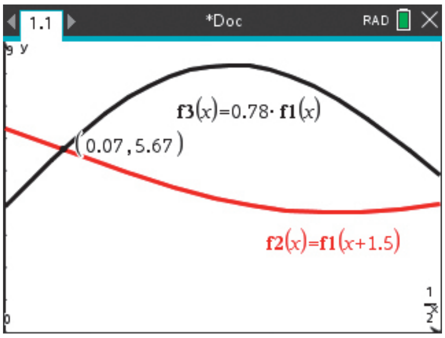
$$=5+3\ \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=5-3\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=5-3\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

Opção correta: **(A)**

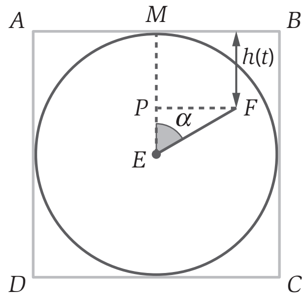
PÁG. 155

Começar a preparar o exame

12.2 $t\approx 0{,}07$ s



13. Sejam M o ponto médio do lado $[AB]$ e P a projeção ortogonal do ponto F sobre o segmento de reta $[EM]$. Designando por α o ângulo $F\hat{E}M$, tem-se $\cos\alpha = \frac{\overline{EP}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{EP}}{3{,}5} \Leftrightarrow \overline{EP} = 3{,}5\cos\alpha$.



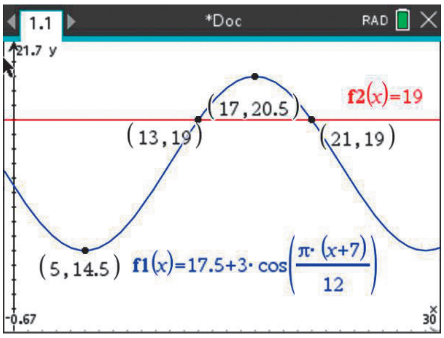
A distância do ponto F à reta AB é dada por $\overline{EM} - \overline{EP}$.

Como $\overline{EM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$ cm , tem-se $h(t) = 4{,}5 - 3{,}5\cos\alpha$.

Estabelecendo a proporção do tempo, em horas, com a amplitude do ângulo correspondente, tem-se $\frac{12}{2\pi} = \frac{t}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi t}{12} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi t}{6}$.

Assim, $h(t) = 4{,}5 - 3{,}5\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$.

14.

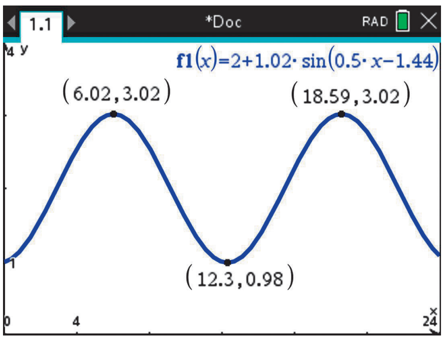


I – b; **II** – a; **III** – c; **IV** – a; **V** – c.

PÁG. 156

Começar a preparar o exame

15.1



Com base na expressão obtida pelo Rui, durante o dia 1 de julho de 2010, a maré subiu entre as 0 h e as 6 h 01 e entre as 12 h 18 e as 18 h 35 ; a maré desceu entre as 6 h 01 e as 12 h 18 e entre as 18 h 35 e as 24 h .

15.2 A altura de maré prevista pelo Instituto Hidrográfico para as 18 h 36 do dia 2 de julho foi 3 metros.

Para obter o valor da altura da maré utilizando a expressão obtida pelo Rui, temos de ter em conta que 18 h 36 são 18,6 h e como o dia 2 de julho é o 2.° dia, temos de considerar $24 + 18{,}6 = 42{,}6$. Utilizando a calculadora gráfica, calculamos a imagem de 42,6 e obtemos 2,864 .

Assim, a diferença entre a altura de maré prevista pelo Instituto Hidrográfico e a altura de maré dada pela expressão obtida pelo Rui é:

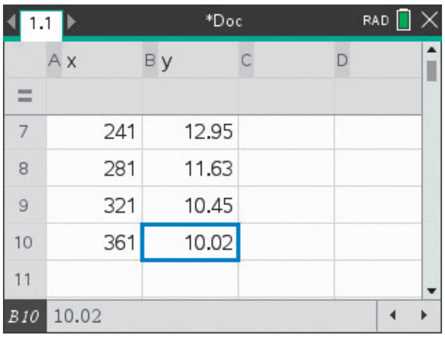
$3 - 2{,}864 = 0{,}136 \approx 0{,}1$ metros.

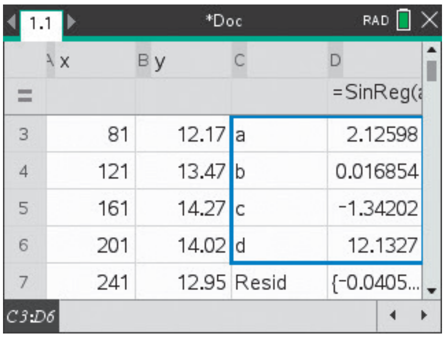
PÁG. 157

Começar a preparar o exame

16.1 Utilizando a calculadora gráfica, obtemos os valores dos parâmetros do modelo de regressão:

$a \approx 2{,}126$, $b \approx 0{,}017$, $c \approx -1{,}342$ e $d \approx 12{,}133$.

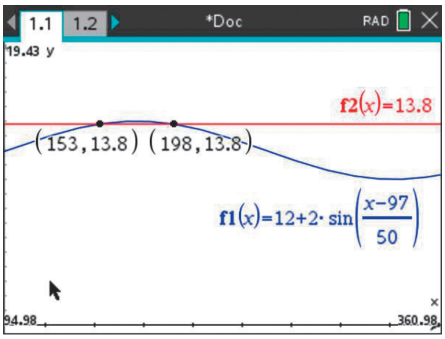




O comprimento do dia, no Funchal, no dia 1 de dezembro de 2012 foi de $F(336) \approx 10$ horas.

16.2 O número de dias cujo comprimento foi superior a 13 h 48 são as soluções da inequação

$$C(x) > 13 + \frac{48}{60} \Leftrightarrow 12 + 2\,\text{sen}\left(\frac{x-97}{50}\right) > 13{,}8 \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{x-97}{50}\right) > 0{,}9 .$$



O conjunto-solução da inequação é $]153 , 198[$.

De janeiro a junho há $31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 = 182$ dias.

Assim, o número de dias do mês de julho que verificam a condição é $198 - 182 = 16$.

Em julho de 2012 houve 16 dias cujo comprimento foi superior a 13 h 48 .