

3. Produto escalar

PÁG. 164

Diagnóstico

1.1

a. $N + \overrightarrow{EL} = N + \overrightarrow{NT} = T$

b. $\overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{QI} = \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{HA}$ (por exemplo)

c. $A - \overrightarrow{DO} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} = A + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{EQ} = A + \overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{OD} =$
 $= A + \overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{QT} = A + \overrightarrow{ET} = A + \overrightarrow{AS} = S$

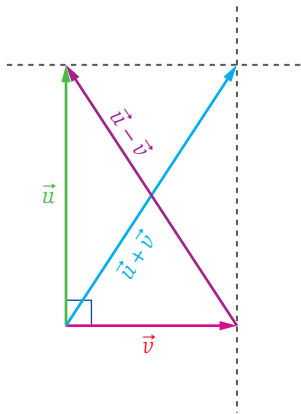
d. $\frac{1}{3}(2\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{TL} + \overrightarrow{JR}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{LT} + \overrightarrow{JR}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{JR}) =$
 $= \frac{1}{3}(\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{JR}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EJ}$ (por exemplo)

1.2 $\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{SR} + \frac{3}{4}\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{HL} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{HL} =$
 $= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DU} = \overrightarrow{AU}$

Como $\overrightarrow{FR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AU} \Leftrightarrow \overrightarrow{AU} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FR}$, conclui-se que $k^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2. $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ são as medidas das diagonais de um quadrilátero de lados de medidas $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$.

Como $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$, esse quadrilátero é um retângulo, ou seja, os vetores \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares.



Assim, como $\|\vec{v}\| = 3$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| = 5$, pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\|\vec{u}\|^2 + 3^2 = 5^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = 16 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 4$$

$\|\vec{u}\| > 0$

Opção correta: **(C)**

3.1

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{k^2+1}{2k} = \frac{2k}{3} &\Leftrightarrow 3(k^2+1) = 2k(2k) \Leftrightarrow 3k^2+3 = 4k^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4k^2 - 3k^2 = 3 \Leftrightarrow k^2 = 3 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{b. } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \sqrt{(k^2+1)^2 + (2k)^2} = \sqrt{(2k)^2 + 3^2}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado,

$$\begin{aligned} (k^2+1)^2 + (2k)^2 &= (2k)^2 + 3^2 \Leftrightarrow (k^2+1)^2 = 3^2 \Leftrightarrow k^2+1 = \pm\sqrt{3^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k^2+1 &= \pm 3 \Leftrightarrow k^2 = -1-3 \vee k^2 = -1+3 \Leftrightarrow \underbrace{k^2 = -4}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \vee k^2 = 2 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{c. } \vec{PQ}(2 - (-7), -2 - 0) = (9, -2)$$

$$\begin{aligned} \vec{u} - \vec{PQ} &= \left(0, \left(\frac{3k}{2}\right)^2\right) - \vec{v} \Leftrightarrow (k^2+1-9, 2k-(-2)) = \left(0-2k, \left(\frac{3k}{2}\right)^2-3\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (k^2-8, 2k+2) &= \left(-2k, \frac{9k^2}{4}-3\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k^2-8 &= -2k \wedge 2k+2 = \frac{9k^2}{4}-3 \Leftrightarrow k^2+2k-8=0 \wedge \frac{9k^2}{4}-2k-3-2=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k^2+2k-8 &= 0 \wedge 9k^2-8k-20=0 \end{aligned}$$

$$\text{1) } k^2+2k-8=0 \Leftrightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)}}{2} \Leftrightarrow k = -4 \vee k = 2$$

$$\text{2) } 9k^2-8k-20=0 \Leftrightarrow k = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 9 \times (-20)}}{2 \times 9} \Leftrightarrow k = -\frac{10}{9} \vee k = 2$$

$$\text{De 1) e de 2) tem-se } (k = -4 \vee k = 2) \wedge \left(k = -\frac{10}{9} \vee k = 2\right) \Leftrightarrow k = 2$$

$$\text{3.2 Se } k = \sqrt{3}, \vec{u}((\sqrt{3})^2 + 1, 2\sqrt{3}) = (4, 2\sqrt{3})$$

$\vec{w}(w_1, w_2)$ é colinear com \vec{u} se existir um número real λ tal que $\vec{w} = \lambda\vec{u}$.

$$(w_1, w_2) = \lambda(4, 2\sqrt{3}) = (4\lambda, 2\sqrt{3}\lambda)$$

$$\|\vec{w}\| = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(4\lambda)^2 + (2\sqrt{3}\lambda)^2} = 7$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado,

$$\begin{aligned} (4\lambda)^2 + (2\sqrt{3}\lambda)^2 &= 49 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 12\lambda^2 = 49 \Leftrightarrow 28\lambda^2 = 49 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= \frac{49}{28} \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{7}{4}} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

Assim, $\vec{w}\left(4\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right), 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\right)$, ou seja $\vec{w}(-2\sqrt{7}, -\sqrt{21})$ ou

$\vec{w}\left(4\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right), 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\right)$, ou seja $\vec{w}(2\sqrt{7}, \sqrt{21})$.

PÁG. 165**Diagnóstico**

3.3 Como \overrightarrow{PQ} tem coordenadas $(9, -2)$, a reta PQ tem declive $-\frac{2}{9}$;

$$-2 = -\frac{2}{9} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -2 + \frac{4}{9} \Leftrightarrow b = -\frac{14}{9};$$

$y = -\frac{2}{9}x - \frac{14}{9}$ é uma equação reduzida da reta PQ ;

$$\begin{aligned} 4 = -\frac{2}{9}(p^3 - 1) - \frac{14}{9} &\Leftrightarrow 36 = -2p^3 + 2 - 14 \Leftrightarrow 2p^3 = -12 - 36 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p^3 = -\frac{48}{2} \Leftrightarrow p^3 = -24 \Leftrightarrow p = \sqrt[3]{-24} \Leftrightarrow p = -2\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

4.1 Se $k = 8$, tem-se $Q(-1, 8 + 1) = Q(-1, 9)$.

$$\vec{w} + 2\vec{u} + 3\vec{v} = (5, -30) + 2(5, -3) + 3(-2, 3) = (9, -27)$$

$$T(t_1, t_2), \overrightarrow{TQ}(-1 - t_1, 9 - t_2)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{TQ} = \vec{w} + 2\vec{u} + 3\vec{v} &\Leftrightarrow (-1 - t_1, 9 - t_2) = (9, -27) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -1 - t_1 = 9 \wedge 9 - t_2 = -27 \Leftrightarrow t_1 = -10 \wedge t_2 = 36 \end{aligned}$$

Logo, $T(-10, 36)$.

$$\mathbf{4.2} \quad 2\overrightarrow{PQ} + \vec{v} = 2(-1 - 0, k + 1 - 3) + (-2, 3) = (-4, 2k - 1)$$

$$\|2\overrightarrow{PQ} + \vec{v}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-4)^2 + (2k - 1)^2} = 5$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado,

$$\begin{aligned} (-4)^2 + (2k - 1)^2 = 25 &\Leftrightarrow (2k - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow 2k - 1 = \pm 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2k - 1 = -3 \vee 2k - 1 = 3 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 2 \end{aligned}$$

Se $k = -1$, então $Q(-1, -1 + 1)$, ou seja, $Q(-1, 0)$; se $k = 2$, então $Q(-1, 2 + 1)$, ou seja, $Q(-1, 3)$.

$$\mathbf{4.3} \quad \vec{u} - \vec{v} = (5, -3) - (-2, 3) = (7, -6)$$

$$(x, y) = (0, 3) + k(7, -6), k \in \mathbb{R}$$

4.4 Se $k = 5$, as coordenadas de Q são $(-1, 5 + 1)$, ou seja, $(-1, 6)$.

$$(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = (x - (-1))^2 + (y - 6)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = (x + 1)^2 + (y - 6)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6y + 9 = 2x + 1 - 12y + 36 \Leftrightarrow -6y + 12y = 2x + 1 + 36 - 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y = 2x + 28 \Leftrightarrow y = \frac{2x + 28}{6} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$$

Como o declive da mediatriz do segmento de reta $[PQ]$ é $\frac{1}{3}$, um seu vetor diretor tem coordenadas $(3, 1)$.

Como a ordenada na origem é $\frac{14}{3}$, o ponto de coordenadas $(0, \frac{14}{3})$ pertence à mediatriz do segmento de reta $[PQ]$.

$$(x, y) = \left(0, \frac{14}{3}\right) + k(3, 1), k \in \mathbb{R}$$

5. $A(0, 0, z_A)$, $C(x_C, y_C, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $E(x_E, y_E, z_E)$

5.1 Por um lado, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{DE}$, ou seja, \overrightarrow{BD} tem coordenadas $(-3 - 1, 8 - 7, 1 - 5) = (-4, 1, -4)$.

Por outro lado, \overrightarrow{BD} tem coordenadas $(0 - x_B, 1 - y_B, 0 - z_B) = (-x_B, 1 - y_B, -z_B)$.

Portanto, $-x_B = -4 \wedge 1 - y_B = 1 \wedge -z_B = -4 \Leftrightarrow x_B = 4 \wedge y_B = 0 \wedge z_B = 4$, pelo que $B(4, 0, 4)$.

Tem-se que $E = D + \overrightarrow{DE} = (0, 1, 0) + (1, 7, 5) = (1, 8, 5)$.

Como a aresta $[AD]$ está contida no plano yOz , $[ABCD]$ é um retângulo e, tendo em conta as coordenadas de B e de D , conclui-se que $A(0, 0, 4)$ (a cota de A é igual à de B) e $C(4, 1, 0)$ (C tem a mesma abcissa que B e as mesmas ordenada e cota que D).

5.2 Um vetor colinear com \overrightarrow{DE} é da forma $\lambda \overrightarrow{DE}$, para um número real λ e tem coordenadas $(\lambda, 7\lambda, 5\lambda)$.

$$\sqrt{\lambda^2 + (7\lambda)^2 + (5\lambda)^2} = \sqrt{3}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, obtém-se:

$$\lambda^2 + (7\lambda)^2 + (5\lambda)^2 = 3 \Leftrightarrow 75\lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{3}{75} \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{2}{25} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{5}$$

Como o sentido é oposto, o vetor nas condições enunciadas tem coordenadas

$$\left(-\frac{1}{5} \times 1, -\frac{1}{5} \times 7, -\frac{1}{5} \times 5\right) = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -1\right).$$

5.3 Um vetor diretor da reta EB é $\overrightarrow{EB} = (4 - 1, 0 - 8, 4 - 5) = (3, -8, -1)$.

Logo, uma equação vetorial da reta EB é $(x, y, z) = (4, 0, 4) + k(3, -8, -1)$, $k \in \mathbb{R}$.

6. $z_A = z_B = z_C = -3$ e $z_D = z_E = z_F = 5$.

6.1 $(x_A, y_A, -3) = (-6, 7, 13) + k(-5, 4, 8)$, $k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_A = -6 - 5k \wedge y_A = 7 + 4k \wedge -3 = 13 + 8k, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_A = -6 - 5(-2) \wedge y_A = 7 + 4(-2) \wedge k = -2 \Leftrightarrow x_A = 4 \wedge y_A = -1; A(4, -1, -3).$$

$$(x_F, y_F, 5) = (-6, 7, 13) + k(-5, 4, 8), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_F = -6 - 5k \wedge y_F = 7 + 4k \wedge 5 = 13 + 8k, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_F = -6 - 5(-1) \wedge y_F = 7 + 4(-1) \wedge k = -1 \Leftrightarrow x_F = -1 \wedge y_F = 3; F(-1, 3, 5).$$

6.2 $(x, y, z) = (-6, 7, 13) + k(-5, 4, 8)$, $k \in \mathbb{R} \wedge y = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x, 3, z) = (-6, 7, 13) + k(-5, 4, 8), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -6 - 5k \wedge 3 = 7 + 4k \wedge z = 13 + 8k, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -1 \wedge x = -6 - 5(-1) \wedge z = 13 + 8(-1) \Leftrightarrow k = -1 \wedge x = -1 \wedge z = 5; \text{portanto, as coordenadas do ponto de interseção são } (-1, 3, 5).$$

6.3 Centro: $M_{[AF]} \left(\frac{4-1}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{-3+5}{2} \right)$, ou seja, $M_{[AF]} \left(\frac{3}{2}, 1, 1 \right)$

$$\text{Raio: } \frac{\|\vec{AF}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 8^2}}{2} = \frac{\sqrt{105}}{2}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \leq \left(\frac{\sqrt{105}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \leq \frac{105}{4}$$

PÁG. 166

Tarefa 1

1. $m = \frac{3-1}{1-0} = 2$

2. $y = 2x + 1$

3. 2

4. $y = 2x$

PÁG. 168

Tarefa 2

$\text{tg } \alpha = \frac{2}{1} = 2$ e $m = \text{tg } \alpha$.

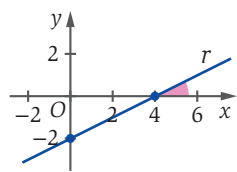
PÁG. 170

Aplicar

3.1 Se $x = 0$, $y = \frac{1}{2} \times 0 - 2 = -2$; $(0, -2)$.

Se $y = 0$, $0 = \frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow x = 4$; $(4, 0)$.

3.2



3.3 $(2, 1)$

3.4 Sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}$; pelo que, $\alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26,6^\circ$.

4.1 $m = 2$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg } \alpha = 2$; pelo que, $\alpha = \text{tg}^{-1}(2) \Leftrightarrow \alpha \approx 63,4^\circ$.

4.2 $m = -3$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg } \alpha = -3$; pelo que,
 $\alpha = \text{tg}^{-1}(-3) + 180^\circ \approx -71,6^\circ + 180^\circ = 108,4^\circ$.

4.3 $m = 1$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\text{tg } \alpha = 1$; pelo que, $\alpha = \text{tg}^{-1}(1) = 45^\circ$.

4.4 $m = -1$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = -1$; pelo que,
 $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(-1) + 180^\circ = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$.

4.5 $m = 3$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = 3$; pelo que, $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(3) \approx 71,6^\circ$.

4.6 $m = 0$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = 0$; pelo que, $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(0) = 0^\circ$.

4.7 Como a reta é vertical, $\alpha = 90^\circ$.

4.8 $x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$

$m = -\frac{1}{2}$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$; pelo que,
 $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 180^\circ \approx -26,6^\circ + 180^\circ = 153,4^\circ$.

4.9 $2x - y = 3 \Leftrightarrow y = 2x - 3$

$m = 2$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = 2$; pelo que, $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(2) \approx 63,4^\circ$.

4.10 $m = -\frac{3}{4}$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$; pelo que,
 $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) + 180^\circ \approx -36,9^\circ + 180^\circ = 143,1^\circ$.

5.1 $m = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{4 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

5.2 $m = -\frac{2}{2} = -1$; sendo α a inclinação da reta, tem-se $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

6. $m = \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $-2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow b = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{3}$.

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3} - 6}{3}$$

7.1 $2 \operatorname{sen} \alpha = \cos(\pi - \alpha) \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha = -\cos \alpha$

Dividindo ambos os membros da equação por $\cos \alpha$, obtém-se:

$$2 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg} \alpha = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2} .$$

Logo, $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 180^\circ \approx -26,6^\circ + 180^\circ = 153,4^\circ$.

O ponto B é o ponto da reta r com abcissa nula:

$$\begin{aligned} (0, y) = (-2, 0) + k(2, 3), k \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow 0 = -2 + 2k \wedge y = 0 + 3k, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = 1 \wedge y = 3, B(0, 3) \end{aligned}$$

A equação reduzida da reta s é $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

$$7.2 \quad -\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 6, A(6, 0)$$

$$(x, 0) = (-2, 0) + k(2, 3), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -2 + 2k \wedge 0 = 0 + 3k, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k = 0 \wedge x = -2, C(-2, 0)$$

$$A_{[ABC]} = \frac{(2+6) \times 3}{2} = 12$$

PÁG. 173**Tarefa 3**

$$1. \overrightarrow{AB}(3, 0) \text{ e } \overrightarrow{AD}(-2, 0).$$

$$2. \frac{x}{1} = \cos 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \frac{y}{1} = \cos 30^\circ \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \overrightarrow{AC}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$3. \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (3, 0) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (-2, 0) = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (3, 0) \cdot (-2, 0) = 3(-2) + 0 = -6$$

Tarefa 4

4. Ângulo obtuso: sinal negativo; ângulo reto: sinal nulo; ângulo agudo: sinal positivo.

PÁG. 176**Aplicar**

11. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-2) + 1 \times 4 = -2$, logo o ângulo é obtuso, dado que $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ e \vec{u} e \vec{v} não são colineares.

$$12.1 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + (-3) \times 0 = -2$$

Ângulo obtuso, dado que $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ e \vec{u} e \vec{v} não são colineares.

$$12.2 \quad \overrightarrow{AB} \text{ tem coordenadas } (0 - 1, -3 - 2) = (-1, -5).$$

$$\overrightarrow{BC} \text{ tem coordenadas } (-2 - 0, 4 - (-3)) = (-2, 7).$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -1 \times (-2) + (-5) \times 7 = -33$$

Ângulo obtuso, dado que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$ e \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} não são colineares.

$$13. \overrightarrow{BA}(1 - 1, 0 - 1, 1 - 1) = (0, -1, 0) \text{ e } \|\overrightarrow{BA}\| = 1.$$

$$\overrightarrow{BC}(0 - 1, 2 - 1, 1 - 1) = (-1, 1, 0) \text{ e } \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \times (-1) + (-1) \times 1 + 0 \times 0 = -1.$$

$$\text{Logo } \cos(\widehat{BA, BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{-1}{1 \times \sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BA, BC} > 90^\circ.$$

$$14.1 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \Leftrightarrow 3 \times 2 + 5 \times k = 5 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}$$

14.2 O ângulo formado pelos vetores é agudo; portanto, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ e \vec{u} e \vec{v} não podem ser colineares.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow 3 \times 2 + 5 \times k > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{6}{5} \Leftrightarrow k \in \left] -\frac{6}{5}, +\infty \right[$$

Verifiquemos se existe algum valor de k tal que \vec{u} e \vec{v} são colineares.

$$\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são colineares se } \frac{2}{3} = \frac{k}{5} \Leftrightarrow k = \frac{10}{3} \text{ e } \frac{10}{3} \in \left] -\frac{6}{5}, +\infty \right[.$$

Logo, o ângulo é agudo para $k \in \left] -\frac{6}{5}, +\infty \right[\setminus \left\{ \frac{10}{3} \right\}$.

14.3 $\vec{u} - 2\vec{v}$ tem coordenadas $(-1, 5 - 2k)$.

$$(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -1 \times 2 + (5 - 2k) \times k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + 5k - 2k^2 = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow k = \frac{5 - 3}{4} \vee k = \frac{5 + 3}{4} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \vee k = 2$$

15. $A(1, -1, -1)$, $C(-1, 1, -1)$, $D(-1, -1, -1)$, $E(1, -1, 1)$, $F(1, 1, 1)$, $G(-1, 1, 1)$, $H(-1, -1, 1)$

15.1 As coordenadas de \vec{AB} são $(1 - 1, 1 - (-1), -1 - (-1)) = (0, 2, 0)$

e as de \vec{BF} são $(1 - 1, 1 - 1, 1 - (-1)) = (0, 0, 2)$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{BF} = 0 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 2 = 0$$

15.2 $\vec{BF}(0, 0, 2)$ e as coordenadas de \vec{FC} são $(-1 - 1, 1 - 1, -1 - 1) = (-2, 0, -2)$.

$$\vec{BF} \cdot \vec{FC} = 0 \times (-2) + 0 \times 0 + 2 \times (-2) = -4$$

15.3 As coordenadas de \vec{EF} são $(1 - 1, 1 - (-1), 1 - 1) = (0, 2, 0)$

e as de \vec{DC} são $(-1 - (-1), 1 - (-1), -1 - (-1)) = (0, 2, 0)$.

$$\vec{EF} \cdot \vec{DC} = 0 \times 0 + 2 \times 2 + 0 \times 0 = 4$$

15.4 $\vec{EF}(0, 2, 0)$ e as coordenadas de \vec{DH} são $(-1 - (-1), -1 - (-1), 1 - (-1)) = (0, 0, 2)$.

$$\vec{EF} \cdot \vec{DH} = 0 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 2 = 0$$

15.5 $\vec{DC}(0, 2, 0)$ e as coordenadas de \vec{BE} são $(1 - 1, -1 - 1, 1 - (-1)) = (0, -2, 2)$.

$$\vec{DC} \cdot \vec{BE} = 0 \times 0 + 2 \times (-2) + 0 \times 2 = -4$$

PÁG. 177**Aplicar**

16. $\widehat{ABC} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$. As coordenadas de \overrightarrow{BA} são $(1 - (-1), 1 - 3, 1 - 0) = (2, -2, 1)$

e as de \overrightarrow{BC} são $(0 - (-1), 2 - 3, 5 - 0) = (1, -1, 5)$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 1 + (-2) \times (-1) + 1 \times 5 = 9$$

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3, \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) = \frac{9}{3 \times 3\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Logo, } (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 55^\circ.$$

17.1 $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 90^\circ$

17.2 $(\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}) = 45^\circ$

17.3 $(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) = 45^\circ$

17.4 $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$

17.5 $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB}) = 135^\circ$

18.1 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \times 3 \times \cos 120^\circ = 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$

18.2 A altura do triângulo é $\sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \cos 30^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times = \frac{27}{4}$$

18.3 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, dado que \overrightarrow{DA} e \overrightarrow{DC} são perpendiculares.

18.4 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 3 \times 3 \times \cos 120^\circ = 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$

19.1 $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$, dado que \overrightarrow{DC} e \overrightarrow{FG} são perpendiculares.

19.2 A diagonal facial mede $2\sqrt{2}$ e a diagonal espacial mede $2\sqrt{3}$.

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{AG} = \cos(\widehat{CAG}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{CAG}) = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\widehat{CAG}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 8$$

19.3 $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, dado que \overrightarrow{EG} e \overrightarrow{BD} são perpendiculares.

$$\mathbf{19.4} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \cos(\widehat{BAG}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAG}) = \frac{2}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAG}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 4$$

19.5 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$, dado que \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CG} são perpendiculares.

20.1 $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$, dado que \overrightarrow{CD} e \overrightarrow{DE} são perpendiculares.

$$\mathbf{20.2} \quad \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = 4\sqrt{2} \times 4 \times \cos 45^\circ = 16\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16$$

$$\mathbf{20.3} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \cos(\widehat{BCA}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{BCA}) = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\widehat{BCA}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 32$$

$$\mathbf{21.} \quad \frac{1}{2} = 1 \times 1 \times \cos(\widehat{u, v})$$

$$\text{Logo, } (\widehat{u, v}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (\widehat{u, v}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$\mathbf{22.} \quad -6\sqrt{2} = 4 \times 3 \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\text{Logo, } (\widehat{BAC}) = \cos^{-1}\left(-\frac{6\sqrt{2}}{12}\right) \Leftrightarrow (\widehat{BAC}) = 135^\circ.$$

23. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EH}$ e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AH}$, pelo que, para qualquer valor de a ,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0.$$

PÁG. 178

Aplicar

$$\mathbf{24.} \quad \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{ED} = 8 \times 4 \times \cos(120^\circ) = 8 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -16$$

Opção correta: **(A)**

25. O ângulo formado pelos vetores $2\vec{a} - \vec{b}$ e $-\vec{b}$ é obtuso ou raso se $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (-\vec{b}) < 0$.

$2\vec{a} - \vec{b}$ tem coordenadas

$$(2 \times 2 - 2k, 2(1 - k) - (k + 2), 2 \times (-3) - (-1)) = (4 - 2k, 2 - 2k - k - 2, -6 + 1) = (4 - 2k, -3k, -5)$$

$$(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (-\vec{b}) < 0 \Leftrightarrow -2k \times (4 - 2k) + (-3k) \times (-k - 2) - 5 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8k + 4k^2 + 3k^2 + 6k - 5 < 0 \Leftrightarrow 7k^2 - 2k - 5 < 0$$

$$7k^2 - 2k - 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 7 \times (-5)}}{2 \times 7} \Leftrightarrow k = \frac{2 \pm 12}{14} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2 - 12}{14} \vee k = \frac{2 + 12}{14} \Leftrightarrow k = -\frac{5}{7} \vee k = 1$$

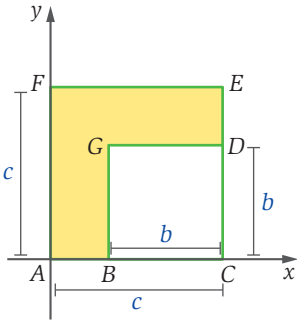
Como o gráfico de $y = 7k^2 - 2k - 5$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima, tem-se:

$$7k^2 - 2k - 5 < 0 \Leftrightarrow k \in \left] -\frac{5}{7}, 1 \right[.$$

26. $A_{[BCE]} = a \Leftrightarrow \frac{\overline{BC} \times \overline{CE}}{2} = a \Leftrightarrow \overline{BC} \times \overline{CE} = 2a$

Consideremos a figura representada num referencial o.n. Oxy em que A é a origem do referencial, C pertence ao semieixo positivo Ox e F pertence ao semieixo positivo Oy .

Sejam $\overline{AC} = \overline{AF} = c$ e $\overline{BC} = \overline{CD} = b$, com b e c números reais positivos.



Assim, $C(c, 0)$, $D(c, b)$ e $E(c, c)$, pelo que $\overrightarrow{AD}(c, b)$ e $\overrightarrow{CE}(0, c)$.

Logo, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \times c + c \times b = c \times b = \overline{BC} \times \overline{CE} = 2a$.

27. $A(0, 1, 0)$, $B(0, 0, z_B)$, $\overrightarrow{AO}(0, -1, 0)$, $\overrightarrow{AB}(0, -1, z_B)$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 0 - 1 \times (-1) + 0 \times z_B = 1$$

28. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 3 \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 6 \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

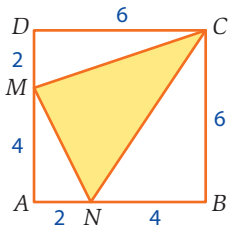
(A) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$ se $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ e, portanto, $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$, mas os vetores não são colineares.

(C) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$ se $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ e, portanto, $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$, mas os vetores não são colineares.

(D) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \Leftrightarrow 6 \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 7 \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{7}{6}$, o que é impossível, já que se obtém $\cos(\vec{u}, \vec{v}) > 1$.

Opção correta: **(B)**

29.



$$29.1 \quad \vec{NB} \cdot \vec{NC} = \|\vec{NB}\| \times \|\vec{NC}\| \times \cos(\vec{NB} \hat{=} \vec{NC}) = 4 \times \|\vec{NC}\| \times \frac{4}{\|\vec{NC}\|} = 16$$

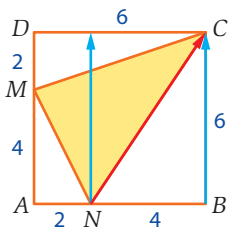
$$29.2 \quad \vec{MN} \cdot \vec{MD} = \|\vec{MN}\| \times \|\vec{MD}\| \times \cos(\vec{MN} \hat{=} \vec{MD})$$

$$\cos(\vec{MN} \hat{=} \vec{MD}) = \cos(\pi - \hat{A}MN) = -\cos(\hat{A}MN) = -\frac{4}{\|\vec{MN}\|}$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{MD} = \|\vec{MN}\| \times 2 \times (-\cos(\hat{A}MN)) = \|\vec{MN}\| \times 2 \times \left(-\frac{4}{\|\vec{MN}\|}\right) = -8$$

$$29.3 \quad \vec{DC} \cdot \vec{NA} = \|\vec{DC}\| \times \|\vec{NA}\| \times \cos(\vec{DC} \hat{=} \vec{NA}) = 6 \times 2 \times \cos 180^\circ = -12$$

29.4

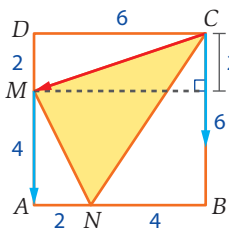


$$\vec{NC} \cdot \vec{BC} = \|\vec{NC}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos(\vec{NC} \hat{=} \vec{BC}) = \|\vec{NC}\| \times 6 \times \frac{6}{\|\vec{NC}\|} = 36$$

$$29.5 \quad \vec{NA} \cdot \vec{DM} = 0, \text{ dado que } \vec{NA} \text{ e } \vec{DM} \text{ são perpendiculares.}$$

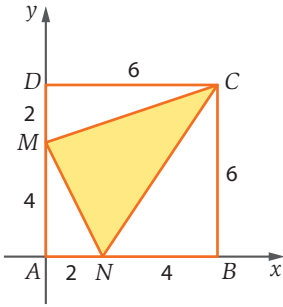
$$29.6 \quad \vec{MA} \cdot \vec{CM} = \vec{MA} \cdot (\vec{CD} + \vec{DM}) = \vec{MA} \cdot \vec{CD} + \vec{MA} \cdot \vec{DM} =$$

$$= 0 + \vec{MA} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{MA}\right) = \frac{1}{2}\|\vec{MA}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \times 6\right)^2 = 8$$



$$\vec{MA} \cdot \vec{CM} = \|\vec{MA}\| \times \|\vec{CM}\| \times \cos(\vec{MA} \hat{=} \vec{CM}) = 4 \times \|\vec{CM}\| \times \frac{2}{\|\vec{CM}\|} = 8$$

Nota: As diversas alíneas de 29. podem ser resolvidas recorrendo à colocação da figura num referencial adequado, para calcular os valores dos produtos escalares pedidos. Tendo em conta, por exemplo, a figura seguinte:



Tem-se que $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(6, 6)$, $D(0, 6)$, $N(2, 0)$ e $M(0, 4)$.

Assim, exemplificando para 29.1:

As coordenadas de \overrightarrow{NB} são $(6 - 2, 0 - 0) = (4, 0)$ e as de \overrightarrow{NC} são $(6 - 2, 6 - 0) = (4, 6)$; pelo que, $\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NC} = (4, 0) \cdot (4, 6) = 4 \times 4 + 0 \times 6 = 16$.

PÁG. 180

Aplicar

$$32.1 \quad (2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{w}) = 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \times 4 - 2 \times 6 = -4$$

$$32.2 \quad (\vec{u} + 2\vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{w} \cdot \vec{v} = 4 + 2 \times 6 = 16$$

$$33.1 \quad (3\vec{u}) \cdot \vec{v} = 3(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 3 \times 2 \times 5 \times \cos(120^\circ) = 30 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -15$$

$$33.2 \quad (-4\vec{u}) \cdot (2\vec{v}) = -4 \times 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -8 \times 2 \times 5 \times \cos(120^\circ) = -80 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 40$$

$$33.3 \quad (\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + 3(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2 \times 5 \times \cos(120^\circ) + 3 \times \|\vec{v}\|^2 = 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \times 5^2 = 70$$

$$33.4 \quad (5\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (3\vec{v}) = 5 \times 3(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 2 \times 3(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 15 \times 2 \times 5 \times \cos(120^\circ) - 6 \times 5^2 = \\ = 150 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 150 = -225$$

$$34.1 \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ = \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

34.2 Se \vec{u} e \vec{v} forem perpendiculares, tem-se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, pelo que, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$. Teorema de Pitágoras

$$34.3 \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{u}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}\|\vec{u}\|^2$$

$$\cos(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-\frac{1}{2}\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} = -\frac{1}{2}, \quad (\hat{u}, \hat{v}) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

PÁG. 181

Aplicar

$$34.4 \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 36 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = 36, \text{ logo, } \|\vec{u}\| = 6.$$

$$\|\vec{u}\| = 2\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \frac{1}{2}\|\vec{u}\| \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = 3$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 36 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 9 = 45 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 11^2 \Leftrightarrow 45 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 11^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 38$$

$$\vec{u} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) = 3\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 36 - 2 \times 38 = 32$$

$$34.5 \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \sqrt{10}^2 = k^2 + 2 \times 0 + (2k - 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 = k^2 + 4k^2 - 4k + 1 \Leftrightarrow 5k^2 - 4k - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 5 \times (-9)}}{2 \times 5} \Leftrightarrow k = \frac{4 \pm 14}{10} \Leftrightarrow k = \frac{4 - 14}{10} \vee k = \frac{4 + 14}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{k = -1}_{\text{imp.}} \vee k = \frac{9}{5}$$

$$35.1 \quad (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{v}) = (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) =$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (2\vec{v}) + (2\vec{v}) \cdot \vec{u} + (2\vec{v}) \cdot (2\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2(\vec{u} \cdot (2\vec{v})) + 4(\vec{v} \cdot \vec{v}) =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 4(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 4\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 4 \times 0 + 4 \times 1 = 5$$

Opção correta: **(D)**

$$35.2 \quad 4\vec{v} \cdot (2\vec{u} - \sqrt{3}\vec{w}) = 6 \Leftrightarrow 8\vec{v} \cdot \vec{u} - 4\sqrt{3}\vec{v} \cdot \vec{w} = 6 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{6}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\| \times \cos(\vec{u} \hat{,} \vec{w}) \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \times 1 \times \cos(\vec{u} \hat{,} \vec{w}) \Leftrightarrow (\vec{u} \hat{,} \vec{w}) = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u} \hat{,} \vec{w}) = \frac{5\pi}{6}$$

$$36. \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{15}^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{4}$$

(Como $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{15}$, o ângulo de amplitude θ é agudo, pelo que $\cos \theta > 0$.)

36.1

$$a. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta = 2 \times 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$b. \quad \vec{u} \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (2\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 2^2 + 2 \times \frac{3}{2} = 4 + 3 = 7$$

$$c. \quad \|\vec{u} + 2\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot 2\vec{v} + \|2\vec{v}\|^2 = 2^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 = 4 + 4 \times \frac{3}{2} + 4 \times 3^2 = 46$$

$$36.2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 2 \times 3 \times \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \theta \approx 76^\circ$$

$$37. \begin{cases} \overline{AC} = 5 \\ \overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} + \overline{BC} = 5 \\ \overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AB} = 5 \\ \overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} = 3 \\ \overline{BC} = 2 \end{cases}$$

Como $[ABDE]$ é um losango, $\overline{BD} = 3$.

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 3^2 - 2^2 \Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{5}$$

$\overline{CD} > 0$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} = \\ &= \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(0^\circ) + 0 + 0 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 = 5 \times 2 \times 1 + (\sqrt{5})^2 = 10 + 5 = 15 \end{aligned}$$

PÁG. 185

Aplicar

41. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 1) \cdot (-1, 2) = 2(-1) + 1 \times 2 = 0$, pelo que \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares.

42. Por exemplo, $(4, 1)$ e $(-4, -1)$.

43.1 O declive da reta r é 3; portanto, o declive das retas perpendiculares a r é $-\frac{1}{3}$.

$$43.2 \quad 2 = -\frac{1}{3} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{3}; y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

PÁG. 186

Aplicar

$$44. m = -1; m' = -\frac{1}{-1} = 1; -3 = 1 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -5; y = x - 5.$$

$$45. m = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}; m' = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}; b = 2; y = -\sqrt{3}x + 2.$$

46. $\overrightarrow{AB}(0 - 1, -2 - 2)$, ou seja $\overrightarrow{AB}(-1, -4)$. Um vetor perpendicular a \overrightarrow{AB} é o vetor de coordenadas $(-4, 1)$; $(x, y) = (0, -2) + k(4, -1)$, $k \in \mathbb{R}$.

$$47.1 \quad m = \frac{5}{2}$$

$$47.2 \quad m' = -\frac{1}{\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}$$

$$47.3 \quad 3 = 1 \times \left(-\frac{2}{5}\right) + b \Leftrightarrow b = \frac{17}{5}; y = -\frac{2}{5}x + \frac{17}{5}.$$

$$48.1 \quad m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}; -2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-\sqrt{3}) + b \Leftrightarrow b = -1;$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \Leftrightarrow 3y - \sqrt{3}x + 3 = 0.$$

48.2 A reta AD é perpendicular à reta AB , pelo que $m' = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$;
 $-2 = -\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) + b \Leftrightarrow b = -5$; $y = -\sqrt{3}x - 5$.

48.3 $R(x_R, y_R) \in AB$; portanto, $3y_R - \sqrt{3}x_R + 3 = 0 \Leftrightarrow y_R = \frac{\sqrt{3}}{3}x_R - 1$.

As retas RS e AB são perpendiculares se $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{AB}(3, \sqrt{3})$ e $\overrightarrow{RS}\left(-\frac{7\sqrt{3}}{3} - x_R, -2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_R - 1\right)\right)$, ou seja, $\overrightarrow{RS}\left(-\frac{7\sqrt{3}}{3} - x_R, -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_R\right)$.

$$\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 3\left(-\frac{7\sqrt{3}}{3} - x_R\right) + \sqrt{3}\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_R\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7\sqrt{3} - 3x_R - \sqrt{3} - x_R = 0 \Leftrightarrow -4x_R = 8\sqrt{3} \Leftrightarrow x_R = -2\sqrt{3};$$

$$y_R = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2\sqrt{3}) - 1 = -3; R(-2\sqrt{3}, -3).$$

49. Por exemplo, $(0, -3, 2)$, $(-3, 0, -1)$ e $(-2, -1, 0)$.

50. $\vec{b}(2k, 0, k)$, com $k \in \mathbb{R}$, é perpendicular a \vec{a} , dado que

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = (2k, 0, k) \cdot (-1, 1, 2) = -2k + 0 + 2k = 0.$$

$$\|\vec{b}\| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + k^2} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 5k^2 = 20 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = -2 \vee k = 2$$

Por exemplo, $\vec{b}(4, 0, 2)$.

PÁG. 187

Tarefa 6

$A(3, -2)$, $B(3, 2)$, $C(-3, 2)$ e $D(-3, -2)$.

$\overrightarrow{AC}(-3 - 3, 2 + 2)$, ou seja, $\overrightarrow{AC}(-6, 4)$ e $\overrightarrow{BD}(-3 - 3, -2 - 2)$, ou seja, $\overrightarrow{BD}(-6, -4)$.

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52} \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{52}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -6 \times (-6) + 4 \times (-4) = 20$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| \times \cos(\widehat{AC, BD}) \Leftrightarrow 20 = \sqrt{52} \times \sqrt{52} \times \cos(\widehat{AC, BD}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{AC, BD}) = \frac{20}{52}. \text{ Logo, } (\widehat{AC, BD}) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) \approx 67,4^\circ.$$

PÁG. 189

Aplicar

52. $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$, $C(1, -2)$ e $D(2, 3)$.

As coordenadas de \overrightarrow{AB} são $(4 + 2, -1 - 3) = (6, -4)$ e as de \overrightarrow{CD} são $(2 - 1, 3 + 2) = (1, 5)$.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}| = |(6 \times 1 + (-4) \times 5)| = |-14| = 14$$

$$\cos(\widehat{AB, CD}) = \left| \cos(\widehat{AB, CD}) \right| = \frac{14}{\sqrt{52} \times \sqrt{26}}. \text{ Logo, } (\widehat{AB, CD}) = \cos^{-1}\left(\frac{7\sqrt{2}}{26}\right) \approx 67,6^\circ.$$

$$53.1 \quad \cos(\hat{r}, \hat{s}) = |\cos(\vec{r}, \vec{s})| = \frac{|(-2, 1) \cdot (2, 3)|}{\|(-2, 1)\| \times \|(2, 3)\|} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}}$$

$$\text{Logo, } (\hat{r}, \hat{s}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{65}}\right) \approx 83^\circ.$$

$$53.2 \quad \cos(\hat{r}, \hat{s}) = |\cos(\vec{r}, \vec{s})| = \frac{|(1, -2) \cdot (1, 3)|}{\|(1, -2)\| \times \|(1, 3)\|} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Logo, } (\hat{r}, \hat{s}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ.$$

$$54. \quad \overline{DB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \quad \text{e} \quad \overline{DF} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24}.$$

$$\cos(\overline{DB}, \overline{DF}) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{24}}. \quad \text{Logo, } (\overline{DB}, \overline{DF}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{24}}\right) \approx 55^\circ.$$

$$55.1 \quad (0, -5, -3) = (2, -1, 5) + k(1, 2, 4), \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 + k \\ -5 = -1 + 2k, \quad k \in \mathbb{R} \\ -3 = 5 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

Logo, o ponto de coordenadas $(0, -5, -3)$ pertence à reta r .

As retas r e s não são coincidentes, pois os seus vetores diretores, $\vec{r}(1, 2, 4)$ e $\vec{s}(6, 7, -6)$, não são colineares.

$$55.2 \quad \cos(\hat{r}, \hat{s}) = |\cos(\vec{r}, \vec{s})| = \frac{|(1, 2, 4) \cdot (6, 7, -6)|}{\|(1, 2, 4)\| \times \|(6, 7, -6)\|} = \frac{4}{\sqrt{21} \times \sqrt{121}} = \frac{4}{11\sqrt{21}}$$

$$\text{Logo, } (\hat{r}, \hat{s}) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{11\sqrt{21}}\right) \approx 85,4^\circ.$$

55.3 Como o ponto B pertence à reta r , as suas coordenadas são da forma

$$(2 + k, -1 + 2k, 5 + 4k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Como o ângulo entre as retas AB e r é $\frac{\pi}{2}$, concluímos que as retas são perpendiculares, pelo

que $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} = 0$, em que as coordenadas de \overrightarrow{AB} são

$$(2 + k - 1, -1 + 2k, 5 + 4k - 1) = (1 + k, -1 + 2k, 4 + 4k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Assim, } (1 + k, -1 + 2k, 4 + 4k) \cdot (1, 2, 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k + 1) + 2(-1 + 2k) + 4(4k + 4) = 0 \Leftrightarrow k + 1 - 2 + 4k + 16k + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21k + 15 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{5}{7}$$

$$\text{Logo, } B\left(2 + \left(-\frac{5}{7}\right), -1 + 2\left(-\frac{5}{7}\right), 5 + 4\left(-\frac{5}{7}\right)\right), \text{ ou seja, } B\left(\frac{9}{7}, -\frac{17}{7}, \frac{15}{7}\right).$$

PÁG. 192

Aplicar

$$57.1 \quad 0(x - 1) + 1(y - (-2)) + 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow y + 2 + z - 3 = 0 \Leftrightarrow y + z - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 57.2 \quad & -3(x - (-1)) + \frac{1}{2}(y - (-2)) + 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow -3(x + 1) + \frac{1}{2}(y + 2) + (z - 3) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow -3x - 3 + \frac{1}{2}y + 1 + z - 3 = 0 \Leftrightarrow -6x + y + 2z - 10 = 0
 \end{aligned}$$

PÁG. 193**Aplicar**

58.1 Os vetores normais ao plano têm coordenadas da forma $(-4k, 2k, -3k)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Por exemplo, $(-2, 1, -\frac{3}{2})$ e $(-4, 2, -3)$

58.2 Interseção com Ox : $-2x + 0 - \frac{3}{2} \times 0 = 6 \Leftrightarrow x = -3$; $(-3, 0, 0)$.

Interseção com Oy : $-2 \times 0 + y - \frac{3}{2} \times 0 = 6 \Leftrightarrow y = 6$; $(0, 6, 0)$.

Interseção com Oz : $-2 \times 0 + 0 - \frac{3}{2}z = 6 \Leftrightarrow z = -4$; $(0, 0, -4)$.

59.1 $(3, 1, -3)$

59.2 $(1, -3, 2)$

59.3 $3(x - 1) + (y + 3) - 3(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 + y + 3 - 3z + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 3z + 6 = 0$

60. Substituindo as coordenadas de um ponto genérico do eixo Oz , $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$, na equação do plano, obtém-se $2 \times 0 + 0 = 6 \Leftrightarrow 0 = 6$, que é uma proposição falsa; logo, o plano não intersesta o eixo Oz , pelo que terá de ser paralelo ao mesmo.

61.1 $x + 2y + z = 0$

61.2 $x + 2 \times 0 + 0 = 2 \Leftrightarrow x = 2$, $A(2, 0, 0)$; $0 + 2y + 0 = 2 \Leftrightarrow y = 1$, $B(0, 1, 0)$;
 $0 + 2 \times 0 + z = 2 \Leftrightarrow z = 2$, $C(0, 0, 2)$.

61.3 $V = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} \times \overline{OC} = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 1}{2} \times 2 = \frac{2}{3}$

62. $3(x - 4) + (-5)(y - 5) + 8(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 12 - 5y + 25 + 8z - 24 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x - 5y + 8z - 11 = 0$

PÁG. 194**Aplicar**

64.1 $\vec{n}(a, b, c)$, $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 2, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 0, 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ -a + 0b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c + 2b + 3c = 0 \\ a = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{5}{2}c \\ a = 2c \end{cases}$$

As coordenadas dos vetores perpendiculares a \vec{u} e \vec{v} são da forma $(2c, -\frac{5}{2}c, c)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Fazendo, por exemplo, $c = 2$, um desses vetores tem coordenadas $(4, -5, 2)$.

$$64.2 \quad \vec{n}(a, b, c), \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 2, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 4, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0a + 2b + 2c = 0 \\ a + 4b + 0c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2c = 0 \\ a = -4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = -4b \end{cases}$$

As coordenadas dos vetores perpendiculares a \vec{u} e \vec{v} são da forma $(-4b, b, -b)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Fazendo, por exemplo, $b = 1$, um desses vetores tem coordenadas $(-4, 1, -1)$.

65. Para obter uma equação cartesiana do plano, é necessário obter as coordenadas de um vetor normal ao plano.

$$\text{Tem-se } \overrightarrow{BA}(1 - (-5), 0 - 2, 0 - 3) = \overrightarrow{BA}(6, -2, -3) \text{ e} \\ \overrightarrow{BC}(2 - (-5), 2 - 2, 2 - 3) = \overrightarrow{BC}(7, 0, -1).$$

Os três pontos A, B e C são não colineares (pois \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} são não colineares), pelo que definem o plano ABC . Assim, sendo $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano, vem $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (6, -2, -3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (7, 0, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 3c = 0 \\ 7a + 0b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 3 \times 7a = 0 \\ c = 7a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{15}{2}a \\ c = 7a \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas dos vetores perpendiculares a \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} são da forma

$$\left(a, -\frac{15}{2}a, 7a\right), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Para $a = 2$, por exemplo, temos $\vec{n}(2, -15, 14)$. Assim, $ABC: 2x - 15y + 14z + d = 0$.

Como $A(1, 0, 0)$ pertence ao plano ABC , substituindo na sua equação, vem

$$2 \times 1 - 15 \times 0 + 14 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2.$$

Logo, $ABC: 2x - 15y + 14z - 2 = 0$.

PÁG. 195

Aplicar

$$67.1 \quad \vec{a}(-1, 0, 1) \text{ e } \vec{b}(-3, 0, 3), \text{ por exemplo.}$$

67.2 Os vetores são colineares e, por exemplo, o ponto de coordenadas $(-1, 2, 3)$ pertence à reta a e não pertence à reta b :

$$(-1, 2, 3) = (0, 1, 2) + k(-3, 0, 3), k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -3k \\ 2 = 1 \\ 3 = 2 + 3k \end{cases}, \text{ sistema impossível.}$$

67.3 Sendo $A(-1, 2, 3)$ e $B(0, 1, 2)$ pontos das retas a e b , respetivamente, o vetor \overrightarrow{AB} tem coordenadas $(0 - (-1), 1 - 2, 2 - 3) = (1, -1, -1)$.

Determinemos um vetor $\vec{n}(a, b, c)$ perpendicular aos vetores \vec{a} e \overrightarrow{AB} : $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -1, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = 0 \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas dos vetores perpendiculares a \vec{a} e \overrightarrow{AB} são da forma $(a, 0, a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Assim, para $a = 1$, por exemplo, obtemos $\vec{n}(1, 0, 1)$.

Logo, uma equação do plano é da forma $x + 0y + z + d = 0 \Leftrightarrow x + z + d = 0$.

Como o ponto de coordenadas $(0, 1, 2)$ pertence ao plano, substituindo na sua equação, tem-se $0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$, pelo que uma equação cartesiana do plano é $x + z - 2 = 0$.

PÁG. 196

Aplicar

69.1 São concorrentes porque pertencem ao mesmo plano e os seus vetores diretores não são colineares.

69.2 $\vec{n}(a, b, c)$, $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 2, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, 2, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b - 2c = 0 \\ 3a + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 2c \\ 3(2b - 2c) + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 2c \\ 6b - 6c + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 2 \times \frac{8}{7}b \\ c = \frac{8}{7}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{7}b \\ c = \frac{8}{7}b \end{cases}$$

Assim, para $b = 7$, por exemplo, obtemos $\vec{n}(-2, 7, 8)$.

Logo, uma equação do plano é da forma $-2x + 7y + 8z + d = 0$.

Como o ponto de coordenadas $(1, 0, -2)$ pertence ao plano, substituindo na sua equação, tem-se $-2 \times 1 + 7 \times 0 + 8 \times (-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = 18$, pelo que uma equação cartesiana do plano é $-2x + 7y + 8z + 18 = 0 \Leftrightarrow 2x - 7y - 8z - 18 = 0$.

PÁG. 197

Aplicar

71.1 Como o ponto A pertence ao plano xOy e tem ordenada -2 , tem coordenadas da forma $(x, -2, 0)$. Como o ponto A pertence ao plano ABG , tem-se $5x - 2(-2) = 24 \Leftrightarrow x = 4$, pelo que $A(4, -2, 0)$.

71.2 Seja $H(-2, 7, -4)$.

Um vetor $\vec{n}(a, b, c)$ perpendicular a \overrightarrow{HA} e a $\vec{r}(4, -2, 4)$ é vetor normal ao plano, pelo que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HA} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (6, -9, 4) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (4, -2, 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 9b + 4c = 0 \\ 4a - 2b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 9(2a + 2c) + 4c = 0 \\ b = 2a + 2c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 18a - 18c + 4c = 0 \\ b = 2a + 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{6}{7}a \\ b = 2a + 2\left(-\frac{6}{7}a\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{6}{7}a \\ b = \frac{2}{7}a \end{cases}$$

Assim, para $a = 7$, por exemplo, obtemos $\vec{n}(7, 2, -6)$.

Logo, uma equação do plano é da forma $7x + 2y - 6z + d = 0$.

Como o ponto $A(4, -2, 0)$ pertence ao plano, substituindo na sua equação, tem-se $7 \times 4 + 2 \times (-2) - 6 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -24$, pelo que uma equação cartesiana do plano é $7x + 2y - 6z - 24 = 0 \Leftrightarrow 7x + 2y - 6z = 24$.

PÁG. 199**Aplicar**

74. Os vetores $\vec{u}(2, -2, 1)$ e $\vec{v}(-6, 6, 3)$ não são colineares. Logo, os planos não são paralelos.

75. Os planos são coincidentes, dado que as suas equações são equivalentes:

$$2(x - 2y) = 4 - z \Leftrightarrow 2x - 4y + z = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - y + \frac{z}{4} = 1$$

76. Qualquer uma da família: $x - 4y + 5z + d = 0$, $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

77. Os vetores $\vec{u}(1, 1, 1)$ e $\vec{v}(2, 3, -5)$ são perpendiculares, pois $(1, 1, 1) \cdot (2, 3, -5) = 2 + 3 - 5 = 0$. Logo, os planos não são perpendiculares.

78. Os planos são perpendiculares se $(a, 3, 4) \cdot (a, 1, -a) = 0 \Leftrightarrow a^2 + 3 - 4a = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow a = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow a = 1 \vee a = 3.$$

79.1

a. α : $2(-x + 1) = 3y - z \Leftrightarrow -2z - 3y + z + 2 = 0$; $\vec{n}_\alpha(-2, -3, 1)$

b. β : $3(x - 1) - y + 2(z + 1) = y + 2z - 1 \Leftrightarrow 3x - 3 - y + 2z + 2 - y - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y = 0$;
 $\vec{n}_\beta(3, -2, 0)$

c. γ : $y + \frac{2x - z}{3} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3x - z = 0$; $\vec{n}_\gamma(2, 3, -1)$

79.2 α e β são planos perpendiculares porque $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = (-2, -3, 1) \cdot (3, -2, 0) = 0$.

79.3 α e γ são planos paralelos porque $\vec{n}_\alpha = -\vec{n}_\gamma$. Como as equações dos planos não são equivalentes, os planos não são coincidentes.

80.1

a. \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} .

b. \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{CD} .

c. \overrightarrow{BF}

d. \overrightarrow{AE}

e. \overrightarrow{AD}

f. \overrightarrow{AB}

80.2 As retas de vetor diretor \overrightarrow{DH} , por exemplo DH não são perpendiculares ao plano ACF .

81.1 Paralelos ou coincidentes

81.2 Perpendiculares

81.3 Perpendiculares

81.4 Paralelos ou coincidentes

81.5 Paralelos ou coincidentes

PÁG. 200

Aplicar

$$84. \quad 2(x + y) - 2z = 2 - y \Leftrightarrow 2x + 3y - 2z - 2 = 0$$

A reta é paralela ao plano porque $(-2, 2, 1) \cdot (2, 3, -2) = 0$.

85.1 A reta não é paralela ao plano porque o vetor diretor da reta não é perpendicular ao vetor normal ao plano, $(-3, 2, 5) \cdot (1, 1, 1) = -3 + 2 + 5 = 2 \neq 0$.

$$85.2 \quad -3x + 2y + 5z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}$$

PÁG. 202

Aplicar

86.1 5

86.2 2

86.3 2

87. Começamos por escrever uma equação vetorial da reta r que passa no ponto E e é perpendicular ao plano ABC .

Como a reta r é perpendicular ao plano ABC , o vetor $\vec{n}(3, -2, 3)$, vetor normal a ABC , é um vetor diretor da reta r e, portanto, uma equação vetorial de r é:

$$(x, y, z) = (0, 2, -3) + k(3, -2, 3), \quad k \in \mathbb{R}$$

Em seguida, determinamos as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC , projeção ortogonal do ponto E no plano ABC , designado por E' .

Para tal, podemos escrever as coordenadas de um ponto genérico de r e substituir essas coordenadas na equação do plano ABC .

As coordenadas de um ponto genérico de r são $(3k, 2 - 2k, -3 + 3k)$, $k \in \mathbb{R}$ (para cada valor real de k , obtemos um ponto de r).

Substituindo na equação de ABC , tem-se:

$$3 \times 3k - 2(2 - 2k) + 3(-3 + 3k) + 2 = 0 \Leftrightarrow 9k - 4 + 4k - 9 + 9k + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 22k - 11 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Portanto, $E\left(3 \times \frac{1}{2}, 2 - 2 \times \frac{1}{2}, -3 + 3 \times \frac{1}{2}\right)$, ou seja, $E\left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$.

A distância do ponto E ao plano ABC é, então, dada por:

$$\overline{EE'} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 + (1 - 2)^2 + \left(-\frac{3}{2} + 3\right)^2} = \sqrt{\frac{22}{4}} = \frac{\sqrt{22}}{2}$$

88.1 Como o vetor diretor da reta CT é normal ao plano α , qualquer equação cartesiana do plano α é da forma $x - 2y + z + d = 0$.

Como o ponto de coordenadas $(6, -3, 10)$ pertence ao plano α , obtém-se

$$6 - 2(-3) + 10 + d = 0 \Leftrightarrow d = -22 \text{ e } x - 2y + z - 22 = 0.$$

88.2 O raio da esfera é a distância do ponto C ao ponto T .

Começamos por escrever uma equação vetorial da reta CT .

Como o plano α é tangente à esfera no ponto T , a reta CT é perpendicular ao plano α , o vetor $\vec{u}(1, -2, 1)$, vetor diretor da reta CT , é um vetor normal a α .

Uma equação vetorial de CT é: $(x, y, z) = (3, -1, 5) + k(1, -2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

Em seguida, determinamos as coordenadas do ponto T , ponto de interseção da reta CT com o plano α , projeção ortogonal do ponto C no plano α .

Para tal, podemos escrever as coordenadas de um ponto genérico de CT e substituir essas coordenadas na equação do plano α .

As coordenadas de um ponto genérico de CT são $(3 + k, -1 - 2k, 5 + k)$, $k \in \mathbb{R}$ (para cada valor real de k , obtemos um ponto de CT).

Substituindo na equação de α , tem-se:

$$\begin{aligned} 3 + k - 2(-1 - 2k) + 5 + k - 22 = 0 &\Leftrightarrow 3 + k + 2 + 4k + 5 + k - 22 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = 2 \end{aligned}$$

Portanto, $T(3 + 2, -1 - 2 \times 2, 5 + 2)$, ou seja, $T(5, -5, 7)$.

A distância do ponto C ao ponto T é, então, dada por:

$$\overline{CT} = \sqrt{(5 - 3)^2 + (-5 + 1)^2 + (7 - 5)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Logo, o volume da esfera é $V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{24})^3 = 64\sqrt{6}\pi$.

PÁG. 203

Aplicar +

1. As retas são paralelas porque têm a mesma inclinação (45°).

$$\mathbf{2.1} \quad m = \frac{2 - (-1)}{0 - 3} = -1; \operatorname{tg}^{-1}(-1) = -45^\circ; \alpha = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ.$$

$$\mathbf{2.2} \quad m = \frac{-2 - 0}{0 - 4} = \frac{1}{2}; \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 27^\circ; \beta \approx 180^\circ - 27^\circ = 153^\circ.$$

$$\mathbf{2.3} \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \approx 162^\circ$$

3.1 O declive da reta AB é $\operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$.

A ordenada do ponto C é a ordenada na origem da reta AB : $\sqrt{3} = \sqrt{3} \times 3 + b \Leftrightarrow b = -2\sqrt{3}$

3.2 O declive da reta BD é $\frac{-1 - \sqrt{3}}{0 - 3} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3}$, pelo que o declive da mediatriz do segmento de reta $[BD]$, que é perpendicular a reta BD , é $-\frac{1}{\frac{1 + \sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{1 + \sqrt{3}}$.

Logo, a inclinação da mediatriz do segmento de reta $[BD]$ é $\operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{3}{1 + \sqrt{3}}\right) + 180^\circ \approx 132,3^\circ$.

4.1 O declive da reta AB é $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$A(-2, 0)$, $0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Assim, uma equação da reta AB é

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3y + \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0.$$

4.2 O ponto Q pertence à circunferência e à reta AB :

$$\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{12}{9} - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{-1 - 3}{2} \vee x = \frac{-1 + 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(-2) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\sqrt{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

Como a abcissa de Q é positiva, concluímos que Q tem coordenadas $(1, -\sqrt{3})$.

Alternativamente:

Os únicos pontos comuns à reta AB e à circunferência são pontos $A(-2, 0)$ e o ponto Q . Assim, se o ponto de coordenadas $(1, -\sqrt{3})$ pertence à reta AB e à circunferência, então trata-se do ponto Q .

Substituindo $(1, -\sqrt{3})$ na equação da circunferência $(x^2 + y^2 = 2^2)$, obtém-se:

$$1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 2^2 \Leftrightarrow 1 + 3 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \rightarrow \text{Proposição verdadeira}$$

Substituindo $(1, -\sqrt{3})$ na equação da reta AB , obtém-se:

$$3 \times (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} \times 1 + 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \text{Proposição verdadeira}$$

Logo, as coordenadas de Q são $(1, -\sqrt{3})$.

PÁG. 204

Aplicar +

5. A reta de equação $y + x = -1 \Leftrightarrow y = -x - 1$ tem declive -1 e a reta de equação $(x, y) = (0, -1) + k(2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$ tem declive $\frac{2}{2} = 1$. Como $-1 \times 1 = -1$, concluímos que as retas são perpendiculares.

Opção correta: **(C)**

6. $A(2, 1)$, $B(0, 2)$, $C(-1, 1)$, $D(-1, -1)$, $E(1, -1)$.

6.1 As coordenadas de \overrightarrow{CB} são $(0 + 1, 2 - 1) = (1, 1)$, e as de \overrightarrow{BA} são $(2 - 0, 1 - 2) = (2, -1)$.

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} = 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 1$$

As coordenadas de \overrightarrow{DE} são $(1 + 1, -1 + 1) = (2, 0)$.

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \times 1 + 0 \times 1 = 2$$

6.2 $\overrightarrow{ED}(-2, 0)$ e as coordenadas de \overrightarrow{EA} são $(2 - 1, 1 + 1) = (1, 2)$.

$$\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EA} = -2 \times 1 + 0 \times 2 = -2$$

$$\|\overrightarrow{ED}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2, \quad \|\overrightarrow{EA}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos(\overrightarrow{ED} \hat{,} \overrightarrow{EA}) = \frac{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EA}}{\|\overrightarrow{ED}\| \times \|\overrightarrow{EA}\|} = \frac{-2}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(\overrightarrow{ED} \hat{,} \overrightarrow{EA}) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 116,6^\circ$$

6.3 $\overrightarrow{AB}(-2, 1)$ e as coordenadas de \overrightarrow{AE} são $(1 - 2, -1 - 1) = (-1, -2)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -2 \times (-1) + 1 \times (-2) = 0$, pelo que \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AE} são perpendiculares.

$$\mathbf{7.1} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(\overrightarrow{OA} \hat{,} \overrightarrow{OB}) = 3 \times 3 \times \cos(60^\circ) = 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = 4,5$$

$$\mathbf{7.2} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OC}\| \times \cos(\overrightarrow{OA} \hat{,} \overrightarrow{OC}) = 3 \times 3 \times \cos(120^\circ) = 3 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4,5$$

$$\mathbf{7.3} \quad \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OE}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(\overrightarrow{OE} \hat{,} \overrightarrow{OB}) = 3 \times 3 \times \cos(180^\circ) = 3 \times 3 \times (-1) = -9$$

$$\mathbf{7.4} \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BA}\| \times \cos(\overrightarrow{BC} \hat{,} \overrightarrow{BA}) = 3 \times 3 \times \cos(120^\circ) = 3 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4,5$$

7.5 A altura de cada triângulo é $\sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\vec{EA} \cdot \vec{EC} = \|\vec{EA}\| \times \|\vec{EC}\| \times \cos(\vec{EA} \hat{,} \vec{EC}) = 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \cos(60^\circ) = 3 \times 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = 13,5$$

7.6 $\vec{CB} \cdot \vec{BA} = \vec{CB} \cdot \vec{CO} = \|\vec{CB}\| \times \|\vec{CO}\| \times \cos(\vec{CB} \hat{,} \vec{CO}) = 3 \times 3 \times \cos(60^\circ) = 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = 4,5$

7.7 $\vec{FO} \cdot \vec{CA} = -\vec{FO} \cdot \vec{FD} = -\|\vec{FO}\| \times \|\vec{FD}\| \times \cos(\vec{FO} \hat{,} \vec{FD}) = -3 \times 3\sqrt{3} \times \cos(30^\circ) = -13,5$

7.8 $\vec{CA} \cdot \vec{BE} = 0$, dado que \vec{CA} e \vec{BE} são perpendiculares.

8.1 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\| \times \cos(\vec{OA} \hat{,} \vec{OB}) = 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{360^\circ}{5}\right) \approx 2,8$

8.2 $\frac{\overline{CD}}{3} = \text{sen}\left(\frac{72^\circ}{2}\right) \Leftrightarrow \overline{CD} = 6 \text{ sen}(36^\circ)$ (\overline{CD} é a medida do lado do pentágono).

$$\vec{CO} \cdot \vec{CD} = \|\vec{CO}\| \times \|\vec{CD}\| \times \cos(\vec{CO} \hat{,} \vec{CD}) = 3 \times 6 \text{ sen}(36^\circ) \times \cos\left(\underbrace{\frac{180^\circ - 72^\circ}{2}}_{54^\circ}\right) \approx 6,2$$

8.3 $\vec{DO} \cdot \vec{DC} = \|\vec{DO}\| \times \|\vec{DC}\| \times \cos(\vec{DO} \hat{,} \vec{DC}) = 3 \times 6 \text{ sen}(36^\circ) \times \cos(54^\circ) \approx 6,2$

8.4 $\vec{EA} \cdot \vec{ED} = \|\vec{EA}\| \times \|\vec{ED}\| \times \cos(\vec{EA} \hat{,} \vec{ED}) = 6 \text{ sen}(36^\circ) \times 6 \text{ sen}(36^\circ) \times \cos(2 \times 54^\circ) \approx -3,8$

8.5 $\vec{OA} \cdot \vec{DO} = -\vec{OA} \cdot \vec{OD} = -\|\vec{OA}\| \times \|\vec{OD}\| \times \cos(\vec{OA} \hat{,} \vec{OD}) = -3 \times 3 \times \cos(2 \times 72^\circ) \approx 7,3$

8.6 $\vec{OE} \cdot \vec{AD} = 0$, dado que \vec{OE} e \vec{AD} são perpendiculares.

9. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos(\vec{BA} \hat{,} \vec{BC}) = 2 \times 1 \times \cos(\vec{BA} \hat{,} \vec{BC})$

Como $90^\circ < \vec{BA} \hat{,} \vec{BC} < 180^\circ$, concluímos que $-1 < \cos(\vec{BA} \hat{,} \vec{BC}) < 0$ e, assim,

$$-2 < 2 \cos(\vec{BA} \hat{,} \vec{BC}) < 0 \Leftrightarrow -2 < \vec{BA} \cdot \vec{BC} < 0.$$

Opção correta: **(D)**

PÁG. 205

Aplicar +

10.1 $\overline{BG} = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + 4^2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{BG} &= -\vec{BA} \cdot \vec{BG} = -\|\vec{BA}\| \times \|\vec{BG}\| \times \cos(\vec{BA} \hat{,} \vec{BG}) = -4 \times 2\sqrt{2} \times \cos(45^\circ) = \\ &= -4 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -8 \end{aligned}$$

10.2 A altura de cada triângulo é $\sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ e a altura do octaedro é $\overline{EF} = \overline{BD} = 4\sqrt{2}$.

$$\overline{BE} \cdot \overline{FE} = \overline{EB} \cdot \overline{EF} = \|\overline{EB}\| \times \|\overline{EF}\| \times \cos(\widehat{EB, EF}) = 4 \times 4\sqrt{2} \times \cos(45^\circ) = 4 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

10.3 $\overline{CD} \cdot \overline{AF} = -\overline{AB} \cdot \overline{AF} = -\|\overline{AB}\| \times \|\overline{AF}\| \times \cos(\widehat{AB, AF}) = -4 \times 4 \times \cos(60^\circ) = -4 \times 4 \times \frac{1}{2} = -8$

10.4 $\overline{FG} \cdot \overline{CG} = 0$, dado que \overline{FG} e \overline{CG} são perpendiculares.

10.5 $\overline{AC} \cdot \overline{CF} = -\overline{CA} \cdot \overline{CF} = -\|\overline{CA}\| \times \|\overline{CF}\| \times \cos(\widehat{CA, CF}) = -4\sqrt{2} \times 4 \times \cos(45^\circ) =$
 $= -4\sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -16$

10.6 $\overline{DC} \cdot \overline{AB} = \|\overline{DC}\| \times \|\overline{AB}\| \times \cos(\widehat{DC, AB}) = 4 \times 4 \times \cos(0^\circ) = 16$

10.7 $\overline{CF} \cdot \overline{EC} = 0$, dado que \overline{CF} e \overline{EC} são perpendiculares ([AFCE] é um quadrado).

10.8 $\overline{FA} \cdot \overline{BM} = \overline{AF} \cdot \overline{AM} = \|\overline{FA}\| \times \|\overline{BM}\| \times \cos(\widehat{FA, BM}) = 4 \times 2 \times \cos(60^\circ) = 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4$

10.9 $\overline{BE} \cdot \overline{EN} = -\overline{EB} \cdot \overline{EN} = -\|\overline{EB}\| \times \|\overline{EN}\| \times \cos(\widehat{EB, EN}) = -4 \times 2\sqrt{3} \times \cos(30^\circ) =$
 $= -4 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -12$

11. $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{-4\sqrt{3}}{4 \times 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Opção correta: **(A)**

12. O triângulo [ABC] é equilátero de lado $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -\overline{BA} \cdot \overline{BC} = -\|\overline{BA}\| \times \|\overline{BC}\| \times \cos 60^\circ = -\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = -1$$

Opção correta: **(B)**

13. $M_{[AD]}\left(\frac{5}{2}, 1\right) \Leftrightarrow \frac{2+x_D}{2} = \frac{5}{2} \wedge \frac{3+y_D}{2} = 1 \Leftrightarrow x_D = 3 \wedge y_D = -1, D(3, -1)$

$$\overline{AB} \perp \overline{AD} \text{ e } \|\overline{AB}\| = \|\overline{AD}\|$$

$$\overline{AD}(1, -4), \overline{AB}(-4, -1)$$

$$B = A + \overline{AB} = (2, 3) + (-4, -1) = (-2, 2)$$

14. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2, -3) \cdot (v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow 2v_1 - 3v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = \frac{3}{2}v_2$

Opção correta: **(C)**

PÁG. 206

Aplicar +

15.

I. Verdadeira: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (6, k) \cdot (-1, 2) = 0 \Leftrightarrow -6 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

II. Falsa: O ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} é obtuso se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ e os vetores não são colineares.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow -6 + 2k < 0 \Leftrightarrow 2k < 6 \Leftrightarrow k < 3 \Leftrightarrow k \in]-\infty; 3[$$

Os vetores \vec{u} e \vec{v} são colineares se $\frac{6}{-1} = \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = -12$, pelo que o ângulo é obtuso se $k \in]-\infty; 3[\setminus\{-12\}$.

Opção correta: **(B)**

$$16.1 \quad \vec{AB}(6, 2), \vec{CB}(10, 4), \vec{AB} \cdot \vec{CB} = 6 \times 10 + 2 \times 4 = 60 + 8 = 68$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 4\sqrt{10}, \|\vec{CB}\| = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$\cos(\vec{AB}, \vec{CB}) = \frac{68}{\sqrt{40} \times \sqrt{116}}, (\vec{AB}, \vec{CB}) = \cos^{-1}\left(\frac{68}{\sqrt{40} \times \sqrt{116}}\right) \approx 3,4^\circ$$

$$16.2 \quad \text{O triângulo é retângulo em } A \text{ se } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow 6c + 6 - 4 = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}$$

$$\text{O triângulo é retângulo em } B \text{ se } \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow -6c + 30 + 8 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{19}{3}$$

$$\text{O triângulo é retângulo em } C \text{ se } \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Leftrightarrow -5 + c - 5c + c^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow c^2 - 4c + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow c = \frac{4 - 2}{2} \vee c = \frac{4 + 2}{2} \Leftrightarrow c = 1 \vee c = 3.$$

$$17. \text{ Seja } C(x, y). \text{ O triângulo é retângulo em } A \text{ se } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0.$$

As coordenadas de \vec{AB} são $(-1 - (-3), 2 - 1) = (2, 1)$ e as de \vec{AC} são $(x + 3, y - 1)$.

Assim, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow 2x + 6 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 5$, pelo que as coordenadas de C são da forma $(x, -2x - 5)$ e $\vec{AC}(x + 2, -2x - 6)$.

$$A_{[ABC]} = 25 \Leftrightarrow \frac{\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\|}{2} = 25 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{(x+3)^2 + (-2x-6)^2}}{2} = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (-2(x+3))^2} = \frac{50}{\sqrt{5}}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtém-se:

$$(x+3)^2 + 4(x+3)^2 = \frac{2500}{5} \Leftrightarrow 5(x+3)^2 = 500 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 100 \Leftrightarrow x+3 = \pm\sqrt{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 - 10 \vee x = -3 + 10 \Leftrightarrow x = -13 \vee x = 7$$

Assim, tem-se $C(-13, -2 \times (-13) - 5)$, ou seja, $C(-13, 21)$, ou $C(7, -2 \times (-7) - 5)$, ou seja, $C(7, -19)$.

$$18.1 \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = k^2 + k - k^2 + k + 2 = 2k + 2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} > 0 \Leftrightarrow 2k + 2 > 0 \Leftrightarrow k > -1 \Leftrightarrow k \in]-1, +\infty[$$

Opção correta: **(B)**

$$18.2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 2k^2 + k^2 - k - 2 = 3k^2 - k - 2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow 3k^2 - k - 2 < 0$$

Cálculo auxiliar:

$$3k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1-5}{6} \vee k = \frac{1+5}{6} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3} \vee k = 1$$

Como o gráfico de $y = 3k^2 - k - 2$ é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, tem-se que

$$3k^2 - k - 2 < 0 \Leftrightarrow k \in \left] -\frac{2}{3}, 1 \right[.$$

19.1

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{tg} \theta \times 1 + \operatorname{sen} \theta \times \frac{1}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \theta = 2 \operatorname{tg} \theta$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 12 \Leftrightarrow (2 \operatorname{tg} \theta)^2 = 12 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \theta = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3} \vee \operatorname{tg} \theta = \sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\theta \in [0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$19.2 \quad \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = \sqrt{60} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\sqrt{60} \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg} \theta = -\sqrt{60} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{60}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = -\sqrt{15}$$

$$\cos(\theta - \pi) + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta$$

$$(-\sqrt{15})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{16} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{16} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{15}{16} \quad \theta \in]0, \pi[\Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$-\cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{4} + 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{2\sqrt{15} + 1}{4}$$

$$19.3 \quad \vec{u} + \vec{v} \text{ tem coordenadas } \left(\operatorname{tg} \theta + 1, \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right).$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \left(\operatorname{tg} \theta + 1, \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) \cdot (1, -\operatorname{sen} \theta) =$$

$$= \operatorname{tg} \theta + 1 + \left(\operatorname{sen} \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) (-\operatorname{sen} \theta) = \operatorname{tg} \theta + 1 - \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta + 1 - \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{tg} \theta =$$

$$= 1 - \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - (1 - \cos^2 \theta) = \cos^2 \theta \neq 0 \text{ para todo } \theta \in [0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}.$$

PÁG. 207

Aplicar +

$$20. \quad \vec{AB} \cdot (\vec{AC} + \vec{BC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{AB, AC}) + 0 =$$

$$= a \times c \times \cos \alpha = a \times c \times \frac{a}{c} = a^2$$

Opção correta: **(B)**

$$\begin{aligned} \mathbf{21.1} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -7 &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = -7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = -7 \Leftrightarrow 3^2 - \|\vec{v}\|^2 = -7 \Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = 16 \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = 4 \\ &\qquad\qquad\qquad \|\vec{v}\| > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{21.2} \quad \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 22 &\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 22 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} + \|\vec{v}\|^2 = 22 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 22 - 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 6 \end{aligned}$$

$$\cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = \frac{6}{3 \times 4} = \frac{1}{2}, \quad (\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Opção correta: **(B)**

$$\mathbf{22.1} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = 3 \times 6 \times \cos(120^\circ) = 3 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -9$$

$$\begin{aligned} \mathbf{22.2} \quad (\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{u}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} - 3\vec{v} \cdot \vec{v} - 3\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 - 3\|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= 3^2 - 3 \times 6^2 - 2 \times (-9) = -81 \end{aligned}$$

$$\mathbf{22.3} \quad \cos((\vec{u} + 2\vec{v}) \hat{\ } \vec{u}) = \frac{(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{u}}{\|\vec{u} + 2\vec{v}\| \times \|\vec{u}\|}$$

$$(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 3^2 + 2 \times (-9) = -9$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + 2\vec{v}\| &= \sqrt{(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v})} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (2\vec{v}) + (2\vec{v}) \cdot \vec{u} + (2\vec{v}) \cdot (2\vec{v})} = \\ &= \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2} = \sqrt{3^2 + 4(-9) + 4 \times 6^2} = \sqrt{117} \end{aligned}$$

$$\cos((\vec{u} + 2\vec{v}) \hat{\ } \vec{u}) = \frac{(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{u}}{\|\vec{u} + 2\vec{v}\| \times \|\vec{u}\|} = \frac{-9}{\sqrt{117} \times 3} = -\frac{3}{\sqrt{117}}$$

$$((\vec{u} + 2\vec{v}) \hat{\ } \vec{u}) = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{117}}\right) \approx 106,1^\circ$$

$$\begin{aligned} \mathbf{22.4} \quad (k\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + k\vec{v}) &= 2k\vec{u} \cdot \vec{u} + k^2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} - k\vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= 2k\|\vec{u}\|^2 + (k^2 - 2)\vec{u} \cdot \vec{v} - k\|\vec{v}\|^2 = 2k \times 3^2 + (k^2 - 2) \times (-9) - k \times 6^2 = \\ &= 18k - 9k^2 + 18 - 36k = -9k^2 - 18k + 18 \end{aligned}$$

Os vetores são perpendiculares se $-9k^2 - 18k + 18 = 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow k = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow k = -1 - \sqrt{3} \vee k = -1 + \sqrt{3}$$

$$\mathbf{23.} \quad \vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = 12 \Leftrightarrow -2\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -6$$

$$\cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-6}{6} = -1, \quad (\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = \cos^{-1}(-1) = \pi, \text{ ou seja, o ângulo é raso.}$$

Opção correta: **(C)**

$$24.1 \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = 4 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = 4 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{u}\|^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - \|\vec{u}\|^2$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4 - \|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(4 - \|\vec{u}\|^2) = \|\vec{u}\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 - 3\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \Leftrightarrow 12 = 4\|\vec{u}\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = 3 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{3} \quad \|\vec{u}\| > 0$$

Logo, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - \sqrt{3}^2 = 1$

$$24.2 \quad (-3\vec{v}) \cdot \left(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) = -3\vec{v} \cdot \vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v} \cdot \vec{v} = -3\vec{u} \cdot \vec{v} - \frac{3}{2}\|\vec{v}\|^2 = -3 \times 1 - \frac{3}{2} \times (\sqrt{3})^2 = -3 - \frac{9}{2} = -\frac{15}{2}$$

PÁG. 208

Aplicar +

$$25. \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 6^2 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 36 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 36 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 36 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{(I)}$$

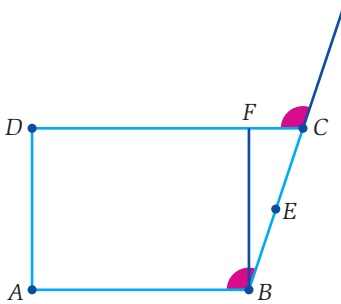
$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (3\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 27 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 27 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 27 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), resulta

$$36 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 27 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 36 - 27 \Leftrightarrow 4\vec{u} \cdot \vec{v} = 9 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{9}{4}$$

26.



$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 40 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{40} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2\sqrt{10} \quad \overline{BC} > 0$$

$$\overline{AE} \cdot \overline{BD} = (\overline{AB} + \overline{BE}) \cdot (\overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BE} \cdot \overline{BC} + \overline{BE} \cdot \overline{CD} =$$

$$= \|\overline{AB}\| \times \|\overline{BC}\| \times \cos(\widehat{AB, BC}) + \|\overline{AB}\| \times \|\overline{CD}\| \times \cos(\widehat{AB, CD}) +$$

$$+ \|\overline{BE}\| \times \|\overline{BC}\| \times \cos(\widehat{BE, BC}) + \|\overline{BE}\| \times \|\overline{CD}\| \times \cos(\widehat{BE, CD}) =$$

$$= -8 \times 2\sqrt{10} \times \cos(90^\circ + \widehat{CBF}) + 8 \times 10 \times \cos(180^\circ) +$$

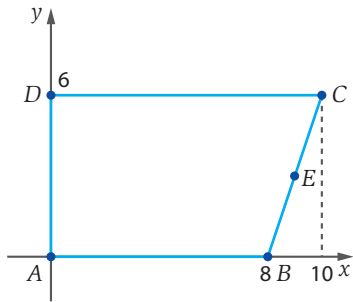
$$+ \frac{2\sqrt{10}}{2} \times 2\sqrt{10} \times \cos(0^\circ) + \frac{2\sqrt{10}}{2} \times 10 \times \cos(90^\circ + \widehat{CBF}) =$$

$$= 16\sqrt{10} \times \text{sen}(\widehat{CBF}) + 80 \times (-1) + 2 \times 10 \times 1 - 10\sqrt{10} \times \text{sen}(\widehat{CBF}) =$$

$$= 16\sqrt{10} \times \frac{2}{2\sqrt{10}} - 80 + 20 - 10\sqrt{10} \times \frac{2}{2\sqrt{10}} = 16 - 80 + 20 - 10 = -54$$

Alternativamente

Consideremos a figura representada, em referencial o.n. Oxy , em que A é a origem do referencial, B pertence ao semieixo positivo Ox e D pertence ao semieixo positivo Oy .



Assim, $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(10, 6)$, $D(0, 6)$ e $E\left(\frac{8+10}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$, ou seja, $E(9, 3)$.

Portanto, $\vec{AE}(9, 3)$ e $\vec{BD}(-8, -6)$, pelo que $\vec{AE} \cdot \vec{BD} = 9 \times (-8) + 3 \times 6 = -54$.

Opção correta: **(D)**

27. Designemos por a a medida do lado do quadrado $[ABCD]$.

$$\begin{aligned}\vec{CF} \cdot \vec{BG} &= (\vec{CB} + \vec{BF}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AG}) = \vec{CB} \cdot \vec{BA} + \vec{CB} \cdot \vec{AG} + \vec{BF} \cdot \vec{BA} + \vec{BF} \cdot \vec{AG} = \\ &= 0 + a \times \frac{1}{2}a \times \cos(180^\circ) + a \times \frac{1}{2}a \times \cos(0^\circ) + 0 = \frac{a^2}{2} \times (-1) + \frac{a^2}{2} \times 1 = 0\end{aligned}$$

Logo, \vec{CF} e \vec{BG} são vetores perpendiculares.

28. $\vec{AG} \cdot \vec{EC} = \|\vec{AG}\| \times \|\vec{EC}\| \times \cos(\widehat{AG, EC})$

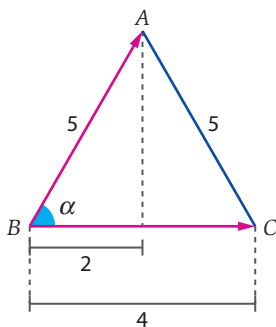
A área da região sombreada é dada por

$$\frac{E\widehat{A}F \times \overline{AE}^2}{2} - \frac{E\widehat{A}F \times \overline{AC}^2}{2} = \frac{E\widehat{A}F \times (4\sqrt{2})^2}{2} - \frac{E\widehat{A}F \times (\sqrt{2})^2}{2} = \frac{30E\widehat{A}F}{2}.$$

$$\frac{30E\widehat{A}F}{2} = \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow E\widehat{A}F = \frac{5\pi}{30} \Leftrightarrow E\widehat{A}F = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}\vec{AG} \cdot \vec{EC} &= -\vec{AG} \cdot \vec{CE} = -\|\vec{AG}\| \cdot \|\vec{CE}\| \times \cos(E\widehat{A}F) = -\sqrt{2} \times (4\sqrt{2} - \sqrt{2}) \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ &= -\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3}\end{aligned}$$

29. Como o perímetro do triângulo $[ABC]$ é 14 e $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$, então $\overline{BC} = 14 - 5 - 5 = 4$.



Seja $\alpha = \widehat{ABC}$. Tem-se $\cos \alpha = \frac{2}{5}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\alpha) = -5 \times 4 \times \frac{2}{5} = -8$$

Opção correta: **(B)**

30. Por um lado tem-se:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{DM} &= (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM}) = \\ &= \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} \\ &= 0 + 0 + \underbrace{\|\overrightarrow{AB}\|}_{\overline{AB}} \times \underbrace{\|\overrightarrow{DC}\|}_{\overline{AB}} \times \cos(0^\circ) + 0 + 0 + \underbrace{\|\overrightarrow{BM}\|}_{\frac{\overline{AB}}{2}} \times \underbrace{\|\overrightarrow{CM}\|}_{\frac{\overline{AB}}{2}} \times \cos(180^\circ) \\ &= \overline{AB} \times \overline{AB} \times 1 + \frac{\overline{AB}}{2} \times \frac{\overline{AB}}{2} \times (-1) = \overline{AB}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4} = \frac{3}{4}\overline{AB}^2 \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se:

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB}^2 \times \overline{AF} \Leftrightarrow v = \overline{AB}^2 \times a \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{v}{a}$$

Conclui-se que:

$$\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{DM} = \frac{3}{4} \times \frac{v}{a} = \frac{3v}{4a}$$

PÁG. 209

Aplicar +

31.1 O declive da reta t é $\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e o declive da reta u é $-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$.

Como a reta u interseca o eixo Ox no ponto A , de coordenadas $(5, 0)$,

$$0 = -\sqrt{3} \times 5 + b \Leftrightarrow b = 5\sqrt{3}.$$

Logo, a equação reduzida da reta u é $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.

31.2 Sabendo que B tem abcissa 4, a sua ordenada é $y = -\sqrt{3} \times 4 + 5\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

A ordenada na origem da reta t é $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e a sua equação reduzida é

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Como o ponto C é o ponto de interseção da reta t com o eixo Ox , a sua abcissa

$$\text{é } \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

32.1 $2x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 3$

$$-1 = -2 \times 5 + b \Leftrightarrow b = 9$$

$$s: y = -2x + 9$$

A sua inclinação é $\operatorname{tg}^{-1}(-2) + 180^\circ \approx 116,6^\circ$.

32.2 $m = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$, pelo que as coordenadas um vetor diretor da reta pedida são $(2, 1)$.

$$(x, y) = (0, 3) + k(2, 1), k \in \mathbb{R}$$

32.3 A reta t tem declive $\frac{9}{4}$ e as retas perpendiculares a t têm declive $-\frac{1}{\frac{9}{4}} = -\frac{4}{9}$ e equação reduzida

$$\text{da forma } y = -\frac{4}{9}x + b.$$

A reta que contém o ponto de coordenadas $(6, 0)$ tem ordenada na origem $0 = -\frac{4}{9} \times 6 + b \Leftrightarrow b = \frac{8}{3}$.

A equação pedida é $y = -\frac{4}{9}x + \frac{8}{3}$.

32.4 Um vetor diretor da reta r é $(1, -2)$.

$$\cos(\hat{r}, \hat{t}) = \frac{|(1, -2) \cdot (4, 9)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \times \sqrt{4^2 + 9^2}} = \frac{14}{\sqrt{5} \times \sqrt{97}}, \quad (\hat{r}, \hat{t}) = \cos^{-1}\left(\frac{14}{\sqrt{5} \times \sqrt{97}}\right) \approx 0,9 \text{ rad}$$

32.5 O ponto B tem coordenadas da forma $(-3 + 4k, 7 + 9k)$, $k \in \mathbb{R}$ e o vetor \overrightarrow{BC} tem coordenadas $(-6 - (-3 + 4k), 2 - (7 + 9k))$, $k \in \mathbb{R}$, ou seja, $(-3 - 4k, -5 - 9k)$, $k \in \mathbb{R}$.

A reta BC tem declive $\frac{-5 - 9k}{-3 - 4k}$, $k \in \mathbb{R}$ e as retas BC e r são perpendiculares se

$$\frac{-5 - 9k}{-3 - 4k} \times (-2) = -1 \Leftrightarrow \frac{-5 - 9k}{-3 - 4k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(-5 - 9k) = -3 - 4k \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Assim, as coordenadas de B são $(-3 + 4(-\frac{1}{2}), 7 + 9(-\frac{1}{2}))$, ou seja, $(-5, \frac{5}{2})$.

33. $x = \frac{y}{a^2} + 3 \Leftrightarrow y = a^2x - 3a^2$, pelo que o declive a reta s é dado por a^2 .

O declive da reta r é $\frac{a}{8}$.

As retas r e s são perpendiculares se $\frac{a}{8} \times a^2 = -1 \Leftrightarrow a^3 = -8 \Leftrightarrow a = -2$.

Opção correta: **(A)**

34. A reta AB tem declive $\frac{5}{2}$. Como a mediatriz de um segmento de reta é uma reta perpendicular ao segmento, concluímos que a mediatriz de $[AB]$ tem declive $-\frac{1}{\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}$.

Opção correta: **(D)**

PÁG. 210

Aplicar +

35.1 Como a circunferência é tangente aos eixos coordenados, o seu centro, A , tem coordenadas (a, a) , com $a > 0$.

O ponto A pertence à reta r :

$$(a, a) = (0, 1) + k(8, 4), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 + 8k \\ a = 1 + 4k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8k = 1 + 4k \\ \text{---} \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ a = 8 \times \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ a = 2 \end{cases}$$

Assim, $A(2, 2)$.

35.2 A circunferência está centrada em $A(2, 2)$ e tem raio 2: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

35.3 A reta r tem declive $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ e a reta t tem declive $-\frac{1}{2} = -2$ e a sua equação reduzida é da

forma $y = -2x + b$.

Substituindo as coordenadas do ponto A , que pertence à reta t , $2 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 6$.

A equação pedida é $y = -2x + 6$.

36.1 $(-2 - 1)^2 + (y + 2)^2 = 34 \Leftrightarrow (y + 2)^2 = 25 \Leftrightarrow y + 2 = -5 \vee y + 2 = 5 \Leftrightarrow y = -7 \vee y = 3$

Como A pertence ao segundo quadrante, concluímos que a sua ordenada é 3.

A reta AC tem declive $\frac{-2 - 3}{1 + 2} = -\frac{5}{3}$ e inclinação $\text{tg}^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) + 180^\circ \approx 121^\circ$.

36.2 Como a reta tangente à circunferência no ponto A é perpendicular a AC ($[AC]$ é um raio da circunferência), o seu declive é $-\frac{1}{-\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$ e a sua equação reduzida é da forma $y = \frac{3}{5}x + b$.

Substituindo as coordenadas do ponto A , $3 = \frac{3}{5} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = \frac{21}{5}$.

A equação pedida é $y = \frac{3}{5}x + \frac{21}{5}$.

37.1 declive: $-\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$, ordenada na origem: $2 = 3 \times (-5) + b \Leftrightarrow b = 17$

Equação reduzida da reta: $y = 3x + 17$; inclinação: $\text{tg}^{-1}(3) \approx 72^\circ$.

37.2 $\cos \alpha = \frac{|(3, -1) \cdot (2, 2)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \times \sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{10} \times \sqrt{8}} = \frac{4}{\sqrt{80}} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Leftrightarrow \text{tg}^2 \alpha + 1 = 5 \Leftrightarrow \text{tg}^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow \text{tg} \alpha = 2$
 $\text{tg} \alpha > 0$

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \text{sen} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$
 $\text{sen} \alpha > 0$

$\text{sen} \alpha + \text{tg}(\pi - \alpha) = \text{sen} \alpha - \text{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} - 2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} - 2 = \frac{2\sqrt{5} - 10}{5}$

37.3 Como o ponto P pertence à reta definida por $y + 3x = 0$, as suas coordenadas são da forma $(x, -3x)$.

Como B é o ponto onde a reta r interseca o eixo Oy , as suas coordenadas são $(0, 6)$.

O triângulo $[APB]$ é retângulo em P se

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 &\Leftrightarrow (-5 - x, 2 + 3x) \cdot (0 - x, 6 + 3x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x(-5 - x) + (2 + 3x) \cdot (6 + 3x) = 0 \Leftrightarrow 5x + x^2 + 12 + 6x + 18x + 9x^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10x^2 + 29x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \times 10 \times 12}}{2 \times 10} \Leftrightarrow x = \frac{-29 \pm 19}{20} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-29 - 19}{20} \vee x = \frac{-29 + 19}{20} \Leftrightarrow x = -\frac{12}{5} \vee x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim, a ordenada de P é $-3 \times \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{36}{5}$ ou é $-3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

Logo, $P\left(-\frac{12}{5}, \frac{36}{5}\right)$ ou $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

PÁG. 211

Aplicar +

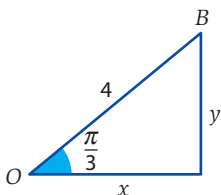
$$\begin{aligned} \mathbf{38.1} \quad \|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\|^2 &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = \\ &= \|\overrightarrow{OA}\|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \|\overrightarrow{OB}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + \|\overrightarrow{OB}\|^2 = \\ &= \overline{OA}^2 - 2\overline{OA} \times \overline{OB} \times \cos \alpha + (\overline{OB})^2 \underset{\overline{OA} = \frac{\overline{OB}}{2}}{=} \left(\frac{\overline{OB}}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{\overline{OB}}{2} \times \overline{OB} \times \cos \alpha + \overline{OB}^2 = \\ &= \frac{\overline{OB}^2}{4} - \overline{OB}^2 \times \cos \alpha + \overline{OB}^2 = \frac{5\overline{OB}^2}{4} - \overline{OB}^2 \times \cos \alpha \end{aligned}$$

$$1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{7}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{16} \underset{\alpha \text{ agudo}}{\Leftrightarrow} \cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\|^2 = \frac{5\overline{OB}^2}{4} - \overline{OB}^2 \times \cos \alpha = \frac{5\overline{OB}^2}{4} - \overline{OB}^2 \times \frac{3}{4} = \frac{2\overline{OB}^2}{4} = \frac{\overline{OB}^2}{2}$$

38.2

a.



$$B(x, y), \frac{x}{4} = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 4 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \text{ e } \frac{y}{4} = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow y = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{3}$$

$$B(2, 2\sqrt{3})$$

A reta OB tem declive $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ e as retas perpendiculares à reta OB têm declive $-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, pelo que têm equação reduzida da forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

Substituindo as coordenadas do ponto B , $2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

A equação pedida é $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

b. A equação da reta OB é $y = \sqrt{3}x$.

$P(x_p, y_p)$ e $M_{[PQ]} \left(\frac{x_p + \sqrt{3}}{2}, \frac{y_p - 9}{2} \right)$

O ponto médio do segmento $[PQ]$ pertence à reta OB :

$$\frac{y_p - 9}{2} = \sqrt{3} \frac{x_p + \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{y_p - 9}{2} = \frac{\sqrt{3}x_p + 3}{2} \Leftrightarrow y_p = \sqrt{3}x_p + 12$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 &\Leftrightarrow (2, 2\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} - x_p, -9 - y_p) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2(\sqrt{3} - x_p) + 2\sqrt{3}(-9 - y_p) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} - 2x_p - 18\sqrt{3} - 2\sqrt{3}y_p = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x_p + 2\sqrt{3}y_p + 16\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

Como $y_p = \sqrt{3}x_p + 12$, tem-se:

$$2x_p + 2\sqrt{3}(\sqrt{3}x_p + 12) + 16\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2x_p + 6x_p + 24\sqrt{3} + 16\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x_p = -5\sqrt{3}$$

$$y_p = \sqrt{3}(-5\sqrt{3}) + 12 = -3$$

Logo, $P(-5\sqrt{3}, -3)$.

39.1 $A(3, 0, 0)$, $C(0, 7, 0)$ e $D(0, 7, 2)$.

\overrightarrow{AD} tem coordenadas $(0 - 3, 7 - 0, 2 - 0)$, ou seja, $\overrightarrow{AD}(-3, 7, 2)$.

\overrightarrow{DB} tem coordenadas $(3 - 0, 7 - 7, 0 - 2)$, ou seja, $\overrightarrow{DB}(3, 0, -2)$.

$$\mathbf{39.2} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = -3 \times 3 + 7 \times 0 + 2 \times (-2) = -13$$

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{62}, \quad \|\overrightarrow{DB}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos(\widehat{AD, DB}) = \frac{|-13|}{\sqrt{62} \times \sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{62} \times \sqrt{13}}, \quad (\widehat{AD, DB}) = \cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{62} \times \sqrt{13}}\right) \approx 63^\circ$$

40.1

a. $z = 2$, pois os pontos A , B e C têm todos cota igual a 2.

b. $x + z = 0$, pois, nos pontos O , C e D a soma da abcissa com a cota é sempre nula.

40.2 \overrightarrow{AC} tem coordenadas $(-2 - 0, 5 - 0, 2 - 2)$, ou seja, $\overrightarrow{AC}(-2, 5, 0)$.

$$(x, y, z) = (0, 0, 2) + k(-2, 5, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$40.3 \cos(\widehat{BOD}) = \frac{(0, 5, 2) \cdot (-2, 0, 2)}{\sqrt{5^2 + 2^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{29} \times \sqrt{8}};$$

$$(\widehat{BOD}) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{29} \times \sqrt{8}}\right) \approx 75^\circ.$$

40.4 Uma reta que é perpendicular ao plano OAC tem a direção de um vetor normal ao plano.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, um vetor normal ao plano OAC .

$$\vec{n} \cdot \vec{OA} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{OC} = 0 \Leftrightarrow 2c = 0 \wedge -2a + 5b + 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0 \wedge b = \frac{2}{5}a$$

Assim, tem-se $\vec{n}\left(a, \frac{2}{5}a, 0\right)$ e para $a = 5$, por exemplo, $\vec{n}(5, 2, 0)$.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(5, 2, 0), k \in \mathbb{R}$$

40.5 $\vec{AB} = \vec{DC}$, tem coordenadas $(0, 5, 0)$; $\vec{AD} = \vec{BC}$, tem coordenadas $(-2, 0, 0)$; $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$. Logo, $[ABCD]$ é um retângulo.

PÁG. 212

Aplicar +

$$41.1 \quad 2 \times 0 + 3y - 5 \times 0 = 21 \Leftrightarrow y = 7, B(0, 7, 0)$$

\vec{AB} tem coordenadas $(1 + 1, 3 - 0, -2 - 3)$, ou seja, $\vec{AB}(2, 3, -5)$.

\vec{AC} tem coordenadas $(0 + 1, 7 - 0, 0 - 3)$, ou seja, $\vec{AC}(1, 7, -3)$.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, um vetor normal ao plano ABC .

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (2, 3, -5) = 0 \wedge (a, b, c) \cdot (1, 7, -3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b - 5c = 0 \\ a + 7b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(7b + 3c) + 3b - 5c = 0 \\ a = 7b + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 11b \\ a = 26b \end{cases}$$

Assim, $\vec{n}(26b, b, 11b)$ e para $b = 1$, por exemplo, $\vec{n}(26, 1, 11)$.

Uma equação do plano ABC é da forma $26x + y + 11z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto A , $26(-1) + 0 + 11 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$.

A equação pedida é $26x + y + 11z = 7$.

$$41.2 \quad \vec{u} = \vec{OB} + (k^2, -5 - k, 1) = (1, 3, -2) + (k^2, -5 - k, 1) = (1 + k^2, -2 - k, -1)$$

Os vetores \vec{AB} e \vec{u} formam um ângulo agudo, nulo ou reto se $\vec{AB} \cdot \vec{u} \geq 0$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = (2, 3, -5) \cdot (1 + k^2, -2 - k, -1) = 2(1 + k^2) + 3(-2 - k) - 5 \times (-1) = 2k^2 - 3k + 1$$

$$2k^2 - 3k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow k = \frac{3 - 1}{4} \vee k = \frac{3 + 1}{4} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \vee k = 1$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} \geq 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 3k + 1 \geq 0$$

Como o gráfico de $y = 2k^2 - 3k + 1$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima, tem-se

$$2k^2 - 3k + 1 \geq 0 \Leftrightarrow k \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[.$$

41.3 Começamos por escrever uma equação vetorial da reta r que passa no ponto A e é perpendicular ao plano β .

Como a reta r é perpendicular ao plano β , o vetor $\vec{n}(2, 3, -5)$, vetor normal a β , é um vetor diretor da reta r e, portanto, uma equação vetorial de r é:

$$(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(2, 3, -5), k \in \mathbb{R}$$

Em seguida, determinamos as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano β , projeção ortogonal do ponto A no plano β , designado por A' .

Para tal, podemos escrever as coordenadas de um ponto genérico de r e substituir essas coordenadas na equação do plano β .

As coordenadas de um ponto genérico de r são $(-1 + 2k, 3k, 3 - 5k)$, $k \in \mathbb{R}$ (para cada valor real de k , obtemos um ponto de r).

Substituindo na equação de β , tem-se:

$$2 \times (-1 + 2k) + 3(3k) - 5(3 - 5k) = 21 \Leftrightarrow -2 + 4k + 9k - 15 + 25k = 21 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 38k = 38 \Leftrightarrow k = 1$$

Portanto, $A'(-1 + 2 \times 1, 3 \times 1, 3 - 5 \times 1)$, ou seja, $A'(1, 3, -2)$.

A distância do ponto A ao plano β é, então, dada por:

$$\overline{AA'} = \sqrt{(1 + 1)^2 + (3 - 0)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{38}$$

42.1 \overrightarrow{AB} tem coordenadas $(1 - 2, 1 - 1, 2 - 1)$, ou seja, $\overrightarrow{AB}(-1, 0, 1)$.

\overrightarrow{AD} tem coordenadas $(6 - 2, 3 - 1, 0 - 1)$, ou seja, $\overrightarrow{AD}(3, 2, -1)$.

Os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AD} não são colineares: $\frac{3}{-1} \neq \frac{-1}{1}$.

Assim, as retas AB e AD não são paralelas.

As retas AB e AD interseçam-se no ponto A .

Logo, as retas AB e AD definem um plano.

42.2 $\overrightarrow{AB}(-1, 0, 1)$

\overrightarrow{CD} tem coordenadas $(6 + 3, 3 + 3, 0 - 0) = (9, 6, 0)$.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, um vetor normal ao plano que contém as retas AB e CD .

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \wedge (a, b, c) \cdot (9, 6, 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = 0 \\ 9a + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = -\frac{3}{2}a \end{cases}$$

Assim, tem-se $\vec{n}\left(a, -\frac{3}{2}a, a\right)$ e, para $a = 2$, $\vec{n}(2, -3, 2)$.

Uma equação do plano que contém as retas AB e CD é da forma $2x - 3y + 2z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto A ,

$$2 \times 2 - 3 \times 1 + 2 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3.$$

A equação pedida é $2x - 3y + 2z - 3 = 0$.

43.1 $y = 1$

43.2 Uma equação do plano é da forma $-3x + 5y + 8z + d = 0$ (o vetor $\vec{u}(-3, 5, 8)$, vetor diretor da reta, é vetor normal ao plano).

Substituindo as coordenadas do ponto C , $-3(-7) + 5(-8) + 8 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -5$.

A equação pedida é $-3x + 5y + 8z - 5 = 0$.

43.3 $2y + z = 2 - 5x - y \Leftrightarrow 5x + 3y + z - 2 = 0$

Uma equação do plano é da forma $5x + 3y + z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto D , $5 \times 0 + 3(-9) + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 26$.

A equação pedida é $5x + 3y + z + 26 = 0$.

43.4 Seja $R(1, 1, 2)$ (ponto da reta r).

Os vetores \vec{RE} , de coordenadas $(2 - 1, -3 - 1, 1 - 2) = (1, -4, -1)$, e $\vec{r}(2, 0, -5)$ são dois vetores não colineares paralelos ao plano.

Assim, um vetor $\vec{n}(a, b, c)$ perpendicular a \vec{RE} e a \vec{r} é vetor normal ao plano, pelo que:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{RE} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 4b - c = 0 \\ 2a - 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 4b - \frac{2}{5}a = 0 \\ c = \frac{2}{5}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4b + \frac{3}{5}a = 0 \\ c = \frac{2}{5}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{20}a \\ c = \frac{2}{5}a \end{cases}$$

Assim, para $a = 20$, por exemplo, obtemos $\vec{n}(20, 3, 8)$.

Logo, uma equação do plano é da forma $20x + 3y + 8z + d = 0$.

Como o ponto $E(2, -3, 1)$ pertence ao plano, substituindo na sua equação, tem-se $20 \times 2 + 3 \times (-3) + 8 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -39$, pelo que uma equação cartesiana do plano é $20x + 3y + 8z - 39 = 0$.

43.5 Sejam $\vec{r}(-2, 6, -4)$ e $\vec{s}(1, -3, 2)$ vetores diretores de r e s . O facto de um vetor ser perpendicular a \vec{r} e a \vec{s} não garante que seja perpendicular ao plano, dado que \vec{r} e \vec{s} são colineares.

É necessário, portanto, obter as coordenadas de um vetor não colinear a \vec{r} e \vec{s} , com a direcção de uma reta do plano concorrente às duas retas paralelas.

Para tal, podemos considerar um vetor \vec{RS} , sendo R e S pontos das retas r e s , respetivamente. Por exemplo, o vetor \vec{RS} de coordenadas $(0 - 1, 2 - 1, -4 - 2) = (-1, 1, -6)$.

Determinemos, agora, um vetor $\vec{n}(a, b, c)$ perpendicular a dois vetores não colineares paralelos ao plano, \vec{r} e \vec{RS} , por exemplo: $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{RS} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 6b - 4c = 0 \\ -a + b - 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b - 2c = 0 \\ a = b - 6c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(b - 6c) + 3b - 2c = 0 \\ a = b - 6c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2c \\ a = -2c - 6c \end{cases}$$

Assim, para $c = 1$, por exemplo, obtemos $\vec{n}(-8, -2, 1)$.

Logo, uma equação do plano é da forma $-8x - 2y + z + d = 0$.

Como o ponto de coordenadas $(0, 2, -4)$ pertence ao plano, substituindo na sua equação, tem-se $-8 \times 0 - 2 \times 2 + (-4) + d = 0 \Leftrightarrow d = 8$, pelo que uma equação cartesiana do plano é $-8x - 2y + z + 8 = 0 \Leftrightarrow 8x + 2y - z - 8 = 0$.

$$44. \quad 2(x + y) = ax - z + 1 \Leftrightarrow 2x + 2y - ax + z - 1 = 0 \Leftrightarrow (2 - a)x + 2y + z - 1 = 0$$

O plano α é paralelo ao eixo Ox se o vetor normal ao plano é perpendicular ao vetor que dá a direção ao eixo.

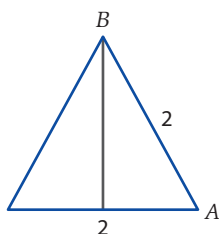
$$(2 - a, 2, 1) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Leftrightarrow 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Opção correta: **(B)**

PÁG. 213

Aplicar +

45.1



A altura do triângulo $[OAB]$ é $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

$$O(0, 0, 0), B(0, 1, \sqrt{3}), C(-5, 1, \sqrt{3}), D(-5, 0, 0), E(-5, 2, 0)$$

45.2 $\vec{OB}(0, 1, \sqrt{3}), \vec{DE}(0, 2, 0), \vec{CA}(5, 1, -\sqrt{3}), \vec{DE} - \vec{CA}$ tem coordenadas $(0 - 5, 2 - 1, 0 - (-\sqrt{3})) = (-5, 1, \sqrt{3})$.

$$\vec{OB} \cdot (\vec{DE} - \vec{CA}) = 0(-5) + 1 \times 1 + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 4$$

$$45.3 \quad V_{[ABCDE]} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} \times 5 = 5\sqrt{3}$$

$$45.4 \quad (x, y, z) = (0, 1, \sqrt{3}) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$$

45.5 Seja M o ponto médio de $[AB]$: tem-se $M\left(\frac{0+0}{2}, \frac{2+1}{2}, \frac{0+\sqrt{3}}{2}\right)$, ou seja, $M\left(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

O vetor $\vec{OM}\left(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ é normal ao plano ABC .

Uma equação do plano ABC é da forma $0x + \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z + d = 0$.

Como o ponto de coordenadas $(0, 0, 0)$ pertence ao plano, substituindo na sua equação, tem-se $\frac{3}{2} \times 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$.

Assim, uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano que contém a face $[ABCE]$ é e contém a origem do referencial é $\frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \Leftrightarrow 3y + \sqrt{3}z = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}y + z = 0$.

46. O vetor normal ao plano tem coordenadas $(0, 1, 1)$, pelo que o plano α é perpendicular ao plano yOz (um vetor normal a $yOz : x = 0$ tem coordenadas $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1) \cdot (1, 0, 0) = 0$).

Opção correta: **(B)**

47. Os vetores $(1, 3, 4)$ e $(-3, 3, 4)$ não são colineares nem perpendiculares.

Opção correta: **(D)**

48. Os vetores $(2, 3, -4)$ e $(-2, -3, 4)$ são colineares.

Opção correta: **(A)**

49. O vetor normal ao plano tem coordenadas $(2, 1, 1)$.

A reta é paralela ao plano se $(2, 1, 1) \cdot (-1, 3, m) = 0 \Leftrightarrow 2(-1) + 1 \times 3 + 1 \times m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Opção correta: **(B)**

50. O vetor normal ao plano tem coordenadas $(2, 1, 1)$, que é também vetor diretor da reta.

Opção correta: **(C)**

PÁG. 214

Aplicar +

51.1 Seja $\vec{n}(a, b, c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, um vetor normal ao plano ABC .

\vec{AB} tem coordenadas $(0 - 2, -4 - 0, 0 - 0) = (-2, -4, 0)$.

\vec{AC} tem coordenadas $(0 - 2, 0 - 0, 2 - 0) = (-2, 0, 2)$.

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 4b = 0 \\ -2a - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2}a \\ c = a \end{cases}$$

Assim, tem-se $\vec{n}\left(a, -\frac{1}{2}a, a\right)$ e, para $a = 2$, por exemplo, $\vec{n}(2, -1, 2)$.

Uma equação do plano ABC é da forma $2x - y + 2z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto A , $2 \times 2 - 0 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$.

A equação pedida é $2x - y + 2z - 4 = 0$.

51.2

Como o ponto D pertence ao segmento de reta $[AB]$, que é definido, vetorialmente por $(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(-2, -4, 0)$, $k \in [0, 1]$, as suas coordenadas são da forma $(2 - 2k, -4k, 0)$, $k \in [0, 1]$.

As retas AB e CD são perpendiculares se os seus vetores diretores forem perpendiculares, por exemplo, \vec{AB} e \vec{CD} .

As coordenadas de \vec{AB} são $(0 - 2, -4 - 0, 0 - 0) = (-2, -4, 0)$ e as coordenadas de \vec{CD} são $(2 - 2k - 0, -4k - 0, 0 - 2) = (2 - 2k, -4k, -2)$.

Assim:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow -2(2 - 2k) - 4(-4k) + 0(-2) = 0 \Leftrightarrow -4 + 4k + 16k = 0 \Leftrightarrow 20k = 4 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}.$$

Logo, as coordenadas de D são $\left(2 - 2 \times \frac{1}{5}, -4 \times \frac{1}{5}, 0\right) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$.

$$51.3 \quad A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (-4 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ e}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{8}{5} - 0\right)^2 + \left(-\frac{4}{5} - 0\right)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{\frac{180}{25}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Logo, } A_{[ABC]} = \frac{2\sqrt{5} \times \frac{6\sqrt{5}}{5}}{2} = 6.$$

$$52. \quad -x + y + 1 = -z \Leftrightarrow -x + y + z + 1 = 0, \text{ vetor normal } (-1, 1, 1).$$

$$2x - 2y - 2z + 5 = 0, \text{ vetor normal } (2, -2, -2).$$

$$-x - 3y + 2z = 7 \Leftrightarrow -x - 3y + 2z - 7 = 0, \text{ vetor normal } (-1, -3, 2).$$

Os vetores $(-1, 1, 1)$ e $(2, -2, -2)$ são colineares, e as equações desses planos não são equivalentes, e o vetor $(-1, -3, 2)$ é perpendicular a esses dois vetores. Portanto, temos dois planos paralelos e um terceiro perpendicular a esses dois.

Opção correta: **(D)**

$$53. \quad ax = -2z \Leftrightarrow ax + 2z = 0, \text{ vetor normal } (a, 0, 2).$$

A reta e o plano são perpendiculares se o vetor diretor da reta é colinear com o vetor normal ao

$$\text{plano: } \frac{a^2}{a} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow a = -2 \quad a \neq 0$$

Opção correta: **(A)**

PÁG. 215

Aplicar +

54.1 O vértice A pertence ao eixo Ox , pelo que tem coordenadas da forma $(x, 0, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$. Como pertence ao plano ADE , tem-se: $x - 0 + 0 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Assim, o vértice A tem coordenadas $(1, 0, 0)$.

Os restantes vértices têm as seguintes coordenadas:

$$B(0, 1, 0), C(-1, 0, 0), D(0, -1, 0), E(0, 0, 1) \text{ e } F(0, 0, -1).$$

54.2

O plano CBF é paralelo ao plano ADE , dado que $[ABCDEF]$ é um octaedro. Assim ADE tem equação cartesiana da forma $x - y + z + d = 0$. Substituindo as coordenadas do ponto B , obtém-se:

$$0 - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1.$$

Logo, uma equação cartesiana do plano ADE é $x - y + z + 1 = 0 \Leftrightarrow x - y + z = -1$.

54.3

a. Seja $\vec{n}(a, b, c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, um vetor normal ao plano ABE .

\vec{AB} tem coordenadas $(0 - 1, 1 - 0, 0 - 0)$, ou seja, $\vec{AB}(-1, 1, 0)$.

\vec{BE} tem coordenadas $(0 - 0, 0 - 1, 1 - 0)$, ou seja, $\vec{BE}(0, -1, 1)$.

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{BE} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ c = b \end{cases}$$

Assim, tem-se $\vec{n}(a, a, a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b. Fazendo, por exemplo, $a = 1$, conclui-se que $\vec{n}(1, 1, 1)$ é vetor normal a ABE . Assim, uma equação cartesiana do plano ABE é da forma $x + y + z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto A , $1 - 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$.

Logo, uma equação cartesiana do plano ABE é $x + y + z - 1 = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 1$.

c. Como o plano CDF é paralelo ao plano ABE , uma equação cartesiana do plano CDF é da forma $x + y + z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto F , $0 + 0 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$.

Logo, uma equação cartesiana do plano CDF é $x + y + z + 1 = 0 \Leftrightarrow x + y + z = -1$.

54.4 O ponto do plano ADE a menor distância do ponto de coordenadas $(1, 1, 2)$ é a projeção ortogonal deste ponto no plano ADE .

Começamos por escrever uma equação vetorial da reta r que passa no ponto $G(1, 1, 2)$ e é perpendicular ao plano ADE .

Como a reta r é perpendicular ao plano ADE , o vetor $\vec{n}(1, -1, 1)$, vetor normal a ADE , é um vetor diretor da reta r e, portanto, uma equação vetorial de r é:

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + k(1, -1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Em seguida, determinamos as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ADE , projeção ortogonal do ponto G no plano ADE , designado por G' .

Para tal, podemos escrever as coordenadas de um ponto genérico de r e substituir essas coordenadas na equação do plano ADE .

As coordenadas de um ponto genérico de r são $(1 + k, 1 - k, 2 + k)$, $k \in \mathbb{R}$ (para cada valor real de k , obtemos um ponto de r).

Substituindo na equação de ADE , tem-se:

$$(1 + k) - (1 - k) + (2 + k) = 1 \Leftrightarrow 1 + k - 1 + k + 2 + k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$$

Portanto, $G'\left(1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 2 - \frac{1}{3}\right)$, ou seja, $G'\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

A distância do ponto G ao plano ADE é, então, dada por:

$$\overline{GG'} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 2\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

55. $A(2, -4, -2)$, $B(2, 4, -2)$, $C(-2, 4, -2)$, $D(-2, -4, -2)$, $E(2, -4, 2)$, $F(2, 4, 2)$, $G(-2, 4, 2)$, $H(-2, -4, 2)$ e $I(0, 0, -2)$.

$$\mathbf{55.1} \quad \cos \alpha = \frac{|\vec{AG} \cdot \vec{BH}|}{\|\vec{AG}\| \times \|\vec{BH}\|}$$

$$\vec{AG}(-4, 8, 4) \text{ e } \vec{BH}(-4, -8, 4)$$

$$\vec{AG} \cdot \vec{BH} = (-4, 8, 4) \cdot (-4, -8, 4) = 16 - 64 + 16 = -32$$

$$\|\vec{AG}\| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ e } \|\vec{BH}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

$$\cos \alpha = \frac{32}{\sqrt{96} \times \sqrt{96}} = \frac{1}{3}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{8}{9} \underset{\alpha \text{ agudo}}{\Leftrightarrow} \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

55.2 Seja $\vec{n}(a, b, c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, um vetor normal ao plano que contém o triângulo $[BFI]$.

$$\vec{BF}(0, 0, 4) \text{ e } \vec{BI}(-2, -4, 0)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{BF} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{BI} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4c = 0 \\ -2a - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -2b \end{cases}$$

Assim, tem-se $\vec{n}(-2b, b, 0)$, $a \in \mathbb{R}$ e, para $b = 1$, por exemplo, $\vec{n}(-2, 1, 0)$.

Uma equação do plano BFI é da forma $-2x + y + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto I , $-2 \times 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$.

$$BFI: -2x + y = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0.$$

Os pontos B e H pertencem ao plano BFI , pelo que a reta BH está contida no plano BFI .

55.3 Por três pontos não colineares passa um único plano. Os pontos B, D e E são três pontos não colineares, pelo que se pertencerem ao plano definido por $2x - y - 2z - 4 = 0$, este plano é BDE .

Substituindo $B(2, 4, -2)$: $2 \times 2 - 4 - 2 \times (-2) - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Substituindo $D(-2, -4, -2)$: $2 \times (-2) + 4 - 2 \times (-2) - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Substituindo $E(2, -4, 2)$: $2 \times 2 + 4 - 2 \times 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Logo, uma equação cartesiana do plano BDE é $2x - y - 2z - 4 = 0$.

Uma equação da reta AG é $(x, y, z) = (2, -4, -2) + k(-4, 8, 4)$, $k \in \mathbb{R}$, pelo que os pontos desta reta têm coordenadas da forma $(2 - 4k, -4 + 8k, -2 + 4k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo na equação de BDE , tem-se:

$$2(2 - 4k) - (-4 + 8k) - 2(-2 + 4k) - 4 = 0 \Leftrightarrow 4 - 8k + 4 - 8k + 4 - 8k - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24k = 8 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Assim, o ponto de interseção do plano BDE com a reta AG tem coordenadas

$$\left(2 - 4\left(\frac{1}{3}\right), -4 + 8\left(\frac{1}{3}\right), -2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)\right), \text{ ou seja, } \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

PÁG. 216**Aplicar +**

56. $A(1, 0, -1)$, $B(1, 1, -1)$, $C(0, 1, -1)$, $D(0, 0, -1)$, $E(1, 0, 0)$, $F(1, 1, 0)$, $G(0, 1, 0)$, $M\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $N\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ e $P\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$.

56.1 $\overrightarrow{DF}(1, 1, 1)$ é perpendicular a $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ e a $\overrightarrow{PN}\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

($\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ e $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$), logo, é um vetor normal a α .

Uma equação cartesiana do plano α é da forma $x + y + z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto M , $1 + \frac{1}{2} + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{3}{2}$.

A equação pedida é $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$.

56.2 A reta EG é paralela ao plano α porque o vetor diretor da reta é perpendicular ao vetor normal ao plano: $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{DF} = (-1, 1, 0) \cdot (1, 1, 1) = 0$; e o ponto $E(1, 0, 0)$ não pertence ao plano α :

$$1 + 0 + 0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

56.3

O circuncentro do triângulo $[MNP]$ é o ponto de interseção da reta DF com o plano α , plano que contém o triângulo $[MNP]$.

Uma equação vetorial da reta DF é $(x, y, z) = (0, 0, -1) + k(1, 1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$, pelo que as coordenadas de um ponto da reta DF são da forma $(k, k, -1 + k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo estas coordenadas na equação de α ($x + y + z - \frac{3}{2} = 0$), vem:

$$k + k - 1 + k - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 3k = \frac{5}{2} \Leftrightarrow k = \frac{5}{6}.$$

Logo, as coordenadas do circuncentro do triângulo $[MNP]$ são $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, -1 + \frac{5}{6}\right)$, ou seja, $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{6}\right)$.

57.1 $B(5, -4, -3)$

$C(x, y, -3)$ pertence a ACG :

$$12x + 4y - 5 \times (-3) - 19 = 0 \Leftrightarrow 12x + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - 3x$$

$$C(x, 1 - 3x, -3)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 &\Leftrightarrow (2, 4, 0) \cdot (x - 5, 1 - 3x + 4, -3 + 3) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 5) + 4(5 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x - 10 + 20 - 12x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Logo, $C(1, -2, -3)$.

$$D = A + \overrightarrow{BC} = (3, -8, -3) + (-4, 2, 0) = (-1, -6, -3)$$

57.2 Como A e G são simétricos em relação a um plano, um vetor normal a esse plano é o vetor $\overrightarrow{AG}(1, 2, 4)$.

Uma equação cartesiana do plano β é da forma $x + 2y + 4z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto médio de $[AG]$, $(4, -6, 1)$, $4 + 2(-6) + 4 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$.

A equação pedida é $x + 2y + 4z + 4 = 0$.

57.3 Os pontos da reta r têm coordenadas da forma $(1 + k, -2 + 2k, k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Para determinarmos a interseção da reta com o plano ACG , substituímos as coordenadas de um ponto genérico da reta na equação do plano:

$$12(1 + k) + 4(-2 + 2k) - 5k - 19 = 0 \Leftrightarrow 12 + 12k - 8 + 8k - 5k - 19 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Assim, $P(1 + 1, -2 + 2 \times 1, 1)$, ou seja, $P(2, 0, 1)$.

Tem-se $\widehat{EFP} = \widehat{FE}, \widehat{FP}$, sendo $E(-1, -6, 5)$ e $F(3, -8, 5)$.

$$\overrightarrow{FE}(-4, 2, 0) \text{ e } \overrightarrow{FP}(-1, 8, -4)$$

$$\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FP} = (-4, 2, 0) \cdot (-1, 8, -4) = -4 \times (-1) + 2 \times 8 + 0 \times (-4) = 16$$

$$\|\overrightarrow{FE}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} \text{ e } \|\overrightarrow{FP}\| = \sqrt{(-1)^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$\cos(\widehat{FE}, \widehat{FP}) = \frac{\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FP}}{\|\overrightarrow{FE}\| \times \|\overrightarrow{FP}\|} = \frac{16}{\sqrt{20} \times 9}, (\widehat{EFP}) = \cos^{-1}\left(\frac{16}{\sqrt{20} \times 9}\right) \approx 1 \text{ rad}$$

57.4 A reta é paralela ao plano ACG se o vetor diretor da reta é perpendicular ao vetor normal ao plano:

$$(a, 2a, a^3) \cdot (12, 4, -5) = 0 \Leftrightarrow 12a + 8a - 5a^3 = 0 \Leftrightarrow 20a - 5a^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5a(4 - a^2) = 0 \Leftrightarrow 5a = 0 \vee 4 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \pm 2$$

Como $a \neq 0$, concluímos que $a = -2 \vee a = 2$.

PÁG. 217

Aplicar +

58.1 $\alpha: a^2x + y + z = ax \Leftrightarrow (a^2 - a)x + y + z = 0$, vetor normal $(a^2 - a, 1, 1)$.

$\beta: 2x + y = -2 - z \Leftrightarrow 2x + y + z = -2$, vetor normal $(2, 1, 1)$.

$\theta: x + a(y + z) = 0 \Leftrightarrow x + ay + az = 0$, vetor normal $(1, a, a)$.

Como α e β são paralelos, os vetores $(a^2 - a, 1, 1)$ e $(2, 1, 1)$ são colineares, e, portanto, dado que têm as segunda e terceira coordenadas iguais, têm de ter também a primeira:

$$a^2 - a = 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 2$$

Como θ não é perpendicular a α nem a β , o vetor de coordenadas $(1, a, a)$ não é perpendicular ao vetor de coordenadas $(a^2 - a, 1, 1)$ nem ao vetor $(2, 1, 1)$.

Considerando o vetor normal ao plano β , tem-se: $2 + a + a \neq 0 \Leftrightarrow 2 + 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$

Opção correta: **(C)**

58.2 O ponto do plano β cuja distância ao ponto $A(3, -3, 1)$ é mínima é a projeção ortogonal deste ponto no plano β .

Começamos por escrever uma equação vetorial da reta r que passa no ponto A e é perpendicular ao plano β .

Como a reta r é perpendicular ao plano β , o vetor $\vec{n}(2, 1, 1)$, vetor normal a β , é um vetor diretor da reta r e, portanto, uma equação vetorial de r é:

$$(x, y, z) = (3, -3, 1) + k(2, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Em seguida, determinamos as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano β , projeção ortogonal do ponto A no plano β , designado por A' .

Para tal, podemos escrever as coordenadas de um ponto genérico de r e substituir essas coordenadas na equação do plano β .

As coordenadas de um ponto genérico de r são $(3 + 2k, -3 + k, 1 + k)$, $k \in \mathbb{R}$ (para cada valor real de k , obtemos um ponto de r).

Substituindo na equação de β , tem-se:

$$2(3 + 2k) + (-3 + k) + (1 + k) = -2 \Leftrightarrow 6 + 4k - 3 + k + 1 + k = -2 \Leftrightarrow k = -1$$

Portanto, $A'(3 + 2(-1), -3 + (-1), 1 + (-1))$, ou seja, $A'(1, -4, 0)$.

59. A reta está contida no plano se um ponto da reta pertence ao plano e um vetor diretor da reta é perpendicular a um vetor normal ao plano.

$$a \times 1 - \frac{6 \times 2}{b} + 0 = 1 \Leftrightarrow a - \frac{12}{b} = 1$$

$$(1, b, a) \cdot \left(a, -\frac{6}{b}, 1\right) = 0 \Leftrightarrow a - 6 + a = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

$$3 - \frac{12}{b} = 1 \Leftrightarrow -\frac{12}{b} = -2 \Leftrightarrow \frac{b}{12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = 6$$

Opção correta: **(B)**

60.1 Começemos por verificar que a reta definida pela equação vetorial dada é perpendicular ao plano ABC .

Os vetores $\vec{AB}(-1, -3, 2)$ e \vec{BC} , de coordenadas $(3 - 1, 1 - (-1), 7 - 3) = (2, 2, 4)$, são dois vetores não colineares paralelos a ABC .

Assim, como $(4, -2, -1) \cdot (-1, -3, 2) = -4 + 6 - 2 = 0$ e

$(4, -2, -1) \cdot (2, 2, 4) = 8 - 4 - 4 = 0$, o vetor de coordenadas $(4, -2, -1)$, vetor diretor da reta, é um vetor normal ao plano ABC , pois é perpendicular a \vec{AB} e a \vec{BC} . Conclui-se, portanto, que a reta é perpendicular ao plano.

Verifiquemos agora que o ponto A pertence à reta definida pela equação dada.

O ponto A é dado por $A = B + \vec{BA} = B - \vec{AB}$, pelo que tem coordenadas

$$(1 - (-1), -1 - (-3), 3 - 2) = (2, 2, 1).$$

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação da reta, obtém-se:

$$(2, 2, 1) = (-2, 4, 2) + k(4, -2, -1), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -2 + 4k \\ 2 = 4 - 2k \\ 1 = 2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Logo, o ponto A pertence à reta definida pela equação dada.

Em conclusão, uma equação vetorial da reta perpendicular a ABC que contém o ponto A é $(x, y, z) = (-2, 4, 2) + k(4, -2, -1)$, $k \in \mathbb{R}$.

60.2 Como $\overrightarrow{EA}(-8, 5, 0)$ e $A(2, 2, 1)$,

$$E = A + \overrightarrow{EA} = A - \overrightarrow{AE} = (2 - (-8), 2 - 5, 1 - 0) = (10, -3, 1).$$

Da alínea anterior, sabemos que $\vec{n}(-4, 2, 1)$ é um vetor normal ao plano ABC , pelo que este vetor também é normal a qualquer plano paralelo a ABC .

Uma equação de um plano paralelo a ABC é da forma $-4x + 2y + z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto E , $-4 \times 10 + 2(-3) + 1 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 45$.

Uma equação do plano paralelo a ABC e que contém o ponto E é $-4x + 2y + z + 45 = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y - z - 45 = 0$.

60.3 A altura da pirâmide é a distância do ponto E ao plano ABC .

Começamos por escrever uma equação vetorial da reta r que passa no ponto E e é perpendicular ao plano ABC : $(x, y, z) = (10, -3, 1) + k(-4, 2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

Em seguida, determinamos as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC , projeção ortogonal do ponto E no plano ABC , designado por E' .

Para tal, podemos escrever as coordenadas de um ponto genérico de r e substituir essas coordenadas na equação do plano ABC .

As coordenadas de um ponto genérico de r são $(10 - 4k, -3 + 2k, 1 + k)$, $k \in \mathbb{R}$ (para cada valor real de k , obtemos um ponto de r).

Uma equação do plano ABC é da forma $-4x + 2y + z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto B , $-4 \times 1 + 2(-1) + 1 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3$.

Uma equação cartesiana do plano ABC é $-4x + 2y + z + 3 = 0$.

Substituindo na equação de ABC , tem-se:

$$-4 \times (10 - 4k) + 2(-3 + 2k) + 1(1 + k) + 3 = 0 \Leftrightarrow -40 + 16k - 6 + 4k + 1 + k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

Portanto, $E'(10 - 4(-2), -3 + 2(-2), 1 + (-2))$, ou seja, $E'(18, -7, -1)$.

A distância do ponto E ao plano ABC é, então, dada por:

$$\overline{EE'} = \sqrt{(18 - 10)^2 + (-7 + 3)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

PÁG. 222

Autoavaliação

1. $2x + 5y = 3 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$

Sendo o declive da reta r $-\frac{2}{5}$, a sua inclinação é $\text{tg}^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right) + 180^\circ \approx 158,2^\circ$.

Opção correta: **(D)**

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times k + k \times 1 = 2k$.

I. \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2k = 0 \Leftrightarrow k = 0$, pelo que a afirmação **I.** é falsa.

II. O ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é agudo se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow 2k > 0 \Leftrightarrow k > 0$ e \vec{u} e \vec{v} não forem colineares.

\vec{u} e \vec{v} são colineares se $\frac{1}{k} = \frac{k}{1} \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 1$.

Logo, o ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é agudo, se $k \in]0, +\infty[\setminus\{1\}$, pelo que **II.** é falsa.

Opção correta: **(D)**

3.1 $(\vec{w} - \vec{u}) \cdot (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{w} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 = 3^2 - 2^2 = 5$

Opção correta: **(C)**

3.2 $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 0$ se, e somente se, \vec{u} e \vec{v} são simétricos, ou seja, $\vec{v} = -\vec{u}$.

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot (\vec{w} - \vec{u}) &= -\vec{u} \cdot (\vec{w} - \vec{u}) = -\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) + \|\vec{u}\|^2 = \\ &= -2 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2^2 = -6 \times \frac{1}{2} + 4 = -3 + 4 = 1 \end{aligned}$$

3.3 $\cos(\widehat{\vec{v}, (\vec{u} - \vec{w})}) = \frac{\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{w})}{\|\vec{v}\| \times \|\vec{u} - \vec{w}\|} = \frac{-\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{w})}{\|-\vec{u}\| \times \|\vec{u} - \vec{w}\|} = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{w} - \vec{u})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{u} - \vec{w}\|}$

$$\vec{u} \cdot (\vec{w} - \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) - \|\vec{u}\|^2 = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} - 2^2 = -1$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{w}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{w}) \cdot (\vec{u} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{w} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 = 2^2 - 2 \times 3 + 3^2 = 7. \end{aligned}$$

Logo, $\|\vec{u} - \vec{w}\| = \sqrt{7}$

Assim, $\cos(\widehat{\vec{v}, (\vec{u} - \vec{w})}) = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{w} - \vec{u})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{u} - \vec{w}\|} = \frac{-1}{2 \times \sqrt{7}}$, pelo que

$$(\widehat{\vec{v}, (\vec{u} - \vec{w})}) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2 \times \sqrt{7}}\right) \approx 1,76 \text{ rad.}$$

4. Um vetor normal ao plano β tem coordenadas $(1, -2, -1)$.

Um plano paralelo a β tem equação da forma $x - 2y - z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas $(1, 0, 2)$, $1 - 2 \times 0 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$.

A equação pedida é $x - 2y - z + 1 = 0$.

Opção correta: **(C)**

5. $9x - 5y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{9}{5}x - 1$

5.1 A reta s tem declive $-\frac{1}{9} = -\frac{5}{9}$ e ordenada na origem $6 = -\frac{5}{9}(-3) + b \Leftrightarrow b = \frac{13}{3}$.

Assim, a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{5}{9}x + \frac{13}{3}$.

$$5.2 \quad \cos(\hat{r}, \hat{t}) = \frac{|(5, 9) \cdot (-7, -2)|}{\sqrt{5^2 + 9^2} \times \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2}} = \frac{53}{\sqrt{106} \times \sqrt{53}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (\hat{r}, \hat{t}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$6. \quad \vec{AE} \cdot \vec{CD} = -\vec{AE} \cdot \vec{AB} = -\underbrace{\|\vec{AE}\| \times \|\vec{AB}\|}_{A_{[ABCD]}} \times \cos(\vec{AE}, \vec{AB}) = A_{[ABCD]} \times \cos\left(\frac{1}{6} \times 2\pi\right) = \\ = -8 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -8 \times \frac{1}{2} = -4$$

7.1 Um vetor normal ao plano mediador do segmento de reta $[AB]$ é \vec{AB} .

Uma equação do plano mediador é da forma $4x - 2y - 4z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto C , $4 \times 0 - 2 \times 8 - 4 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 16$.

Uma equação do plano é $4x - 2y - 4z + 16 = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2z + 8 = 0$.

7.2 Os vetores $\vec{AB}(4, -2, -4)$ e $\vec{CD}(2, -7, 1)$ são não colineares.

Tendo em conta o que se pretende provar, que uma equação cartesiana de α é $5x + 2y + 4z - 16 = 0$, vejamos se $\vec{n}(5, 2, 4)$ é vetor normal a α . Para tal, tem de se ter $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ e $\vec{n} \cdot \vec{CD} = 0$.

Como $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 5 \times 4 + 2 \times (-2) + 4 \times (-4) = 0$ e $\vec{n} \cdot \vec{CD} = 5 \times 2 + 2 \times (-7) + 4 \times 1 = 0$, então o vetor $\vec{n}(5, 2, 4)$ também é normal a α . Assim, uma equação cartesiana do plano α é da forma $5x + 2y + 4z + d = 0$.

Como C pertence a α , substituindo as suas coordenadas na equação, obtém-se $5 \times 0 + 2 \times 8 + 4 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -16$; pelo que uma equação cartesiana de α é $5x + 2y + 4z - 16 = 0$.

7.3 $\vec{CD}(2, -7, 1)$ é um vetor diretor da reta DC , que admite equação vetorial $(x, y, z) = (0, 8, 0) + k(2, -7, 1)$, $k \in \mathbb{R}$. Como o ponto P pertence à reta DC , tem coordenadas da forma $(2k, 8 - 7k, k)$, $k \in \mathbb{R}$.

As retas AB e EP são perpendiculares se $\vec{AB} \cdot \vec{EP} = 0$. Como \vec{EP} tem coordenadas $(2k - 4, 8 - 7k, k + 1)$, tem-se:

$$\vec{AB} \cdot \vec{EP} = 0 \Leftrightarrow 4(2k - 4) - 2(8 - 7k) - 4(k + 1) = 0 \Leftrightarrow 8k - 16 - 16 + 14k - 4k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

Logo, tem-se $P(2 \times 2, 8 - 7 \times 2, 2)$, ou seja, $P(4, -6, 2)$.

8.1 A reta é paralela ao plano ABC se o vetor diretor da reta for perpendicular ao vetor normal ao plano: $\vec{n}(2, 1, 2)$, pelo que se excluem as opções **(A)** e **(B)**.

Substituindo as coordenadas do ponto D , na opção **(C)** obtém-se uma proposição verdadeira e na opção **(D)** obtém-se uma proposição falsa.

Opção correta: **(C)**

8.2 Se tomarmos o triângulo $[ABC]$ como base da pirâmide, a altura da pirâmide é a distância do ponto D ao plano ABC .

Começamos por escrever uma equação vetorial da reta r que passa no ponto D e é perpendicular ao plano ABC .

Como a reta r é perpendicular ao plano ABC , o vetor $\vec{n}(2, 1, 2)$, vetor normal a ABC , é um vetor diretor da reta r e, portanto, uma equação vetorial de r é:

$$(x, y, z) = (-2, 0, 0) + k(2, 1, 2), k \in \mathbb{R}$$

Em seguida, determinamos as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC , projeção ortogonal do ponto D no plano ABC , designado por D' .

Para tal, podemos escrever as coordenadas de um ponto genérico de r e substituir essas coordenadas na equação do plano ABC .

As coordenadas de um ponto genérico de r são $(-2 + 2k, k, 2k)$, $k \in \mathbb{R}$ (para cada valor real de k , obtemos um ponto de r).

Substituindo na equação de ABC , tem-se:

$$\begin{aligned} 2 \times (-2 + 2k) + k + 2(2k) &= 8 \Leftrightarrow -4 + 4k + k + 4k = 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9k = 12 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Portanto, $D'(-2 + 2 \times \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 2 \times \frac{4}{3})$, ou seja, $D'(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$.

A distância do ponto D ao plano ABC é, então, dada por:

$$\overline{DD'} = \sqrt{\left(-2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{9}} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\text{Logo, } V_{[ABCD]} = \frac{1}{3} \times 12 \times 4 = 16.$$

9. $\alpha: ax + b(2y + z) = 0 \Leftrightarrow ax + 2by + bz = 0$; coordenadas de um vetor normal: $(a, 2b, b)$.

$\beta: a(x + y) = 2 - bz \Leftrightarrow ax + ay + bz = 2$; coordenadas de um vetor normal: (a, a, b) .

Os planos são perpendiculares se, e somente se, os vetores normais aos planos forem perpendiculares, isto é, se o respetivo produto escalar for nulo:

$$\begin{aligned} (a, 2b, b) \cdot (a, a, b) &= 0 \Leftrightarrow a \times a + 2b \times a + b \times b = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 + 2ba + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b \end{aligned}$$

Como a e b são não nulos, conclui-se que a e b são simétricos.

PÁG. 224

Começar a preparar o exame

1.1 Raio: $\overline{AB} = \sqrt{(5 - 4)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{10}$

Equação reduzida da circunferência: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10$

1.2 A reta AB tem declive $\frac{-1 - 2}{5 - 4} = -3$.

Como a reta BC é tangente à circunferência no ponto B , a reta BC é perpendicular à reta AB .

A reta BC tem declive $-\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$ e ordenada na origem $-1 = \frac{1}{3} \times 5 + b \Leftrightarrow b = -\frac{8}{3}$.

Assim, $y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$ é uma equação reduzida da reta BC e esta reta interseca o eixo Ox no ponto cuja abscissa é tal que $\frac{1}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 8$, ou seja, as coordenadas do ponto C são $(8, 0)$.

1.3 A reta AC tem declive $\frac{0-2}{8-4} = -\frac{1}{2}$ e a sua inclinação é $\text{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 180^\circ \approx 153,4^\circ$.

Opção correta: **(C)**

2.1 Raio: $\overline{CO} = \sqrt{(0+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$$

$$(x+2)^2 + (5-3)^2 = 13 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow x+2 = -3 \vee x+2 = 3 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 1$$

Como o ponto Q pertence ao 1.º quadrante, concluímos que a sua abcissa é 1.

2.2 A reta CQ tem declive $\frac{5-3}{1+2} = \frac{2}{3}$.

Como a reta r é tangente à circunferência no ponto Q , a reta r é perpendicular à reta CQ .

A reta r tem declive $-\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$ e ordenada na origem $5 = -\frac{3}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{13}{2}$.

Assim, a equação reduzida da reta r é $y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$.

2.3 O triângulo $[OCQ]$ é retângulo em C se $\overline{OQ}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CQ}^2$.

Tem-se $\overline{OC} = \overline{CQ} = \sqrt{13}$ e $\overline{OQ} = \sqrt{(1-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{26}$.

Como $\sqrt{13}^2 + \sqrt{13}^2 = \sqrt{26}^2$, conclui-se que o triângulo $[OCQ]$ é retângulo em C .

Como o triângulo $[OCQ]$ é retângulo em C , a área da região sombreada é igual à diferença entre a área de um quarto do círculo da figura e a área do triângulo $[OCQ]$. Tem-se, portanto:

$$A_{\text{sombreada}} = \frac{1}{4} \times \pi \times \overline{OC}^2 - \frac{\overline{OC} \times \overline{CQ}}{2} = \frac{1}{4} \times \pi \times (\sqrt{13})^2 - \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}{2} = \frac{13\pi}{4} - \frac{13}{2} = \frac{13\pi - 26}{4}$$

3. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(1, -2)$, dado que o declive da reta r é -2 , e um vetor diretor da

reta s é $\vec{s}(-1, 2)$: $\cos(\hat{r}, \hat{s}) = \frac{|1 \times (-1) + (-2) \times 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = 1$;

$(\hat{r}, \hat{s}) = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$.

Opção correta: **(A)**

PÁG. 225

Começar a preparar o exame

$$\mathbf{4.1} \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{7}{5} \overline{OC}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{7}{5} \overline{OC}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{7}{5} \overline{OC}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OC}\| \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{7}{5} \overline{OC}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5} \overline{OC} \times \overline{OC} \times \cos \alpha + \|\overrightarrow{OC}\|^2 = \frac{7}{5} \overline{OC}^2 \Leftrightarrow (4 \overline{OC} = 5 \overline{OA} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{4}{5} \overline{OC})$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5} \overline{OC}^2 \times \cos \alpha + \overline{OC}^2 = \frac{7}{5} \overline{OC}^2 \Leftrightarrow \frac{4}{5} \overline{OC}^2 \times \cos \alpha = \frac{2}{5} \overline{OC}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{2}{5} \overline{OC}^2}{\frac{4}{5} \overline{OC}^2} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

4.2

a. $C = O + \overrightarrow{AB} = (5 - 3, 2 + 3) = (2, 5)$

b. O declive da reta AC é $\frac{5 - (-3)}{2 - 3} = -8$. Como a mediatriz do segmento de reta $[AC]$ é perpendicular a AC , o seu declive é $-\frac{1}{-8} = \frac{1}{8}$.

O ponto médio de $[AC]$, de coordenadas $\left(\frac{2+3}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$, pertence à mediatriz de $[AC]$, pelo que a ordenada na origem é $1 = \frac{1}{8} \times \frac{5}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{11}{16}$.

Logo, a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AC]$ é $y = \frac{1}{8}x + \frac{11}{16}$.

Sendo o declive da reta $\frac{1}{8}$, a sua inclinação é $\text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) \approx 7^\circ$.

Alternativamente

$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = (x - 2)^2 + (y - 5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y + 10y = -4x + 6x + 29 - 18 \Leftrightarrow 16y = 2x + 11 \Leftrightarrow y = \frac{1}{8}x + \frac{11}{16}$$

Sendo o declive da reta $\frac{1}{8}$, a sua inclinação é $\text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) \approx 7^\circ$.

c. Para que ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \overrightarrow{AB} seja agudo é necessário que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} > 0 \Leftrightarrow (1 - k^2, k + 1) \cdot (2, 5) > 0 \Leftrightarrow 2(1 - k^2) + 5(k + 1) > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 - 2k^2 + 5k + 5 > 0 \Leftrightarrow -2k^2 + 5k + 7 > 0$$

$$-2k^2 + 5k + 7 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-2) \times 7}}{2(-2)} \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-5 - 9}{-4} \vee k = \frac{-5 + 9}{-4} \Leftrightarrow k = \frac{7}{2} \vee k = -1$$

Como o gráfico de $y = -2k^2 + 5k + 7$ é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, $-2k^2 + 5k + 7 > 0 \Leftrightarrow k \in \left]-1, \frac{7}{2}\right[$.

Além disso, temos de verificar se existe algum valor de k para o qual o ângulo é nulo, ou seja, para o qual os vetores são colineares:

$$\frac{1 - k^2}{2} = \frac{k + 1}{5} \Leftrightarrow 5(1 - k^2) = 2(k + 1) \Leftrightarrow 5(1 - k)(1 + k) = 2(k + 1) \Leftrightarrow 5(1 - k) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 - 5k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$$

Logo, $k \in \left]-1, \frac{7}{2}\right[\setminus \left\{\frac{3}{5}\right\}$.

5. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\| > \|\vec{u} + \vec{v}\| &\Leftrightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 > \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 > \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2\vec{u} \cdot \vec{v} > 2\vec{u} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow -4\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \end{aligned}$$

Como os vetores são não colineares, o ângulo formado por eles é obtuso.

Opção correta: **(D)**

$$6. \vec{u} \cdot (2\vec{v} - \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{u}\|^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 6^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 36$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 6 \times 5 \times \cos(\pi - \alpha) = 30 \times (-\cos \alpha)$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \quad \alpha \text{ obtuso}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 30 \times \frac{4}{5} = 24$$

$$\vec{u} \cdot (2\vec{v} - \vec{u}) = 2 \times 24 - 36 = 12$$

$$7. \text{ Como } \overline{OD} = \frac{\overline{OA}}{3}, D\left(\frac{\overline{OA}}{3}, 0\right). \text{ Como } \overline{OC} = \frac{\overline{OA}}{4}, C\left(0, \frac{\overline{OA}}{4}\right).$$

E tem coordenadas

$$(\overline{CE}, \overline{OC}) = \left(\overline{CB} - \overline{EB}, \frac{\overline{OA}}{4}\right) = \left(\overline{OA} - \overline{OD}, \frac{\overline{OA}}{4}\right) = \left(\overline{OA} - \frac{\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right) = \left(\frac{2\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right).$$

$$\text{Logo, } \overline{DC} \left(-\frac{\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right) \text{ e } \overline{DE} \left(\frac{\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right).$$

$$\overline{DC} \cdot \overline{DE} = -\frac{\overline{OA}}{3} \times \frac{\overline{OA}}{3} + \frac{\overline{OA}}{4} \times \frac{\overline{OA}}{4} = -\frac{\overline{OA}^2}{9} + \frac{\overline{OA}^2}{16} = -\frac{7\overline{OA}^2}{9 \times 16} = -7 \times \left(\frac{\overline{OA}}{3 \times 4}\right)^2 = -7 \times \left(\frac{\overline{OA}}{12}\right)^2$$

PÁG. 226

Começar a preparar o exame

$$8. \text{ Como } \overline{AP} = 2\overline{BP}, \overline{PB} = \frac{1}{3}\overline{AB}.$$

$$\overline{PC} \cdot \overline{CD} = -27 \Leftrightarrow (\overline{PB} + \overline{BC}) \cdot \overline{CD} = -27 \Leftrightarrow \overline{PB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD} = -27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\overline{PB}\| \times \frac{\|\overline{CD}\|}{\overline{AB}} \times \cos(\widehat{\overline{PB}, \overline{CD}}) + 0 = -27 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\overline{AB} \times \overline{AB} \times \cos(180^\circ) = -27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\overline{AB}^2 \times (-1) = -27 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 27 \times 3 \Leftrightarrow \overline{AB} = 9 \quad \overline{AB} > 0$$

9.1 $\overline{PR} \cdot \overline{QR} = 0$, pois um triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo, neste caso é retângulo em R , pelo que \overline{PR} e \overline{QR} são perpendiculares.

9.2 A circunferência tem centro de coordenadas $(1, 0)$ e raio: 3.

$$\text{Logo, } \overline{PQ} = 6, \text{ sen } \alpha = \frac{\overline{QR}}{6} \Leftrightarrow \overline{QR} = 6 \text{ sen } \alpha \text{ e } R\hat{Q}P = \widehat{\overline{QR}, \overline{QP}} = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} &= \|\overrightarrow{QR}\| \times \|\overrightarrow{QP}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}}) \Leftrightarrow 27 = 6 \operatorname{sen} \alpha \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 27 &= 36 \operatorname{sen} \alpha \times \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{27}{36} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{27}{36}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{10.} \quad \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FG} &= (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG}) = \\ &= \underbrace{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{FD}}_0 + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DA} + \underbrace{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AG}}_0 + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{FD} + \underbrace{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}}_0 + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AG} = \\ &= \|\overrightarrow{ED}\| \times \|\overrightarrow{DA}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DA}}) + \|\overrightarrow{DC}\| \times \|\overrightarrow{FD}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{FD}}) + \|\overrightarrow{DC}\| \times \|\overrightarrow{AG}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AG}}) = \\ &= \overline{ED} \times \overline{DA} \times \cos(180^\circ) + \overline{DC} \times \overline{FD} \times \cos(180^\circ) + \overline{DC} \times \overline{AG} \times \cos(0^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \overline{AD} \times \overline{DA} \times (-1) + \overline{DC} \times \frac{2}{3} \overline{DC} \times (-1) + \overline{DC} \times \overline{CF} \times 1 \end{aligned}$$

$$\text{Tem-se que } \overline{CD} = 3 \overline{CF} \text{ e } \overline{AD} = \frac{2}{3} \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{2}{3} \times 3 \overline{CF} \Leftrightarrow \overline{AD} = 2 \overline{CF}.$$

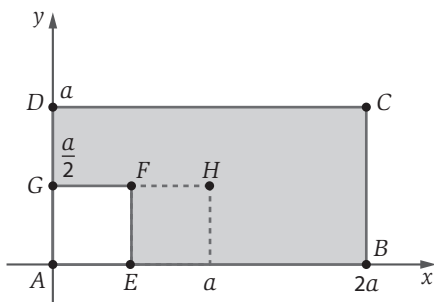
Portanto:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \overline{AD} \times \overline{DA} \times (-1) + \overline{DC} \times \frac{2}{3} \overline{DC} \times (-1) + \overline{DC} \times \overline{CF} \times 1 = \\ &= -\frac{1}{2} \times 2 \overline{CF} \times 2 \overline{CF} - \frac{2}{3} \times 3 \overline{CF} \times 3 \overline{CF} + 3 \overline{CF} \times \overline{CF} = -2 \overline{CF}^2 - 6 \overline{CF}^2 + 3 \overline{CF}^2 = -5 \overline{CF}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{11.} \quad \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{HB} &= (\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DC}) \cdot \left(\overrightarrow{DG} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DC}\right) = \\ &= \overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{DG} + \underbrace{\overrightarrow{GD} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{DC}\right)}_0 + \underbrace{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DG}}_0 + \overrightarrow{DC} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{DC}\right) = \\ &= \|\overrightarrow{GD}\| \times \|\overrightarrow{DG}\| \times \cos(180^\circ) + \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC} = -\overline{AG}^2 + \frac{1}{2} \|\overrightarrow{DC}\|^2 = -\overline{AG}^2 + \frac{1}{2} \overline{DC} \times \underbrace{\overline{DC}}_{= \overline{AB} = 2\overline{AD}} = \\ &= \frac{1}{2} \overline{DC} \times 2\overline{AD} - \overline{AG}^2 = \underbrace{\overline{DC} \times \overline{AD}}_{A_{[ABCD]}} - \underbrace{\overline{AG}^2}_{A_{[AEFG]}} = A_{[ABCD]} - A_{[AEFG]} = A_{[EBCDGF]} \end{aligned}$$

Alternativamente

Consideremos a figura representada, em referencial o.n. Oxy , em que A é a origem do referencial, B pertence ao semieixo positivo Ox e D pertence ao semieixo positivo Oy .



Seja $\overline{AD} = a$, com $a > 0$. Assim, $B(2a, 0)$, $C(2a, a)$, $G(0, \frac{a}{2})$ e $H(a, \frac{a}{2})$.

A área do hexágono $[EBCDGF]$ é dada por

$$A_{[EBCDGF]} = A_{[ABCD]} - A_{[AEFG]} = \overline{AB} \times \overline{AD} - \overline{AG}^2 = 2a \times a - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$$

As coordenadas de \overrightarrow{GC} são $\left(2a - a, a - \frac{a}{2}\right) = \left(2a, \frac{a}{2}\right)$ e as de \overrightarrow{HB} são $\left(2a - a, 0 - \frac{a}{2}\right) = \left(a, -\frac{a}{2}\right)$.

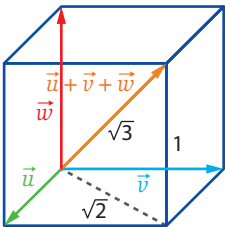
$$\text{Logo, } \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{HB} = 2a \times a + \frac{a}{2} \times \left(-\frac{a}{2}\right) = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} = A_{[EBCDGF]}.$$

$$\begin{aligned} 12. \|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 0 + 0 + 0 + \|\vec{v}\|^2 + 0 + 0 + 0 + \|\vec{w}\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \end{aligned}$$

Logo, $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\| = \sqrt{3}$.

Alternativamente

Dado que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$ e que $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{u} \perp \vec{w}$, $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|$ corresponde à medida da diagonal espacial de um cubo de lado 1, que é $\sqrt{3}$.



Opção correta: **(A)**

PÁG. 227

Começar a preparar o exame

$$\begin{aligned} 13.1 \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AO} = \\ &= \|\overrightarrow{AO}\|^2 + \|\overrightarrow{OC}\| \times \|\overrightarrow{AO}\| \times \cos(\overrightarrow{OC} \hat{=} \overrightarrow{AO}) = 2^2 + 2 \times 2 \times \cos(\overrightarrow{OC} \hat{=} \overrightarrow{OP}) = \\ &= 4 + 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 4 + 4 \times \text{sen } x \end{aligned}$$

$$13.2 \quad g(x) = 2\sqrt{3} + 4 \Leftrightarrow 4 + 4 \text{sen } x = 2\sqrt{3} + 4 \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$(\overrightarrow{OA} \hat{=} \overrightarrow{OC}) = x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{e} \quad (\overrightarrow{AC} \hat{=} \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{12}$$

14.1 Um vetor normal ao plano ABF é, por exemplo, $\vec{u}(2, 3, 6)$, que é um vetor diretor da reta BC . Portanto, eliminam-se as opções **(C)** e **(D)**.

Substituindo as coordenadas do ponto A , na opção **(A)** obtém-se uma proposição falsa e na opção **(B)** obtém-se uma proposição verdadeira.

Opção correta: **(B)**

14.2 Um vetor normal ao plano ABC é, por exemplo, \overrightarrow{AE} .

Um vetor diretor da reta EA tem coordenadas $(4 + 2, -4 + 6, -3 - 0)$, ou seja, $(6, 2, -3)$.

Uma equação cartesiana do plano ABC é da forma $6x + 2y - 3z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto A , $6 \times 4 + 2(-4) - 3(-3) + d = 0 \Leftrightarrow d = -25$.

Logo, uma equação cartesiana do plano ABC é $6x + 2y - 3z - 25 = 0$.

14.3 $\widehat{AOB} = \widehat{\overrightarrow{OA}}, \widehat{\overrightarrow{OB}}$

O ponto B tem coordenadas da forma $(x, 2x, z)$. Substituindo na equação da reta BC ,

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ 2x = 5 + 3k, k \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2k \\ 2(3 + 2k) = 5 + 3k \\ z = 1 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2k \\ 6 + 4k = 5 + 3k \\ z = 1 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2(-1) \\ k = -1 \\ z = 1 + 6(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = -1 \\ z = -5 \end{cases}$$

Assim, $B(1, 2, -5)$.

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{4 \times 1 + (-4) \times 2 + (-3) \times (-5)}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-3)^2} \times \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \frac{11}{\sqrt{41} \times \sqrt{30}}$$

$$\widehat{AOB} = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{41} \times \sqrt{30}}\right) \approx 72^\circ$$

PÁG. 228

Começar a preparar o exame

15.1 Por três pontos não colineares passa um único plano. Os pontos A , C e de coordenadas $(-1, -2, -10)$ são três pontos não colineares que pertencem ao plano ACD , pelo que se pertencerem ao plano definido por $5y - z = 0$, este plano é ACD .

Substituindo $A(3, 0, 0)$: $5 \times 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Substituindo $C(-7, 0, 0)$: $5 \times 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Substituindo $(-1, -2, -10)$: $5 \times (-2) - (-10) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Logo, uma equação cartesiana do plano ACD é $5y - z = 0$.

15.2 O ponto B pertence ao plano xOy , logo tem coordenadas da forma $(x_B, y_B, 0)$.

Os pontos da reta BD têm coordenadas da forma $(2 + k, 3 + 2k, -5k)$, $k \in \mathbb{R}$.

O ponto B pertence à reta BD : $-5k = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Assim, as coordenadas de B são $(2, 3, 0)$.

O ponto D é o ponto de interseção da reta BD com o plano ACD .

Substituindo as coordenadas dos pontos da reta BD na equação do plano ACD ,

$$5(3 + 2k) - (-5k) = 0 \Leftrightarrow 15 + 10k + 5k = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Assim, as coordenadas de D são $(1, 1, 5)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1) \times 9 + 3 \times 3 + 0 \times 0 = 0$, pelo que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B .

$$V_{[ABCD]} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} \times z_D = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{90}}{2} \times 5 = \frac{\sqrt{900}}{6} \times 5 = \frac{30}{6} \times 5 = 5 \times 5 = 25$$

16.1 Um plano paralelo ao plano xOz tem equação da forma $y = b$. Eliminam-se as opções **(B)** e **(C)**.

D é o ponto médio do segmento de reta $[EP]$, pelo que a equação pedida é $y = \frac{-3-1}{2} = -2$.

Opção correta: **(A)**

16.2 Um vetor normal ao plano ABC é, por exemplo, $\overrightarrow{EP}(-4, -2, -4)$.

Uma equação do plano ABC é da forma $-4x - 2y - 4z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto $D = M_{[EP]}\left(\frac{5+1}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$, ou seja, $D(3, -2, 2)$:

$$-4 \times 3 - 2 \times (-2) - 4 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 16.$$

Uma equação cartesiana do plano ABC é $-4x - 2y - 4z + 16 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 8 = 0$.

16.3 O ponto A é o ponto de interseção do plano ABC com o eixo Ox : $2x + 0 + 2 \times 0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Logo, $A(4, 0, 0)$.

16.4 Por três pontos não colineares passa um único plano. Os pontos A, P e E são três, pelo que se pertencerem ao plano definido por $2x - 2y - z - 8 = 0$, este plano é APE .

Substituindo $A(4, 0, 0)$: $2 \times 4 - 2 \times 0 - 0 - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Substituindo $P(1, -3, 0)$: $2 \times 1 - 2 \times (-3) - 0 - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Substituindo $E(5, -1, 4)$: $2 \times 5 - 2 \times (-1) - 4 - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Logo, uma equação cartesiana do plano APE é $2x - 2y - z - 8 = 0$.

16.5

$$\cos(\widehat{O\vec{E}, O\vec{P}}) = \frac{\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OE}\| \times \|\overrightarrow{OP}\|} = \frac{5 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times 0}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 4^2} \times \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{42} \times \sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{105}};$$

$$\widehat{EOP} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{105}}\right) \approx 67^\circ.$$

16.6 A esfera tem centro no ponto A e o plano ABC contém o ponto A . Assim, a interseção da esfera com o plano ABC é o círculo máximo, ou seja, com raio igual ao da esfera. Logo, a área do círculo é $\pi \times 8 = 8\pi$.

Opção correta: **(C)**

PÁG. 229

Começar a preparar o exame

17. A reta r é paralela ao plano α se o vetor diretor da reta, $\vec{r}\left(3, a, -\frac{1}{2}\right)$, for perpendicular ao vetor normal ao plano α , $\vec{n}(b, -3, 12)$:

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3 \times b + a \times (-3) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 12 = 0 \Leftrightarrow 3b - 3a - 6 = 0 \Leftrightarrow b - a = 2 \Leftrightarrow a - b = -2$$

Logo, $(a - b)^3 = (-2)^3 = -8$.

Opção correta: **(B)**

18. Para que uma superfície esférica seja tangente ao plano yOz , a distância do seu centro a esse plano tem de ser igual ao seu raio. Essa distância corresponde ao valor absoluto da abcissa do centro da superfície esférica.

Opção correta: **(A)**

19.1 A reta OD é paralela à reta AC , pelo que os vetores diretores das duas retas são colineares. Eliminam-se as opções **(C)** e **(D)**.

Substituindo, as coordenadas da origem,

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} 0 = 0 + 0k \\ 0 = 6 + 2k \\ 0 = 8 + \frac{3}{2}k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ k = -3 \\ k = -\frac{16}{3} \end{cases} \rightarrow \text{a origem } (O) \text{ não pertence a esta reta.}$$

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} 0 = 0 + 0k \\ 0 = -4 + 2k \\ 0 = -3 + \frac{3}{2}k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases} \rightarrow \text{a origem } (O) \text{ pertence a esta reta.}$$

Opção correta: **(B)**

19.2 A reta CD é paralela ao eixo Ox , pelo que é definida por uma condição do tipo $y = b \wedge z = c$, $b, c \in \mathbb{R}$, em que b e c são, respetivamente, a ordenada e a cota de qualquer ponto da reta CD .

Vamos determinar, então, as coordenadas de C .

O ponto A é o ponto de interseção da reta AC com o eixo Ox : $A(10, 0, 0)$.

$B(10; 12,5; 0)$ e com C pertence a AC , as duas coordenadas são da forma $C(10, 4k, 3k)$, $k \in \mathbb{R}$.

O triângulo ABC é retângulo, pois está inscrito numa semicircunferência.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 &\Leftrightarrow 4k(4k - 12,5) + 3k(3k) = 0 \Leftrightarrow 16k^2 - 50k + 9k^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 25k^2 - 50k = 0 \Leftrightarrow 25k(k - 2) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2 \end{aligned}$$

Logo, tem-se $C(10, 8, 6)$, pelo que uma condição cartesiana que define a reta CD é $y = 8 \wedge z = 6$.

PÁG. 230

Começar a preparar o exame

20.1 Os pontos A , B e C têm todos a mesma cota, 4, pelo que $ABC: z = 4$, que é um plano perpendicular ao eixo Oz .

Opção correta: **(B)**

20.2 Os pontos B e C têm a mesma ordenada e a mesma cota, respetivamente, 0 e 4, pelo que $BC: y = 0 \wedge z = 4$.

Opção correta: **(D)**

21.1 $\alpha : z = x \Leftrightarrow x - z = 0$

Um vetor normal ao plano α é, por exemplo, $(1, 0, -1)$.

Um plano será perpendicular a α se um vetor que lhe seja normal for perpendicular ao vetor normal ao plano α .

Opção correta: **(D)**

21.2 $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(2, 3, 0), k \in \mathbb{R} \wedge z = x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 0 + 3k \\ z = 3 + 0k \\ z = x \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -1 + 2k \\ y = 3k \\ z = 3 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 3 \times 2 \\ z = 3 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 6 \\ z = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto de interseção são $(3, 6, 3)$.

Opção correta: **(A)**

22.1 A pertence a Ox , pelo que as suas coordenadas são da forma $(x_A, 0, 0)$. Como também pertence ao plano que contém a base do cone: $x_A + 2 \times 0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_A = 8, A(8, 0, 0)$

B pertence a Oy , pelo que as suas coordenadas são da forma $(0, y_B, 0)$. Como também pertence ao plano que contém a base do cone, tem-se:

$$0 + 2y_B - 8 = 0 \Leftrightarrow y_B = 4, B(0, 4, 0)$$

Centro: $M_{[AB]}(4, 2, 0)$

$$\text{Raio: } \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(8-0)^2 + (0-4)^2 + (0-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} \text{ e } \left(\frac{\sqrt{80}}{2}\right)^2 = \frac{80}{4} = 20$$

$$\text{Equação: } (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 20$$

22.2 Como $[AB]$ é um diâmetro da base do cone e o cone é reto, o ponto médio de $[AB]$ pertence à reta perpendicular à base do cone que contém o vértice. Designando por MV essa reta. Dado que MV é perpendicular ao plano que contém a base do cone, um vetor normal a esse plano também é um vetor diretor da reta MV , pelo que uma equação da reta MV é $(x, y, z) = (4, 2, 0) + k(1, 2, 0), k \in \mathbb{R}$.

Assim, as coordenadas do ponto V são da forma $(4+k, 2+2k, 0), k \in \mathbb{R}$ e como a sua abcissa tem menos uma unidade do que a sua ordenada, $4+k = 2+2k-1 \Leftrightarrow k=3$

Logo, as coordenadas do ponto V são $(4+3, 2+2 \times 3, 0)$, ou seja, $(7, 8, 0)$.

PÁG. 231**Começar a preparar o exame**

22.3 Um plano paralelo ao plano que contém a base do cone admite, como vetor normal, o vetor de coordenadas $(1, 2, 0)$, por exemplo (que também é normal ao plano que contém a base do cone).

Uma equação cartesiana desse plano é da forma $x + 2y + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto $V, 7 + 2 \times 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = -23$.

A equação pedida é $x + 2y - 23 = 0$.

Opção correta: **(B)**

22.4 A projeção ortogonal do ponto de coordenadas $\left(\frac{9}{2}, -2, 6\right)$ no plano que contém a base do cone obtém-se intersecando o plano com a reta que contém esse ponto e é perpendicular ao plano. Portanto, admite como vetor diretor um vetor normal ao plano.

Logo, uma equação dessa reta é $\left(\frac{9}{2}, -2, 6\right) + k(1, 2, 0)$, $k \in \mathbb{R}$, pelo que, as coordenadas de um ponto genérico desta reta são $\left(\frac{9}{2} + k, -2 + 2k, 6\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto na equação do plano que contém a base do cone:

$$\begin{aligned} \frac{9}{2} + k + 2(-2 + 2k) - 8 = 0 &\Leftrightarrow \frac{9}{2} + k - 4 + 4k - 8 = 0 \Leftrightarrow 9 + 2k - 8 + 8k - 16 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10k = 15 \Leftrightarrow k = \frac{15}{10} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Assim, o ponto tem coordenadas $\left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}, -2 + 2 \times \frac{3}{2}, 6\right) = (6, 1, 6)$.

23. A reta r é perpendicular ao plano α se o vetor diretor da reta for colinear com o vetor normal ao plano:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} = \frac{n}{1} = \frac{m+3}{-1} &\Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{n}{1} \wedge \frac{n}{1} = \frac{m+3}{-1} \Leftrightarrow m = 2n \wedge m = -n - 3 \Leftrightarrow 2n = -n - 3 \wedge m = 2n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = -1 \wedge m = -2 \end{aligned}$$

Opção correta: **(C)**

24.1 O ponto A é o ponto de intersecção da reta AH com o plano ABC :

$$(x, y, z) = (0, 7, 12) + k(4, -8, -12), k \in \mathbb{R} \wedge y - 5z = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 4k \\ y = 7 - 8k \\ z = 12 - 12k \\ y - 5z = -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k \\ 5z - 1 = 7 - 8k \\ z = 12 - 12k \\ y = 5z - 1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k \\ 5z = 8 - 8k \\ z = 12 - 12k \\ y = 5z - 1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k \\ 5(12 - 12k) = 8 - 8k \\ z = 12 - 12k \\ y = 5z - 1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k \\ 60 - 60k = 8 - 8k \\ z = 12 - 12k \\ y = 5z - 1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k \\ k = 1 \\ z = 12 - 12k \\ y = 5z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \times 1 \\ k = 1 \\ z = 12 - 12 \times 1 \\ y = 5z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ k = 1 \\ z = 0 \\ y = 5 \times 0 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ k = 1 \end{cases}$$

Logo, $A(4, -1, 0)$.

24.2 O ponto D é o ponto de intersecção do plano ABC com o eixo Oy : $x = 0 \wedge z = 0$, pelo que as suas coordenadas são da forma $(0, y_D, 0)$.

Substituindo na equação de ABC : $y_D - 5 \times 0 = -1 \Leftrightarrow y_D = -1$, $D(0, -1, 0)$.

Portanto, o raio é dado por: $\|\overrightarrow{GH}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = \|(-4, 0, 0)\| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

$H = E + \overrightarrow{EH} = E + \overrightarrow{FG}$ tem coordenadas $(0 + 0, 2 + 5, 11 + 1) = (0, 7, 12)$.

$$x^2 + (y - 7)^2 + (z - 12)^2 = 16$$

24.3 O ponto $B = A + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{FG}$ tem coordenadas $(4 + 0, -1 + 5, 0 + 1) = (4, 4, 1)$ e \overrightarrow{BE} tem coordenadas $(0 - 4, 2 - 4, 11 - 1) = (-4, -2, 10)$.

$$\cos(\widehat{AH}, \widehat{BE}) = \frac{|4 \times (-4) + (-8) \times (-2) + (-12) \times 10|}{\sqrt{4^2 + (-8)^2 + (-12)^2} \times \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 10^2}} = \frac{120}{\sqrt{224} \times \sqrt{120}};$$

$$(\widehat{AH}, \widehat{BE}) = \cos^{-1}\left(\frac{120}{\sqrt{224} \times \sqrt{120}}\right) \approx 43^\circ.$$

24.4 O ponto C tem abcissa 0 e tem a ordenada e a cota iguais às do ponto B , pelo que $C(0, 4, 1)$. As coordenadas de \overrightarrow{CE} são $(0 - 0, 2 - 4, 11 - 1) = (0, -2, 10)$.

A reta CE é perpendicular ao plano ABC porque o vetor diretor da reta é colinear com um vetor normal ao plano: $\overrightarrow{CE} = 2(0, 1, -5)$.

O volume do prisma é dado por $V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AD} \times \overline{FG} \times \text{altura}$. Como CE é perpendicular ao plano ABC , tomando para base do prisma a face $[ABCD]$, a altura é $\overline{CE} = \|\overrightarrow{CE}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-10)^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

$$\overline{AD} = \sqrt{(0 - 4)^2 + (-1 + 1)^2 + (0 - 0)^2} = 4 \text{ e } \overline{FG} = \sqrt{0^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$$

$$\text{Logo, } V_{[ABCDEFGH]} = 4 \times \sqrt{26} \times 2\sqrt{26} = 208.$$

25. Os planos α e β são perpendiculares se os vetores normais aos planos, $\vec{n}_\alpha(b, -2, a)$ e $\vec{n}_\beta(a + b, a, 2)$ ($(a + b)x + 2z = -ay \Leftrightarrow (a + b)x + ay + 2z = 0$), forem perpendiculares:

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow b(a + b) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee a + b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee a = -b.$$

Portanto, α e β são perpendiculares se $b = 0$ ou se a e b forem simétricos.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 232

Começar a preparar o exame

26.1 Se a reta é perpendicular ao plano xOy , então é paralela ao eixo Oz , pelo que uma condição cartesiana que a define é $x = a \wedge y = b$, e, que a é a abcissa de qualquer ponto da reta e b é a ordenada de qualquer ponto da reta, em particular de A .

Opção correta: **(A)**

$$\mathbf{26.2} \quad V_{[ABCDE]} = A_{[ABC]} \times 5$$

Plano mediador de $[OA]$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x - 2\sqrt{3})^2 + (y - 6)^2 + z^2 \Leftrightarrow -4\sqrt{3}x + 12 - 12y + 36 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 12y = -4\sqrt{3}x + 48 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 \end{aligned}$$

O ponto B pertence ao plano mediador de $[OA]$ e à reta AB :

$$(x, y, z) = (0, 16, 0) + k(\sqrt{3}, -5, 0), k \in \mathbb{R} \wedge y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + \sqrt{3}k \\ y = 16 - 5k \\ z = 0 + 0k \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}k \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3}k + 4 = 16 - 5k \\ z = 0 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{3} \\ k = 3 \\ z = 0 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 3\sqrt{3} + 4 \end{cases}$$

Assim, $B(3\sqrt{3}, 1, 0)$.

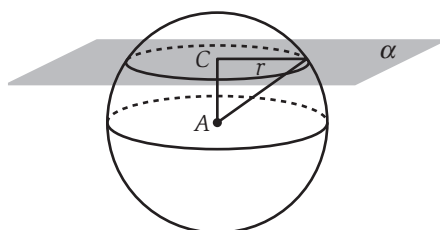
$$\overline{OA} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}, \quad \overline{OB} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$\text{Altura do triângulo } [OAB]: \sqrt{\overline{OB}^2 - \left(\frac{\overline{OA}}{2}\right)^2} = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Área do triângulo } [OAB]: \frac{4\sqrt{3} \times 4}{2} = 8\sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } V_{[ABCDE]} = 8\sqrt{3} \times 5 = 40\sqrt{3}.$$

27. Designemos por C o centro e por r o raio do círculo resultante da interseção da esfera com o plano. C é a projeção ortogonal do ponto A no plano α . Determinemos a distância entre os pontos A e C .



Começamos por escrever uma equação vetorial da reta AC que passa no ponto A e é perpendicular ao plano α .

Como a reta AC é perpendicular ao plano α , o vetor $\vec{n}(5, -3, 2)$, vetor normal a α , é um vetor diretor da reta AC e, portanto, uma equação vetorial de AC é:

$$(x, y, z) = (-3, 9, 1) + k(5, -3, 2), \quad k \in \mathbb{R}$$

Em seguida, determinamos as coordenadas do ponto de interseção da reta AC com o plano α , projeção ortogonal do ponto A no plano α , designado por C .

Para tal, podemos escrever as coordenadas de um ponto genérico de AC e substituir essas coordenadas na equação do plano α .

As coordenadas de um ponto genérico de AC são $(-3 + 5k, 9 - 3k, 1 + 2k)$, $k \in \mathbb{R}$ (para cada valor real de k , obtemos um ponto de AC).

Substituindo as coordenadas do ponto na equação de α , tem-se:

$$\begin{aligned} 5(-3 + 5k) - 3(9 - 3k) + 2(1 + 2k) &= 36 \Leftrightarrow -15 + 25k - 27 + 9k + 2 + 4k = 36 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 38k = 76 \Leftrightarrow k = 2 \end{aligned}$$

Portanto, $C(-3 + 5 \times 2, 9 - 3 \times 2, 1 + 2 \times 2)$, ou seja, $C(7, 3, 5)$.

A distância do ponto A ao plano α é, então, dada por:

$$\overline{AC} = \sqrt{(7 + 3)^2 + (3 - 9)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{152} = 2\sqrt{38}$$

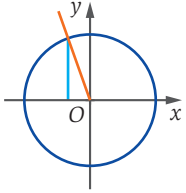
$$r^2 = \sqrt{160^2} - \sqrt{152^2} \Leftrightarrow r^2 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt{8} \Leftrightarrow r = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Logo, Perímetro} = 2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi.$$

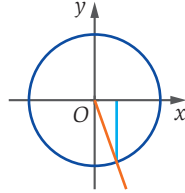
PÁG. 233
Teste global

1.

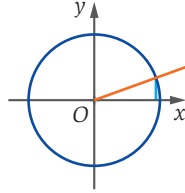
(A)



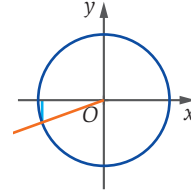
(B)



(C)



(D)

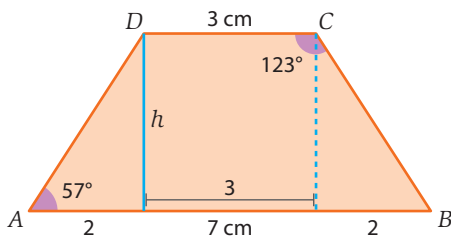
Opção correta: **(B)**

$$2. \operatorname{sen} \alpha \times \operatorname{tg} \alpha > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha \times \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} > 0 \Leftrightarrow \frac{\overbrace{\operatorname{sen}^2 \alpha}^{>0}}{\operatorname{cos} \alpha} > 0 \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha > 0$$

Como $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, 2\pi \right[$ e $\operatorname{cos} \alpha > 0$, conclui-se que $\alpha \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$, ou seja, $\alpha \in 4.^\circ \text{Q}$.

Opção correta: **(D)**

3.



$$\frac{h}{2} = \operatorname{tg} 57^\circ \Leftrightarrow h = 2 \operatorname{tg} 57^\circ$$

$$A_{[ABCD]} = \frac{3+7}{2} \times 2 \operatorname{tg} 57^\circ = 10 \operatorname{tg} 57^\circ \approx 15,4 \text{ cm}^2$$

4.1 O ponto B tem coordenadas $(\operatorname{cos} \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$ e a reta OB tem declive $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$.

Como a reta PQ é tangente à circunferência no ponto B , a reta PQ é perpendicular à reta OB e tem

$$\text{declive } -\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}} = -\frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Opção correta: **(C)**

4.2 A ordenada do ponto Q é a ordenada na origem da reta PQ . Determinemo-la, substituindo as coordenadas do ponto $B(\operatorname{cos} \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$ na equação da reta.

A equação reduzida da reta PQ é da forma $y = -\frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}x + b$.

$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \times \operatorname{cos} \alpha + b \Leftrightarrow b = \operatorname{sen} \alpha + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \Leftrightarrow b = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Tem-se, portanto, $Q\left(0, \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}\right)$, pelo que $\overline{OQ} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$.

Determinemos, agora, a abcissa do ponto P .

$$0 = -\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} x + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$P\left(\frac{1}{\cos \alpha}, 0\right)$. Como o ponto P tem abcissa negativa, $\overline{OP} = -\frac{1}{\cos \alpha}$.

$$\text{Logo, } A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{OQ}}{2} = \frac{-\frac{1}{\cos \alpha} \times \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}{2} = -\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}.$$

Alternativamente:

$$B\hat{O}Q = \alpha - \frac{\pi}{2}, \text{ pelo que } \underbrace{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}_{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \overline{OQ} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$P\hat{O}B = \pi - \alpha, \text{ pelo que } \underbrace{\cos(\pi - \alpha)}_{-\cos \alpha} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{1}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OP} = -\frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{Logo, } A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{OQ}}{2} = \frac{-\frac{1}{\cos \alpha} \times \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}{2} = -\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}.$$

$$4.3 \quad 2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sqrt{3} - \cos(\pi + \alpha) \Leftrightarrow 2(-\cos \alpha) = \sqrt{3} - (-\cos \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \cos \alpha = \sqrt{3} + \cos \alpha \Leftrightarrow -3 \cos \alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{6}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

$$-\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = -\frac{1}{2 \frac{\sqrt{6}}{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{2 \times 3 \sqrt{2}}{3 \times 3}} = \frac{3}{2 \sqrt{2}} = \frac{3 \sqrt{2}}{4}$$

$$5. \quad 3\pi \text{ é período da função } g: \frac{2\pi}{c} = 3\pi \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}.$$

Logo, qualquer número da forma $\frac{2}{3}k$, $k \in \mathbb{Z}$, é período da função g .

Opção correta: **(B)**

6.1 Considerando que $t = 0$ corresponde às 12 h do dia 1 de fevereiro de 2024, as 9 h 30 do dia 1 de fevereiro correspondem a $t = -2,5$.

$$T(-2,5) = 23,4 + 1,6 \operatorname{sen}\left(\frac{-2,5\pi}{5}\right) = 23,4 + 1,6 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 23,4 + 1,6(-1) = 21,8^\circ \text{C}$$

$$6.2 \quad -1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -1,6 \leq 1,6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right) \leq 1,6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 23,4 - 1,6 \leq 23,4 + 1,6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right) \leq 23,4 + 1,6 \Leftrightarrow 21,8 \leq T(t) \leq 25$$

$$T(t) = 21,8 \Leftrightarrow 23,4 + 1,6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right) = 21,8 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right) = -1 \Leftrightarrow$$

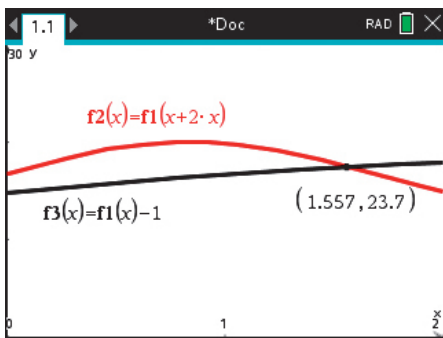
$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{5} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{15}{2} + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

12 h + 7,5 h = 19 h 30. Como $7,5 - 10 = -2,5$, que corresponde às 9 h 30 desse dia, então, nesse dia a temperatura do laboratório atingiu o valor mínimo às 9 h 30 e às 19 h 30.

$$\mathbf{6.3} \quad T(t + 10) = 23,4 + 1,6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(t + 10)}{5}\right) = 23,4 + 1,6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{5} + 2\pi\right) = 23,4 + 1,6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right) = T(t)$$

A função T admite 10 como período. Passadas dez horas de um certo instante, a temperatura volta a ser a mesma.

$$\mathbf{6.4} \quad f(x + 2x) = f(x) - 1$$



Nota: Na imagem, f_1 é a função T .

$t \approx 1,557$, que corresponde às 13 h 33 do dia 1 de fevereiro de 2024.

7. Como as retas r e s são paralelas, a amplitude do ângulo formado pelas retas s e t é igual à amplitude do ângulo formado pelas retas r e t , que é 60° , dado que $\operatorname{sen}(\hat{r}, s) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Opção correta: **(D)**

PÁG. 235

Teste global

$$\mathbf{8.1} \quad \widehat{ABC} = \widehat{\vec{BA}, \vec{BC}}$$

$$\vec{BA}(-2, -5) \text{ e } \vec{BC}(6, -6).$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -2 \times 6 + (-5) \times (-6) = 18$$

$$\|\vec{BA}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29} \text{ e } \|\vec{BC}\| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\cos(\widehat{\vec{BA}, \vec{BC}}) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\|} = \frac{18}{\sqrt{29} \times \sqrt{72}}$$

$$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{18}{\sqrt{29} \times \sqrt{72}}\right) \approx 67^\circ$$

8.2 A reta AB tem declive $\frac{8-3}{0-(-2)} = \frac{5}{2}$. A reta que contém a altura do triângulo $[ABC]$ em relação ao lado $[AB]$ é perpendicular à reta AB , logo tem declive $-\frac{1}{\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}$.

Como a reta contém a altura de $[ABC]$ em relação a $[AB]$, então C pertence a essa reta. Substituindo as coordenadas do ponto C , obtém-se:

$$2 = -\frac{2}{5} \times 6 + b \Leftrightarrow b = 2 + \frac{12}{5} \Leftrightarrow b = \frac{22}{5}.$$

Logo, a equação pedida é $y = -\frac{2}{5}x + \frac{22}{5}$.

9.1 O ponto A pertence ao plano xOz , pelo que as suas coordenadas são da forma $(x_A, 0, z_A)$, e ao plano $ABC: x_A - 2 \times 0 + 2z_A - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A + 2z_A - 6 = 0$.

Como a diferença entre a abcissa e a cota do ponto A é 9 , $x_A - z_A = 9 \Leftrightarrow z_A = x_A - 9$.

Assim, $x_A + 2(x_A - 9) - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A + 2x_A - 18 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A = 8$ e $z_A = 8 - 9 \Leftrightarrow z_A = -1$.

Logo, $A(8, 0, -1)$.

O ponto C pertence ao eixo Oz , pelo que as suas coordenadas são da forma $(0, 0, z_C)$, e ao plano $ABC: 0 - 2 \times 0 + 2z_A - 6 = 0 \Leftrightarrow z_A = 3$. Logo, $C(0, 0, 3)$.

$M\left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$, ou seja, $M(4, 0, 1)$ e as coordenadas de \overrightarrow{MV} são $(4-4, -5-0, 5-1) = (0, -5, 4)$.

Um vetor normal ao plano ABC é, por exemplo, $(1, -2, 2)$.

O segmento de reta $[MV]$ não é a altura da pirâmide pois o vetor \overrightarrow{MV} não é colinear com o vetor normal ao plano ABC que contém a base da pirâmide.

9.2 Como a reta VQ é perpendicular ao plano ABC , o vetor $\vec{n}(1, -2, 2)$, vetor normal a ABC , é um vetor diretor da reta VQ e, portanto, uma equação vetorial de VQ é $(x, y, z) = (4, -5, 5) + k(1, -2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$.

O ponto médio de $[VQ]$ pertence à reta VQ e ao plano mediador de $[VQ]$.

As coordenadas do ponto médio de $[VQ]$ são da forma $(4+k, -5-2k, 5+2k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo na equação de ABC , tem-se:

$$4+k-2(-5-2k)+2(5+2k)-6=0 \Leftrightarrow 4+k+10+4k+10+4k-6=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9k=-18 \Leftrightarrow k=-2$$

Portanto, o ponto médio de $[VQ]$ tem coordenadas $(4-2, -5-2(-2), 5+2(-2))$, ou seja, $N(2, -1, 1)$.

Por outro lado, considerando $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, o ponto médio de $[VQ]$ tem coordenadas

$$\left(\frac{4+x_Q}{2}, \frac{-5+y_Q}{2}, \frac{5+z_Q}{2}\right).$$

Assim, $\frac{4+x_Q}{2} = 2 \wedge \frac{-5+y_Q}{2} = -1 \wedge \frac{5+z_Q}{2} = 1$. Logo, $Q(0, 3, -3)$.

Alternativamente (para a parte final, após a determinação de $N(2, -1, 1)$):

$$\text{Logo, } Q = V + 2\overrightarrow{VN}.$$

As coordenadas do vetor \overrightarrow{VN} são $(2 - 4, -1 - (-5), 1 - 5) = (-2, 4, -4)$, pelo que as coordenadas de Q são

$$(4, -5, 5) + 2(-2, 4, -4) = (4 - 2 \times 2, -5 + 2 \times 4, 5 - 2 \times 4) = (0, 3, -3).$$

10. Os planos α e β são paralelos se os vetores normais aos planos forem

colineares: $\frac{a}{1} = \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow a = 2$ e são perpendiculares se os vetores normais aos planos forem perpendiculares:

$$(1, 1, 1) \cdot (a, 2, 2) = 0 \Leftrightarrow a + 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -4$$

Como o vetor diretor da reta r e o vetor normal ao plano α são perpendiculares, conclui-se que a reta é paralela ao plano ou está contida no plano. Por outro lado, como a reta contém a origem e o plano também, conclui-se que a reta está contida no plano.

O plano β não contém a origem do referencial, pelo que a reta r é paralela ao plano β se o vetor diretor da reta e o vetor normal ao plano forem perpendiculares:

$$(-2, 1, 1) \cdot (a, 2, 2) = 0 \Leftrightarrow -2a + 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Logo, **I** - c; **II** - a; **III** - b; **IV** - c.