

4. Contagem

PÁG. 7

Diagnóstico

1. $3 \times 3 = 9$

2.1 Começamos por elaborar uma tabela de dupla entrada, considerando os números das faces dos dois dados, e as somas dos números das faces viradas para baixo.

Dado 1 \ Dado 2	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
7	6	5	4	3	2	1	0	-1
8	7	6	5	4	3	2	1	0

Resultados diferentes: $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Podem-se obter 15 resultados diferentes.

2.2 No dado com as faces numeradas de 1 a 8 há quatro números primos (2, 3, 5, 7); logo, existem 4 possibilidades.

3.1 Para o algarismo das dezenas podemos escolher um dos quatro cartões. Para cada uma destas escolhas, para o algarismo das unidades pode ser escolhido um dos quatro cartões.

Logo, pelo princípio da multiplicação, há $4 \times 4 = 16$ números diferentes com dois algarismos.

3.2 Para o algarismo das centenas podemos escolher um dos quatro cartões. Para cada uma destas escolhas, o algarismo das dezenas pode ser escolhido entre três cartões. Em seguida, o algarismo das unidades pode ser escolhido de entre os dois cartões restantes.

Logo, pelo princípio da multiplicação, existem $4 \times 3 \times 2 = 24$ números diferentes com três algarismos diferentes.

4. 6; para que o produto seja zero, a bola retirada tem de ser a que tem o 0 e no lançamento do dado, pode sair qualquer um dos algarismos das faces. Portanto, há $1 \times 6 = 6$ possibilidades.

PÁG. 8**Tarefa 1**

Existem 9 percursos possíveis: $1-7$; $1-6$; $2-7$; $2-6$; $3-5$; $1-4-5$; $2-4-5$; $3-4-6$ e $3-4-7$.

PÁG. 8**Tarefa 2**

Como para a camisola há seis possibilidades, para os calções há cinco e para os pares de meias há também cinco, o número de maneiras de se vestir é $6 \times 5 \times 5 = 150$.

PÁG. 11**Aplicar**

2. Para a escolha da sopa há quatro possibilidades, para a escolha do prato principal há seis possibilidades e para a escolha da sobremesa há duas possibilidades.

Logo, pelo princípio da multiplicação, há $4 \times 6 \times 2 = 48$ menus diferentes.

3. $\#P = 12$, $\#A = 8$, $\#(T \cap P) = 4$, $\#(P \cap A) = 0$ e $\#(T \cup A) = 15$.

3.1 Como quem pratica padel não pratica atletismo, nenhum pratica padel e atletismo.

3.2 $\#(P \cap \bar{T}) = \#P - \#(T \cap P) = 12 - 4 = 8$

Oito amigos praticam apenas padel.

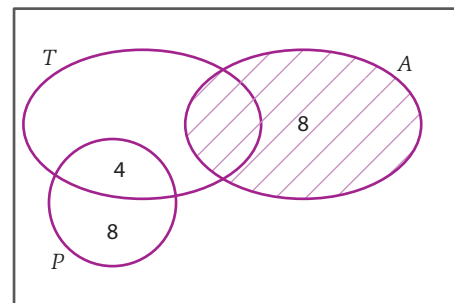
3.3 Como $\#(T \cup A) = 15$, então $\#(T \cap \bar{A}) = 15 - 8 - 4 = 3$.

Três amigos praticam apenas ténis.

3.4 $8 + 8 + 4 + 3 = 23$

O grupo tem 23 elementos.

3.5 Não. Para o sabermos, teríamos de saber quantos praticam ténis. Esse número varia entre 7 (quando nenhum pratica ténis e atletismo) e 15 (quando oito praticam ténis e atletismo).

**PÁG. 12****Aplicar**

4. O conjunto A tem 4 cores diferentes e o conjunto B tem 7 cores diferentes.

4.1 Para a primeira e última listas há quatro maneiras diferentes de colorir cada uma delas e, para colorir a lista central, há sete maneiras diferentes.

Logo, pelo princípio da multiplicação, existem $4 \times 7 \times 4 = 112$ bandeiras distintas.

4.2 Para a primeira lista há quatro maneiras de a colorir e para a última lista temos três maneiras diferentes de a colorir. Para pintar a lista central temos sete maneiras diferentes de a colorir.

Logo, pelo princípio da multiplicação, há $4 \times 7 \times 3 = 84$ bandeiras distintas.

Opção correta: **(B)**

4.3 Para a primeira lista há 11 maneiras diferentes de escolher uma cor; como tiras adjacentes não podem ter a mesma cor, há 10 maneiras diferentes de escolher uma cor para a lista central e, para a última lista, há novamente 10 maneiras diferentes de escolher uma cor, uma vez que só tem de ser diferente da lista central. Pelo princípio da multiplicação, há $11 \times 10 \times 10 = 1100$ bandeiras distintas.

5.1 Entrar por A e sair por D , passando pela sala de estar e passando, no máximo, uma vez em cada divisão:

Entrando pela porta A , há duas portas para passar para a sala de estar, há duas portas para passar da sala de estar para a sala de jogos e uma porta para sair por D .

Logo, pelo princípio da multiplicação, há $1 \times 2 \times 2 \times 1 = 4$ percursos possíveis.

5.2 Para entrar por C e sair por D , passando, no máximo, uma vez em cada divisão, temos duas possibilidades: Entrar por C , seguir para a sala de jogos (duas portas) e sair por D ; ou entrar por C , seguir para a cozinha (duas portas), depois para a sala de jantar (uma porta), em seguida, para a sala de jogos (três portas) e sair por D .

Logo, pelos princípios da adição e da multiplicação, há $1 \times 2 \times 1 + 1 \times 2 \times 1 \times 3 \times 1 = 8$ percursos possíveis.

5.3 Para entrar por D e sair por A ou B passando, no máximo, uma vez em cada divisão, temos duas possibilidades: Entrar por D , seguir para a sala de estar (duas portas), depois para a cozinha (duas portas) e sair por A ou B ; a outra possibilidade é entrar por D , seguir para a sala de jantar (três portas), depois para a cozinha (uma porta) e sair por A ou B .

Logo, pelos princípios da adição e da multiplicação, existem $1 \times 2 \times 2 \times 2 + 1 \times 3 \times 1 \times 2 = 14$ percursos possíveis.

5.4 Para entrar por A e sair por B , passando exatamente uma vez na sala de estar, na sala de jantar e na sala de jogos temos duas possibilidades, em que os percursos são inversos.

Logo, pelos princípios da adição e da multiplicação, existem

$1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 = 24$ percursos possíveis.

6. Pretendem-se todos os números ímpares de cinco algarismos distintos, compreendidos entre 20 000 e 50 000. Então, o algarismo das unidades tem de ser ímpar e o algarismo das dezenas de milhares só pode ser 2, 3 ou 4. Vamos considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: o algarismo das dezenas de milhar é 2 ou 4

Para o algarismo das dezenas de milhares temos duas possibilidades (2 ou 4) e para o algarismo das unidades temos cinco possibilidades (1, 3, 5, 7 ou 9). O algarismo dos milhares pode ser escolhido entre os 8 algarismos disponíveis; o algarismo das centenas pode ser escolhido entre os restantes 7, e o algarismo das dezenas pode ser escolhido entre os 6 algarismos restantes.

Assim, existem $2 \times 5 \times 8 \times 7 \times 6$ números nestas condições.

2.º caso: o algarismo das dezenas de milhar é 3

Para o algarismo das dezenas de milhares temos uma possibilidade, o 3, e para o algarismo das unidades temos quatro possibilidades (1, 5, 7 ou 9). Para os restantes três algarismos, temos $8 \times 7 \times 6$ maneiras de os escolher. Assim, há $1 \times 4 \times 8 \times 7 \times 6$ números nestas condições.

Portanto, pelos princípios da adição e da multiplicação, temos $2 \times 5 \times 8 \times 7 \times 6 + 1 \times 4 \times 8 \times 7 \times 6 = 4704$ números ímpares de cinco algarismos distintos, compreendidos entre 20 000 e 50 000.

PÁG. 13**Aplicar**

7.1 Para extrair 3 cartas de paus, temos $13 \times 12 \times 11 = 1716$ maneiras diferentes de fazer a sequência.

7.2 Para extrair 5 cartas, sendo as 4 primeiras cartas reis e a última um ás, temos $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 = 96$ maneiras diferentes de fazer a sequência.

7.3 Para extrair quatro cartas, de modo que as três primeiras sejam ases e a última seja uma carta de espadas, temos de considerar dois casos:

1.º caso: o ás de espadas está nas três primeiras cartas

Estando o ás de espada nas três primeiras cartas este pode ocupar 3 posições diferentes na sequência, para cada uma destas, falta escolher 2 ases de entre os três disponíveis, por isso, há $3 \times 3 \times 2$ maneiras diferentes de as três primeiras cartas serem ases.

Para cada uma destas, há 12 maneiras diferentes de escolher a última carta de espadas.

Assim, há $3 \times 3 \times 2 \times 12$ sequências nestas condições.

2.º caso: o ás de espadas não está nas três primeiras cartas

Se o ás de espadas não pode figurar nas três primeiras cartas, então os três ases são escolhidos entre os três disponíveis; o número de maneiras de o fazer é $3 \times 2 \times 1$. Para cada uma destas escolhas, a carta de espadas pode ser escolhida entre as 13 disponíveis.

Assim, há $3 \times 2 \times 1 \times 13$ sequências nestas condições.

Portanto, pelos princípios da adição e da multiplicação, temos $3 \times 3 \times 2 \times 12 + 3 \times 2 \times 1 \times 13 = 294$ sequências em que as três primeiras são ases e a última é uma carta de espadas.

8.1 Pelo princípio da multiplicação, temos $4 \times 5 \times 7 \times 7 \times 5 \times 4 = 19\,600$ maneiras de completar um circuito.

8.2 Pelo princípio da multiplicação, temos $4 \times 5 \times 7 \times 6 \times 4 \times 3 = 10\,080$ maneiras de completar um circuito, nas condições indicadas.

8.3 Pelo princípio da multiplicação, temos $4 \times 5 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 = 480$ maneiras de completar um circuito, nas condições indicadas.

9. Seja n o número de pratos de peixe. Pelo princípio da multiplicação, temos $7 \times (n+5) \times 6$ maneiras distintas de escolher uma entrada, um prato de carne ou peixe e uma sobremesa. Como existem 378 maneiras de fazer essa escolha, tem-se $7 \times (n+5) \times 6 = 378$.

$$7 \times (n+5) \times 6 = 378 \Leftrightarrow 42 \times (n+5) = 378 \Leftrightarrow (n+5) = \frac{378}{42} \Leftrightarrow n+5 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 9 - 5 \Leftrightarrow n = 4$$

Na ementa, há quatro pratos de peixe.

PÁG. 14**Tarefa 3**

Podem-se formar 10 000 códigos. Para cada algarismo do código, existem 10 possibilidades (0 a 9) e, para cada escolha feita, por exemplo, para o primeiro algarismo, existem 10 possibilidades para o seguinte, e assim sucessivamente; logo, o número de códigos é dado por $10 \times 10 \times 10 \times 10$ ou 10^4 .

PÁG. 16**Aplicar**

11. Para distribuir as 12 bolas pelas 2 caixas, sem restrições, o número de maneiras distintas de o fazer é dado por ${}^2A'_{12} = 2^{12} = 4096$.

Como se pretende que nenhuma das caixas fique vazia, temos de retirar dois casos, que correspondem às possibilidades de as bolas ficarem todas numa das duas caixas.

Portanto, o número de distribuições, nas condições enunciadas, é ${}^2A'_{12} - 2 = 4096 - 2 = 4094$.

12.1 ${}^{10}A'_3 \times {}^{23}A'_2 \times {}^{10}A'_2 = 10^3 \times 23^2 \times 10^2 = 5\,290\,000$

12.2 ${}^5A'_3 \times {}^{23}A'_2 \times {}^5A'_2 = 5^3 \times 23^2 \times 5^2 = 1\,653\,125$

12.3 ${}^{10}A'_3 \times {}^5A'_2 \times {}^{10}A'_2 = 10^3 \times 5^2 \times 10^2 = 2\,500\,000$

12.4 Como o conjunto de matrículas apenas com números ímpares e o conjunto de matrículas apenas com vogais não são disjuntos, para determinar o número de matrículas que podem ser atribuídas nestas condições, vamos usar o princípio da inclusão exclusão: $A \cap B \neq \emptyset$; $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ (A é o conjunto de matrículas só com números ímpares e B é o conjunto de matrículas só com vogais.)

Logo, existem ${}^5A'_3 \times {}^{23}A'_2 \times {}^5A'_2 + {}^{10}A'_3 \times {}^5A'_2 \times {}^{10}A'_2 - {}^5A'_3 \times {}^5A'_2 \times {}^5A'_2 = 4\,075\,000$ matrículas apenas com números ímpares ou só com vogais.

13. O número de subconjuntos do conjunto A é dado por 2^n , sendo n o número de elementos de A . No entanto, apenas queremos os subconjuntos com pelo menos um elemento, pelo que temos de retirar o conjunto sem elementos (o conjunto vazio).

$$2^n - 1 = 2047 \Leftrightarrow 2^n = 2048 \Leftrightarrow 2^n = 2^{11} \Leftrightarrow n = 11$$

(O valor de n pode ser obtido recorrendo a uma calculadora, por tentativa e erro.)

O conjunto A tem onze elementos.

14. O número de total de subconjuntos de B é dado por $2^{12} = 4096$. Como queremos os subconjuntos com pelo menos dois elementos temos de retirar, ao total, os doze subconjuntos formados com um só elemento (12 subconjuntos) e o subconjunto sem elementos (o vazio), ou seja, temos de retirar treze subconjuntos ao total de subconjuntos de B .

O número de subconjuntos de B com pelo menos dois elementos é $4096 - 13 = 4083$.

PÁG. 17**Aplicar**

15.1 O primeiro algarismo já está definido: tem de ser 9. Como o segundo dígito tem de ser um divisor de seis, há quatro maneiras de o escolher (1, 2, 3 ou 6). Para cada uma destas, os restantes sete algarismos são escolhidos, ordenadamente, de entre os dez, não necessariamente diferentes; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}A'_7$.

Assim, em Portugal podem ser atribuídos $1 \times 4 \times {}^{10}A'_7 = 40\,000\,000$ número de telemóveis diferentes.

15.2 Como o último dígito do telemóvel das pessoas que estão na loja é um número primo, esses números só podem terminar em 2, 3, 5 ou 7.

O número de sequências que se podem formar com n algarismos, não necessariamente diferentes, escolhidos de entre os 4 possíveis, é dado por ${}^4A'_n$.

Como ${}^4A'_n = 4^n$, tem-se $4^n = 262\,144$.

$$4^n = 262\,144 \Leftrightarrow 4^n = 4^9 \Leftrightarrow n = 9$$

(O valor de n pode ser obtido recorrendo a uma calculadora, por tentativa e erro.)

Na loja, estão nove pessoas.

16.1 Cada lâmpada pode estar desligada ou, então, iluminada com uma das 4 cores, portanto, para cada lâmpada há cinco estados possíveis, ou desligada ou com uma das quatro cores.

Como o sistema tem 6 lâmpadas, o número total de iluminações possíveis seria dado por

$${}^5A'_6 = 5^6 = 15\,625.$$

Como pelo menos uma das lâmpadas tem de estar iluminada, então temos de excluir o caso em que todas as lâmpadas estão apagadas, que corresponde a uma única possibilidade.

Assim, o número total de maneiras de iluminar o sistema é ${}^5A'_6 - 1 = 15\,624$.

16.2 Como a primeira e as duas últimas lâmpadas não podem estar iluminadas, ou seja, estão apagadas, restam 3 lâmpadas para iluminar e, para estas, temos 5 estados (apagada ou uma das 4 cores), pelo que, há ${}^5A'_3$ possibilidades. Como tem de haver pelo menos uma lâmpada iluminada para o sistema estar iluminado, temos de retirar o caso em que estas 3 lâmpadas estão apagadas.

Portanto, há ${}^5A'_3 - 1 = 124$ maneiras distintas de iluminar o sistema.

16.3 Se exatamente uma das lâmpadas não ficar iluminada, então 5 lâmpadas estarão iluminadas.

Primeiro devemos escolher qual a lâmpada que ficará apagada e há 6 maneiras de fazer essa escolha.

Para cada uma destas, as 5 lâmpadas restantes podem ser iluminadas de ${}^4A'_5$ maneiras diferentes.

Portanto, o número total de maneiras em que exatamente uma lâmpada não está iluminada é dado por $6 \times {}^4A'_5 = 6 \times 4^5 = 6144$.

17.1 Como o algarismo das dezenas de milhar não pode ser zero, existem nove alternativas para este algarismo. Para cada uma destas alternativas, os restantes 4 algarismos podem ser escolhidos, ordenadamente, de entre os 10 disponíveis, não necessariamente diferentes; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}A'_4$.

Assim, há $9 \times {}^{10}A'_4 = 90\,000$ números de cinco algarismos.

17.2 Para o produto dos cinco algarismos ser ímpar, os algarismos têm de ser todos ímpares.

O número de maneiras distintas de escolher, ordenadamente, os cinco algarismos ímpares, não necessariamente diferentes, é ${}^5A'_5$.

Assim, há ${}^5A'_5 = 5^5 = 3\,125$ números nas condições enunciadas.

17.3 Se, ao total de todos os números de cinco algarismos que é possível formar, subtrairmos todos os números que não têm nenhum algarismo par, ou seja, com os cinco algarismos ímpares, obtemos o total de números que têm pelo menos um algarismo par.

Portanto, há $9 \times {}^{10}A'_4 + {}^5A'_5 = 90\,000 - 3\,125 = 86\,875$ números nas condições enunciadas.

18.1 Como pretendemos seqüências de quatro cartas com pelo menos três cartas pretas, temos de considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: as seqüências com exatamente três cartas pretas e uma carta vermelha

Começa-se por escolher a posição para sair a carta vermelha. Há quatro possibilidades. Para cada uma destas maneiras, existem 26 maneiras de escolher uma carta preta para essa posição. Para cada uma destas maneiras, das 26 cartas pretas, extraem-se três, sucessivamente e com reposição, para as restantes três posições; o número de maneiras de o fazer é ${}^{26}A'_3$.

Neste caso, temos $4 \times 26 \times {}^{26}A'_3$ seqüências.

2.º caso: as seqüências com quatro cartas pretas

Das 26 cartas pretas, extraem-se quatro cartas sucessivamente e com reposição; o número de maneiras de o fazer é ${}^{26}A'_4$.

Portanto, o número pedido é $4 \times 26 \times {}^{26}A'_3 + {}^{26}A'_4 = 2\,284\,880$.

18.2 Como se pretende uma seqüência com exatamente três cartas pretas nas três primeiras extrações e um ás, temos de considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: o ás sai nas primeiras três extrações

O ás sai em uma das três primeiras extrações, e, por isso, é um ás preto. Então, existem 2 maneiras distintas de escolher um ás preto. Para cada uma destas, o ás pode ocupar três posições diferentes. Para cada uma destas, existem ${}^{24}A'_2$ maneiras diferentes de extrair sucessivamente e com reposição as outras duas cartas pretas de entre as vinte e quatro cartas pretas que não são ases. Em seguida, escolhe-se uma carta vermelha de entre as vinte e quatro cartas vermelhas (todas menos os ases).

Assim, neste caso, existem $3 \times 2 \times {}^{24}A'_2 \times 24$ seqüências.

2.º caso: o ás sai na última extração, e por isso, o ás é vermelho

Das 24 cartas pretas (todas menos os ases) extraem-se três cartas sucessivamente e com reposição; o número de maneiras de o fazer é ${}^{24}A'_3$. Para cada uma destas maneiras, existem 2 formas distintas de escolher um ás vermelho.

Assim, neste caso, existem ${}^{24}A'_3 \times 2$ seqüências.

Portanto, o número pedido é $6 \times {}^{24}A'_2 \times 24 + {}^{24}A'_3 \times 2 = 110\,592$.

PÁG.18

Tarefa 4

Para a primeira lista temos três possibilidades, para a segunda temos duas e para a terceira temos uma. Logo, pelo princípio da multiplicação, existem $3 \times 2 \times 1 = 6$ bandeiras diferentes com estas características.

PÁG.19

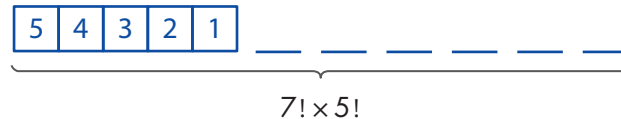
Tarefa 5

As cinco letras da palavra CARRO permutam entre si de $5!$ maneiras distintas. No entanto, como há duas letras R, quando estas permutam entre si não geram uma seqüência de letras distintas, ou seja, gera uma seqüência de letras repetida, que não pode ser contada. Assim, $5!$ seqüências que se podem formar, apenas metade, correspondente a $2!$ (número de maneiras de permutar os R entre si) correspondem a seqüências distintas. Logo, existem $\frac{5!}{2!} = 60$ seqüências distintas que se podem formar com todas as letras da palavra CARRO.

PÁG.22**Aplicar**

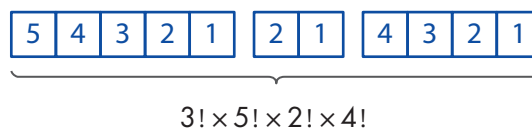
22.1 O número de maneiras de ordenar os onze livros é $11! = 39\,916\,800$

22.2 Para ordenar os onze livros, de modo que os cinco romances fiquem em posições consecutivas, começamos por agrupar os cinco livros de romances num bloco e vamos determinar o número de maneiras de ordenar o bloco e os restantes seis livros; o número de maneiras de o fazer é $7!$ (o bloco e os seis livros constituem sete elementos para ordenar). Dentro do bloco, o número de maneiras de ordenar (permutar) os cinco livros de romances é $5!$.



Assim, há $7! \times 5! = 604\,800$ disposições distintas.

22.3 Para ordenar os onze livros, de modo que os livros do mesmo tipo fiquem em posições consecutivas, começamos por agrupar os cinco livros de romance num bloco, os dois de livros de viagens noutro bloco e os quatro livros policiais noutro bloco e vamos determinar o número de maneiras de ordenar os três blocos; o número de maneiras de o fazer é $3!$ (os blocos constituem três elementos para ordenar). Para cada uma destas possibilidades, dentro do bloco dos livros de romance, o número de maneiras de ordenar os cinco romances é $5!$, dentro do bloco dos livros das viagens, o número de maneiras de ordenar os dois livros de viagens é $2!$, e dentro do bloco dos livros policiais, o número de maneiras de ordenar os quatro livros policiais é $4!$.



Portanto, há $3! \times 5! \times 2! \times 4! = 34\,560$ disposições distintas.

22.4 Se ao número total de maneiras de ordenar os onze livros, subtrairmos o número de maneiras dos livros de viagens ficarem em posições consecutivas, obtemos o número de maneiras em que os livros de viagens não estão em posições consecutivas.

Para determinar o número de maneiras dos dois livros de viagens ficarem em posições consecutivas, agrupamos os dois livros num bloco e determinamos o número de maneiras de ordenar o bloco e os restantes nove livros; o número de maneiras de o fazer é $10!$. Para cada uma destas, os livros dentro do bloco podem ser ordenados de $2!$ maneiras.

Assim, existem $10! \times 2!$ maneiras dos livros de viagens ficarem em posições consecutivas.

Portanto, há $11! - 10! \times 2! = 32\,659\,200$ disposições distintas.

22.5 Seja n o número de livros de cada género literário. Como existem três géneros literários e o número de livros de cada género é igual, temos $3n$ livros no total.

Para garantir que os livros de cada género fiquem juntos, começamos por agrupar cada grupo de livros de um género num «bloco». Logo, temos 3 blocos, correspondentes aos 3 géneros literários.

Os 3 blocos podem ser ordenados de $3!$ maneiras. Dentro de cada bloco, podemos ordenar os n livros de cada bloco do mesmo género de $n!$ maneiras cada um.

Assim, o número total de maneiras de ordenar os livros é dado por $3! \times n! \times n! \times n! = 3! \times (n!)^3$.

$$\underbrace{\boxed{n!} \quad \boxed{n!} \quad \boxed{n!}}_{3! \times n! \times n! \times n! = 3! \times (n!)^3}$$

Resolvendo a equação $3! \times (n!)^3 = 82\,944$, determinamos quantos livros há de cada género literário.

$$3! \times (n!)^3 = 82\,944 \Leftrightarrow (n!)^3 = \frac{82\,944}{6} \Leftrightarrow (n!)^3 = 13\,824 \Leftrightarrow n! = \sqrt[3]{13\,824} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n! = 24 \Leftrightarrow n = 4$$

Como há 4 livros para cada género literário, foram oferecidos 12 livros.

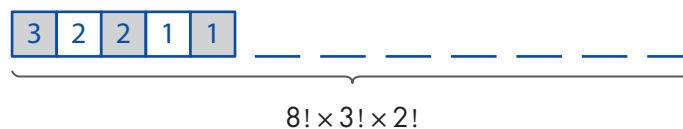
PÁG. 23

Aplicar

23.1 Para sentar os doze amigos, de modo que a Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Ezequiel fiquem em posições consecutivas, começamos por agrupar os cinco amigos num bloco, e vamos determinar o número de maneiras de ordenar o bloco e os restantes 7 amigos; o número de maneiras de o fazer é $8!$ (o bloco e os sete constituem oito elementos para ordenar). Dentro do bloco, o número de maneiras de ordenar os cinco amigos é $5!$.

Assim, o número pedido é $8! \times 5! = 4\,838\,400$.

23.2 Para sentar os doze amigos, de modo que a Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Ezequiel fiquem em posições consecutivas, mas que não haja duas raparigas em posições consecutivas, começamos por agrupar os cinco amigos num bloco, e vamos determinar o número de maneiras de ordenar o bloco e os restantes 7 amigos; o número de maneiras de o fazer é $8!$. Dentro do bloco, para as amigas não ficarem em posições consecutivas, a disposição dos lugares entre sexos fica definida, ou seja, o Carlos e o Ezequiel têm de ficar entre duas amigas. Assim, as três amigas apenas podem trocar entre si nas três posições que lhes estão reservadas (a primeira, a terceira e a quinta posições do bloco), de $3!$ maneiras, e Carlos e o Ezequiel podem trocar entre si nas duas posições que lhes estão reservadas, de $2!$ maneiras.



Nota: na figura, no bloco, os quadrados a cinzento representam as posições que podem ser ocupadas pela Ana, a Bruna e a Diana, e os quadrados branco representam as posições que podem ser ocupadas pelo Carlos e pelo Ezequiel.

Portanto, o número pedido é $8! \times 3! \times 2! = 483\,840$.

23.3 Para sentar os doze amigos, de modo que a Ana, a Bruna e a Diana fiquem em posições consecutivas, e o Carlos e o Ezequiel também fiquem em posições consecutivas, começamos por agrupar as três amigas num bloco e o Carlos e o Ezequiel noutro bloco. O número de maneiras de ordenar os dois blocos e as restantes sete amigos é $9!$. Dentro do bloco das amigas, o número de maneiras de as ordenar (permutar) é $3!$, e dentro do bloco do Carlos e do Ezequiel, o número de maneiras de os ordenar (permutar) é $2!$.

Assim, o número pedido é $9! \times 3! \times 2! = 4\,354\,560$.

23.4 Se ao número total de maneiras de sentar os doze amigos de modo que a Ana, a Bruna e a Diana fiquem em posições consecutivas, se subtrair o número de maneiras de sentar a Ana, a Bruna e a Diana em posições consecutivas e o Carlos e o Ezequiel também em posições consecutivas, obtemos o número de

maneiras de sentar a Ana, a Bruna e a Diana em posições consecutivas, e que o Carlos e o Ezequiel não fiquem lado a lado.

Para sentar os doze amigos, de modo que a Ana, a Bruna e a Diana fiquem em posições consecutivas, começamos por agrupar as três raparigas num bloco, e vamos determinar o número de maneiras de ordenar o bloco e os restantes 9 amigos; o número de maneiras de o fazer é $10!$ (o bloco e os nove amigos constituem dez elementos para ordenar). Dentro do bloco, o número de maneiras de ordenar as três raparigas é $3!$.

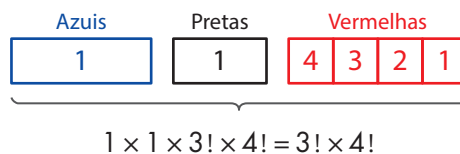
Assim, há $10! \times 3!$ maneiras de sentar os doze amigos, de modo que a Ana, a Bruna e a Diana fiquem em posições consecutivas.

Portanto, o número pedido é $10! \times 3! - 9! \times 3! \times 2! = 17\,418\,240$.

24.1 Como as três bolas azuis e as duas bolas pretas são indistinguíveis, e as quatro bolas vermelhas estão numeradas, o número total de maneiras de dispor as nove bolas numa só fila é dado pelo número total das permutações das nove bolas, $9!$, dividido pelo produto do número de permutações das bolas azuis, $3!$, pelo número de permutações das bolas pretas, $2!$.

Portanto, o número pedido é $\frac{9!}{3! \times 2!} = 30\,240$.

24.2 Pretende-se que as bolas da mesma cor fiquem dispostas consecutivamente. Por isso, vamos começar por agrupar as três bolas azuis num bloco, as duas bolas pretas noutro bloco e as quatro bolas vermelhas noutro bloco. O número de maneiras de ordenar os três blocos é $3!$; para cada uma destas maneiras, o bloco das bolas vermelhas pode ser ordenado de $4!$ maneiras (não é necessário contabilizar a ordenação do bloco das bolas azuis nem do bloco das bolas pretas porque as bolas azuis e as bolas pretas são indistinguíveis).



Portanto, o número pedido é $3! \times 4! = 144$.

24.3 Para as bolas azuis ocuparem posições consecutivas, vamos começar por agrupar as três bolas azuis num bloco; o número total de maneiras de dispor o bloco e as restantes seis bolas numa só fila é dado pelo número total das permutações dos sete elementos, $7!$, dividido pelo número de permutações das duas bolas pretas, $2!$ (as bolas pretas são indistinguíveis).

Portanto, o número pedido é $\frac{7!}{2!} = 2\,520$.

25. No número 1 113 456 577 779, o algarismo 1 repete-se três vezes, o algarismo 5 repete-se duas vezes e o algarismo 7 repete-se quatro vezes.

25.1 O número total de permutações dos treze algarismos do número deve ser dividido pelo produto do número de permutações do algarismo 1, $3!$, pelo número de permutações entre os algarismos 5, $2!$, pelo número de permutações entre os algarismos 7, $4!$.

Assim, obtém-se $\frac{13!}{3! \times 2! \times 4!} = 21\,621\,600$ números diferentes.

25.2 Para o número ser múltiplo de cinco e com os algarismos que temos disponíveis, o algarismo das unidades tem de ser 5. Neste caso temos de permutar os restantes doze algarismos, em que o algarismo 1 repete-se três vezes e o algarismo 7 repete-se quatro vezes.

O número total de permutações dos restantes doze algarismos do número deve ser dividido pelo produto do número de permutações entre os algarismos 1, 3!, pelo número de permutações entre os algarismos 7, 4!.

Portanto, existem $\frac{12!}{3! \times 4!} = 3\,326\,400$ números diferentes nas condições enunciadas.

25.3 Para os algarismos iguais ocuparem posições consecutivas, vamos começar por agrupar os três algarismos 1 num bloco, os dois algarismos 5 noutra bloco e os quatro algarismos 7 noutra bloco.

O número de maneiras de ordenar (permutar) os três blocos e os restantes quatro algarismos é 7! (os três blocos e as restantes quatro algarismos perfazem sete elementos para ordenar).

Como a ordenação dos algarismos de cada bloco não gera um número diferente, há $7! = 5040$ números diferentes nas condições enunciadas.

26.1 O número de sequências que se iniciam com as três cartas de naipes vermelhos é $3! \times 5! = 720$.

26.2 Para as cartas de naipes pretos ficarem em posições consecutivas, vamos começar por agrupar as cinco cartas de naipes pretos num bloco. O número de maneiras de permutar o bloco e as restantes três cartas de naipes vermelhos é 4!. Para cada uma destas ordenações, dentro do bloco, o número de maneiras de ordenar as cinco cartas de naipes pretos é 5!.

Assim, obtemos $4! \times 5! = 2880$ sequências.

26.3 Começando por determinar o número de maneiras de as cartas de naipes vermelho ficarem em posições consecutivas, existem $6! \times 3!$ maneiras. Em seguida, determinamos o número de maneiras das cartas de naipes pretos ficarem juntas: $4! \times 5!$. Por último, determinamos o número de maneiras de as cartas de naipes vermelhos ficarem em posições consecutivas e as cartas de naipes pretos também ficarem em lugares consecutivos: $2! \times 3! \times 4!$.

Usando o princípio da inclusão-exclusão, obtém-se, por fim, $6! \times 3! + 4! \times 5! - 2! \times 3! \times 4! = 5760$ sequências.

PÁG. 24

Tarefa 6

Para a primeira posição do pódio existem quatro possibilidades. Para cada uma destas maneiras, existem três possibilidades para a segunda posição do pódio e, finalmente, para a terceira posição do pódio sobram duas possibilidades. Logo, pelo princípio da multiplicação, existem $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras de se organizar o pódio.

PÁG. 26

Aplicar

29.1 Para formar os códigos pedidos, temos de escolher, ordenadamente, três algarismos distintos de entre os dez; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}A_3$. Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, quatro letras distintas de entre vinte e seis; o número de maneiras de o fazer é ${}^{26}A_4$.

Assim, existem ${}^{10}A_3 \times {}^{26}A_4 = 258\,336\,000$ códigos distintos.

29.2 Para formar os códigos com três algarismos primos e quatro vogais, vamos começar por escolher, ordenadamente, três algarismos distintos de entre os quatro algarismos primos (2, 3, 5 e 7); o número de maneiras de o fazer é 4A_3 . Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, quatro vogais distintas de entre cinco; o número de maneiras de o fazer é 5A_4 .

Portanto, existem ${}^4A_3 \times {}^5A_4 = 2880$ códigos distintos.

29.3 Pretende-se formar códigos com exatamente um algarismo ímpar e exatamente uma consoante, ou seja, códigos constituídos por um algarismo ímpar e dois algarismos pares, por uma consoante e três vogais.

Como os códigos tem três algarismos, o algarismo ímpar pode ocupar uma das 3 posições. Esse algarismo ímpar pode ser escolhido de 5 maneiras diferentes (1, 3, 5, 7, 9). Em seguida, vamos escolher, ordenadamente, os dois algarismos pares distintos; o número de maneiras de o fazer é 5A_2 .

Para as letras, como os códigos têm quatro letras, a consoante pode ocupar uma das 4 posições, e há 21 maneiras diferentes de escolher essa consoante ($26 - 5 = 21$). Em seguida, escolhem-se, ordenadamente, as três vogais distintas de entre as cinco; o número de maneiras de o fazer é 5A_3 .

Portanto, existem $3 \times 5 \times {}^5A_2 \times 4 \times 21 \times {}^5A_3 = 1\,512\,000$ códigos distintos.

29.4 Se, ao número total de códigos formados nas condições enunciadas, sem restrições, subtrairmos o número total de códigos formados por três algarismos pares distintos, obtemos o número total de códigos em que pelo menos um dos algarismos é ímpar.

Para determinar o número total de códigos com três algarismos pares distintos, escolhem-se, ordenadamente, três algarismos pares e quatro letras de entre as vinte e seis; o número de maneiras de o fazer é ${}^5A_3 \times {}^{26}A_4$.

Assim, existem ${}^{10}A_3 \times {}^{26}A_4 - {}^5A_3 \times {}^{26}A_4 = 236\,808\,000$ códigos distintos.

PÁG. 27

Aplicar

30.1 Dos vinte compartimentos escolhem-se, ordenadamente, catorze para as catorze estatuetas; o número de maneiras de o fazer é ${}^{20}A_{14}$.

30.2 As três estatuetas de aço inoxidável podem ficar numa das quatro filas horizontais, pelo que há quatro possibilidades para colocar essas estatuetas. Para cada uma destas possibilidades, existem 5A_3 maneiras distintas de escolher, ordenadamente, três dos cinco compartimentos para as três estatuetas de aço inoxidável. Finalmente, para as restantes onze estatuetas, escolhem-se, ordenadamente, onze compartimentos entre os restantes quinze; o número de maneiras de o fazer é ${}^{15}A_{11}$.

Portanto, uma expressão que dá o número pedido é $4 \times {}^5A_3 \times {}^{15}A_{11}$.

31.1 O número de maneiras de colorir o quadrado com quatro cores distintas é ${}^7A_4 = 840$, que corresponde a selecionar quatro das sete cores, uma para cada região.

31.2 Para colorir o quadrado com quatro cores diferentes, sendo uma delas a cor azul, vamos começar por escolher a região do quadrado que vai ser colorida de azul; existem 4 maneiras diferentes de fazer essa escolha. Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, três cores distintas de entre as seis; o número de maneiras de o fazer é 6A_3 .

Portanto, nas condições enunciadas, pode-se colorir o quadrado de $4 \times {}^6A_3 = 480$ maneiras.

32.1 Para sentar os sete amigos numa mesma fila, existem ${}^{10}A_7$ maneiras distintas de escolher, ordenadamente, sete lugares entre os dez lugares da fila.

Assim, o número pedido é ${}^{10}A_7 = 604\,800$.

32.2 Vamos começar por escolher os quatro amigos que vão ficar sentados nos quatro lugares centrais. Dos sete amigos, escolhem-se, ordenadamente, quatro para ocuparem esses lugares; o número de maneiras de o fazer é 7A_4 . Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, três lugares de entre os seis não ocupados para sentar os restantes amigos; o número de maneiras de o fazer é 6A_3 .

Portanto, o número pedido é ${}^7A_4 \times {}^6A_3 = 100\,800$.

32.3 Pretende-se sentar os sete amigos de modo que apenas um fique num dos lugares centrais. Vamos começar por escolher um dos amigos para se sentar num dos lugares centrais; existem 7 maneiras de fazer essa escolha. Para cada uma destas, podemos sentá-lo em 4 lugares diferentes. Para cada uma das hipóteses anteriores, existem 6! maneiras distintas de permutar os restantes seis amigos nos seis lugares disponíveis (todos menos os lugares centrais).

Assim, o número pedido é $7 \times 4 \times 6! = 20\,160$.

33.1 O número de maneiras de escolher, ordenadamente, cinco alunos de entre vinte e cinco para integrar a comissão e desempenharem as tarefas é ${}^{25}A_5 = 6\,375\,600$.

33.2 Pretende-se que a comissão tenha apenas um elemento do sexo masculino, ou seja, formada por um elemento do sexo masculino e quatro elementos do sexo feminino.

O elemento do sexo masculino pode ser escolhido de 14 maneiras diferentes e este pode desempenhar qualquer uma das tarefas; por isso, há 5 maneiras diferentes de escolher a tarefa que vai desempenhar. Para cada uma destas hipóteses, escolhem-se, ordenadamente, quatro elementos do sexo feminino de entre os onze, para desempenhar as restantes tarefas; o número de maneiras de o fazer é ${}^{11}A_4$.

Portanto, há $14 \times 5 \times {}^{11}A_4 = 554\,400$ comissões nas condições enunciadas.

33.3 Se, ao total de comissões que é possível formar, subtrairmos o número de comissões formadas apenas por elementos do sexo masculino, obtemos as comissões formadas com pelo menos um elemento do sexo feminino.

O número de comissões formadas apenas por elementos do sexo masculino para desempenhar as tarefas é ${}^{14}A_5$ (dos catorze elementos do sexo masculino escolhem-se, ordenadamente, cinco).

Assim, podemos formar ${}^{25}A_5 - {}^{14}A_5 = 6\,135\,360$ comissões distintas nas condições enunciadas.

PÁG.28

Tarefa 7

Queremos saber quantos pares diferentes (ou seja, subconjuntos de 2 elementos) o professor João pode escolher a partir de 5 alunos.

Vamos começar por determinar o número de seqüências de 2 elementos escolhidos no conjunto de 5 alunos, ou seja, ${}^5A_2 = 20$.

No entanto, nesta situação escolher o par o João e o Pedro é o mesmo que escolher o par Pedro e João. Como a ordem dos dois alunos não é relevante neste contexto, é necessário retirar ao resultado anterior as permutações dos dois alunos escolhidos, 2!.

Assim, o número de pares diferentes que o professor João pode formar é $\frac{{}^5A_2}{2!} = 10$.

PÁG.32**Aplicar**

37.1 a. Pretende-se que a comissão tenha o mesmo número de elementos do sexo masculino e do sexo feminino, ou seja, será formada por três elementos do sexo masculino e três elementos do sexo feminino.

Dos 7 elementos do sexo masculino, escolhem-se três: o número de maneiras de o fazer é 7C_3 . Para cada uma destas maneiras, dos 4 elementos do sexo feminino escolhem-se três: o número de maneiras de o fazer é 4C_3 .

Assim, existem ${}^7C_3 \times {}^4C_3 = 140$ comissões possíveis.

b. Para que a comissão seja mista, tem de ter elementos do sexo masculino e do sexo feminino. Mas como tem de ter mais elementos do sexo feminino do que elementos do sexo masculino, e como só há quatro elementos do sexo feminino, então a comissão é formada pelos quatro elementos do sexo feminino e dois elementos do sexo masculino. Existem 7C_2 formas distintas de escolher dois elementos do sexo masculino de entre os sete, sendo que os restantes quatro elementos são os quatro membros do sexo feminino.

Assim, o número de comissões nestas condições é ${}^7C_2 = 21$.

c. Para que a comissão tenha pelo menos dois elementos do sexo feminino, temos de considerar três casos disjuntos dois a dois.

1.º caso: comissões formadas por 2 elementos do sexo feminino e 4 elementos do sexo masculino.

Dos quatro elementos do sexo feminino escolhem-se dois: o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Para cada uma destas maneiras, existem 7C_4 formas distintas de escolher quatro elementos do sexo masculino, de entre os sete. Assim, o número de comissões nestas condições é ${}^4C_2 \times {}^7C_4$.

2.º caso: comissões formadas por 3 elementos do sexo feminino e 3 elementos do sexo masculino.

Dos quatro elementos do sexo feminino escolhem-se três: o número de maneiras de o fazer é 4C_3 . Para cada uma destas maneiras, existem 7C_3 formas distintas de escolher três elementos do sexo masculino de entre os sete. Assim, o número de comissões nestas condições é ${}^4C_3 \times {}^7C_3$.

3.º caso: comissões formadas pelos 4 elementos do sexo feminino e 2 elementos do sexo masculino.

Existem 7C_2 formas distintas de escolher dois elementos do sexo masculino de entre os sete. Assim, o número de comissões nestas condições é 7C_2 .

Portanto, o número de comissões nas condições enunciadas é ${}^4C_2 \times {}^7C_4 + {}^4C_3 \times {}^7C_3 + {}^7C_2 = 371$.

d. Para que a comissão tenha exatamente dois elementos do sexo feminino, tem de ter quatro elementos do sexo masculino. Para além disto, a comissão terá de ter exatamente um dos irmãos, então temos de considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: A Sofia faz parte da comissão e o Miguel não faz parte.

Como a comissão tem exatamente dois elementos do sexo feminino e a Sofia tem de fazer parte da comissão, falta escolher um elemento do sexo feminino; o número de maneiras de o fazer é 3C_1 . Para cada uma destas maneiras, temos de escolher quatro elementos do sexo masculino de entre os seis elementos disponíveis (todos menos o Miguel); o número de maneiras de o fazer é 6C_4 .

Assim, o número de comissões nestas condições é ${}^3C_1 \times {}^6C_4$.

2.º caso: A Sofia não faz parte da comissão e o Miguel faz parte.

Escolhem-se dois elementos do sexo feminino de entre os três disponíveis (todos menos a Sofia); o número de maneiras de o fazer é 3C_2 . Para cada uma destas maneiras, e como o Miguel tem de pertencer à comissão, falta escolher três elementos do sexo masculino de entre os seis disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 6C_3 .

Assim, o número de comissões nestas condições é ${}^3C_2 \times {}^6C_3$.

Portanto, existem ${}^3C_1 \times {}^6C_4 + {}^3C_2 \times {}^6C_3 = 105$ comissões com exatamente dois elementos do sexo feminino e exatamente um dos irmãos.

e. Pretendemos que os dois irmãos não façam, simultaneamente, parte da comissão.

Se, ao total de comissões que é possível formar sem restrições, subtrairmos o número de comissões em que os dois irmãos pertencem simultaneamente, o resultado obtido é o número de comissões em que os dois irmãos não fazem parte, simultaneamente.

O número de comissões que é possível formar com seis elementos escolhidos de entre os onze é ${}^{11}C_6$.

O número de comissões a que os dois irmãos pertencem simultaneamente consiste no número de escolhas dos restantes quatro elementos de entre os nove (todos menos os dois irmãos): 9C_4 .

Portanto, existem ${}^{11}C_6 - {}^9C_4 = 336$ comissões em que os dois irmãos não fazem parte simultaneamente.

f. Se, ao total de comissões que é possível formar, sem restrições, subtrairmos o número de comissões formadas apenas por elementos do sexo masculino, obtemos o número de comissões que têm pelo menos um elemento do sexo feminino.

O número de comissões formadas apenas por elementos do sexo masculino é 7C_6 (dos sete elementos do sexo masculino escolhem-se seis).

Assim, o número de comissões nas condições enunciadas é ${}^{11}C_6 - {}^7C_6 = 455$.

37.2 Como a direção tem exatamente quatro elementos do sexo feminino, qualquer comissão de seis elementos escolhidos entre os onze elementos da direção terá sempre, pelo menos, dois elementos do sexo masculino. Assim, ${}^{11}C_6$ corresponde ao número pedido.

37.3 c. Como já temos o número de comissões possíveis, resta agora distribuir os seis elementos de cada comissão pelas seis tarefas; o número de maneiras de o fazer é $6!$, pelo que o número pedido é $({}^4C_2 \times {}^7C_4 + {}^4C_3 \times {}^7C_3 + {}^4C_4 \times {}^7C_2) \times 6! = 267\,120$.

d. Como já temos o número de comissões possíveis, resta agora distribuir os seis elementos de cada comissão pelas seis tarefas; o número de maneiras de o fazer é $6!$, pelo que o número pedido é $({}^3C_1 \times {}^6C_4 + {}^3C_2 \times {}^6C_3) \times 6! = 75\,600$.

e. Como já temos o número de comissões possíveis, resta agora distribuir os seis elementos de cada comissão pelas seis tarefas; o número de maneiras de o fazer é $6!$, pelo que o número pedido é $({}^{11}C_6 - {}^9C_4) \times 6! = 241\,920$

f. Como já temos o número de comissões possíveis, resta agora distribuir os seis elementos de cada comissão pelas seis tarefas; o número de maneiras de o fazer é $6!$, pelo que o número pedido é $({}^{11}C_6 - {}^7C_6) \times 6! = 327\,600$

PÁG. 34**Aplicar**

38.1 Quer-se determinar os números naturais de sete algarismos que têm dois algarismos 0, dois algarismos 2 e três algarismos 5. Como o primeiro algarismo não pode ser o zero, temos de considerar dois casos distintos.

1.º caso: o número começa por 2.

Das restantes seis posições escolhem-se três para colocar os algarismos 5: o número de maneiras de o fazer é 6C_3 . Para cada uma destas maneiras, escolhem-se duas posições das três restantes para colocar os dois algarismos 0: o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . A posição restante é ocupada pelo outro algarismo 2.

Assim, para este caso, temos ${}^6C_3 \times {}^3C_2$ números possíveis.

2.º caso: o número começa por 5.

Das restantes seis posições escolhem-se duas para colocar os outros dois algarismos 5: o número de maneiras de o fazer é 6C_2 . Para cada uma destas maneiras, escolhem-se duas posições das quatro restantes para colocar os dois algarismos 2: o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . As duas posições restantes são ocupadas pelos dois algarismos 0.

Assim, para este caso, temos ${}^6C_2 \times {}^4C_2$ números possíveis.

Portanto, o número pedido é ${}^6C_3 \times {}^3C_2 + {}^6C_2 \times {}^4C_2 = 150$.

Alternativamente:

Das sete posições, escolhem-se duas para os dois 0: o número de maneiras de o fazer é 7C_2 . Para cada uma destas maneiras, existem 5C_2 maneiras distintas de escolher duas posições entre as restantes cinco para os dois 2. Os três 5 ficam nas três posições sobrantes. Logo, existem ${}^7C_2 \times {}^5C_2$ seqüências de sete algarismos com dois 0, dois 2 e três 5.

No entanto, as seqüências que se iniciam por zero não constituem um número de sete algarismos, pelo que têm de ser descontadas. Assim, colocando um 0 na primeira posição, das restantes seis escolhe-se uma para o outro 0: o número de maneiras de o fazer é 6C_1 . Para cada uma destas maneiras, existem 5C_2 maneiras distintas de escolher duas posições entre as restantes cinco para os dois 2. Os três 5 ficam nas três posições sobrantes. Logo, existem ${}^7C_2 \times {}^5C_2$ seqüências de sete algarismos com dois 0, dois 2 e três 5. Logo, existem ${}^6C_1 \times {}^5C_2$ seqüências de sete algarismos com dois 0, dois 2 e três 5 iniciadas por 0. Assim, o número pedido é dado por ${}^7C_2 \times {}^5C_2 - {}^6C_1 \times {}^5C_2 = 150$.

38.2 Como o primeiro algarismo não pode ser o 0 e como os números têm de ser ímpares, conclui-se que o algarismo das unidades tem de ser o 5 e que o algarismo da primeira posição pode ser o 2 ou o 5. Assim, vamos considerar dois casos distintos.

1.º caso: O número começa por 2 e termina em 5.

Das cinco posições escolhem-se duas para colocar os dois algarismos 0: o número de maneiras de o fazer é 5C_2 . Para cada uma destas maneiras, escolhem-se duas posições das três restantes para colocar os outros dois algarismos 5: o número de maneiras de o fazer é 3C_2 . A posição restante é ocupada pelo outro algarismo 2.

Assim, para este caso, temos ${}^5C_2 \times {}^3C_2$ números possíveis.

2.º caso: O número começa e termina em 5 .

Das cinco posições escolhem-se duas para colocar os dois algarismos 2 : o número de maneiras de o fazer é 5C_2 . Para cada uma destas maneiras, escolhem-se duas posições das três restantes para colocar os dois algarismos 0 : o número de maneiras de o fazer é 3C_2 . A posição restante é ocupada pelo algarismo 5 .

Assim, para este caso, temos ${}^5C_2 \times {}^3C_2$ números possíveis.

Portanto, o número pedido é ${}^5C_2 \times {}^3C_2 + {}^5C_2 \times {}^3C_2 = 60$.

38.3 A quantidade de números nas condições enunciadas que são pares é dada pela diferença entre todas as possibilidades (determinadas em **38.1**) e a quantidade dos números que são ímpares (determinada em **38.2**), ou seja, $150 - 90 = 60$.

Opção correta: **(C)**

Alternativamente (sem dependência das alíneas anteriores):

Como se pretende que os números sejam pares, temos duas hipóteses para ocupar o algarismo das unidades (algarismos 0 ou 2). Para a posição do primeiro algarismo temos duas hipóteses (algarismos 2 ou 5). Vamos considerar quatro casos distintos dois a dois.

1.º caso: números da forma (2????0)

Das cinco posições, escolhem-se três para colocar os três algarismos 5 : o número de maneiras de o fazer é 5C_3 . Para cada uma destas maneiras, existem 2! maneiras de ordenar os dois algarismos restantes.

Assim, nestas condições, existem ${}^5C_3 \times 2!$ números.

2.º caso: números da forma (2????2)

Das cinco posições, escolhem-se três para colocar os três algarismos 5 : o número de maneiras de o fazer é 5C_3 . As duas posições restantes são ocupadas pelos algarismos 0 .

Assim, nestas condições, existem 5C_3 números.

3.º caso: números da forma (5????0)

Das cinco posições, escolhem-se duas para colocar os dois algarismos 5 restantes: o número de maneiras de o fazer é 5C_2 . Para cada uma destas maneiras, escolhem-se duas posições, das três restantes, para colocar os dois algarismos 2 ; o número de maneiras de o fazer é 3C_2 .

Assim, nestas condições, existem ${}^5C_2 \times {}^3C_2$ números.

4.º caso: números da forma (5????2) :

Das cinco posições escolhem-se duas para colocar os dois algarismos 5 restantes: o número de maneiras de o fazer é 5C_2 . Para cada uma destas, escolhem-se duas posições das três restantes para colocar os dois algarismos 0 ; o número de maneiras de o fazer é 3C_2 .

Assim, nestas condições existem ${}^5C_2 \times {}^3C_2$ números.

Portanto, existem ${}^5C_3 \times 2 + {}^5C_3 + {}^5C_2 \times {}^3C_2 + {}^5C_2 \times {}^3C_2 = 90$ números nas condições enunciadas.

Opção correta: **(C)**

38.4 Para os algarismos 5 ocuparem posições consecutivas vamos considerar os seguintes casos disjuntos.

1.º caso: números da forma (555????)

Das quatro posições escolhem-se duas para colocar os dois algarismos 2 : o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . As duas posições restantes são ocupadas pelos dois algarismos 0 .

Assim, nestas condições, existem 4C_2 números.

2.º caso: números da forma (2555???) ou (2?555??) ou (2??555?) ou (2???555)

Das três posições escolhem-se duas para colocar os dois algarismos 0 : o número de maneiras de o fazer é 3C_2 . A posição restante é ocupada pelo outro algarismo 2 .

Assim, nestas condições, existem $4 \times {}^3C_2$ números.

Portanto, existem ${}^4C_2 + 4 \times {}^3C_2 = 18$ números com os três 5 em posições consecutivas.

39.1 Apenas é necessário formar um grupo de 9 pessoas para ocupar uma carrinha. Os restantes ocupam a outra carrinha. Dos dezoito amigos, escolhem-se nove: o número de maneiras de o fazer é ${}^{18}C_9$.

Assim, existem ${}^{18}C_9 = 48\,620$ maneiras de dividir os 18 amigos pelas duas carrinhas.

39.2 Como a Joana, a Clara, a Laura e a Cláudia vão todas na carrinha azul temos de escolher mais cinco ocupantes para completar os lugares desta carrinha.

Dos catorze ($18 - 4 = 14$) amigos escolhem-se cinco: o número de maneiras de o fazer é ${}^{14}C_5$.

Os restantes nove amigos ocuparão os lugares da outra carrinha.

Assim, o número de maneiras de distribuir 18 amigos pelas duas carrinhas, nas condições enunciadas, é ${}^{14}C_5 = 2002$.

39.3 a. Como apenas 2 dos amigos podem conduzir, existem ${}^2C_1 = 2$ maneiras diferentes de escolher os condutores. Para cada uma destas, escolhem-se os outros oito ocupantes, de entre os dezasseis amigos (todos menos os condutores): o número de maneiras de o fazer é ${}^{16}C_8$. Os restantes amigos são os ocupantes da outra carrinha.

Assim, o número de maneiras de distribuir 18 amigos pelas duas carrinhas, nas condições enunciadas, é $2 \times {}^{16}C_8 = 25\,740$.

b. Como apenas 3 dos amigos podem conduzir, existem 3C_2 maneiras diferentes de escolher os condutores. Para cada uma destas maneiras, escolhem-se os restantes oito ocupantes, de entre os dezasseis amigos (todos menos os condutores): o número de maneiras de o fazer é ${}^{16}C_8$. Os amigos restantes são os ocupantes da outra carrinha.

Assim, o número de maneiras de distribuir 18 amigos pelas duas carrinhas, nas condições enunciadas, é ${}^3C_2 \times {}^{16}C_8 = 38\,610$.

Alternativamente:

Numa das carrinhas pode ir um ou dois condutores. Portanto temos de considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: se for apenas um condutor.

Dos três condutores escolhe-se um: o número de maneiras de o fazer é 3C_1 . Para cada uma destas maneiras, escolhem-se oito dos restantes quinze amigos (todos menos os condutores): o número de maneiras de o fazer é ${}^{15}C_8$.

Assim, para este caso, temos ${}^3C_1 \times {}^{15}C_8$ possibilidades.

2.º caso: se forem dois condutores.

Dos três condutores escolhem-se dois: o número de maneiras de o fazer é 3C_2 . Para cada uma destas maneiras, escolhem-se sete dos restantes quinze amigos (todos menos os condutores): o número de maneiras de o fazer é ${}^{15}C_7$.

Assim, para este caso, temos ${}^3C_2 \times {}^{15}C_7$ possibilidades.

Logo, o número pedido é ${}^3C_1 \times {}^{15}C_8 + {}^3C_2 \times {}^{15}C_7 = 38\,610$.

40.1 Começamos por determinar o número de retas que é possível definir com dois dos onze pontos: esse número é dado por ${}^{11}C_2$. No entanto, nesta contagem, temos retas repetidas, porque existem cinco situações em que três pontos são colineares (F, Q e H ; E, Q e G ; E, R e H ; G, P e C ; B, P e H); o número de retas que se podem definir com cada um destes três pontos é $5 \times {}^3C_2$.

Assim, existem ${}^{11}C_2 - 5 \times {}^3C_2 + 5 = 45$ retas que se podem definir com os onze pontos assinalados (adiciona-se 5 dado que, ao retirar $5 \times {}^3C_2$, estamos também a retirar da contagem as retas EH, FH, EG, CG e BH , que têm de ser contadas).

40.2 a. Para que os 3 pontos escolhidos definam um plano, estes têm de ser não colineares.

Vamos começar por escolher 3 pontos de entre os 11 pontos do cubo: o número de maneiras de o fazer é ${}^{11}C_3$. No entanto, há cinco situações em que esta escolha não define um plano porque os três pontos são colineares (F, Q e H ; E, Q e G ; E, R e H ; G, P e C ; G, P e D).

Portanto, podem-se definir, com estas escolhas, ${}^{11}C_3 - 5 = 160$ planos distintos.

b. Um plano paralelo ao plano xOy , definido com três pontos dos onze pontos do cubo, só pode ser o plano que contém a face $[ABCD]$ ou o plano que contém a face $[EFGH]$.

O plano que contém a face $[ABCD]$ pode ser definido escolhendo-se três dos quatro pontos, A, B, C ou D ; o número de maneiras é 4C_3 .

O plano que contém a face $[EFGH]$ pode ser definido escolhendo-se três dos seis pontos, E, F, G, H, Q ou R . No entanto, há três casos em que essa escolha não define um plano, pois os três pontos são colineares: F, Q e H ; E, Q e G ; E, R e H).

Assim, há ${}^6C_3 - 3$ planos distintos que contêm a face $[EFGH]$.

Portanto, ${}^4C_3 + {}^6C_3 - 3 = 21$ destas escolhas definem um plano paralelo a xOy .

PÁG. 35

Aplicar

41.1 Por exemplo, ${}^{20}C_5 \times {}^{15}C_6 \times {}^9C_3$.

Dos vinte compartimentos, escolhem-se cinco para as estatuetas de bronze: o número de maneiras de o fazer é ${}^{20}C_5$. Para cada uma destas maneiras, escolhem-se seis dos restantes quinze compartimentos: o número de maneiras de o fazer é ${}^{15}C_6$. Para cada das escolhas de compartimentos já feitas, escolhem-se três dos restantes nove compartimentos: o número de maneiras de o fazer é 9C_3 . Assim, existem ${}^{20}C_5 \times {}^{15}C_6 \times {}^9C_3$ disposições distintas para arrumar todas as estatuetas.

41.2 Das quatro filas horizontais escolhe-se uma para colocar estatuetas de latão. O número de maneiras de o fazer é ${}^4C_1 = 4$. Essa fila ficará com cinco das seis estatuetas de latão (há apenas uma disposição possível por ser indistinguíveis). Sobram nove estatuetas, pelo que, existem ${}^{15}C_9$ maneiras distintas de escolher nove compartimentos entre os restantes quinze para as restantes nove estatuetas. Desses nove compartimentos, escolhe-se um para a restante estatueta de latão; o número de maneiras de o fazer é ${}^9C_1 = 9$. Finalmente, dos restantes oito compartimentos escolhem-se cinco para as estatuetas de bronze. O número de maneiras de o fazer é 8C_5 . As restantes três estatuetas são colocadas nos três compartimentos restantes. Portanto, uma expressão que dá resposta a este problema é $4 \times {}^{15}C_9 \times 9 \times {}^8C_5$.

42. A única maneira de distribuir sete objetos em três compartimentos, de forma que cada compartimento tenha pelo menos dois objetos é a seguinte: colocar dois objetos em dois dos compartimentos e três objetos no outro compartimento.

Vamos começar por escolher o compartimento que vai ficar com três objetos: o número de maneiras de o fazer é 3C_1 . Para cada uma destas escolhas, dos sete objetos escolhem-se três para esse compartimento: o número de maneiras de o fazer é 7C_3 . Para cada uma destas maneiras, escolhem-se dois dos restantes quatro objetos para colocar num dos dois compartimentos: o número de maneiras de o fazer é 4C_2 e os restantes dois objetos ficam no outro compartimento.

Assim, o número de maneiras de colocar os sete objetos nos três compartimentos é ${}^3C_1 \times {}^7C_3 \times {}^4C_2 = 630$.

43. Pretendemos distribuir as oito bolas iguais pelas caixas de modo que exatamente duas fiquem vazias e exatamente duas tenham exatamente duas bolas.

Vamos começar por escolher as duas caixas que vão ficar vazias: o número de maneiras de o fazer é 6C_2 . Para cada uma destas maneiras, das quatro caixas restantes escolhem-se duas para ficarem com exatamente duas bolas: o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Nessas duas caixas, colocam-se duas bolas em cada uma, havendo apenas uma maneira de o fazer. Para cada uma destas escolhas, vamos distribuir as restantes 4 bolas pelas duas caixas que sobram. No entanto, essa distribuição só pode ser feita de uma forma: uma das caixas fica com uma bola e a outra fica com três bolas, pois não pode haver mais caixas vazias nem caixas com duas bolas, dado que não pode haver mais caixas com duas bolas nem mais caixas sem bolas. O número de maneiras de escolher a caixa que fica com as 3 bolas é 2C_1 .

Assim, existem ${}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_1 = 180$ maneiras de distribuir as oito bolas pelas caixas nas condições enunciadas.

PÁG. 40

Aplicar +

1. Temos sete portas para entrar e sete portas para sair do setor do estádio.

Assim, pelo princípio da multiplicação, existem $7 \times 7 = 49$ maneiras de entrar e sair do estádio.

Opção correta: **(D)**

2.1 A Ana tem 2 maneiras de escolher um bolo. O Jorge pode escolher o bolo de 5 maneiras diferentes e a Sofia e o Henrique podem escolher entre 6 bolos diferentes.

Pelo princípio da multiplicação, existem $2 \times 5 \times 6 \times 6 = 360$ maneiras diferentes de os quatro amigos escolherem os bolos.

Opção correta: **(B)**

2.2 O número de maneiras de escolher três bolos iguais é ${}^6C_1 = 6$.

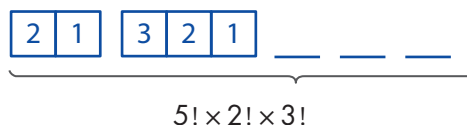
O número de maneiras de escolher três bolos distintos é 6C_3 .

Assim, a Sofia pode fazer a escolha de $6 + {}^6C_3$ maneiras.

Opção correta: **(A)**

3.1 Para colocar lado a lado os oito atletas, de modo que os atletas do mesmo país fiquem em posições consecutivas, começamos por agrupar os dois jamaicanos num bloco, os três americanos noutro bloco e vamos determinar o número de maneiras de ordenar os dois blocos e as outras três nacionalidades: o

número de maneiras de o fazer é $5!$ (os dois blocos e os outros 3 países constituem cinco elementos para ordenar). Dentro do bloco dos jamaicanos, o número de maneiras de os ordenar é $2!$; dentro do bloco dos americanos, o número de maneiras de os ordenar é $3!$.



Portanto, o número de pódios que se podem formar, nas condições enunciadas, é $5! \times 2! \times 3! = 1440$.

Opção correta: **(C)**

3.2 Dos oito atletas escolhem-se, ordenadamente, três: o número de maneiras de o fazer é ${}^8A_3 = 336$.

Opção correta: **(B)**

4.1 Vamos começar por escolher três dos onze pontos: o número de maneiras de o fazer é ${}^{11}C_3$. No entanto, temos de retirar as cinco escolhas em que os três não definem um triângulo, pois os pontos são colineares (as escolhas O, A, F ; O, B, G ; O, C, H ; O, D, I ; O, E, J).

Assim, o número de escolhas de três dos onze pontos assinalados que definem um triângulo é ${}^{11}C_3 - 5 = 160$.

4.2 Como um dos lados é o segmento de reta $[OA]$ dois dos três pontos têm de ser os pontos O e A . O terceiro ponto pode ser escolhido de entre os oito pontos (B, C, D, E, G, H, I ou J); o número de maneiras de o fazer é ${}^8C_1 = 8$.

Existem 8 triângulos distintos em que um dos lados é o segmento de reta $[OA]$.

4.3 Como um dos vértices é o ponto B , vamos escolher os dois pontos que faltam de entre os dez pontos restantes, $O, A, C, D, E, F, G, H, I$ ou J ; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_2$. No entanto, a escolha dos pontos O e G não define um triângulo, porque são colineares com o ponto B .

Assim, ${}^{10}C_2 - 1 = 45 - 1 = 44$ das escolhas definem um triângulo.

4.4 Para que três dos dez pontos pertencentes à circunferência definam um triângulo retângulo, dois desses pontos têm de ser os extremos dos diâmetros da circunferência, portanto, há cinco possibilidades. Para cada uma destas possibilidades, dos oito pontos restantes, escolhe-se um: o número de maneiras de o fazer é 8C_1 .

Assim, $5 \times {}^8C_1 = 40$ das escolhas definem um triângulo retângulo.

PÁG. 41

Aplicar+

5.1 a. Vamos começar por escolher uma sequência de duas letras.

Das 26 letras escolhem-se, ordenadamente, duas, não necessariamente distintas: o número de maneiras de o fazer é ${}^{26}A_2'$. Depois, para cada uma delas escolhem-se, ordenadamente, dois algarismos, não necessariamente diferentes, de entre os dez: o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}A_2'$. Para cada uma delas, escolhem-se, ordenadamente, três letras, não necessariamente distintas: o número de maneiras de o fazer é ${}^{26}A_3'$.

Assim, o número de matrículas, nas condições enunciadas, é dado por:

$${}^{26}A_2' \times {}^{10}A_2' \times {}^{26}A_3' = 26^2 \times 10^2 \times 23^3 = 1\,188\,137\,600$$

b. Como a matrícula tem de ter exatamente dois A em posições consecutivas, estes podem ficar nas seguintes posições:

A	A	Algarismos		25	25	25
1	1	10	1			
25		Algarismos		A	A	25
		10	1	1	25	1
25		Algarismos		25	A	A
		10	1	25	1	1

Portanto, temos três possibilidades. Falta escolher uma sequência de dois algarismos iguais e uma sequência de três letras diferentes da letra A. Para o número de sequências de dois algarismos iguais temos apenas que escolher um algarismo de entre os 10 uma vez que o outro algarismo tem de ser igual; por isso, há dez maneiras de fazer essa escolha. Para cada uma destas escolhas, vamos escolher uma sequência ordenada de três letras diferentes da letra A, permitindo eventuais repetições: o número de maneiras de o fazer é ${}^{25}A_3'$.

Assim, o número total de matrículas nas condições enunciadas é $3 \times 10 \times {}^{25}A_3' = 468\,750$.

c. Pretendemos matrículas que contenham exatamente três das cinco primeiras letras do alfabeto e não tenham letras repetidas. Das cinco primeiras letras do alfabeto escolhem-se, ordenadamente, três letras distintas: o número de maneiras de o fazer é 5A_3 . Em seguida, escolhem-se as posições que as três letras escolhidas podem ocupar: o número de maneiras de o fazer é 5C_3 . Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, duas letras distintas de entre as vinte e uma letras (todas menos as cinco primeiras): o número de maneiras de o fazer é ${}^{21}A_2$. Por último, dos dez algarismos, escolhem-se, ordenadamente, dois, não necessariamente distintos: o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}A_2'$.

Assim, existem ${}^5A_3 \times {}^5C_3 \times {}^{21}A_2 \times {}^{10}A_2' = 25\,200\,000$ matrículas nas condições enunciadas.

5.2 a. Para as matrículas em Portugal terem a mesma leitura da esquerda para a direita e da direita para a esquerda, a primeira letra tem de ser igual à última, a segunda letra igual à penúltima e os dois algarismos iguais. Então, apenas é necessário escolher as duas primeiras letras e o primeiro algarismo.

Das vinte e três letras escolhem-se, ordenadamente, duas: o número de maneiras de o fazer é ${}^{23}A_2$. Para cada uma destas escolhas, escolhe-se um algarismo entre os dez algarismos possíveis.

Assim, obtém-se ${}^{23}A_2 \times 10$.

Opção correta: **(B)**

b. Vamos começar por determinar todas as matrículas formadas por um grupo de duas letras, seguidas por dois algarismos e terminando em duas letras, sem restrições.

O número de matrículas distintas, não havendo restrições, seria ${}^{23}A_2' \times {}^{10}A_2' \times {}^{23}A_2' = 23^4 \times 10^2$.

No entanto, não existem matrículas em que os dois grupos de letras terminam numa vogal (por exemplo BE 01 JA ou AE 98 XU), pelo que têm de ser excluídas, excetuando os casos em que nos grupos de letras existem duas vogais iguais (por exemplo, AA 02 EE ou EE 00 EE), pelo que têm de ser adicionadas.

Assim, o número de matrículas em que os dois grupos de letras terminam numa vogal é $23 \times 5 \times {}^{10}A'_2 \times 23 \times 5 = 23^2 \times 5^2 \times 10^2$ e o número de matrículas em que nos grupos das letras têm duas vogais iguais é $5 \times 1 \times {}^{10}A'_2 \times 5 \times 1 = 5^2 \times 10^2$.

Como a matrícula AA 00 AA não é atribuída, o número de matrículas deste sistema que pode ser atribuído é $23^4 \times 10^2 - 23^2 \times 5^2 \times 10^2 + 5^2 \times 10^2 - 1 = 26\,664\,099$.

c. Para determinar as matrículas em Portugal que têm exatamente duas vogais e dois números primos diferentes, vamos começar por escolher as posições que as vogais vão ocupar: o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Para cada uma destas posições, das cinco vogais escolhem-se, ordenadamente, duas, não necessariamente distintas: o número de maneiras de o fazer é ${}^5A'_2$. Para cada uma destas escolhas, das dezoito consoantes, escolhem-se, ordenadamente, duas letras, não necessariamente distintas: o número de maneiras de o fazer é ${}^{18}A'_2$. Em seguida, dos quatro algarismos primos (2, 3, 5 e 7) escolhem-se, ordenadamente, dois algarismos distintos; o número de maneiras de o fazer é 4A_2 .

O número de matrículas nestas condições é ${}^4C_2 \times {}^5A'_2 \times {}^{18}A'_2 \times {}^4A_2$.

Ao número de matrículas determinadas anteriormente, temos de subtrair o número de matrículas em que dois grupos de letras comecem ambos por uma consoante e terminem numa vogal. O número de matrículas nessas condições é ${}^{18}A'_2 \times {}^5A'_2 \times {}^4A_2$.

Por fim, obtém-se ${}^4C_2 \times {}^5A'_2 \times {}^{18}A'_2 \times {}^4A_2 - {}^{18}A'_2 \times {}^5A'_2 \times {}^4A_2 = 486\,000$.

5.3 Para o primeiro grupo de letras, escolhem-se, ordenadamente, duas das 23 letras, não necessariamente diferentes: o número de maneiras de o fazer é ${}^{23}A'_2 = 23^2$. Como, nesse primeiro grupo, as seqüências SS e WW não são permitidas, então, para este grupo, existem $23^2 - 2$ seqüências de letras distintas.

Para o segundo grupo de letras, escolhem-se, ordenadamente, duas das 23 letras, não necessariamente diferentes: o número de maneiras de o fazer é ${}^{23}A'_2 = 23^2$. Como, nesse primeiro grupo, a seqüência SS não é permitida, então, para este grupo, existem $23^2 - 1$ seqüências de letras distintas.

Para o grupo dos números, escolhem-se, ordenadamente, três dos dez algarismos, não necessariamente diferentes: o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}A'_3 = 10^3$. Como, neste grupo, a seqüência 000 não é permitida, então, para este grupo, existem $10^3 - 1$ seqüências de algarismos distintas.

Logo, neste sistema francês, existem $(23^2 - 2) \times (10^3 - 1) \times (23^2 - 1) = 277\,977\,744$ matrículas distintas.

PÁG. 42

Aplicar+

6.1 a. Das vinte e seis cartas pretas extraem-se oito: o número de maneiras de o fazer é ${}^{26}C_8 = 1\,562\,275$.

b. Como a mão não pode ter nem cartas pretas, nem figuras, nem ases, a extração tem de ser feita no conjunto das cartas vermelhas que não sejam nem figuras nem ases. Ou seja, às 26 cartas vermelhas temos de retirar as 6 figuras e os dois ases, e por isso, temos 18 cartas disponíveis para a extração ($26 - 6 - 2 = 18$).

O número de maneiras de escolher conjuntos de oito cartas diferentes é ${}^{18}C_8$.

Assim, existem ${}^{18}C_8 = 43\,758$ mãos nestas condições.

c. Como «obter pelo menos dois ases» significa «obter exatamente 2 ases ou 3 ases ou 4 ases», podemos calcular o número de mãos como a soma do número de mãos dos três casos disjuntos dois a dois.

Num baralho completo há quatro cartas que são ases e 48 cartas que não são ases.

1.º caso: 2 cartas que sejam ases e 6 cartas que não sejam ases

O número de mãos nestas condições é ${}^4C_2 \times {}^{48}C_6$.

2.º caso: 3 cartas que sejam ases e 5 cartas que não sejam ases

O número de mãos nestas condições é ${}^4C_3 \times {}^{48}C_5$.

3.º caso: 4 cartas que sejam ases e 6 cartas que não sejam ases

O número de conjuntos nestas condições é ${}^4C_4 \times {}^{48}C_4$.

Assim, o número de mãos nas condições enunciadas é: ${}^4C_2 \times {}^{48}C_6 + {}^4C_3 \times {}^{48}C_5 + {}^4C_4 \times {}^{48}C_4 = 80\,672\,868$.

Alternativamente:

De todas as mãos possíveis, ${}^{52}C_8$, retiram-se as mãos que não têm ases, ${}^{48}C_8$ (das 48 que não são ases, escolhem-se oito), e todas as mãos com exatamente um ás, ${}^4C_1 \times {}^{48}C_7$ (dos quatro ases escolhe-se um, um número de maneiras de o fazer é 4C_1 e, para cada uma destas maneiras, existem ${}^{48}C_3$ maneiras distintas de escolher sete cartas entre as 48 que não são ases).

Assim, o número de mãos nas condições enunciadas é: ${}^{52}C_8 - {}^{48}C_8 - {}^4C_1 \times {}^{48}C_7 = 80\,672\,868$.

d. Como se pretende uma mão que tenha o rei de espadas e pelo menos seis cartas sejam de copas, temos de considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: o rei de espadas, 6 cartas que sejam copas e 1 carta que não seja copas nem ás de espadas.

O número de mãos nestas condições é ${}^{13}C_6 \times {}^{38}C_1$.

2.º caso: o rei de espadas e 7 cartas que sejam copas.

O número de mãos nestas condições é ${}^4C_4 \times {}^{13}C_7 = {}^{13}C_7$.

Assim, existem ${}^{13}C_6 \times {}^{38}C_1 + {}^{13}C_7 = 66\,924$ mãos nas condições enunciadas.

e. Pretende-se que a mão tenha quatro cartas de um naipe, duas de outro naipe e as outras duas cartas de um outro naipe.

Vamos começar por escolher os três naipes dos quais vão ser extraídas as cartas: o número de maneiras de o fazer é 4C_3 . Para cada uma destas, vamos escolher um naipe de entre os três do qual se vão extrair as quatro cartas: o número de maneiras de o fazer é 3C_1 . Em seguida, das treze cartas desse naipe, escolhem-se quatro: o número de maneiras de o fazer é ${}^{13}C_4$. Por último, extraem-se duas cartas de cada um dos outros naipes: o número de maneiras de o fazer é ${}^{13}C_2 \times {}^{13}C_2$.

Assim, o número de mãos nas condições enunciadas é ${}^4C_3 \times {}^3C_1 \times {}^{13}C_4 \times {}^{13}C_2 \times {}^{13}C_2 = 52\,200\,720$.

f. Pretende-se uma mão com exatamente duas figuras e exatamente seis cartas vermelhas. Temos de considerar três casos disjuntos dois a dois.

1.º caso: 2 figuras pretas e 6 cartas vermelhas que não sejam figuras.

O número de mãos nestas condições é ${}^6C_2 \times {}^{20}C_6$, resultando da escolha de duas figuras de entre as seis figuras pretas e da escolha de seis cartas de entre as vinte cartas vermelhas que não são figuras ($26 - 6 = 20$).

2.º caso: 2 figuras vermelhas, 4 cartas vermelhas que não sejam figuras e 2 cartas pretas que não sejam figuras.

O número de mãos nestas condições é ${}^6C_2 \times {}^{20}C_4 \times {}^{20}C_2$, que resulta da escolha de duas cartas de entre as seis figuras vermelhas, da escolha de quatro cartas de entre as vinte cartas vermelhas que não são figuras ($26 - 6 = 20$) e da escolha de duas cartas de entre as vinte cartas pretas que não são figuras.

3.º caso: 1 figura vermelha, 1 figura preta, 5 cartas vermelhas que não sejam figuras e 1 carta preta que não seja figura.

O número de mãos nestas condições é ${}^6C_1 \times {}^6C_1 \times {}^{20}C_5 \times {}^{20}C_1$, considerando a escolha de uma carta de entre as seis figuras vermelhas, de uma carta de entre as seis figuras pretas, de cinco cartas de entre as vinte cartas vermelhas que não são figuras e de uma carta de entre as vinte cartas pretas que não são figura.

Assim, o número de mãos nas condições enunciadas é

$${}^6C_2 \times {}^{20}C_6 + {}^6C_2 \times {}^{20}C_4 \times {}^{20}C_2 + {}^6C_1 \times {}^6C_1 \times {}^{20}C_5 \times {}^{20}C_1 = 25\,552\,530.$$

6.2 a. Pretende-se uma mão de 13 cartas em que só haja figuras e ases, tendo pelo menos um ás e uma figura. Vamos considerar quatro casos distintos dois a dois.

1.º caso: 1 carta que seja ás e 12 cartas que sejam figuras.

O número de mãos nestas condições é ${}^4C_1 \times {}^{12}C_{12} = 4 \times 1 = 4$, o que consiste em escolher uma de entre as quatro cartas que são ases e escolher as doze cartas que são figuras.

2.º caso: 2 cartas que sejam ases e 11 cartas que sejam figuras.

O número de conjuntos nestas condições é ${}^4C_2 \times {}^{12}C_{11}$, o que resulta de escolher duas cartas de entre as quatro cartas que são ases e de escolher onze cartas de entre as doze cartas que são figuras.

3.º caso: 3 cartas que sejam ases e 10 cartas que sejam figuras.

O número de conjuntos nestas condições é ${}^4C_3 \times {}^{12}C_{10}$, o que resulta de escolher três cartas de entre os quatro ases e de escolher dez cartas de entre as doze cartas que são figuras.

4.º caso: 4 cartas que sejam ases e 9 cartas que sejam figuras.

O número de conjuntos nestas condições é ${}^4C_4 \times {}^{12}C_9 = {}^{12}C_9$, o que resulta de escolher os quatro ases e de escolher nove cartas de entre as doze cartas que são figuras.

Assim, o número de mãos nas condições enunciadas é: $4 + {}^4C_2 \times {}^{12}C_{11} + {}^4C_3 \times {}^{12}C_{10} + {}^{12}C_9 = 560$.

Alternativamente:

Como há doze figuras e quatro ases, qualquer escolha de treze cartas entre as 16 que são figuras ou ases, haverá sempre pelo menos um ás e pelo menos uma figura. Assim, das 16 cartas que são figuras ou ases escolhem-se 13; o número de maneiras de o fazer é ${}^{16}C_{13} = 560$, o que corresponde ao número de mãos nas condições enunciadas.

b. A mão deve ser constituída por pelo menos três cartas de cada naipe o que significa que de um dos naipes extraímos quatro cartas e dos outros três extraímos três cartas de cada um deles.

Vamos começar por escolher o naipe do qual vamos retirar as 4 cartas; o número de maneiras de o fazer é 4C_1 . Para cada uma destas maneiras, escolhem-se 4 cartas de entre as 13 desse naipe, em seguida, extraem-se 3 cartas de cada um dos outros naipes; o número de maneiras de o fazer é ${}^{13}C_4 \times {}^{13}C_3 \times {}^{13}C_3 \times {}^{13}C_3$.

Assim, existem ${}^4C_1 \times {}^{13}C_4 \times {}^{13}C_3 \times {}^{13}C_3 \times {}^{13}C_3 = 66\,905\,856\,160$ mãos distintas nestas condições.

6.3 a. Agrupam-se as figuras num bloco e ordena-se o bloco e as restantes cinco cartas: o número de maneiras de o fazer é $6!$. Para cada uma destas maneiras, as cartas do bloco podem permutar entre si: o número de maneiras de o fazer é $5!$.

Portanto, podem-se formar $6! \times 5! = 86\,400$ filas distintas nas condições enunciadas.

b. Para que os dois valetes fiquem em posições consecutivas, ao número total de filas sem restrições subtraímos o número total das filas em que os dois valetes estão em posições consecutivas, obtendo o número de filas em que os dois valetes não ficam em posições consecutivas.

O número de filas distintas com 10 cartas sem restrições é $10!$.

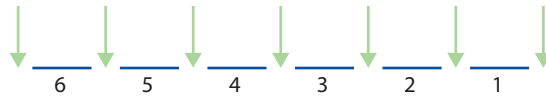
O número de filas em que os dois valetes estão em posições consecutivas resulta de agrupar os dois valetes num bloco e ordenar esse bloco e as restantes oito cartas: $9!$. Para cada uma destas maneiras, os valetes podem permutar entre si: o número de maneiras de o fazer é $2!$.

Assim, podem-se formar $10! - 9! \times 2! = 2\,903\,040$ filas distintas nas condições enunciadas.

c. Pretende-se que as cartas que não são figuras fiquem por ordem. Para isso, vamos determinar as posições possíveis que estas cinco cartas podem ocupar: o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_5$. Como as cartas têm de estar ordenadas, só há uma forma de estas cartas ocuparem essas posições. Em seguida, vamos ordenar as restantes 5 cartas: o número de maneiras de o fazer é $5!$.

Assim, podem-se formar ${}^{10}C_5 \times 5! = 30\,240$ filas distintas nas condições enunciadas.

d. Para que não haja cartas vermelhas em posições consecutivas, as cartas vermelhas têm de ficar entre as restantes seis pretas, ou nas pontas, ou seja, podem ocupar quatro das sete posições.



(Na figura, as setas representam as posições que podem ser ocupadas pelas cartas vermelhas e os traços horizontais representam as posições ocupadas pelas cartas pretas.)

O número de maneiras de escolher, ordenadamente, quatro das sete posições é 7A_4 . Para cada uma destas maneiras, as restantes seis cartas podem ser ordenadas $6!$ maneiras diferentes.

Assim, obtêm-se ${}^7A_4 \times 6! = 604\,800$ filas distintas nas condições enunciadas.

e. Começamos por escolher três figuras de entre as cinco que vão ficar em posições consecutivas: o número de maneiras de o fazer é 5C_3 .

Em seguida, agrupámo-las num bloco: o número de maneiras de ordenar o bloco e as cinco cartas que não são figuras é $6!$. Para cada uma destas ordenações, as cartas dentro do bloco podem ser ordenadas de $3!$ maneiras. As restantes duas cartas que são figuras, só podem ocupar duas das cinco posições em que não ficam junto do bloco das cartas que são figuras. O número de maneiras de escolher, ordenadamente, as duas posições é 5A_2 .



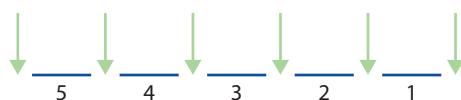
(Na figura, as setas representam as posições que podem ser ocupadas pelas duas figuras restantes e as cruzes representam as posições que não podem ser ocupadas pelas duas figuras restantes.)

Assim, obtêm-se ${}^5C_3 \times 6! \times 3! \times {}^5A_2 = 864\,000$ filas distintas nas condições enunciadas.

Alternativamente:

Começamos por escolher três figuras de entre as cinco que vão ficar em posições consecutivas: o número de maneiras de o fazer é 5C_3 . Em seguida, agrupámo-las num bloco e dentro do bloco as três cartas permutam

de $3!$ maneiras distintas. Como não pode haver mais figuras em posições consecutivas, o bloco e as restantes duas figuras podem ocupar três de seis posições, as quatro entre as restantes cinco cartas não figuras ou nas pontas:



(Na figura, as setas representam as posições que podem ser ocupadas pelo bloco e pelas restantes duas figuras e os traços horizontais representam as posições ocupadas pelas cartas que não são figuras.)

O número de maneiras de escolher, ordenadamente, três das seis posições é 6A_3 . Para cada uma destas maneiras, as cinco restantes cartas podem ser ordenadas de $5!$ maneiras diferentes. Assim, uma expressão que dá resposta ao problema é ${}^5C_3 \times 3! \times {}^6A_3 \times 5!$, cujo resultado é 864 000.

6.4 Seja n o número de cartas vermelhas em cima da mesa. Como existem 45 maneiras distintas de escolher duas das cartas vermelhas, tem-se ${}^nC_2 = 45$.

Resolvendo a equação anterior, determinamos o valor de n .

$$\begin{aligned} {}^nC_2 = 45 &\Leftrightarrow \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = 45 \Leftrightarrow \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = 45 \Leftrightarrow \frac{n \times (n-1)}{2} = 45 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+360}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 19}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1-19}{2} \vee n = \frac{1+19}{2} \\ &\Leftrightarrow n = -9 \vee n = 10 \end{aligned}$$

Como n é o número de cartas em cima da mesa, então $n = 10$. Assim, há 10 cartas vermelhas em cima da mesa.

Colocando numa só fila todas as cartas, existem 174 182 400 maneiras distintas de as cartas da mesma cor ficarem dispostas consecutivamente.

Considerando que há p cartas pretas em cima da mesa, o número de maneiras de as cartas da mesma cor ficarem dispostas consecutivamente é $2! \times 10! \times p!$.

$$\text{Assim, } 2! \times 10! \times p! = 174\,182\,400 \Leftrightarrow p! = \frac{174\,182\,400}{10! \times 2!} \Leftrightarrow p! = 24 \Leftrightarrow p = 4.$$

Logo, há 4 cartas pretas.

Concluindo, foram colocadas 14 cartas em cima da mesa.

PÁG. 43

Aplicar +

7.1 a. Das sete prateleiras escolhem-se, ordenadamente, três para colocar as jarras distintas; o número de maneiras de o fazer é 7A_3 . Para cada uma destas, escolhem-se duas das restantes quatro prateleiras: o número de maneiras de o fazer é 4C_2 .

Portanto, o número de disposições pedido é ${}^7A_3 \times {}^4C_2 = 1260$.

b. Pretende-se que as estatuetas fiquem na mesma prateleira; portanto, começamos por escolher a prateleira em que se vão colocar as estatuetas e, em seguida, escolhem-se, ordenadamente, três das restantes seis prateleiras para colocar as três jarras distintas; o número de maneiras de o fazer é $7 \times {}^6A_3 = 840$.

7.2 Começamos por escolher as posições que vão ser ocupadas pelas duas estatuetas iguais; o número de maneiras de o fazer é 7C_2 . Para cada uma destas, os restantes cinco objetos distintos podem ser ordenados de $5!$ maneiras. Assim, existem ${}^7C_2 \times 5!$ maneiras de colocar as sete peças numa fila.

Opção correta: **(B)**

8. Das cinco filas verticais, escolhe-se uma para colocar estatuetas de latão; o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_1 = 5$. Para cada uma destas maneiras, existem 6A_4 formas distintas de escolher, ordenadamente, quatro estatuetas de latão para os quatro compartimentos da fila vertical escolhida. Sobram 16 compartimentos. Desses, escolhem-se cinco para as estatuetas de bronze; o número de maneiras de o fazer é ${}^{16}C_5$. Para cada uma destas formas, existem ${}^{11}C_3$ maneiras distintas de escolher três compartimentos entre os restantes onze para as estatuetas de aço inoxidável. Finalmente, dos restantes oito compartimentos escolhem-se dois para as últimas duas estatuetas de latão e permutam-se as duas nos dois compartimentos escolhidos; o número de maneiras de o fazer é ${}^8C_2 \times 2!$.

Portanto, pelo princípio da multiplicação, obtém-se $5 \times {}^6A_4 \times {}^{16}C_5 \times {}^{11}C_3 \times {}^8C_2 \times 2!$.

9. As bolas de futebol podem ser colocadas de 12 maneiras distintas, ocupando as posições 1 a 4, ou 2 a 5, ou 3 a 6, ou 4 a 7, ou 5 a 8, ou 6 a 9, ou 7 a 10, ou 8 a 11, ou 9 a 12, ou 10 a 13, ou 11 a 14, ou 12 a 15. Para cada uma destas maneiras, as bolas de futebol permutam entre si de $4!$ maneiras distintas. Das onze posições restantes, escolhem-se cinco para as cinco bolas de ténis, que são indistinguíveis; o número de maneiras de o fazer é ${}^{11}C_5$. Finalmente, para cada uma destas maneiras, existem 6A_3 formas distintas de escolher, ordenadamente, três posições entre as restantes seis para as três bolas de basquetebol.

Portanto, pelo princípio da multiplicação, obtém-se $12 \times 4! \times {}^{11}C_5 \times {}^6A_3$.

PÁG. 44

Aplicar +

10.1 a. Como cada automóvel irá viajar com o mesmo número de amigos, os oito amigos vão em grupos de quatro.

Dos oito amigos, escolhem-se quatro para viajar num dos automóveis: o número de maneiras de o fazer é 8C_4 . Os restantes quatro amigos viajam no outro automóvel.

O número pedido é ${}^8C_4 = 70$.

b. Para que o Manuel e o Duarte não viagem juntos, tem de ir um em cada automóvel e cada automóvel leva quatro amigos. O número de maneiras de escolher, por exemplo, o automóvel em que o Manuel vai viajar é 2C_1 . Para cada uma destas, escolhem-se três de entre os seis (todos menos o Manuel e o Duarte) para viajar no mesmo automóvel: o número de maneira de o fazer é 6C_3 . Os restantes quatro amigos viajam no outro automóvel.

Assim, obtém-se ${}^2C_1 \times {}^6C_3 = 40$.

10.2 a. Consideremos os dois seguintes casos disjuntos:

- num carro vão três amigos e no outro vão cinco (1.º caso);
- em cada carro vão quatro amigos (2.º caso).

1.º caso: num carro vão três amigos e no outro vão cinco

Vamos começar por escolher o carro que irá levar três dos amigos; o número de maneiras de o fazer é ${}^2C_1 = 2$. Dos oito amigos, escolhem-se três para o carro em que vão três amigos; o número de maneiras de o fazer é 8C_3 . Temos, agora, de retirar os casos em que neste carro vão os três amigos de Cinfães ou apenas amigos de Resende (se forem os três amigos de Cinfães, no outro carro não haverá condutor, se forem apenas amigos de Resende, neste carro não haverá condutor). Portanto, temos de retirar ${}^3C_3 + {}^5C_3$ (3C_3 corresponde à escolha dos três amigos de Cinfães e 5C_3 corresponde à escolha de três amigos de Resende). Logo, para este caso temos $2 \times ({}^8C_3 - {}^3C_3 - {}^5C_3) = 90$ possibilidades.

Alternativa de contagem para o 1.º caso:

1) No carro de três amigos, vai um condutor, isto é, um amigo de Cinfães. Assim, dos três amigos de Cinfães escolhe-se um; o número de maneira de o fazer é 3C_1 . Para cada uma destas maneiras, existem 5C_2 maneiras distintas de escolher dois amigos de Resende para o carro que vai levar três.

Logo, temos ${}^3C_1 \times {}^5C_2$ possibilidades.

2) No carro de três amigos, vão dois condutores, isto é, dois amigos de Cinfães. Assim, dos três amigos de Cinfães escolhem-se dois; o número de maneira de o fazer é 3C_2 . Para cada uma destas maneiras, existem 5C_1 maneiras distintas de escolher um amigo de Resende para o carro que vai levar três. Logo, temos ${}^3C_2 \times {}^5C_1$ possibilidades.

Então, para este caso temos $2 \times ({}^3C_1 \times {}^5C_2 + {}^3C_2 \times {}^5C_1) = 90$ possibilidades.

2.º caso: em cada carro vão quatro amigos

Dos oito amigos, escolhem-se quatro para um dos carros; o número de maneiras de o fazer é 8C_4 . Temos, agora, de retirar os casos em que neste carro vão os três amigos de Cinfães ou vão apenas amigos de Resende. Portanto, temos de retirar ${}^3C_3 \times {}^5C_1 + {}^5C_4$ (${}^3C_3 \times {}^5C_1$ corresponde à escolha dos três amigos de Cinfães e de um de Resende e 5C_4 corresponde à escolha de quatro amigos de Resende). Logo, para este caso temos ${}^8C_4 - {}^3C_3 \times {}^5C_1 - {}^5C_4 = 60$.

Alternativa de contagem para o 2.º caso:

1) Num dos carros vai um condutor, isto é, um amigo de Cinfães. Assim, dos três amigos de Cinfães escolhe-se um; o número de maneira de o fazer é 3C_1 . Para cada uma destas maneiras, existem 5C_3 maneiras distintas de escolher três amigos de Resende. Logo, temos ${}^3C_1 \times {}^5C_3$ possibilidades.

2) Num dos carros vão dois condutores, isto é, dois amigos de Cinfães. Assim, dos três amigos de Cinfães escolhem-se dois; o número de maneira de o fazer é 3C_2 . Para cada uma destas maneiras, existem 5C_2 maneiras distintas de escolher dois amigos de Resende. Logo, temos ${}^3C_2 \times {}^5C_2$ possibilidades.

Então, para este caso temos ${}^3C_1 \times {}^5C_3 + {}^3C_2 \times {}^5C_2 = 60$ possibilidades.

Portanto, o número de maneiras de distribuir os amigos pelos dois automóveis, nas condições do enunciado, é $90 + 60 = 150$.

b. Como só os cinfanenses é que podem conduzir, dos três escolhem-se, ordenadamente, dois, um para conduzir um carro e o outro para conduzir o outro carro. O número de maneiras de o fazer é 3A_2 . Sobram oito lugares para sentar seis amigos. Assim, desses oito lugares, escolhem-se, ordenadamente, seis.

O número de maneiras de o fazer é 8A_6 .

Portanto, uma expressão que dá resposta a esta questão é ${}^3A_2 \times {}^8A_6$.

11.1 Dos trinta sócios, escolhem-se cinco.

É possível formar ${}^{30}C_5 = 142\,506$ comissões.

11.2 Para que a comissão tenha representantes das duas cidades e tenha mais sócios de Olhão do que sócios de Faro, vamos considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: comissões com 3 sócios de Olhão e 2 sócios de Faro

O número de comissões nestas condições é ${}^{10}C_3 \times {}^{20}C_2$.

2.º caso: comissões com 4 sócios de Olhão e 1 sócio de Faro

O número de comissões nestas condições é ${}^{10}C_4 \times {}^{20}C_1 = {}^{10}C_4 \times 20$

Assim, podem formar-se ${}^{10}C_3 \times {}^{20}C_2 + {}^{10}C_4 \times 20 = 27\,000$ comissões nas condições enunciadas.

11.3 a. Dos trinta sócios escolhem-se, ordenadamente, três para desempenhar os cargos: o número de maneiras de o fazer é ${}^{30}A_3$. Para cada uma destas escolhas, e como os outros dois elementos da comissão irão desempenhar tarefas indiferenciadas, escolhem-se dois dos restantes vinte e sete sócios: o número de maneiras de o fazer é ${}^{27}C_2$.

Portanto, podem formar-se ${}^{30}A_3 \times {}^{27}C_2 = 8\,550\,360$ comissões nas condições enunciadas.

b. Dos três cargos, escolhem-se dois para serem desempenhados por sócios de Olhão: o número de maneiras de o fazer é 3C_2 . Depois escolhem-se, ordenadamente, dois sócios de Olhão, de entre os dez para desempenhar estes cargos: o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}A_2$. O cargo restante tem de ser desempenhado por um sócio de Faro: o número de maneiras de escolher esse sócio é ${}^{20}C_1 = 20$. Em seguida, e como os outros dois elementos da comissão irão desempenhar tarefas indiferenciadas, escolhem-se dois, dos restantes vinte e sete sócios (todos menos os três que já foram escolhidos para os cargos): o número de maneiras de o fazer é ${}^{27}C_2$.

Portanto, podem formar-se ${}^3C_2 \times {}^{10}A_2 \times 20 \times {}^{27}C_2 = 1\,895\,400$ comissões nas condições enunciadas.

Alternativamente:

Começamos por escolher três sócios para desempenhar os cargos, dois de Olhão e um de Faro; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_2 \times {}^{20}C_1$ (dos dez sócios de Olhão escolhem-se dois, ${}^{10}C_2$, e dos vinte sócios de Faro escolhe-se um, ${}^{20}C_1$). Para cada uma destas maneiras, os três sócios escolhidos permutam de 3! maneiras distintas nos três cargos. Finalmente, dos restantes 27 sócios (todos menos os três já escolhidos) escolhem-se dois; o número de maneiras de o fazer é ${}^{27}C_2$.

Portanto, podem formar-se ${}^{10}C_2 \times {}^{20}C_1 \times 3! \times {}^{27}C_2 = 1\,895\,400$ comissões nas condições enunciadas.

11.4 Seja n o número de sócios farenses que se juntaram à comissão de três elementos de Olhão e dois elementos de Faro. Para que os sócios farenses fiquem em posições consecutivas, começamos por colocar os $(n+2)$ sócios de Faro num bloco e vamos determinar o número de maneiras de ordenar o bloco e os três elementos de Olhão; o número de maneiras de o fazer é $4!$. Para cada uma destas, o número de maneiras de ordenar os elementos de Faro dentro do bloco é $(n+2)!$.

Assim, o número de maneiras de os sócios farenses ficarem em posições consecutivas é $4! \times (n+2)!$.

Como há 17 280 maneiras de os elementos de os sócios farenses ficarem em posições consecutivas, tem-se que $4! \times (n+2)! = 17\,280$.

$$4! \times (n+2)! = 17\,280 \Leftrightarrow (n+2)! = \frac{17\,280}{4!} \Leftrightarrow (n+2)! = 720 \Leftrightarrow n+2 = 6 \Leftrightarrow n = 4$$

Juntaram-se à comissão quatro sócios de Faro.

12. Como o algarismo dos milhares não pode ser zero, conclui-se que para a primeira posição há seis possibilidades (1, 3, 4, 5, 7 ou 9). Para que os números sejam pares, conclui-se que há duas possibilidades (0 ou 4) para o algarismo das unidades. Em seguida, dos sete algarismos escolhem-se, ordenadamente, dois, não necessariamente diferentes; o número de maneiras de o fazer é ${}^7A'_2$.

Assim, obtém-se $6 \times 2 \times {}^7A'_2 = 588$.

Opção correta: **(C)**

13. Como o número tem de ser superior a 20 000 e inferior a 50 000, conclui-se que, para o algarismo das dezenas de milhar, há três possibilidades: 2, 3 ou 4. Para que os números sejam ímpares, o algarismo das unidades é ímpar, ou seja, há cinco possibilidades para o algarismo das unidades: 1, 3, 5, 7 ou 9). Como os cinco algarismos têm de ser distintos, é necessário considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: o algarismo das unidades é igual a 3

Neste caso, o algarismo das dezenas de milhar só tem duas possibilidades: 2 ou 4. Dos restantes oito algarismos, escolhem-se, ordenadamente, três; o número de maneiras de o fazer é 8A_3 .

Nestas condições, existem $2 \times {}^8A_3$ números.

2.º caso: o algarismo das unidades é um ímpar diferente de 3.

Neste caso, o algarismo das dezenas de milhar tem três possibilidades (2, 3 ou 4). O algarismo das unidades tem quatro possibilidades (1, 5, 7 ou 9). Dos restantes oito algarismos, escolhem-se, ordenadamente, três; o número de maneiras de o fazer é 8A_3 .

Nestas condições, existem $3 \times 4 \times {}^8A_3$ números.

Assim, obtém-se $2 \times {}^8A_3 + 3 \times 4 \times {}^8A_3 = 4704$.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 45

Aplicar +

14.1 Para determinar todos os números naturais pares de sete algarismos com os algarismos dados, vamos considerar quatro casos disjuntos dois a dois.

1.º caso: o número começa com o algarismo 3 e termina com o algarismo 0 (sobram dois 0, um 3, um 5 e um 8)

O total de números nestas condições é dado por $\frac{5!}{2!}$ (permutar cinco algarismos, em que dois são iguais a 0) ou por ${}^5C_2 \times 3!$ (das cinco posições escolhem-se duas para os dois 0, 5C_2 , e os restantes três algarismos permutam nas restantes três posições de 3! maneiras).

2.º caso: o número começa com o algarismo 5 ou 8 e termina com o algarismo 0 (sobram dois 0, dois 3 e um 5 ou um 8, dependendo se começa por 5 ou por 8)

O total de números nestas condições é dado por $2 \times \frac{5!}{2! \times 2!}$ (para a primeira posição temos duas possibilidades e permutar os restantes cinco algarismos, em que dois são iguais a 0 e dois são iguais a 3) ou por $2 \times {}^5C_2 \times {}^3C_2$ (para a primeira posição temos duas possibilidades. Das cinco posições restantes escolhem-se duas para os dois 0, 5C_2 , e das restantes três posições escolhem-se duas para os dois 3, ficando a última para o 5 ou para o 8).

3.º caso: o número começa com o algarismo 3 e termina com o algarismo 8 (sobram três 0, um 3 e um 5)

O total de números nestas condições é dado por $\frac{5!}{3!}$ (permutar cinco algarismos, em que três são iguais a 0) ou por 5A_2 (escolher, ordenadamente, duas das cinco posições para o 3 e para o 5, ficando as restantes três posições para os três 0).

4.º caso: o número começa com o algarismo 5 e termina com o algarismo 8 (sobram três 0 e dois 3)

O total de números nestas condições é dado por $\frac{5!}{3! \times 2!}$ (permutar cinco algarismos, em que três são 0 e dois são 3) ou por 5C_3 (das cinco posições escolhem-se três para os três 0, 5C_3 , ficando as restantes duas para os dois 3).

Assim, o total de números pares é dado por $\frac{5!}{2!} + 2 \times \frac{5!}{2! \times 2!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3! \times 2!} = 150$ ou por ${}^5C_2 \times 3! + 2 \times {}^5C_2 \times {}^3C_2 + {}^5A_2 + {}^5C_3 = 150$.

14.2 Expressão 1: Como a primeira posição não pode ser ocupada por um 0, das restantes seis posições escolhem-se três para os três 0. O número de maneiras de o fazer é 6C_3 . Para cada uma destas maneiras, escolhem-se duas posições entre as restantes quatro para os dois 3. O número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Finalmente, os restantes dois algarismos, que são distintos, permutam nas restantes duas posições de $2!$ formas distintas.

Portanto, uma expressão que dá resposta a esta questão é ${}^6C_3 \times {}^4C_2 \times 2!$.

Expressão 2: O número de sequências distintas que se podem formar com três 0, dois 3 e um 5 e um 8 é dado por $\frac{7!}{3! \times 2!}$ (trata-se de uma permutação de sete elementos, em que alguns se repetem).

Contudo, nem todas estas sequências correspondem a números de sete algarismos. Todas as sequências que começam por 0 têm de ser excluídas. Assim, considerando as sequências que começam por 0, para os restantes dois 0, escolhem-se duas das restantes seis posições. O número de maneiras de o fazer é 6C_2 .

Para cada uma destas maneiras, os restantes algarismos permutam nas restantes quatro posições de $\frac{4!}{2!}$ formas distintas (uma vez que o 3 se repete duas vezes, estamos perante uma permutação de quatro elementos em que um se repete duas vezes). Logo, o número de sequências que se iniciam por um 0 é dado por ${}^6C_2 \times \frac{4!}{2!}$.

Portanto, outra expressão que dá resposta a esta questão é $\frac{7!}{3! \times 2!} - {}^6C_2 \times \frac{4!}{2!}$.

15.1 Como o algarismo das dezenas de milhar não pode ser zero e como os números têm de ser pares, conclui-se que, para o algarismo das dezenas de milhar, há nove possibilidades, e que para o algarismo das unidades existem cinco possibilidades (0, 2, 4, 6, 8). Para os restantes três algarismos, escolhem-se, ordenadamente, três de entre os dez, não necessariamente distintos; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}A_3$.

Portanto, obtém-se $9 \times 5 \times {}^{10}A_3 = 45\,000$.

15.2 Como o algarismo das dezenas de milhar não pode ser zero e como os números têm de ser múltiplos de 5, conclui-se que para o algarismo das dezenas de milhar há nove possibilidades e que o algarismo das unidades pode ser escolhido de 2 maneiras diferentes (0 ou 5). Para os restantes três algarismos, escolhem-se, ordenadamente, três de entre os dez, não necessariamente distintos; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}A_3$.

Portanto, obtém-se $9 \times 2 \times {}^{10}A_3 = 18\,000$.

15.3 Como o número tem de ser maior do que 40 000, o algarismo das dezenas de milhar pode ser escolhido de seis maneiras diferentes (4, 5, 6, 7, 8, 9). Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, quatro de entre os nove (todos menos o algarismo usado na dezena de milhar): o número de maneiras de o fazer é 9A_4 .

Portanto, obtém-se $6 \times {}^9A_4 = 18\,144$.

15.4 Como o número tem exatamente um cinco e dois seis, e não contém o zero, vamos começar por determinar as duas posições para colocar os algarismos 6: o número de maneiras de o fazer é 5C_2 . Das três restantes posições, escolhe-se uma para colocar o algarismo 5: o número de maneiras de o fazer é 3C_1 .

Em seguida, dos sete algarismos (1, 2, 3, 4, 7, 8, 9) escolhem-se, ordenadamente, dois algarismos não necessariamente distintos; o número de maneiras de o fazer é ${}^7A_2'$.

Portanto, obtém-se ${}^5C_2 \times {}^3C_1 \times {}^7A_2' = 1470$.

15.5 Para que a soma dos cinco algarismos seja ímpar, vamos considerar três casos disjuntos dois a dois.

1.º caso: os cinco algarismos são ímpares

Dos cinco algarismos ímpares, escolhem-se, ordenadamente cinco: o número de maneiras de o fazer é ${}^5A_5 = 5!$.

2.º caso: três algarismos ímpares e dois algarismos pares

Começamos, por exemplo, por determinar as posições que vão ser ocupadas pelos algarismos ímpares; o número de maneiras de o fazer é 5C_3 . Em seguida, dos cinco algarismos ímpares, escolhem-se, ordenadamente, três; o número de maneiras de o fazer é 5A_3 . Por último, dos quatro algarismos pares (não se pode utilizar o zero), escolhem-se, ordenadamente, dois; o número de maneiras de o fazer é 4A_2 . O total de números nestas condições é ${}^5C_3 \times {}^5A_3 \times {}^4A_2$.

Alternativamente:

Dos cinco algarismos ímpares, escolhem-se três; o número de maneiras de o fazer é 5C_3 . Para cada uma destas maneiras, existem 4C_2 maneiras de escolher dois pares entre os quatro disponíveis. Depois de feita a escolha dos cinco algarismos, existem $5!$ maneiras de os ordenar nas cinco posições. Logo, para este caso temos ${}^5C_3 \times {}^4C_2 \times 5!$ números nas condições enunciadas.

3.º caso: um algarismo ímpar e quatro algarismos pares

Começamos, por exemplo, por determinar a posição que vai ser ocupada pelo algarismo ímpar; o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_1 = 5$. Em seguida, dos cinco algarismos ímpares, escolhe-se um; o número de maneiras de o fazer é 5C_1 . Por último, dos quatro algarismos pares (não se pode utilizar o zero), escolhem-se, ordenadamente, quatro; o número de maneiras de o fazer é 4A_4 . O total de números nestas condições é $5 \times 5 \times {}^4A_4$.

Alternativamente:

Dos cinco algarismos ímpares, escolhe-se um; o número de maneiras de o fazer é 5C_1 . Para cada uma destas maneiras só há uma maneira de escolher os quatro pares. Depois de feita a escolha dos cinco algarismos, existem $5!$ maneiras de os ordenar nas cinco posições. Logo, para este caso temos ${}^5C_1 \times 5!$ números nas condições enunciadas.

Portanto, o total de números nas condições enunciadas é dado por

$$5! + {}^5C_3 \times {}^5A_3 \times {}^4A_2 + 5 \times 5 \times {}^4A_4 = 7\,920 \quad \text{ou por} \quad 5! + {}^5C_3 \times {}^4C_2 \times 5! + {}^5C_1 \times 5! = 7\,920.$$

15.6 Os números terem pelo menos dois zeros, significa que podem ter dois, três ou quatro zeros.

O número total de números com cinco algarismos que têm exatamente dois zeros é $9 \times {}^4C_2 \times {}^9A'_4$.

O número total de números com cinco algarismos que têm exatamente três zeros é $9 \times {}^4C_3 \times 9$.

O número total de números com cinco algarismos que têm exatamente quatro zeros é 9 .

Donde se obtém $9 \times {}^4C_2 \times {}^9A'_4 + 9 \times {}^4C_3 \times 9 + 9 = 4\,707$.

15.7 Pretende-se considerar todos os números de cinco algarismos que têm os algarismos 0, 3 e 5 em posições consecutivas, exatamente uma vez. Assim sendo, vamos considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: o número começa por 3 ou 5, seguido dos outros dois.

Para o algarismo das dezenas de milhar existem duas possibilidades, 3 ou 5, e para cada uma destas, os outros dois algarismos podem ser ordenados de $2!$ maneiras. Em seguida, os dois algarismos em falta podem ser escolhidos, ordenadamente, de entre os sete disponíveis e não necessariamente diferentes; o número de maneiras de o fazer é ${}^7A'_2$.

$$\begin{array}{c} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{1} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\ 2 \times 2! \quad 7 \times 7 = {}^7A'_2 \end{array}$$

Assim, nestas condições, existem $2 \times 2! \times {}^7A'_2$ números diferentes.

2.º caso: os algarismos 0, 3 e 5 ficam nas três posições centrais ou nas três últimas posições

Neste caso, os algarismos 0, 3 e 5 podem ser colocados de 2 formas diferentes e, para cada uma destas, podem ser ordenados de $3!$ maneiras. Os dois algarismos em falta, podem ser escolhidos, ordenadamente, de entre os sete disponíveis, não necessariamente diferentes; o número de maneiras de o fazer é ${}^7A'_2$.

$$\begin{array}{c} \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\ \underbrace{\hspace{3cm}} \\ 3! \times 7 \times 7 = 3! \times {}^7A'_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \\ \underbrace{\hspace{3cm}} \\ 3! \times 7 \times 7 = 3! \times {}^7A'_2 \end{array}$$

Assim, nestas condições, existem $2 \times 3! \times {}^7A'_2$ números diferentes.

Portanto, há $2 \times 2! \times {}^7A'_2 + 2 \times 3! \times {}^7A'_2 = 784$ números nas condições enunciadas.

15.8 Para determinar a quantidade de números que têm apenas uma vez a sequência 35, não contendo algarismos repetidos, vamos considerar dois casos disjuntos dois a dois.

1.º caso: o número começa por 35

Os restantes três algarismos são escolhidos, ordenadamente, de entre os oito disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 8A_3 .

2.º caso: o número não começa por 35 .

A sequência 35 pode ocupar 3 posições diferentes. Para cada uma destas, o algarismo das dezenas de milhar pode ser escolhido de 7 maneiras diferentes (todos menos o 0, 3 e 5). Em seguida, escolhem-se, ordenadamente, dois algarismos de entre os sete disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 7A_2 .

Assim, há ${}^8A_3 + 3 \times 7 \times {}^7A_2 = 1218$ números nas condições enunciadas.

15.9 Para determinar a quantidade de números que têm os algarismos todos distintos e colocados por ordem crescente ou decrescente, vamos considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: o algarismo 0 figura no número

Neste caso, os algarismos só podem estar por ordem decrescente uma vez que o 0 é o algarismo das unidades. Assim, temos de escolher, quatro algarismos de entre os nove disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 9C_4 .

2.º caso: o algarismo 0 não figura no número

Neste caso, escolhemos cinco algarismos de entre os nove disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 9C_5 . Para cada uma destas escolhas, os algarismos podem ser colocados de duas formas diferentes (ordem crescente ou ordem decrescente). Assim, há ${}^9C_5 \times 2$ números nestas condições.

Portanto, há ${}^9C_4 + {}^9C_5 \times 2 = 378$ números nas condições enunciadas.

Alternativamente:

Se os algarismos ficarem por ordem crescente, não podemos escolher o 0, dado que, se fosse escolhido, este teria de ocupar a primeira posição e, nesse caso, a sequência de algarismos não seria um número natural de cinco algarismos. Assim, dos restantes nove algarismos, escolhem-se cinco; o número de maneiras de o fazer é 9C_5 . Para cada uma destas maneiras, os cinco algarismos escolhidos só podem ser distribuídos pelas cinco posições de uma maneira: por ordem crescente.

Se os algarismos ficarem por ordem decrescente, então o 0 já pode ser escolhido, uma vez que, sendo escolhido, ocupará a última posição, a das unidades. Assim, dos dez algarismos escolhem-se 5; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_5$. Para cada uma destas maneiras, os cinco algarismos escolhidos só podem ser distribuídos pelas cinco posições de uma maneira: por ordem decrescente.

Portanto, há ${}^9C_5 + {}^{10}C_5 = 378$ números nas condições enunciadas.

15.10 Para determinar os números que têm os algarismos todos distintos, começando por um algarismo ímpar e terminando num número primo, podemos considerar quatro casos disjuntos dois a dois.

1.º caso: começam por 1 ou 9 e terminam em 2, 3, 5 ou 7

O total de números nestas condições é $2 \times {}^8A_3 \times 4$.

2.º caso: começam por 3 e terminam em 2, 5 ou 7

O total de números nestas condições é $1 \times {}^8A_3 \times 3 = {}^8A_3 \times 3$.

3.º caso: começam por 5 e terminam em 2, 3 ou 7

O total de números nestas condições é $1 \times {}^8A_3 \times 3 = {}^8A_3 \times 3$.

4.º caso: começam por 7 e terminam em 2, 3 ou 5

O total de números nestas condições é $1 \times {}^8A_3 \times 3 = {}^8A_3 \times 3$.

Portanto, há $2 \times {}^8A_3 \times 4 + 3 \times {}^8A_3 \times 3 = 5712$ números nas condições enunciadas.

15.11 Para determinar a quantidade de números que são maiores do que 30 000 e menores do que 56 700 e têm os algarismos todos distintos, vamos considerar três casos disjuntos dois a dois.

1.º caso: números entre 30 000 a 50 000

Para o algarismo das dezenas de milhares temos 2 possibilidades (3 ou 4). Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, quatro de entre os nove; o número de maneiras de o fazer é 9A_4 .

Neste caso, o total de números é $2 \times {}^9A_4$.

2.º caso: números entre 50 000 a 56 000

Para o algarismo das dezenas de milhares temos 1 possibilidade. O algarismo dos milhares tem 5 possibilidades (0, 1, 2, 3 ou 4). Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, três de entre os oito disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 8A_3 .

Neste caso, o total de números é $5 \times {}^8A_3$.

3.º caso: números entre 56 000 a 56 700

Para os algarismos das dezenas de milhares e dos milhares temos 1 possibilidades. O algarismo das centenas tem 5 possibilidades (0, 1, 2, 3 ou 4). Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, dois de entre os sete disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 7A_2 .

Neste caso, o total de números é $5 \times {}^7A_2$.

Portanto, obtém-se $2 \times {}^9A_4 + 5 \times {}^8A_3 + 5 \times {}^7A_2 = 7938$.

15.12 Se ao total de números que é possível formar com todos os algarismos distintos, e superiores a 1, subtrairmos o total de números que têm todos os algarismos distintos, maiores que 1, e têm os algarismos 4 e 6 simultaneamente, obtemos o total de números que têm todos os algarismos distintos, maiores que 1, e não têm o 4 e o 6 simultaneamente.

O total de números que é possível formar com todos os algarismos distintos e maiores do que 1 é 8A_5 .

Para determinar o total de números com os algarismos 4 e 6 simultaneamente, começamos por escolher as posições que vão ser ocupadas pelos algarismos 4 e 6; o número de maneiras de o fazer é 5C_2 . Para cada uma destas, os algarismos podem ser ordenados de $2!$ maneiras. Em seguida, escolhem-se, ordenadamente, três algarismos de entre os seis disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 6A_3 .

Assim, existem ${}^5C_2 \times 2! \times {}^6A_3$ números nestas condições.

Portanto, obtém-se ${}^8A_5 - {}^5C_2 \times 2! \times {}^6A_3 = 4320$.

16.1 Como o número tem de estar entre 1999 e 5000, excluindo estes, o algarismo dos milhares só pode ser 2, 3 ou 4.

Vamos começar por determinar todos os números que têm todos algarismos pares, em seguida, todos os números que têm todos algarismos inferiores a 7. No entanto, os números com todos algarismos pares e inferiores a 7 estão a ser contabilizados duas vezes, por isso vão ter de ser retirados à soma do total dos dois anteriores.

Para os números que têm todos algarismos pares, o algarismo dos milhares é escolhido entre os dois possíveis (2 ou 4). Para cada um destes, escolhem-se, ordenadamente, e não necessariamente diferentes, três algarismos, de entre os cinco possíveis, sendo o número de maneiras de o fazer ${}^5A'_3$. Assim, o total de números com todos algarismos pares é $2 \times {}^5A'_3 = 2 \times 5^3$.

Para os números que têm todos algarismos inferiores a 7, o algarismo dos milhares é escolhido entre os três possíveis (2, 3 ou 4). Para cada um destes, escolhem-se, ordenadamente, e não necessariamente diferentes, três algarismos, de entre os sete disponíveis, sendo o número de maneiras de o fazer ${}^7A'_3$.

Assim, o total de números com todos algarismos inferiores a 7 é $3 \times {}^7A'_3 = 3 \times 7^3$.

Para os números que têm todos algarismos pares e inferiores a 7, o algarismo dos milhares é escolhido entre os dois possíveis (2 ou 4). Para cada um destes, escolhem-se, ordenadamente, e não necessariamente diferentes, três algarismos, de entre os quatro disponíveis (0, 2, 4 ou 6); o número de maneiras de o fazer é ${}^4A'_3$. Assim, o total de números com todos algarismos pares e inferiores a 7 é $2 \times {}^4A'_3 = 2 \times 4^3$.

Assim, existem $2 \times 5^3 + 3 \times 7^3 - 2 \times 4^3 = 1151$ números nas condições enunciadas.

16.2 Existem dois algarismos ímpares múltiplos de 3, o 3 e o 9; um par múltiplo de 3, o 6, três ímpares que não são múltiplos de três, o 1, 5 e 7; três pares que não são múltiplos de 3, o 2, 4 e 8. Vamos considerar três casos disjuntos dois a dois:

1.º caso: dois ímpares múltiplos de 3 e dois pares não múltiplos de 3.

Das quatro posições escolhem-se duas para os dois ímpares múltiplos de 3; o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Para cada uma destas maneiras, para cada um das duas posições escolhidas para os ímpares múltiplos de 3, existem duas possibilidades (ou o 3 ou o 9), e para cada uma das outras duas posições existem três possibilidades (ou o 2, ou o 4 ou o 8). Portanto, para este caso temos ${}^4C_2 \times 2^2 \times 3^2$ possibilidades.

2.º caso: dois pares múltiplos de 3 e dois ímpares não múltiplos de 3.

Das quatro posições escolhem-se duas para os dois pares múltiplos de 3; o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Para cada uma destas maneiras, para cada um das duas posições escolhidas para os ímpares múltiplos de 3, existe apenas uma possibilidade (o 6), e para cada uma das outras duas posições existem três possibilidades (ou o 1, ou o 5 ou o 7). Portanto, para este caso temos ${}^4C_2 \times 1^2 \times 3^2$ possibilidades.

3.º caso: um par múltiplo de 3, um ímpar múltiplo de 3, um par não múltiplo de 3 e um ímpar não múltiplo de 3.

Existem ${}^1C_1 \times {}^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1$ maneiras distintas de escolher um par múltiplo de 3, um ímpar múltiplo de 3, um par não múltiplo de 3 e um ímpar não múltiplo de 3 (escolher o 6, que é o único par múltiplo de 3; dos dois ímpares múltiplos de 3 escolhe-se um, 2C_1 ; dos três pares não múltiplos de 3 escolhe-se um, 3C_1 ; dos três ímpares não múltiplos de 3 escolhe-se um, 3C_1). Para cada uma destas maneiras, os quatro algarismos escolhidos ordenam-se de 4! maneiras distintas nas quatro posições. Portanto, para este caso temos ${}^1C_1 \times {}^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times 4!$ possibilidades.

Logo, existem ${}^4C_2 \times 2^2 \times 3^2 + {}^4C_2 \times 1^2 \times 3^2 + {}^1C_1 \times {}^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times 4! = 702$ números nas condições enunciadas.

Alternativamente:

Pretende-se considerar números naturais de quatro algarismos que têm exatamente dois algarismos múltiplos de 3 e exatamente dois ímpares. Como há algarismos múltiplos de 3 que são algarismos ímpares, temos de considerar vários casos.

1.º caso: números com dois algarismos 3 ou com dois algarismos 9

Estes números já têm exatamente dois algarismos múltiplos de 3 e exatamente dois ímpares; então, os dois algarismos restantes têm de ser pares sem ser o 0 e o 6.

Começamos por determinar as posições que vão ser ocupadas pelos algarismos 3 ou pelos algarismos 9 ; o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, dois algarismos pares não necessariamente diferentes, de entre os três disponíveis (2, 4 ou 8) ; o número de maneiras de o fazer é ${}^3A'_2$.

Assim, existem $2 \times {}^4C_2 \times {}^3A'_2$ números nestas condições.

2.º caso: números com dois algarismos 6

Estes números já têm exatamente dois algarismos múltiplos de 3 ; então, os dois algarismos restantes têm de ser ímpares, sem ser o 3 nem o 9 .

Começamos por determinar as posições que vão ser ocupadas pelos algarismos 6 ; o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, dois algarismos ímpares, não necessariamente diferentes, de entre os três disponíveis (1, 5 ou 7) ; o número de maneiras de o fazer é ${}^3A'_2$.

Assim, existem ${}^4C_2 \times {}^3A'_2$ números nestas condições.

3.º caso: números com os algarismos 3 e 6 ou com os algarismos 6 e 9

Estes já têm exatamente dois algarismos múltiplos de 3 , então para os dois algarismos restantes um tem de ser ímpar sem ser o 3 e o 9 e o outro tem de ser par sem ser o 0 e o 6 .

Começamos por determinar as posições que vão ser ocupadas pelos algarismos 3 e 6 , ou pelos algarismos 6 e 9 ; o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Para cada uma destas, os algarismos podem permutar de $2!$ maneiras. Em seguida, escolhe-se um algarismo ímpar de entre os três disponíveis (1, 5 ou 7) , e escolhe-se um algarismo par de entre três disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 3×3 . Em seguida, estes algarismos podem ser ordenados de $2!$ maneiras.

Assim, existem $2 \times {}^4C_2 \times 2! \times 3 \times 3 \times 2!$ números nestas condições.

4.º caso: números com o algarismo 3 e o algarismo 9

Estes números já têm exatamente dois algarismos múltiplos de 3 e exatamente dois ímpares; então, os dois algarismos restantes têm de ser pares sem ser o 0 nem o 6 .

Começamos por escolher, ordenadamente, duas das quatro posições para ser ocupadas pelo algarismo 3 e pelo algarismo 9 ; o número de maneiras de o fazer é 4A_2 . Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, dois algarismos pares não necessariamente diferentes, de entre os três disponíveis (2, 4 ou 8) ; o número de maneiras de o fazer é ${}^3A'_2$.

Assim, existem ${}^4A_2 \times {}^3A'_2$ números nestas condições.

Portanto, existem

$$2 \times {}^4C_2 \times {}^3A'_2 + {}^4C_2 \times {}^3A'_2 + 2 \times {}^4C_2 \times 2! \times 3 \times 3 \times 2! + {}^4A_2 \times {}^3A'_2 = 702 \text{ números nas condições enunciadas.}$$

17. Para que os números sejam inferiores a 600 000 e tenham os algarismos distintos, vamos determinar todos os números com um algarismo, com dois algarismos, com três algarismos, com quatro algarismos, com cinco algarismos e com seis algarismos.

- total de números com um algarismo é 10 .
- total de números com dois algarismos distintos é 9×9 .
- total de números com três algarismos distintos é $9 \times {}^9A_2$.
- total de números com quatro algarismos distintos é $9 \times {}^9A_3$.
- total de números com cinco algarismos distintos é $9 \times {}^9A_4$.

O total de números com seis algarismos distintos e inferiores a 600 000 é $5 \times {}^9A_4$.

Assim, há $10 + 9 \times 9 + 9 \times {}^9A_2 + 9 \times {}^9A_3 + 9 \times {}^9A_4 + 5 \times {}^9A_4 = 108\,091$ números naturais e de algarismos distintos inferiores a 600 000.

PÁG. 46

Aplicar +

18.1 O número total de permutações dos treze algarismos do número deve ser dividido pelo produto do número de permutações do algarismo 1, 5!, pelo número de permutações entre os algarismos 2, 2!, e pelo número de permutações entre os algarismos 5, 2!.

O total de números que é possível formar com os algarismos do número dado é $\frac{13!}{5! \times 2! \times 2!} = 12\,972\,960$.

Alternativamente:

Começamos por escolher 5 das 13 posições para os algarismos 1 (sem interessar a ordem), duas das restantes 8 posições para os algarismos 2 e duas das restantes 6 posições para os algarismos 5. Por fim, os quatro algarismos restantes podem permutar nas 4 posições restantes de 4!. Assim, obtém-se

$${}^{13}C_5 \times {}^8C_2 \times {}^6C_2 \times 4! = 12\,972\,960.$$

18.2 Começamos por agrupar os cinco algarismos 5 num bloco, os dois algarismos 2 noutro bloco e os dois algarismos 5 noutro bloco. O número de maneiras de ordenar os três blocos e os restantes quatro algarismos é $7! = 5040$.

18.3 Começamos por formar dois blocos com os algarismos (251), em seguida, ordenamos os dois blocos e os restantes sete algarismos; o número de maneiras de o fazer é 9!, dividido pelo produto do número de permutações dos três algarismos 1, 3!, pelo número de permutações dos dois blocos, 2!.

Portanto, obtém-se $\frac{9!}{3! \times 2!} = 30\,240$.

Alternativamente:

Considerando os dois blocos com os algarismos (251), temos estes dois blocos, três algarismos 1, um 4, um 7, um 8 e um 9, pelo que temos de distribuir os blocos e os restantes sete algarismos por nove posições. Assim, das nove posições escolhem-se duas para os dois blocos; o número de maneiras de o fazer é 9C_2 . Para cada uma destas maneiras, existem 7C_3 maneiras de escolher três posições entre as restantes sete para os três 1. Os restantes quatro algarismos (distintos), permutam de 4! maneiras distintas nas restantes quatro posições.

Portanto, obtém-se ${}^9C_2 \times {}^7C_3 \times 4! = 30\,240$.

18.4 Como não pode haver algarismos 1 em posições consecutivas, estes têm de ocupar cinco das nove posições (sete entre os outros algarismos e duas nas pontas); o número de maneiras de o fazer é 9C_5 . O número total de permutações dos restantes oito algarismos do número, 8!, deve ser dividido pelo produto do número de permutações dos algarismos 5, 2!, pelo número de permutações entre os algarismos 2, 2!.



(Na figura, as setas representam as posições que podem ser ocupadas pelos algarismos 1 e os traços horizontais representam as posições ocupadas pelos restantes algarismos.)

Portanto, obtém-se ${}^9C_5 \times \frac{8!}{2! \times 2!} = 1\,270\,080$.

Alternativa a $\frac{8!}{2! \times 2!}$:

Das oito posições escolhem-se duas para os dois 2; o número de maneiras de o fazer é 8C_2 . Para cada uma destas maneiras, existem 8C_2 maneiras distintas de escolher duas posições entre as restantes seis para os dois 5. Finalmente, os restantes quatro algarismos (distintos), permutam de $4!$ maneiras distintas nas restantes quatro posições.

Portanto, obtém-se ${}^9C_5 \times {}^8C_2 \times {}^6C_2 \times 4! = 1\,270\,080$.

19.1 $24 = 2^3 \times 3$. Para encontrar os divisores de 24, usamos todas as combinações dos fatores primos $2^a \times 3^b$, onde a pode ser 0, 1, 2, ou 3 e b pode ser 0, 1.

O número total de divisores é dado pela multiplicação das possibilidades para a e b .

Portanto, 24 tem $4 \times 2 = 8$ divisores.

19.2 $231 = 2 \times 3 \times 7$. Para encontrar os divisores de 231, usamos todas as combinações dos fatores primos $2^a \times 3^b \times 7^c$, onde a pode ser 0 ou 1, b pode ser 0, 1 e c pode ser 0 ou 1.

O número total de divisores é dado pela multiplicação das possibilidades para a , b e c .

Portanto, 231 tem $2 \times 2 \times 2 = 8$ divisores.

19.3 $1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3$. Para encontrar os divisores de 1500, usamos todas as combinações dos fatores primos $2^a \times 3^b \times 5^c$, onde a pode ser 0, 1 ou 2, b pode ser 0, 1 e c pode ser 0, 1, 2, ou 3.

O número total de divisores é dado pela multiplicação das possibilidades para a , b e c .

Portanto, 1500 tem $3 \times 2 \times 4 = 24$ divisores.

19.4 $12\,600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$. Para encontrar os divisores de 12 600, usamos todas as combinações dos fatores primos $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, onde a pode ser 0, 1, 2 ou 3, b pode ser 0, 1 ou 2, c pode ser 0, 1 ou 2 e d pode ser 0 ou 1. O número total de divisores é dado pela multiplicação das possibilidades para a , b , c e d .

Portanto, 12 600 tem $4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$ divisores.

20.1 a. O número de maneiras de escolher os cinco algarismos que vão ocupar as cinco primeiras posições é ${}^{10}C_5$. Como vão ficar colocados por ordem decrescente, então apenas podem ocupar as suas posições de uma única forma. Em seguida, escolhem-se, ordenadamente e não necessariamente diferentes, três letras de entre as treze; o número de maneiras de o fazer é ${}^{13}A'_3$.

Assim, obtém-se ${}^{10}C_5 \times {}^{13}A'_3 = 553\,644$.

b. Como o primeiro algarismo não pode ser zero, há 9 maneiras de fazer essa escolha. Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, sete algarismos distintos de entre os nove disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 9A_7 .

Portanto, há $9 \times {}^9A_7 = 1\,632\,960$ desses códigos.

c. Para que um número de oito algarismos tenha o produto desses algarismos par é necessário que pelo menos um desses algarismos seja par. Se ao total de números com oito algarismos que é possível formar subtrairmos o número total de oito algarismos ímpares, obtemos o total de números com oito algarismos em que pelo menos um deles é par.

Assim, o número de códigos nas condições enunciadas é $9 \times {}^{10}A_7 - {}^5A_8 = 89\,609\,375$.

d. ${}^{23}A_8 - {}^{13}A_8$ ou $23^8 - 13^8$ (Ao total de códigos, ${}^{23}A_8 = 23^8$, retiram-se todos os códigos constituídos apenas por letras, ${}^{13}A_8 = 13^8$.)

e. Começamos por escolher as restantes cinco letras; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_5$. Em seguida, agrupamos as três vogais num bloco. O número de maneiras de ordenar o bloco e as restantes cinco letras é $6!$. Para cada uma destas maneiras as vogais dentro do bloco podem ser ordenadas de $3!$ maneiras.

Portanto, há ${}^{10}C_5 \times 6! \times 3! = 1\,088\,640$ códigos nas condições enunciadas.

20.2 Para responder a esta questão, vamos considerar três casos disjuntos dois a dois:

1. Código com dois algarismos distintos e seis letras distintas.

Dos dez algarismos, escolhem-se dois. O número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_2$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{13}C_6$ formas distintas de escolher seis letras do conjunto das trezes disponíveis. Finalmente, os oito caracteres escolhidos, permutam de $8!$ maneiras distintas nas oito posições.

Assim, para este caso, temos ${}^{10}C_2 \times {}^{13}C_6 \times 8!$ possibilidades.

2. Código com um algarismo e sete letras distintas.

Dos dez algarismos, escolhe-se um. O número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_1 = 10$. O algarismo escolhido pode ser colocado em uma das oito posições disponíveis, ou seja, o algarismo escolhido em 8 posições possíveis. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{13}A_7 = 8$ formas distintas de escolher, ordenadamente, sete letras do conjunto das trezes disponíveis, para as restantes sete posições disponíveis.

Assim, para este caso temos $10 \times 8 \times {}^{13}A_7$ possibilidades.

3. Código com oito letras distintas.

Das trezes letras disponíveis escolhem-se, ordenadamente, oito para as oito posições disponíveis. O número de maneiras de o fazer é ${}^{13}A_8$.

Portanto, uma expressão que dá resposta a este problema é ${}^{10}C_2 \times {}^{13}C_6 \times 8! + 8 \times 10 \times {}^{13}A_7 + {}^{13}A_8$.

20.3 Como o código tem três algarismos iguais a 3 e a soma dos algarismos tem de ser par, então o código tem de ter mais dois algarismos em que um deles seja par e o outro seja ímpar.

O número de maneiras de escolher um algarismo par e um algarismo ímpar diferente de 3 é ${}^5C_1 \times {}^4C_1 = 5 \times 4$. Para cada um destes, escolhem-se, ordenadamente, duas das oito posições para os colocar; o número de maneiras de o fazer é 8A_2 . Em seguida, escolhem-se três das seis restantes posições para colocar os algarismos 3; o número de maneiras de o fazer é 6C_3 . Por último, escolhem-se três das dez letras disponíveis (todas menos as vogais): o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_3$ (estas letras têm apenas uma maneira de ser posicionadas, dado que têm de ficar por ordem alfabética).

Portanto, nas condições do enunciado existem $5 \times 4 \times {}^8A_2 \times {}^6C_3 \times {}^{10}C_3 = 2\,688\,000$ códigos.

20.4 Por exemplo: «Quantos destes códigos têm exatamente três algarismos, todos ímpares, e as letras todas distintas?»

PÁG. 47**Aplicar +**

$$21.1 \quad {}^{14}C_8 = 3003$$

$$21.2 \quad \frac{{}^{14}C_7}{2!} = 1716$$

$$21.3 \quad \frac{{}^{14}C_5 \times {}^9C_5}{2!} \times {}^4C_4 = 126\,126$$

$$21.4 \quad \frac{{}^{14}C_3 \times {}^{11}C_3 \times {}^8C_3}{3!} \times \frac{{}^5C_2 \times {}^3C_2}{2!} = 8\,408\,400$$

22.1 Como $120 - 65 = 55$, há 55 sócios que não jogam nenhum dos dois jogos.

Como $\#(X \cup G) = \#X + \#G - \#(X \cap G) \Leftrightarrow 65 = 30 + 50 - \#(X \cap G) \Leftrightarrow \#(X \cap G) = 15$, há 15 sócios que jogam os dois jogos.

22.2 a. ${}^{55}C_4 = 341\,055$

b. ${}^{15}C_2 \times {}^{15}C_2 = 11\,025$

Há 30 que jogam gamão, mas, desses, 15 jogam os dois jogos. Portanto, há $30 - 15 = 15$ que jogam apenas gamão. Assim, dos 15 que jogam apenas gamão, escolhem-se dois, ${}^{15}C_2$, e, dos 15 que jogam os dois jogos, escolhem-se outros dois, ${}^{15}C_2$.

c. Para escolher quatro sócios em que exatamente dois joguem gamão e exatamente dois joguem xadrez, vamos ter de considerar três casos.

1.º caso: dois que só jogam gamão e dois que só jogam xadrez

Dos 15 sócios que só jogam gamão, escolhem-se dois: o número de maneiras de o fazer é ${}^{15}C_2$.

Dos 35 sócios que só jogam xadrez, escolhem-se dois: o número de maneiras de o fazer é ${}^{35}C_2$.

Nestas condições, há ${}^{15}C_2 \times {}^{35}C_2$ maneiras de escolher os quatro sócios.

2.º caso: dois que jogam os dois jogos e dois que não jogam nenhum dos jogos.

Dos 15 sócios que jogam os dois jogos, escolhem-se dois: o número de maneiras de o fazer é ${}^{15}C_2$. Dos 55 sócios que não jogam nenhum dos jogos, escolhem-se dois: o número de maneiras de o fazer é ${}^{55}C_2$.

Nestas condições, há ${}^{15}C_2 \times {}^{55}C_2$ maneiras de escolher os quatro sócios.

3.º caso: um só joga gamão, um só joga xadrez, um joga os dois jogos e um não joga nenhum dos jogos.

Dos 15 sócios que só jogam gamão escolhe-se um: o número de maneiras de o fazer é

${}^{15}C_1 = 15$. Dos 35 sócios que só jogam xadrez escolhe-se um: o número de maneiras de o fazer é ${}^{35}C_1 = 35$. Dos 15 sócios que jogam os dois jogos escolhe-se um: o número de maneiras de o fazer é ${}^{15}C_1 = 15$. Dos 55 sócios que não jogam nenhum dos jogos, escolhe-se um: o número de maneiras de o fazer é ${}^{55}C_1 = 55$.

Nestas condições, há $15 \times 35 \times 15 \times 55$ maneiras de escolher os quatro sócios.

Portanto, o número de maneiras de escolher os quatro sócios nas condições enunciadas é

$${}^{15}C_2 \times {}^{35}C_2 + {}^{55}C_2 \times {}^{15}C_2 + 15 \times 35 \times 15 \times 55 = 651\,525$$

22.3 Pretende-se escolher cinco sócios entre os quinze que só joguem gamão, quatro entre os 35 que só joguem xadrez e dois entre os 55 que não joguem nenhum dos dois jogos.

Assim, o número de maneiras de escolher cinco sócios entre os quinze que só jogam gamão é ${}^{15}C_5$. Para cada uma destas maneiras existem ${}^{35}C_4$ de escolher quatro sócios entre os 35 que só jogam xadrez. Para cada uma destas maneiras existem ${}^{55}C_2$ de escolher dois sócios entre os 55 que não jogam nenhum dos dois jogos. Finalmente, como as tarefas são diferenciadas, falta distribuir, isto é, permutar, os onze sócios escolhidos pelas onze tarefas distintas. O número de maneiras de o fazer é $11!$.

Logo, uma expressão que dá o número pretendido é ${}^{15}C_5 \times {}^{35}C_4 \times {}^{55}C_2 \times 11!$.

22.4 Agrupando num bloco os três que só jogam gamão, este bloco e os cinco que não jogam qualquer um dos jogos permutam de $6!$ maneiras distintas (o bloco e os cinco que não jogam qualquer um dos jogos constituem seis elementos). Dentro do bloco, os três que só jogam gamão permutam de $3!$ maneiras distintas. Finalmente, os quatro que só jogam xadrez podem ocupar quatro de sete posições, as cinco entre o bloco e os cinco que não jogam qualquer um dos jogos, mais as duas nas ponta.



Assim, dessas sete posições, escolhem-se, ordenadamente, quatro para os quatro que só jogam gamão; o número de maneiras de o fazer é 7A_4 . Logo, existem ${}^7A_4 \times 6! \times 3! = 3\,628\,800$ maneiras de colocar os sócios numa só fila para uma foto, nas condições enunciadas.

22.5 ${}^{14}A_8 \times \frac{{}^6C_3 \times {}^3C_3}{2!} = 1\,210\,809\,600$

Dos catorze sócios, escolhem-se, ordenadamente, oito para desempenhar as tarefas diferenciadas; o número de maneiras de o fazer é ${}^{14}A_8$. Para cada uma destas maneiras, os restantes seis dividem-se em dois grupos de três de $\frac{{}^6C_3 \times {}^3C_3}{2!}$ maneiras (divide-se por $2!$, porque não há diferenciação entre os dois grupos).

PÁG. 48

Aplicar +

23.1 a. $8 \times 7 = 56$

Para os oito peões brancos estão disponíveis oito filas horizontais e para os oito peões pretos sobram sete filas horizontais.

b. $8 \times {}^{14}C_2 \times {}^{12}C_2 \times {}^{10}C_2 \times {}^8C_2 \times 2! = 121\,080\,960$ (Para os oito peões pretos estão disponíveis oito filas. Sobram 14 casas em ambas as diagonais. Dessas escolhem-se duas para os dois cavalos, ${}^{14}C_2$, das doze que sobram escolhem-se duas para os bispos, ${}^{12}C_2$, das dez que sobram escolhem-se duas para as torres, ${}^{10}C_2$, e, finalmente, das oito que sobram escolhem-se duas para o rei e para a rainha e permutam-se as duas peças nessas duas casas escolhidas, ${}^8C_2 \times 2!$.)

c. $16 \times ({}^8C_2 - 7) = 336$ (Existem 8 filas horizontais e 8 filas verticais, portanto, existem 16 filas para colocar as duas torres pretas, das quais se escolhe uma. Das oito casas da fila escolhida escolhem-se duas, 8C_2 , e retiram-se as escolhas de duas casas consecutivas, que são 7).

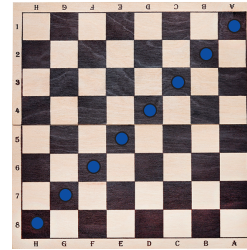
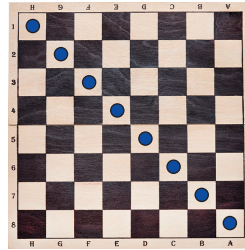
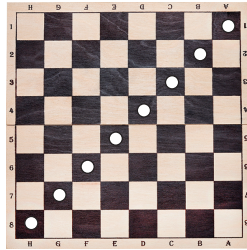
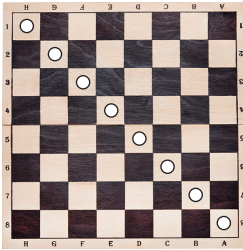
23.2 a. Das 64 casas do tabuleiro, escolhem-se 8 para os peões brancos, ${}^{64}C_8$. Das restantes 56, escolhem-se 8 para os peões pretos, ${}^{56}C_8$. Sobram 48, das quais se escolhe, sucessivamente, duas para os cavalos brancos, duas para os cavalos pretos, duas para os bispos brancos, duas para os bispos pretos, duas para as torres brancas e duas para as torres pretas, ou seja, ${}^{48}C_2 \times {}^{46}C_2 \times {}^{44}C_2 \times {}^{42}C_2 \times {}^{40}C_2 \times {}^{38}C_2$.

Depois deste processo, sobram 36 casas para quatro peças distintas, uma rainha branca, uma rainha preta, um rei branco e um rei preto. Dessas 36 casas escolhem-se 4 e permutam-se os quatro nessas quatro casas escolhidas, ${}^{36}C_4 \times 4!$.

Logo, uma expressão que dá resposta a esta questão é

$${}^{64}C_8 \times {}^{56}C_8 \times {}^{48}C_2 \times {}^{46}C_2 \times {}^{44}C_2 \times {}^{42}C_2 \times {}^{40}C_2 \times {}^{38}C_2 \times {}^{36}C_4 \times 4!$$

b. Podemos preencher as duas diagonais de quatro maneiras distintas:



Das restantes 56 casas, escolhem-se 8 para os restantes oito peões; o número de maneiras de o fazer é ${}^{56}C_8$. No entanto, há uma dessas escolhas que tem de ser excluída, aquela em que se escolhem as oito casas da diagonal não preenchida. Assim, para os restantes oito peões, temos ${}^{56}C_8 - 1$ possibilidades.

Logo, uma expressão que dá resposta a esta questão é $4 \times ({}^{56}C_8 - 1)$.

24.1 Expressão 1: Para formarmos um conjunto de seis lápis distintos, podemos considerar dois casos disjuntos: escolher um lápis verde e, dos restantes oito, escolher cinco; o número de maneiras de o fazer é $1 \times {}^8C_5 = {}^8C_5$; escolher seis dos oito lápis que não são verdes; o número de maneiras de o fazer é 8C_6 . Logo, uma expressão que dá resposta a esta questão é ${}^8C_5 + {}^8C_6$.

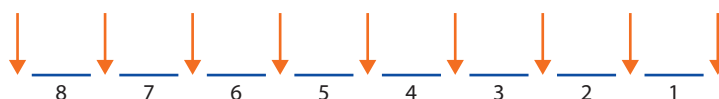
Expressão 2: Estão disponíveis nove lápis de cor distintos (os quatro verdes são indistinguíveis, pelo que, consideramos apenas um para formar um conjunto de seis lápis de cor distintos). Portanto, desses nove escolhem-se seis. O número de maneiras de o fazer é 9C_6 , pelo que, esta é outra expressão possível que dá resposta a esta questão.

24.2 a. Existem ${}^{12}C_4 \times 8! = 19\,958\,400$ maneiras, que consistem em determinar as posições que podem ser ocupadas pelos lápis verdes, ${}^{12}C_4$, e, em seguida, ordenar os restantes oito lápis, $8!$.

b. Agrupam-se os lápis de cor verde num bloco, e ordena-se o bloco e os restantes oito lápis; o número de maneiras de o fazer é $9! = 362\,880$.

c. Se ao número total de disposições possíveis, se subtrair as disposições em que não há dois lápis verdes lado a lado, obtemos as disposições em que, pelo menos, há dois lápis verdes em posições consecutivas.

Para determinar o número de maneiras de não haver dois lápis de cor verde lado a lado, estes têm de ficar entre os restantes oito lápis, ou nas pontas, ou seja, podem ocupar quatro das nove posições, as sete entre os oito lápis mais as duas pontas. O número de maneiras de escolher quatro das nove posições possíveis é 9C_4 . Para cada uma destas, os oito lápis de cor diferente podem ser ordenados de $8!$ maneiras.



Logo, existem ${}^9C_4 \times 8!$ maneiras diferentes de não haver dois lápis de cor verde lado a lado.

Portanto, há ${}^{12}C_4 \times 8! - {}^9C_4 \times 8! = 14\,878\,080$ disposições distintas nas condições enunciadas.

PÁG. 49

Aplicar +

25.1 a. Dos sete amigos, escolhem-se três para ocuparem os lugares nos bancos centrais: o número de maneiras de o fazer é 7C_3 . Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, três dos quatro lugares; o número de maneiras de o fazer é 4A_3 . Dos restantes seis lugares, escolhem-se, ordenadamente, quatro para sentar os restantes amigos: o número de maneiras de o fazer é 6A_4 .

Portanto, o número de maneiras para que exatamente três amigos fiquem sentados nos bancos centrais é ${}^7C_3 \times {}^4A_3 \times {}^6A_4 = 302\,400$.

b. O Manuel e o Sérgio podem ficar lado a lado sem estarem separados por um corredor de 7 maneiras diferentes (3 nos bancos centrais e 2 em cada um bancos laterais). Para cada uma destas, podem ser sentados de $2!$ maneiras. Em seguida, dos restantes oito lugares escolhem-se, ordenadamente, cinco para sentar os restantes amigos: o número de maneiras de o fazer é 8A_5 . Donde se obtém $7 \times 2! \times {}^8A_5 = 94\,080$.

25.2 O Manuel e o Sérgio podem ficar sentados nas cabeceiras de $2!$ maneiras. Para que todos os espanhóis fiquem do mesmo lado da mesa, existem 2 possibilidades; para cada uma destas podem ser sentados de $3!$ maneiras. Por último, escolhem-se, ordenadamente, dois dos três lugares restantes para sentar os restantes portugueses.

Assim, o número de maneiras sentar os sete amigos nas condições enunciadas é $2! \times 2 \times 3! \times {}^3A_2 = 144$.

26.1 Se n é o número de elementos da Banda Velha, então $n+2$ é número de elementos da Banda Nova. Pretende-se uma comissão com dois elementos da Banda Velha e três elementos da Banda Nova que irão desempenhar tarefas. O número de maneiras de escolher os três elementos da Banda Nova para desempenhar as tarefas é ${}^{n+2}A_3$ e o número de maneiras de escolher os dois elementos da Banda Velha é nC_2 . Assim, é possível formar ${}^{n+2}A_3 \times {}^nC_2$ comissões distintas.

$$\begin{aligned} {}^{n+2}A_3 \times {}^nC_2 &= \frac{(n+2)!}{(n+2-3)!} \times \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} \times \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = \\ &= (n+2)(n+1)n \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2(n-1)(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

26.2 Seja n o número de representantes de cada banda. Como se vão escolher dois de cada uma das bandas, o número de maneiras de o fazer é ${}^nC_2 \times {}^nC_2 = ({}^nC_2)^2$.

$$\text{Assim, } ({}^nC_2)^2 = 784 \Leftrightarrow {}^nC_2 = \sqrt{784} \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 28 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(\cancel{n-2}!)!}{2(\cancel{n-2}!)!} = 28 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n = 28 \times 2 \Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-56)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 15}{2} \Leftrightarrow n = -7 \vee n = 8$$

Como n é o número elementos de cada banda, então $n = 8$. Logo, o grupo tem 16 pessoas.

27. O número de diagonais de um polígono regular com n vértices é dado por ${}^nC_2 - n$ (dos n vértices escolhem-se 2, no entanto, n dessas escolhas são lados do polígono, pelo que têm de ser excluídas).

Resolvendo a equação ${}^nC_2 - n = 170$ determinamos o valor de n .

$$\begin{aligned} {}^nC_2 - n = 170 &\Leftrightarrow \frac{n!}{2! \times (n-2)!} - n = 170 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 78 \Leftrightarrow n^2 - n - 2n = 340 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 - 3n - 340 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 1360}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{1369}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{3-37}{2} \vee n = \frac{3+37}{2} \\ &\Leftrightarrow n = \frac{3-37}{2} \vee n = \frac{3+37}{2} \Leftrightarrow n = -17 \vee n = 20 \end{aligned}$$

Como n é o número de vértices, então $n = 20$.

O polígono tem 20 vértices.

28.1 Uma reta fica definida por dois pontos. Como se pretende encontrar as retas que interseam a reta r , vamos determinar quantas retas se podem formar com um ponto que pertença à reta r e um dos restantes sete e, em seguida, as retas que se podem formar com um dos três pontos situados acima da reta r e o outro com um dos quatro abaixo da reta r .

O número de retas distintas que interseam a reta r é $5 \times 7 + 3 \times 4 = 47$.

28.2 Escolhem-se dois pontos de entre os doze: o número de maneiras de o fazer é ${}^{12}C_2$. No entanto, como há cinco pontos colineares, temos de retirar o número de retas formadas por dois desses cinco pontos, pois definem sempre a mesma reta e adicionar 1 para que a reta r seja contabilizada.

Assim, o número de retas distintas é ${}^{12}C_2 - {}^5C_2 + 1 = 57$.

28.3 Um triângulo fica definido por três pontos. Então, dos doze pontos, escolhem-se três e retiram-se os casos em que esses três pontos não definem um triângulo, por serem pontos colineares.

O número de triângulos distintos que se podem formar é ${}^{12}C_3 - {}^5C_3 = 210$.

PÁG. 50

Aplicar +

29.1 Pretendem-se conjuntos com pelo menos cinco pedras do mesmo tipo. Então, podemos formar conjuntos com:

- 5 ametistas e 2 dolomitas ou 6 ametistas e 1 dolomitas;
- 5 dolomitas e 2 ametistas ou 6 dolomitas e 1 ametistas.

O número de conjuntos possíveis nas condições enunciadas é

$${}^6C_5 \times {}^6C_2 + {}^6C_6 \times {}^6C_1 + {}^6C_5 \times {}^6C_2 + {}^6C_6 \times {}^6C_1 = 192.$$

29.2 a. ${}^{12}C_3 \times {}^9C_3 \times {}^6C_3 \times {}^3C_3 = 369\,600$

b. Dos quatro compartimentos, escolhem-se dois para colocar, por exemplo, as pedras do tipo ametistas e, das seis pedras ametistas, escolhem-se três para colocar num dos dois compartimentos escolhidos, ficando as restantes pedras ametistas no outro compartimento. Em seguida, escolhem-se três pedras dolomitas, das seis existentes, para colocar num dos restantes compartimentos, e o outro compartimento fica com as restantes pedras.

Assim, o número de maneiras colocar três pedras do mesmo tipo em cada um dos compartimentos é ${}^4C_2 \times {}^6C_3 \times {}^6C_3 = 2400$.

29.3 a. $7! \times 4! = 120\,960$

Agrupam-se os quatro jades num bloco. O bloco e as restantes seis pedras (constituem sete elementos) permutam de $7!$ maneiras distintas. Dentro do bloco, os jades permutam de $4!$ maneiras distintas.

b. $3! \times 4! \times 3! \times 3! = 5184$

Agrupam-se os jades num bloco, as ametistas noutra bloco e as dolomitas noutra. Os três blocos permutam de $3!$ maneiras distintas. Dentro do bloco dos jades, estes permutam de $4!$ maneiras distintas, dentro do bloco das ametistas, estas permutam de $3!$ maneiras distintas, e dentro do bloco das dolomitas, estas permutam de $3!$ maneiras distintas.

c. Agrupam-se as três ametistas num bloco. O bloco e as três dolomitas permutam entre si de $4!$ maneiras distintas (o bloco e as três dolomitas constituem quatro elementos a permutar). Dentro do bloco, as ametistas permutam entre si de $3!$ maneiras distintas.

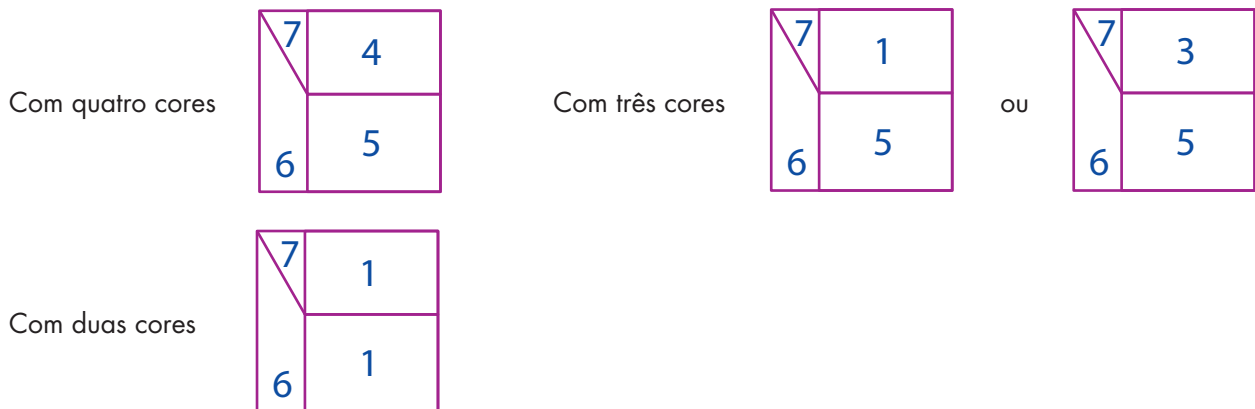
Como não pode haver dois jades em posições consecutivas, estes podem ocupar quatro de cinco posições, as três entre o bloco de ametistas e as dolomitas, mais as posições das pontas:



Dessas cinco posições, escolhem-se, ordenadamente, quatro para os jades; o número de maneiras de o fazer é 5A_4 .

Logo, uma expressão que dá resposta ao problema é ${}^5A_4 \times 4! \times 3! = 17\,280$.

30.1 Respeitando as condições do enunciado, a figura pode ser pintada com quatro cores distintas ou com três cores distintas ou com duas cores distintas.



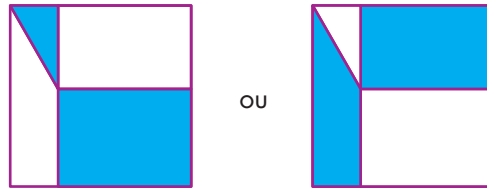
Assim, o número pedido é dado por ${}^7A_4 + (7 \times 6 \times 5 \times 1) \times 2 + 7 \times 6 \times 1 \times 1 = 1302$.

Alternativamente:

As quatro partes da figura podem ser coloridas com:

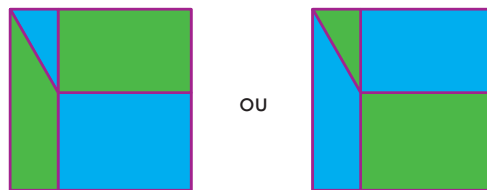
Quatro cores: Das sete cores disponíveis, escolhem-se ordenadamente quatro; o número de maneiras de o fazer é 7A_4 .

Três cores: Das sete cores, escolhem-se três; o número de maneiras de o fazer é 7C_3 . Uma destas, será usada duas vezes, pelo que vamos escolher essa cor; o número de maneiras de o fazer é 3C_1 . A cor que será usada duas vezes pode ser disposta de duas maneiras:



As restantes duas cores, distintas, permutam de $2!$ maneiras nas restantes duas partes. Logo, usando três cores, temos ${}^7C_3 \times {}^3C_1 \times 2 \times 2!$ possibilidades.

Dois cores: Das sete cores escolhem-se duas; o número de maneiras de o fazer é 7C_2 . As duas cores escolhidas só podem ser dispostas de duas maneiras:



Logo, usando três cores temos ${}^7C_2 \times 2$ possibilidades.

Assim, usando sete cores, o quadrado pode ser colorido de ${}^7A_4 + {}^7C_3 \times {}^3C_1 \times 2 \times 2! + {}^7C_2 \times 2 = 1302$ maneiras.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{30.2} \quad {}^nA_4 + {}^nC_3 \times {}^3C_1 \times 2 \times 2! + {}^nC_2 \times 2 &= n(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times 12 + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = \\
 &= n(n-1)(n-2)(n-3) + 2n(n-1)(n-2) + n(n-1) \\
 &= n(n-1)((n-2)(n-3) + 2(n-2) + 1) \\
 &= n(n-1)(n^2 - 3n - 2n + 6 + 2n - 4 + 1) \\
 &= n(n-1)(n^2 - 3n + 3)
 \end{aligned}$$

31.1 Pode formar 3 conjuntos diferentes, se os berlinde forem todos da mesma cor (verde, azul ou preta) ou faz conjuntos de três berlinde de cores diferentes: o número de maneiras de escolher as três cores das quais vai retirar um berlinde de cada é 5C_3 .

Assim, pode formar ${}^5C_3 + 3 = 13$ conjuntos de berlinde.

31.2 Se forem três berlinde de cores diferentes, é possível formar 5C_3 conjuntos distintos (das cinco cores disponíveis, escolhem-se três); se forem três berlinde da mesma cor, existem 3 conjuntos nestas condições (todos verdes, todos azuis ou todos pretos); se forem dois e só dois com a mesma cor, temos de considerar dois casos: o berlinde de cor laranja e dois de outra cor qualquer ou dois berlinde de uma cor e um berlinde de outra cor que não seja a cor laranja.

Para o caso do berlinde de cor laranja e dois de outra cor qualquer, é possível formar 4 conjuntos (um laranja e, dois verdes, ou dois azuis, ou dois pretos ou dois brancos); no outro caso escolhem-se, ordenadamente, duas cores de entre as quatro (todas menos a cor laranja): o número de maneiras de o fazer é 4A_2 .

Assim, é possível formar $3 + {}^5C_3 + 4 + {}^4A_2 = 7 + {}^5C_3 + {}^4A_2$ conjuntos de três berlinde.

Opção correta: **(A)**

PÁG. 51**Aplicar +**

32.1 Para que as retas sejam paralelas ao plano xOy , a escolha dos dois pontos tem de ser feita dos seis pontos da face superior do cubo, dos seis pontos da face inferior do cubo ou dos quatro pontos médios das arestas laterais.

Assim, há ${}^8C_2 \times 2 + {}^4C_2 = 62$ escolhas possíveis.

32.2 Dos vinte pontos assinalados no cubo, escolhem-se três: o número de maneiras de o fazer é ${}^{20}C_3$. No entanto, existem escolhas que não definem um plano, são os casos em que se escolhem três pontos colineares. Portanto temos de excluir essas escolhas, que são 12.

Assim, ${}^{20}C_3 - 12 = 1128$ escolhas definem um plano.

Opção correta: **(C)**

33.1 O número de maneiras de escolher dois vértices do prisma é 8C_2 . Temos de retirar as quatro retas que são perpendiculares ao plano ABC .

Portanto, o número de retas não perpendiculares ao plano ABC é ${}^8C_2 - 4 = 24$.

33.2 Tendo em conta as letras da figura e as condições do enunciado, há seis planos perpendiculares a yOz : ABC , BCH , EFG , ADE , ADH e BCE .

Cada um destes planos contém quatro vértices do prisma, pelo que existem ${}^4C_3 = 4$ escolhas distintas que definem qualquer um destes planos (por exemplo, as escolhas de três vértices do prisma que definem o plano ABC , são: A, B, C ; A, B, D ; A, C, D ; A, C, D).

Portanto, existem $6 \times {}^4C_3 = 24$ escolhas possíveis de três vértices distintos do prisma que definem um plano perpendicular ao plano yOz .

33.3 O prisma pode ser colorido com:

Seis cores: Das dez cores, escolhem-se ordenadamente seis; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}A_6$.

Cinco cores: Das dez cores, escolhem-se cinco; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_5$. Uma dessas cores terá de colorir duas faces. Assim, vamos escolher essa cor; o número de maneiras de o fazer é 5C_1 . A cor que vai colorir duas faces, terá de colorir faces opostas, pelo que há 3 possibilidades. As restantes quatro cores permutam de 4! maneiras nas restantes quatro faces. Logo, usando cinco cores, temos ${}^{10}C_5 \times {}^5C_1 \times 3 \times 4!$ possibilidades.

Quatro cores: Das dez cores, escolhem-se quatro; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_4$. Dessas quatro cores, haverá duas que terão de colorir, cada uma, duas faces. Assim, vamos escolher essas cores; o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Estas cores terão de colorir faces opostas, pelo que, temos de escolher, ordenadamente, dois dos três conjuntos de faces opostas; o número de maneira de o fazer é 3A_2 . As restantes duas cores permutam de 2! maneiras nas restantes duas faces. Logo, usando quatro cores temos ${}^{10}C_4 \times {}^4C_2 \times {}^3A_2 \times 2!$ possibilidades.

Três cores: Neste caso, faces opostas serão coloridas com a mesma cor. Assim, das dez cores, escolhem-se ordenadamente três; o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}A_3$.

O número de maneiras distintas de colorir o prisma, nas condições enunciadas, é dado por:

$${}^{10}A_6 + {}^{10}C_5 \times {}^5C_1 \times 3 \times 4! + {}^{10}C_4 \times {}^4C_2 \times {}^3A_2 \times 2! + {}^{10}A_3 = 257\,760$$

Alternativamente:

É necessário considerar vários casos:

- Todas as faces com cores diferentes, ou seja, colorir com 6 cores: ${}^{10}A_6$.
- Faces laterais opostas com a mesma cor e as bases de cor igual, ou seja, colorir com três cores: ${}^{10}A_3$.
- Faces laterais opostas com a mesma cor e as bases de cor diferente, ou seja, colorir com quatro cores: ${}^{10}A_4$.
- Duas das faces laterais iguais, e as outras faces laterais de cor diferente e bases de cor igual, ou seja, colorir com 4 cores: ${}^{10}A_4 \times 2$.
- Duas das faces laterais iguais, e as outras faces laterais de cor diferente e bases de cor diferente, ou seja, colorir com 5 cores: ${}^{10}A_5 \times 2$.
- Faces laterais de cor diferente e bases de cor igual, ou seja, colorir com 5 cores: ${}^{10}A_5$.

O número de maneiras distintas para colorir o prisma, nas condições enunciadas, é dado por:

$${}^{10}A_6 + {}^{10}A_3 + {}^{10}A_4 + {}^{10}A_4 \times 2 + {}^{10}A_5 \times 2 + {}^{10}A_5 = 257\,760$$

$$34.1 \quad {}^{13}C_5 = 1287$$

$$34.2 \quad {}^4C_2 \times {}^9C_6 = 504$$

$$34.3 \quad {}^{13}C_5 - {}^8C_3 \times {}^5C_3 = 727$$

$$34.4 \quad {}^4C_2 \times {}^9C_6 + {}^8C_5 \times {}^5C_3 - {}^4C_2 \times {}^4C_3 \times {}^5C_3 = 824$$

PÁG. 54**Autoavaliação**

$$1. \quad 6 \times 3 = 18$$

Opção correta: **(B)**

$$2. \quad \#P = 15, \#T = 12, \#\bar{P} \cap \bar{T} = 4, \text{ então } \#T \cup P = 21.$$

$$\text{Como } \#\bar{P} \cap \bar{T} = 4, \text{ então } \#T \cup P = 21.$$

$$\#T \cup P = \#P + \#T - \#(P \cap T) \Leftrightarrow 21 = 15 + 12 - \#(P \cap T) \Leftrightarrow \#(P \cap T) = 27 - 21 \Leftrightarrow \#(P \cap T) = 6$$

Opção correta: **(D)**

3. Opção correta: **(B)** (Dos 25 alunos escolhem-se, ordenadamente, dois.)

4. Agrupar os livros de Matemática num bloco e os livros de Física num outro bloco.

Permutar os dois blocos e o livro de Economia, e, em seguida, permutar os livros dentro de cada bloco.

$$3! \times 4! \times 3!$$

Opção correta: **(A)**

$$5.1 \quad {}^4A'_5 = 4^5 = 1024$$

Para cada uma das questões existem quatro possibilidades de resposta, não necessariamente diferentes.

Opção correta: **(D)**

5.2 ${}^5C_2 \times 4 \times 3! = 240$ (Das cinco questões escolhem-se duas para terem a mesma resposta; o número de maneiras de o fazer é 5C_2 . Para essas duas escolhidas existem quatro possibilidades de resposta, ou A em ambas, ou B em ambas, ou C em ambas, ou D em ambas. Finalmente as restantes três respostas têm de ser diferente e diferentes a escolhida anteriormente. Existem, portanto, $3!$ possibilidades para as restantes três questões.)

6.1 Na associação há sete sócios da Charneca de Caparica e há três sócios da Sobreda.

a. Como os quatro elementos têm de pertencer às duas localidades, mas com mais elementos da Charneca de Caparica do que da Sobreda, temos de escolher três elementos da Charneca de Caparica e um elemento da Sobreda; o número de maneiras de o fazer é ${}^7C_3 \times {}^3C_1 = 105$.

b. Para que, nos quatro elementos escolhidos, haja pelo menos dois elementos da Sobreda, temos de considerar dois casos.

1.º caso: A representação é formada por 2 elementos da Charneca de Caparica e 2 elementos da Sobreda.

O número de representações nestas condições é ${}^7C_2 \times {}^3C_2$.

2.º caso: A representação é formada por 1 elemento da Charneca de Caparica e 3 elementos da Sobreda.

O número de representações nestas condições é ${}^7C_1 \times {}^3C_3 = 7 \times 1 = 7$.

Portanto, o número de representações possíveis é ${}^7C_2 \times {}^3C_2 + 7 = 70$.

6.2 Das quatro tarefas, escolhem-se duas para serem desempenhadas pelos elementos da Charneca de Caparica: o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Em seguida, escolhem-se, ordenadamente, dois elementos dos sete elementos da Charneca de Caparica; o número de maneiras de o fazer é 7A_2 . Por último, escolhem-se, ordenadamente, dois elementos da Sobreda para realizar as duas tarefas restantes; o número de maneiras de o fazer é 3A_2 .

Portanto, o número de representações possíveis é ${}^4C_2 \times {}^7A_2 \times {}^3A_2 = 1512$.

Alternativamente:

Como tem de haver dois membros de cada localidade, dos sete da Charneca de Caparica escolhem-se dois e dos três da Sobreda escolhem-se dois; o número de maneiras de o fazer é ${}^7C_2 \times {}^3C_2$. Depois de feita a escolha dos quatro, estes permutam de $4!$ maneiras distintas pelas quatro tarefas. Logo, o número de representações possíveis é ${}^7C_2 \times {}^3C_2 \times 4! = 1512$.

7.1 a. ${}^4C_2 \times {}^6A_2 \times {}^8A_4 \times 6! = 217\,728\,000$ (Dos quatro estudantes de Letras escolhem-se dois para uma das filas; o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Para cada uma dessas maneiras, existem 6A_2 maneiras de escolher, ordenadamente, dois lugares dessa fila para os dois estudantes de Letras, e 8A_4 maneiras de escolher quatro estudantes de Ciências de entre os oito para os restantes quatro lugares. Finalmente, os restantes seus estudantes permutam de $6!$ maneiras distintas nos lugares da outra fila.)

Alternativamente:

Dos quatro alunos de Letras, escolhem-se dois para uma das filas e dos oito alunos de Ciências escolhem-se quatro para essa fila; o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_2 \times {}^8C_4$. Para cada uma destas maneiras, os estudantes desta fila podem ser ordenados de $6!$ maneiras distintas e os estudantes da outra fila também podem ser ordenados de $6!$ maneiras distintas. Logo, os estudantes podem sentar-se de ${}^4C_2 \times {}^8C_4 \times 6! \times 6! = 217\,728\,000$ maneiras.

b. Se, ao número total de maneiras de sentar os doze estudantes nas duas filas sem restrições, subtrairmos o número de maneiras de haver uma fila apenas com estudantes de Ciências, obtemos o número de maneiras em não há uma fila apenas com estudantes de Ciências.

O número de maneiras de sentar os doze estudantes nas duas filas sem restrições é $12!$.

O número de maneiras de haver uma fila apenas com estudantes de Ciências é $2 \times {}^8C_6 \times 6! \times 6!$, que consiste em escolher uma das filas, ${}^2C_1 = 2$, depois escolher seis dos oito estudantes de Ciências, 8C_6 , e, em seguida, o número de maneiras de os sentar é $6!$. Por último, sentar os restantes seis estudantes: o número de maneiras de o fazer é $6!$.

Por fim, obtém-se $12! - 2 \times {}^8C_6 \times 6! \times 6! = 449\,971\,200$.

7.2 Começamos por agrupar a Cláudia, a Sofia e a Maria num bloco: o número de maneiras de ordenar o bloco e mais sete estudantes (os restantes menos o Pedro e o Carlos) é $8!$. Para cada uma destas, as estudantes dentro do bloco podem ser ordenadas de $3!$ maneiras. Em seguida, e como o Pedro e o Carlos não podem ficar em posições consecutivas, escolhem-se, ordenadamente, duas das posições das nove (sete entre o bloco e os sete amigos e as duas pontas) possíveis; o número de maneiras de o fazer é 9A_2 .



Assim, podem fazê-lo de $8! \times 3! \times {}^9A_2 = 17\,418\,240$ maneiras.

Alternativamente:

Ao total de maneiras de ordenar os doze estudantes de modo que a Cláudia, a Sofia e a Maria fiquem juntas, tiram-se o total de maneiras de ordenar os doze estudantes de modo que as três fiquem juntas e também o Pedro e o Carlos fiquem juntos.

O número de maneiras de ordenar os doze estudantes de modo que a Cláudia, a Sofia e a Maria fiquem juntas é $10! \times 3!$ (agrupando as três num bloco, o bloco e os restantes dez estudantes – que constituem dez elementos a permutar – permutam entre si de $10!$ maneiras distintas. Dentro do bloco, as três ordenam-se de $3!$ maneiras distintas).

O número de maneiras de ordenar os doze estudantes de modo que a Cláudia, a Sofia e a Maria fiquem juntas e o Pedro e o Carlos também fiquem juntos é $9! \times 3! \times 2!$ (agrupando a Cláudia, a Sofia e a Maria num bloco, e agrupando o Pedro e o Carlos noutro bloco, os dois blocos e os restantes sete estudantes – que constituem nove elementos a permutar – permutam entre si de $9!$ maneiras distintas. Dentro do bloco da Cláudia, da Sofia e da Maria, as três permutam-se de $3!$ maneiras distintas, e dentro do bloco do Pedro e do Carlos, os dois ordenam-se de $2!$ maneiras distintas).

Assim, os doze podem colocar-se lado a lado de $10! \times 3! - 9! \times 3! \times 2! = 1\,7418\,240$ maneiras.

8.1 Para que o número seja par, o algarismo das unidades pode ser $0, 2, 4, 6$ ou 8 e o primeiro algarismo não pode ser 0 . Vamos considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: o algarismo das unidades é 0 .

Como o número tem de ter exatamente dois zeros o outro algarismo 0 pode ocupar 5 posições diferentes, para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, os outros cinco algarismos distintos de entre os nove disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 9A_5 .

Neste caso, existem $5 \times {}^9A_5$ números.

2.º caso: o algarismo das unidades é 2, 4, 6 ou 8.

Começamos por escolher duas das cinco posições para colocar os algarismos 0; o número de maneiras de o fazer é 5C_2 . O algarismo das unidades pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes. Em seguida, escolhem-se, ordenadamente, os restantes quatro algarismos distintos de entre os oito disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 8A_4 . Neste caso, existem ${}^5C_2 \times {}^8A_4 \times 4$ números.

Portanto, há $5 \times {}^9A_5 + {}^5C_2 \times {}^8A_4 \times 4 = 142\,800$ números nas condições enunciadas.

8.2 Começamos por determinar as posições que vão ser ocupadas pelos algarismos 1, 4 e 7: o número de maneiras de o fazer é 7C_3 . Como estes algarismos têm de ficar por ordem crescente, então só têm uma ordenação possível. Em seguida, escolhem-se, ordenadamente, quatro algarismos não necessariamente diferentes, de entre seis disponíveis (todos menos 0, 1, 4 e 7); o número de maneiras de o fazer é ${}^6A'_4$. Assim, existem ${}^7C_3 \times {}^6A'_4 = 45\,360$ números nas condições enunciadas.

9. Começamos por escolher a fila onde se vão colocar os dois vasos. O número de maneiras de o fazer é ${}^4C_1 = 4$. Para cada uma destas maneiras, existem 6C_2 maneiras distintas de escolher dois compartimentos, entre os seis da fila escolhida, para os dois vasos. Finalmente, como na fila onde ficam os vasos não podem estar outras peças, dos restantes dezoito compartimentos escolhem-se, ordenadamente, dezasseis. O número de maneiras de o fazer é ${}^{18}A_{16}$.

Logo, uma expressão que dá resposta a este problema é $4 \times {}^6C_2 \times {}^{18}A_{16}$.

10. Começamos por colorir o círculo: das oito cores escolhem-se, ordenadamente, três cores distintas; o número de maneiras de o fazer é 8A_3 . Em seguida, colorimos a faixa central com umas das 5 cores disponíveis. Por último, colorimos as outras duas faixas que podem ter qualquer uma das cores, exceto a da faixa central, porque são adjacentes a esta. O número de maneiras de escolher, ordenadamente, duas cores não necessariamente diferentes é ${}^7A'_2$.

Assim, existem ${}^8A_3 \times 5 \times {}^7A'_2 = 82\,320$ maneiras distintas de colorir a bandeira.

11. A Joana, saindo de A , tem 2 de percursos possíveis (para norte ou para sul). Depois, até B , em cada um dos dois cruzamentos seguintes tem duas possibilidades: ou segue em frente ou segue pelo troço vertical. No cruzamento imediatamente anterior a B , só tem uma possibilidade. Assim, para ir de A para B tem $2 \times 2 \times 2 \times 1 = 2^3$ caminhos possíveis. Em seguida, as irmãs vão-se deslocar para C ou D , podendo apenas deslocar-se no sentido Este ou Norte. Então, os percursos de B para C ou de B para D são disjuntos.

Os caminhos de B para C têm 8 troços, sendo apenas 3 horizontais; logo, o número de caminhos é igual ao número de maneiras de escolher os troços horizontais, ou seja, 8C_3 . Os caminhos de B para D têm 10 troços, sendo apenas 6 horizontais; logo, o número de caminhos é igual ao número de maneiras de escolher os troços horizontais, ou seja, ${}^{10}C_6$.

Assim, existem $2^3 \times ({}^8C_3 + {}^{10}C_6) = 2128$ caminhos possíveis.

PÁG. 57

Começar a preparar o exame

1.1 a. ${}^{10}C_4 = 210$

b. Conjuntos de quatro bolas, em que pelo menos duas sejam brancas, significa que os conjuntos podem ter exatamente duas bolas brancas ou exatamente três bolas brancas ou as quatro bolas brancas.

O número de conjuntos possíveis é ${}^5C_2 \times {}^5C_2 + {}^5C_3 \times {}^5C_1 + {}^5C_4 = 155$.

c. Como pretendemos conjuntos de quatro bolas, em que haja bolas das três cores, podemos formar três tipos de conjuntos.

O número de conjuntos com 2 bolas verdes, 1 bola azul e 1 bola branca é dado por ${}^3C_2 \times 2 \times 5$.

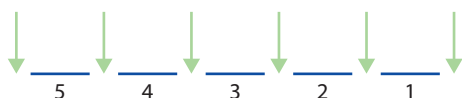
O número de conjuntos com 1 bola verde, 2 bolas azuis e 1 bola branca é dado por $3 \times {}^2C_2 \times 5$.

O número de conjuntos com 1 bola verde, 1 bola azul e 2 bolas brancas é dado por $3 \times 2 \times {}^5C_2$.

Donde se obtém ${}^3C_2 \times 2 \times 5 + 3 \times {}^2C_2 \times 5 + 3 \times 2 \times {}^5C_2$.

Opção correta: **(B)**

1.2 Como se pretende que as bolas verdes fiquem em posições consecutivas e as bolas azuis também fiquem em posições consecutivas, começamos por agrupar três bolas verdes num bloco e as duas bolas azuis noutro bloco. Uma vez que não pode haver uma bola verde e uma azul em posições consecutivas, então os dois blocos têm de ficar entre as bolas brancas ou nas pontas, ou seja, escolhem-se, ordenadamente, duas de entre as seis (quatro entre as bolas brancas mais as pontas) posições possíveis: o número de maneiras de o fazer é 6A_2 . Para cada uma destas, as bolas brancas podem ser ordenadas de 5! maneiras, as bolas verdes dentro do bloco podem ser ordenadas de 3! maneiras e as bolas azuis dentro do bloco podem ser ordenadas de 2! maneiras.



(Na figura, as setas representam as posições que podem ser ocupadas pelos dois blocos e os traços horizontais representam as posições ocupadas pelas bolas brancas.)

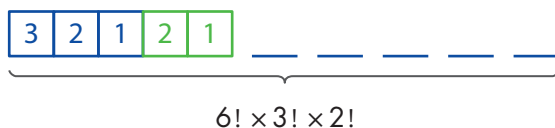
Donde se obtém ${}^6A_2 \times 5! \times 3! \times 2! = 43\,200$ maneiras de colocar as dez bolas numa só fila, nas condições enunciadas.

Alternativamente:

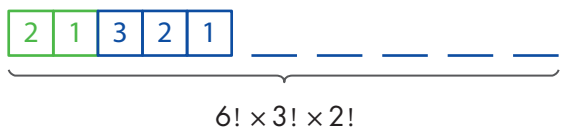
Ao total de maneiras de colocar as dez bolas de modo que as verdes fiquem em posições consecutivas e que as azuis também fiquem em posições consecutivas, tiram-se os casos que, além de as verdes ficarem em posições consecutivas e que as azuis também fiquem em posições consecutivas, as verdes e as azuis fiquem lado a lado.

O número de maneiras de colocar as dez bolas de modo que as verdes fiquem em posições consecutivas e que as azuis também fiquem em posições consecutivas é $7! \times 3! \times 2!$ (Agrupando as verdes num bloco e as azuis em outro bloco, estes dois blocos e as bolas brancas – que constituem sete elementos a permutar – permutam entre si de 7! maneiras. Para cada uma destas maneiras, existem 3! maneiras de ordenar as verdes no seu bloco e 2! maneiras de ordenar as azuis no seu bloco).

O número de maneiras de colocar as dez bolas de modo que as verdes fiquem em posições consecutivas e que as azuis também fiquem em posições consecutivas, com as verdes e azuis lado a lado é $2 \times 6! \times 3! \times 2!$



OU



Assim, obtêm-se $7! \times 3! \times 2! - 2 \times 6! \times 3! \times 2! = 43\ 200$ maneiras de colocar as dez bolas numa só fila, nas condições enunciadas.

2.1 Para que os contrabaixistas fiquem na mesma fila, há 2 possibilidades; para cada uma destas, e como a fila tem quatro lugares, o número de maneiras de sentar os três contrabaixistas é 4A_3 .

Em seguida, o número de maneiras de sentar os restantes cinco músicos, nos restantes cinco lugares, é $5!$.

Assim, obtêm-se $2 \times {}^4A_3 \times 5!$.

Opção correta: **(B)**

2.2 O violoncelista pode fazer a sua audição de 2 formas diferentes (em primeiro ou em último). Para cada uma destas, as audições têm de começar por um violinista e ir alternando com uma audição de um violoncelista: o número de maneiras de o fazer é $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 4! \times 3!$.

Portanto, existem $2 \times 4! \times 3! = 288$ maneiras distintas de ocorrer a sequência das audições.

3.1 Vamos considerar dois casos: quando o algarismo das unidades é 0 e quando o algarismo das unidades é 2, 4, 6 ou 8.

No caso de o algarismo das unidades ser 0, escolhem-se, ordenadamente, quatro algarismos distintos de entre os nove; o número de maneiras de o fazer é 9A_4 .

No caso de o algarismo das unidades ser 2, 4, 6 ou 8, podemos escolher o algarismo das unidades de 4 maneiras diferentes; o algarismo das dezenas de milhar pode ser escolhido de 8 maneiras; e os restantes três algarismos são escolhidos, ordenadamente, de entre os oito possíveis: o número de maneiras de o fazer é 8A_3 .

Assim, existem ${}^9A_4 + 8 \times {}^8A_3 \times 4 = 13\ 776$ números pares de cinco algarismos distintos.

3.2 Como se pretende que o os números sejam pares e tenham exatamente um 0 e exatamente um 3, temos de considerar três casos: o número termina em 30 (??30), o número começa por 30 (30???) e quando os algarismos 0 e 3 ocupam duas posições consecutivas das três posições centrais.

1.º caso: o número termina em 30 (??30).

O número de maneiras de escolher, ordenadamente, os três algarismos em falta, não necessariamente diferentes, de entre os oito disponíveis, é ${}^8A'_3$.

2.º caso: o número começa por 30 (30???)

Como o número tem de ser par, o algarismo das unidades pode ser escolhido de quatro maneiras diferentes (2, 4, 6 ou 8). Para cada uma destas, os restantes dois algarismos são escolhidos, ordenadamente e não necessariamente diferentes, de entre os oito disponíveis; o número de maneiras de o fazer é ${}^8A'_2$.

Assim, existem ${}^8A'_2 \times 4$ números.

3.º caso: os algarismos 0 e 3 ocupam duas posições consecutivas das três posições centrais.

Os algarismos 0 e 3 podem ocupar posições consecutivas de duas formas diferentes (ocupam a posição das dezenas e das centenas, ou das centenas e das dezenas) e para cada uma destas os algarismos podem permutar, pelo que existem $2 \times 2!$ maneiras diferentes colocar estes algarismos. Para o número ser par, o algarismo das unidades pode ser escolhido de quatro maneiras diferentes (2, 4, 6 ou 8). Para cada uma destas, os restantes dois algarismos são escolhidos, ordenadamente, e não necessariamente diferentes, de entre oito disponíveis; o número de maneiras de o fazer é ${}^8A'_2$.

Assim, existem $2 \times 2! \times {}^8A'_2 \times 4$ números.

Portanto, existem ${}^8A'_3 + {}^8A'_2 \times 4 + 2 \times 2! \times {}^8A'_2 \times 4 = 1792$ números nas condições enunciadas.

Opção correta: **(B)**

4.1 Pretende-se formar números com seis algarismos usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Como os números devem ser inferiores a 300 000 e ter os algarismos 2 e 4 um ao lado do outro, então o algarismo das centenas de milhar só pode ser 1 ou 2. Vamos considerar três casos disjuntos dois a dois.

1.º caso: os números da forma (24??6).

Os restantes três algarismos permutam de $3!$ maneiras nas restantes três posições.

2.º caso: os números da forma (1??24) ou (1??42)

Os restantes três algarismos permutam de $3!$ maneiras nas restantes três posições. Assim, para este caso, existem $3! \times 2$ números nestas condições.

3.º caso: números da forma (1??6) com os algarismos 2 e 4 a ocupar duas posições consecutivas de entre as restantes quatro.

Os algarismos 2 e 4 podem ocupar três posições diferentes (ocupam a posição das dezenas de milhares e milhares, ou dos milhares e centenas ou das centenas e dezenas) e para cada uma destas podem permutar de $2!$ maneiras. Os dois algarismos que faltam colocar, 3 e 5, permutam de $2!$ maneiras distintas nas duas posições restantes. Assim, para este caso, existem $3 \times 2! \times 2!$ números nestas condições.

Portanto, existem $3! + 3! \times 2 + 3 \times 2! \times 2! = 30$ números nas condições enunciadas.

4.2 Para que o número seja superior a 5×10^8 , tem de começar por 5 ou por 6, pelo que temos de considerar dois casos disjuntos: o número começa por 5; o número começa por 6.

Expressão 1:

O número começa por 5.

Sendo o primeiro algarismo um 5, ficamos, então, com uma sequência de oito algarismos com três 2, um 3 e quatro 6. Assim, o número de sequências nestas condições é $\frac{8!}{3! \times 4!}$ (trata-se de uma permutação de oito elementos, em que alguns se repetem).

O número começa por 6.

Sendo o primeiro algarismo um 6, ficamos, então, com uma sequência de oito algarismos com três 2, um 3, um 5 e três 6. Assim, o número de sequências nestas condições é $\frac{8!}{3! \times 3!}$ (trata-se de uma permutação de oito elementos, em que alguns se repetem).

Portanto, uma expressão que dá resposta a esta questão é $\frac{8!}{3! \times 4!} + \frac{8!}{3! \times 3!}$.

Expressão 2:**O número começa por 5 .**

Das restantes oito posições, escolhem-se três para os três 2 . O número de maneiras de o fazer é 8C_3 . Para cada uma destas maneiras, existem ${}^5C_1 = 5$ formas distintas de escolher uma posição entre as restantes cinco para o 3 , ficando as quatro posições que sobram para os quatro 6 . Portanto, para este caso temos ${}^8C_3 \times 5$ possibilidades.

O número começa por 6 .

Das restantes oito posições, escolhem-se três para os três 2 . O número de maneiras de o fazer é 8C_3 . Para cada uma destas maneiras, existem 5C_3 formas distintas de escolher três posições entre as restantes cinco para os restantes três 6 . Finalmente, o 3 e o 5 permutam de $2!$ maneiras distintas nas últimas duas posições. Logo, para este caso temos ${}^8C_3 \times {}^5C_3 \times 2!$ possibilidades.

Portanto, outra expressão que dá resposta a esta questão é ${}^8C_3 \times 5 + {}^8C_3 \times {}^5C_3 \times 2!$.

PÁG. 58**Começar a preparar o exame**

5.1 Como se pretende que os elementos do conjunto X sejam números pares, o algarismo das unidades deve ser 6 ou 8 , e tenha os algarismos distintos. Para as restantes posições escolhem-se, ordenadamente, três dos restantes seis algarismos (exclui-se o que foi usado para as unidades), 6A_3 : o número total de números nestas condições é ${}^6A_3 \times 2 = 240$.

Assim, o conjunto X tem 240 elementos.

Para os elementos do conjunto Y , o algarismo das centenas não pode ser 0 , pelo que para o algarismo das centenas temos 5 hipóteses. Para as restantes posições escolhem-se, ordenadamente, dois dos seus algarismos, não necessariamente diferentes, ${}^6A'_2$: o número total de números de três algarismos é $5 \times {}^6A'_2 = 180$.

Portanto, o conjunto Y tem 180 elementos.

5.2 Para que a soma de três números seja par, devemos considerar dois casos disjuntos: os três números são pares ou um dos números é par e os dois restantes são ímpares.

1.º caso: Como se vai escolher um elemento de X e dois elementos de Y , escolhe-se um elemento de X (número par) e dois elementos de Y que sejam números pares.

O número total de números pares de Y é $5 \times 6 \times 2 = 60$.

Assim, há ${}^{240}C_1 \times {}^{60}C_2$ números nestas condições.

2.º caso: Como se vai escolher um elemento de X e dois elementos de Y , escolhe-se um elemento de X (número par) e dois elementos de Y que sejam números ímpares.

O número total de números ímpares de Y é $180 - 60 = 120$.

Assim, há ${}^{240}C_1 \times {}^{120}C_2$ números nestas condições.

Portanto, obtém-se ${}^{240}C_1 \times {}^{60}C_2 + {}^{240}C_1 \times {}^{120}C_2 = 2\,138\,400$.

5.3 Como se pretende que, pelo menos, duas das coordenadas sejam elementos de Y , significa que podem ser duas coordenadas com elementos de Y ou as três coordenadas com elementos de Y .

Se forem duas coordenadas de elementos de Y :

Escolhe-se um elemento de X e dois elementos de Y . O número de maneiras de escolher um elemento de X é ${}^{240}C_1$. Este elemento pode ocupar 3 posições diferentes. Em seguida, escolhem-se, ordenadamente e não necessariamente distintos, dois elementos de X ; o número de maneiras de o fazer é ${}^{180}A'_2$.

Assim, há ${}^{240}C_1 \times 3 \times {}^{180}A'_2$ ternos nestas condições.

Se as três coordenadas são elementos de Y :

Escolhem-se três elementos de Y , ordenadamente, e não necessariamente diferentes; o número de maneiras de o fazer é ${}^{180}A'_3$.

Portanto, obtém-se ${}^{240}C_1 \times 3 \times {}^{180}A'_2 + {}^{180}A'_3 = 29\,160\,000$.

6. Consideremos que o grupo é constituído por n alunos do 12.º ano e por $n+1$ alunos do 11.º ano.

Como se pretende que os alunos do 11.º ano desçam consecutivamente, vamos agrupar estes alunos num bloco. O número de maneiras de ordenar o bloco e os restantes n alunos do 12.º ano é $(n+1)!$. Para cada uma destas ordenações, dentro do bloco o número de maneiras de ordenar $n+1$ alunos do 11.º ano é $(n+1)!$.

Assim, o número total de maneiras de os alunos do 11.º ano descerem consecutivamente é

$$(n+1)! \times (n+1)! = (n+1)!^2.$$

Resolvendo a equação $(n+1)!^2 = 14\,400$ determinamos o valor de n .

$$\begin{aligned} (n+1)!^2 = 14\,400 &\Leftrightarrow (n+1)! = \pm\sqrt{14\,400} \Leftrightarrow (n+1)! = -120 \vee (n+1)! = 120 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (n+1)! = 120 \Leftrightarrow n+1 = 5 \Leftrightarrow n = 4 \end{aligned}$$

O grupo tem 9 elementos, 4 alunos do 12.º ano e 5 alunos do 11.º ano.

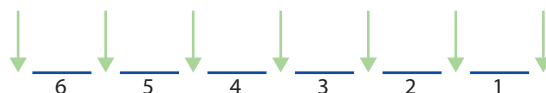
7.1 Como se pretende que a Ana, o Diogo e o Francisco fiquem juntos, começamos por agrupar os três amigos num bloco. O número de maneiras de ordenar o bloco e os restantes sete amigos é $8!$. Para cada uma destas, os amigos dentro do bloco podem trocar de posições entre si de $3!$ maneiras.

Assim, o número de formas diferentes de dispor os jovens na fila, nas condições enunciadas, é

$$8! \times 3! = 241\,920.$$

Opção correta: **(C)**

7.2 A Ana, o Diogo, o Francisco e o Manuel só podem ficar nas pontas ou entre os seis amigos, ou seja, podem ocupar quatro de sete posições, as cinco entre os seis amigos mais as duas nas pontas.



Vamos começar por escolher, ordenadamente, quatro das sete posições possíveis; o número de maneiras de o fazer é 7A_4 . Para cada uma destas escolhas, os restantes seis amigos podem-se ordenar de $6!$ maneiras.

Assim, os jovens podem dispor-se na fila de ${}^7A_4 \times 6! = 604\,800$ maneiras.

7.3 Como o Francisco e Manuel querem ficar juntos e não vão cozinhar, então podem ficar no primeiro grupo ou no terceiro grupo.

Se ficarem no primeiro grupo, já temos a composição desse grupo. Falta escolher o segundo grupo de quatro elementos e o terceiro grupo de quatro elementos; o número de maneiras de o fazer é

$${}^8C_4 \times {}^4C_4 = {}^8C_4 \times 1 = {}^8C_4.$$

Se ficarem no terceiro grupo, faltam escolher as outras duas pessoas que fazem parte deste grupo e escolher, por exemplo, o segundo grupo de quatro elementos e os restantes dois elementos ficam no primeiro grupo; o número de maneiras de o fazer é ${}^8C_2 \times {}^6C_4$.

Assim, os jovens podem ser distribuídos de ${}^8C_4 + {}^8C_2 \times {}^6C_4 = 490$ maneiras.

PÁG. 59

Começar a preparar o exame

8. Dos 16 professores, $12 \left(\frac{3}{4} \times 16\right)$ são professores de Matemática e 4 são professores de Física. Se ao número total de comissões que é possível formar, subtrairmos o número de comissões em que os cargos são desempenhados apenas por professores de Matemática e o número de comissões em que os cargos são desempenhados apenas por professores de Física, obtemos o número de comissões em que os cargos estão representadas as duas disciplinas.

O número total de comissões que se podem formar sem restrições é ${}^{16}A_3 \times {}^{13}C_4$.

O número de comissões em que os cargos são desempenhados apenas por professores de Matemática é ${}^{12}A_3 \times {}^{13}C_4$.

O número de comissões em que os cargos são desempenhados apenas por professores de Física é ${}^4A_3 \times {}^{13}C_4$.

Portanto, o número de comissões possíveis é ${}^{16}A_3 \times {}^{13}C_4 - {}^{12}A_3 \times {}^{13}C_4 - {}^4A_3 \times {}^{13}C_4 = 1\,441\,440$.

Alternativamente:

Vamos considerar dois casos disjuntos:

1.º caso: os cargos são ocupados por dois professores de Matemática e um de Física

${}^{12}C_2 \times {}^4C_1 \times 3! \times {}^{13}C_4$ (Escolhem-se dois professores de Matemática e um de Física e permutam-se os três pelos três cargos, ${}^{12}C_2 \times {}^4C_1 \times 3!$. Dos restantes 13 professores escolhem-se quatro para desempenharem as tarefas indiferenciadas, ${}^{13}C_4$.)

2.º caso: os cargos são ocupados por dois professores de Física e um de Matemática

${}^4C_2 \times {}^{12}C_1 \times 3! \times {}^{13}C_4$ (Escolhem-se dois professores de Física e um de Matemática e permutam-se os três pelos três cargos, ${}^4C_2 \times {}^{12}C_1 \times 3!$. Dos restantes 13 professores escolhem-se quatro para desempenharem as tarefas indiferenciadas, ${}^{13}C_4$.)

Portanto, o número de comissões possíveis é ${}^{12}C_2 \times {}^4C_1 \times 3! \times {}^{13}C_4 + {}^4C_2 \times {}^{12}C_1 \times 3! \times {}^{13}C_4 = 1\,441\,440$.

9. Se os quatro primeiros algarismos forem pares (e são iguais), temos quatro possibilidades (2, 4, 6 ou 8).

Os dois restantes algarismos ou são pares ou são ímpares, assim o número de maneiras de escolher, ordenadamente, dois pares entre os restantes quatro ou dois ímpares entre os cinco é ${}^4A_2 + {}^5A_2$.

Se os quatro primeiros algarismos forem ímpares (e são iguais), temos cinco possibilidades (1, 3, 5, 7 ou 9).

Os dois restantes algarismos ou são pares ou são ímpares, assim o número de maneiras de escolher, ordenadamente, dois pares entre cinco ou dois ímpares entre os restantes quatro é ${}^5A_2 + {}^4A_2$.

Portanto, obtém-se $4({}^4A_2 + {}^5A_2) + 5({}^5A_2 + {}^4A_2) = 9({}^4A_2 + {}^5A_2)$.

Opção correta: **(A)**

10.1 Dos sete algarismos ímpares escolhem-se, ordenadamente, seis para numerar as faces da pirâmide, e, em seguida, numeram-se as restantes sete faces com os restantes sete algarismos.

O número de maneiras de o fazer é ${}^7A_6 \times 7! = 25\,401\,600$.

10.2 Para formar uma diagonal espacial do sólido, escolhem-se dois dos seus treze vértices; o número de maneiras de o fazer é ${}^{13}C_2$. No entanto, 24 dessas escolhas correspondem a arestas, pelo que têm de ser excluídas. Há ainda ${}^6C_2 - 6$ diagonais faciais na base $[ABCDE]$ (ao escolher dois vértices desta base, 6C_2 , seis escolhas são arestas, pelo que têm de ser excluídas), e 2×6 diagonais faciais nas seis faces laterais retangulares. Logo, o número de diagonais espaciais do sólido é

$${}^{13}C_2 - 24 - ({}^6C_2 - 6 + 12) = {}^{13}C_2 - 24 - ({}^6C_2 + 6).$$

10.3 Para que o plano contenha o centro da face $[ABCDEF]$, o plano passa pelo vértice V e é perpendicular à base $[ABCDEF]$ ou o plano é definido por uma diagonal da base e uma das arestas do hexágono da face $[GHIJLM]$ paralelas a essa diagonal ou plano contém face $[ABCDEF]$.

1.º caso: o plano passa pelo vértice V e é perpendicular à base $[ABCDEF]$

Dos cinco vértices escolhem-se três; o número de maneiras de o fazer é 5C_3 , e há três possibilidades de o plano ser perpendicular à base $[ABCDEF]$. O número de planos nestas condições é $3 \times {}^5C_3$.

2.º caso: o plano é definido pela diagonal $[BE]$ e a aresta $[GH]$; pela diagonal $[BE]$ e a aresta $[JL]$; pela diagonal $[AD]$ e a aresta $[IJ]$; pela diagonal $[AD]$ e a aresta $[GM]$; pela diagonal $[FC]$ e a aresta $[HI]$; pela diagonal $[FC]$ e a aresta $[ML]$.

O número de planos nestas condições é $6 \times {}^4C_3$.

3.º caso: o plano contém a face $[ABCDEF]$

O número de planos nestas condições é 6C_3 .

Portanto, o número de escolhas que definem um plano que contém o centro da face $[ABCDEF]$ é dado por $3 \times {}^5C_3 + 6 \times {}^4C_3 + {}^6C_3 = 74$.

10.4 Para a base $[ABCDEF]$ temos de escolher uma cor entre as três disponíveis. O número de maneiras de o fazer é ${}^3C_1 = 3$. Cada uma das faces laterais do prisma pode ser colorida com uma de quatro cores, pelo que temos $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = {}^4A'_6$ possibilidades de coloração (são todas as sequências de seis cores, não necessariamente diferentes, escolhidas entre quatro). No entanto, quatro destas escolhas não podem ser consideradas: são as quatro escolhas em que todas as seis faces são pintadas da mesma cor (todas de amarelo, ou todas de branco, ou todas de verde, ou todas de roxo). Logo, para colorir as seis faces laterais do prisma temos ${}^4A'_6 - 4$ possibilidades. Finalmente, para cada uma destas maneiras, existem ${}^{10}A_6$ formas diferentes de escolher seis cores distintas entre as dez disponíveis para colorir as seis faces laterais da pirâmide.

Portanto, o número de maneiras diferentes de colorir o sólido, nas condições indicadas, é dado por

$$3 \times ({}^4A'_6 - 4) \times {}^{10}A_6.$$

PÁG. 60**Começar a preparar o exame**

11.1 Se a Fernanda oferecer três livros e três canetas a um dos netos; o número de maneiras de o fazer é $2 \times {}^5C_3 \times {}^7C_3$ (escolhe um dos netos, 2C_1 , dos cinco livros escolhe três e das sete canetas escolhe três, ${}^5C_3 \times {}^7C_3$). No caso de oferecer quatro livros e duas canetas a um dos netos; o número de maneiras de o fazer é $2 \times {}^5C_4 \times {}^7C_2$ (escolhe um dos netos, 2C_1 , dos cinco livros escolhe quatro e das sete canetas escolhe duas, ${}^5C_4 \times {}^7C_2$).

Assim, a Fernanda tem $2 \times {}^5C_3 \times {}^7C_3 + 2 \times {}^5C_4 \times {}^7C_2 = 910$ formas de repartir as canetas pelos dois netos.

11.2 Se a Fernanda oferecer ao Armando três livros, em que exatamente dois sejam do Jorge Buescu, e três canetas; o número de maneiras de o fazer é ${}^3C_2 \times {}^2C_1 \times {}^7C_3$ (dos três livros do Jorge Buescu, escolhe dois, 3C_2 , dos restantes dois livros escolhe um, 2C_1 , e das sete canetas escolhe três, 7C_3). No caso de oferecer ao Armando quatro livros, em que exatamente dois sejam do Jorge Buescu, e duas canetas; o número de maneiras de o fazer é ${}^3C_2 \times {}^2C_2 \times {}^7C_2 = {}^3C_2 \times {}^7C_2$ (dos três livros do Jorge Buescu, escolhe dois, 3C_2 , dos restantes dois livros escolhe dois, 2C_2 , e das sete canetas escolhe duas, 7C_2).

Portanto, a Fernanda tem ${}^3C_2 \times {}^2C_1 \times {}^7C_3 + {}^3C_2 \times {}^7C_2 = 273$ formas de repartir os doze objetos pelos dois netos.

12.1 Temos de considerar dois casos: o treinador e um dos dirigentes vão na carrinha de sete lugares ou o treinador e um dos dirigentes vão na carrinha de nove lugares.

Se o treinador e um dos dirigentes vão na carrinha de sete lugares: Começamos por escolher um dos dirigentes; o número de maneiras de o fazer é ${}^3C_1 = 3$; em seguida, escolhem-se os restantes cinco ocupantes de entre os 12 jogadores; o número de maneiras de o fazer é ${}^{12}C_5$.

Assim, há $3 \times {}^{12}C_5$ maneiras diferentes de o treinador e um dos dirigentes irem na carrinha de sete lugares.

Se o treinador e um dos dirigentes vão na carrinha de nove lugares: Começamos por escolher um dos dirigentes; o número de maneiras de o fazer é ${}^3C_1 = 3$, em seguida, escolhem-se os restantes sete ocupantes de entre os 12 jogadores; o número de maneiras de o fazer é ${}^{12}C_7$.

Assim, há $3 \times {}^{12}C_7$ maneiras diferentes de o treinador e um dos dirigentes irem na carrinha de nove lugares.

Portanto, o número de maneiras de distribuir as dezasseis pessoas, nas condições enunciadas, é

$$3 \times {}^{12}C_5 + 3 \times {}^{12}C_7 = 4572 .$$

12.2 Dos três dirigentes escolhem-se, ordenadamente, dois para serem os condutores dos dois veículos; o número de maneiras de o fazer é 3A_2 . Como na carrinha de sete lugares vão três jogadores de cada sexo, temos de escolher três do sexo feminino, entre seis, e três do masculino, também entre seis; o número de maneiras de o fazer é ${}^6C_3 \times {}^6C_3$. Para cada uma destas maneiras, os seis jogadores escolhidos permutam de $6!$ maneiras nos restantes seis lugares da carrinha de sete lugares e os restantes oito elementos da comitiva permutam de $8!$ maneiras nos restantes oito lugares da carrinha de nove lugares. Assim, uma expressão que dá resposta ao problema é ${}^3A_2 \times {}^6C_3 \times {}^6C_3 \times 6! \times 8!$.

13.1 Para os extremos da sequência há 2 formas de colocar o ás e o dois. Para cada uma destas possibilidades, começamos por colocar as três figuras num bloco. O número de maneiras de ordenar o bloco e as restantes 8 cartas é $9!$. Dentro do bloco, as figuras podem ser ordenadas de $3!$ maneiras. Assim, o número de sequências que se podem formar, nas condições enunciadas, é dado por $2 \times 9! \times 3!$.

Opção correta: **(D)**

13.2 Para se extrair cinco cartas do baralho, de modo que pelo menos duas sejam reis e pelo menos duas sejam ases, vamos ter de considerar três casos disjuntos dois a dois.

1.º caso: ter exatamente dois reis e dois ases

O número de extrações nestas condições é ${}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^{44}C_1$.

2.º caso: ter exatamente três reis e dois ases

O número de extrações nestas condições é ${}^4C_3 \times {}^4C_2$.

3.º caso: ter exatamente dois reis e três ases

O número de extrações nestas condições é ${}^4C_2 \times {}^4C_3$.

Assim, obtém-se

$${}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^{44}C_1 + {}^4C_3 \times {}^4C_2 + {}^4C_2 \times {}^4C_3 = 1632.$$

13.3 Para se extrair quatro cartas do baralho, de modo que exatamente três sejam vermelhas e exatamente duas sejam figuras, vamos ter de considerar dois casos disjuntos.

1.º caso: 1 figura vermelha, 2 cartas vermelhas que não sejam figuras e 1 figura preta

O número de extrações nestas condições é ${}^6C_1 \times {}^{20}C_2 \times {}^6C_1$.

2.º caso: 2 figuras vermelhas, 1 carta vermelha que não seja figura e 1 carta preta que não seja figura

O número de extrações nestas condições é ${}^6C_2 \times {}^{20}C_1 \times {}^{20}C_1$.

Portanto, obtém-se ${}^6C_1 \times {}^{20}C_2 \times {}^6C_1 + {}^6C_2 \times {}^{20}C_1 \times {}^{20}C_1 = 12\,480$.

PÁG. 61

Começar a preparar o exame

14.1 Começamos por determinar o número de maneiras de escolher duas posições entre as seis para os dois algarismos 5, 6C_2 , e, em seguida, escolhem-se, ordenadamente e não necessariamente diferentes, os restantes quatro algarismos de entre os oito algarismos disponíveis, ${}^8A'_4$.

Assim, existem ${}^6C_2 \times {}^8A'_4 = 61\,440$ números nas condições enunciadas.

Opção correta: **(B)**

14.2 Como o número tem de ter exatamente três algarismos pares, os outros três algarismos têm de ser ímpares. Para que o número seja par o algarismo das unidades tem de ser par; há 4 maneiras de fazer essa escolha (2, 4, 6, 8). O número de maneiras de escolher, ordenadamente, os outros dois algarismos pares é 3A_2 ; estes algarismos podem ocupar 5C_2 posições diferentes. Por último, escolhem-se, ordenadamente, três algarismos ímpares; o número de maneiras de o fazer é 5A_3 .

Assim, obtém-se $4 \times {}^3A_2 \times {}^5C_2 \times {}^5A_3 = 14\,400$.

Alternativamente:

Como o número tem de ter exatamente três algarismos pares, os outros três algarismos têm de ser ímpares. Para que o número seja par o algarismo das unidades tem de ser par; há 4 maneiras de fazer essa escolha (2, 4, 6, 8). Em seguida, escolhem-se dois dos restantes três pares, o número de maneiras de o fazer é 3C_2 , e três dos cinco ímpares, o número de maneiras de o fazer é 5C_3 . Para cada uma destas maneiras, os cinco algarismos escolhidos ordenam-se de $5!$ maneiras distintas nas restantes cinco posições.

Assim, obtém-se $4 \times {}^3C_2 \times {}^5C_3 \times 5! = 14\,400$.

15. Para que o número seja par, tenha exatamente dois algarismos três e não tenha mais algarismos repetidos, vamos considerar três casos disjuntos dois a dois.

1.º caso: o algarismo das unidades é o 0

Começamos por escolher as posições que vão ser ocupadas pelos algarismos 3 : o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, dois algarismos de entre os oito disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 8A_2 .

O total de números nestas condições é ${}^4C_2 \times {}^8A_2$.

2.º caso: começa por 3 e o algarismo das unidades é 2, 4, 6 ou 8

Começamos por escolher o algarismo das unidades, ${}^4C_1 = 4$. Em seguida, escolhe-se a posição para o outro algarismo 3 : o número de maneiras de o fazer é ${}^3C_1 = 3$. Para cada uma destas, escolhem-se, ordenadamente, dois algarismos de entre os oito disponíveis; o número de maneiras de o fazer é 8A_2 .

O total de números nestas condições é $4 \times 3 \times {}^8A_2$.

3.º caso: não começar por 3 e o algarismo das unidades é 2, 4, 6 ou 8

Começamos por escolher o algarismo das unidades, ${}^4C_1 = 4$. Em seguida, escolhe-se o algarismo das dezenas de milhar, ${}^7C_1 = 7$ (todos menos o 0, o 3 e o algarismo escolhido para as unidades). Em seguida, escolhem-se as posições que vão ser ocupadas pelos algarismos 3 ; o número de maneiras de o fazer é 3C_2 . Por último, escolhe-se o restante algarismo; o número de maneiras de o fazer é ${}^7C_1 = 7$.

O total de números nestas condições é $4 \times 7 \times {}^3C_2 \times 7$.

Assim, existem ${}^4C_2 \times {}^8A_2 + 4 \times 3 \times {}^8A_2 + 4 \times 7 \times {}^3C_2 \times 7 = 1596$ números que tem exatamente dois 3 e não tem outros algarismos repetidos.

16.1 Das doze casas escolhem-se quatro para colocar as peças de cor verde. Das restantes oito casas escolhem-se três para colocar as peças de cor amarela e das cinco casas restantes escolhe-se uma para colocar a peça de cor encarnada.

Assim, o número de colorações distintas que se podem obter, nas condições enunciadas, é

$${}^{12}C_4 \times {}^8C_3 \times {}^5C_1 = 138\,600.$$

16.2 A fila vertical pode ser escolhida de 4 maneiras. Para cada uma destas, escolhem-se três casas de entre as nove para colocar as outras peças verdes; o número de maneiras de o fazer é 9C_3 , no entanto, temos de subtrair 3 possibilidades, aquelas em que estas três peças ocupam outra fila vertical.

Assim, o número de colorações distintas que se podem obter, nas condições enunciadas, é

$$4 \times ({}^9C_3 - 3) = 324.$$

16.3 $3 \times {}^{12}C_2$ é o número de maneiras de escolher uma das três cores (o número de maneiras de o fazer é ${}^3C_1 = 3$) e, para cada cor escolhida, colocar duas peças dessa cor em duas casas do tabuleiro (o número de maneiras de o fazer é ${}^{12}C_2$).

${}^3C_2 \times {}^{12}A_2$ é o número de maneiras de escolher duas das três cores (o número de maneiras de o fazer é 3C_2) e, para cada par de cores escolhidas, colocar duas peças, uma de cada cor desse par, em duas casas do tabuleiro (o número de maneiras de o fazer é ${}^{12}A_2$, escolher, ordenadamente, duas das doze casas).

PÁG. 62**Começar a preparar o exame**

17. ${}^4C_2 \times 2 \times {}^8A_4 \times 4! \times ({}^8C_4 - 2) \times 4! \times {}^4C_2$

${}^4C_2 \times 2$: escolher duas filas horizontais, 4C_2 , e, em seguida, escolher uma dessas filas para as meias pretas, ${}^2C_1 = 2$.

${}^8A_4 \times 4!$: escolher, ordenadamente, quatro meias pretas entre as oito disponíveis, 8A_4 , para a fila das pretas, e ordenar as meias azuis na outra fila, $4!$.

$({}^8C_4 - 2) \times 4!$: escolher quatro compartimentos entre os restantes oito para as meias pretas, mas retirar duas dessas escolhas, correspondentes aos quatro compartimentos de uma fila, ${}^8C_4 - 2$. Em seguida, permutar as restantes meias pretas nos quatro compartimentos escolhidos, $4!$.

4C_2 : escolher dois dos restantes quatro compartimentos para as meias castanhas.

18.1 a. Dos cinco tipos de peças, escolhem-se dois: o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_2 = 10$.

b. Começamos por escolher quatro tipos de peças dos cinco existentes: o número de maneiras de o fazer é 5C_4 . Para cada uma destas escolhas, em cada tipo, escolhe-se uma das duas peças disponíveis; o número de maneiras de o fazer é ${}^2C_1 \times {}^2C_1 \times {}^2C_1 \times {}^2C_1 = 2^4$.

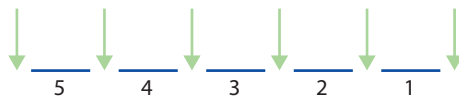
Portanto, obtém-se ${}^5C_4 \times 2^4 = 80$.

c. Se, ao número total de maneiras de escolher quatro peças, se subtrair o número total de maneiras em que não há duas peças do mesmo tipo, ou seja, uma peça de cada tipo, obtemos o número total de maneiras de escolher quatro peças com pelo menos duas peças do mesmo tipo.

O número total de maneiras de escolher quatro peças é ${}^{10}C_4$ e o número total de maneiras de que não haja duas peças do mesmo tipo é ${}^5C_4 \times 2^4$.

Assim, obtém-se ${}^{10}C_4 - {}^5C_4 \times 2^4 = 130$.

18.2 Vamos começar por escolher três peças brancas para o bloco e, em seguida, ordená-las; o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_3 \times 3! = {}^5A_3$. Como não pode haver mais peças brancas em posições consecutivas, este bloco e as restantes duas peças brancas (que constituem três elementos), podem ocupar três de seis posições, as quatro entre as pretas mais as duas nas pontas.



Assim, das seis posições escolhem-se, ordenadamente, três para estes três elementos (o bloco e as duas peças brancas restantes), 6A_3 , e as peças pretas podem ser ordenadas de $5!$ maneiras.

Logo, o número pedido é ${}^5A_3 \times {}^6A_3 \times 5! = 864\,000$.

Alternativamente:

Vamos começar por escolher as três peças brancas que vão ficar em posições consecutivas: o número de maneiras de o fazer é 5C_3 . Em seguida, agrupamo-las num bloco, e ordenamos o bloco e as cinco peças pretas: o número de maneiras de o fazer é $6!$. Para cada uma destas ordenações, as peças dentro do bloco podem ser ordenadas de $3!$ maneiras. Para as duas peças brancas restantes, existem sempre cinco posições disponíveis de forma a não ficarem junto do bloco das peças brancas. Das cinco possibilidades, escolhem-se, ordenadamente, duas: o número de maneiras de o fazer é 5A_2 .

Assim, obtém-se ${}^5C_3 \times 6! \times 3! \times {}^5A_2 = 864\,000$.

18.3 Das duas filas disponíveis para os peões, escolhe-se uma para os peões brancos, ${}^2C_1 = 2$. Como são todos iguais há apenas uma maneira de os dispor. Para cada uma destas, o número de maneiras de colocar o rei, a rainha, os bispos, os cavalos e as torres da cor branca todos na mesma fila, em que o rei e a rainha fiquem nas posições centrais, é $2! \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2$ (o rei e a rainha permutam de $2!$ maneiras nas posições centrais). Em seguida, escolhem-se duas das seis posições restantes para os bispos, 6C_2 , e das quatro que sobram duas para os cavalos, 4C_2 . As últimas duas posições ficam para as torres. Temos o mesmo número de maneiras para arrumar as peças pretas nas mesmas condições. Para arrumar os peões pretos e brancos só há uma possibilidade.

Assim, existem $2 \times (2! \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2)^2 = 64\,800$ disposições distintas nas condições enunciadas.

19.1 Para definir um triângulo com 3 destes pontos é necessário seleccionar 2 pontos da reta r e 1 ponto da reta s , ou seleccionar 1 pontos da reta r e 2 ponto da reta s .

O número de triângulos que é possível definir é ${}^5C_2 \times {}^n C_1 + {}^5C_1 \times {}^n C_2$.

Como é possível definir 175 triângulos, temos ${}^5C_2 \times {}^n C_1 + {}^5C_1 \times {}^n C_2 = 175$.

Resolvendo esta equação, determinamos o valor de n :

$$\begin{aligned} {}^5C_2 \times {}^n C_1 + {}^5C_1 \times {}^n C_2 = 175 &\Leftrightarrow 10 \times n + \frac{n!}{2! \times (n-2)!} \times 5 = 175 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10n + \frac{n \times (n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} \times 5 = 175 \Leftrightarrow 10n + \frac{n \times (n-1) \times 5}{2} = 175 \\ &\Leftrightarrow 10n + \frac{5n^2 - 5n}{2} = 175 \Leftrightarrow 20n + 5n^2 - 5n = 350 \\ &\Leftrightarrow 5n^2 + 15n - 350 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 70 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-70)}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm 17}{2} \\ &\Leftrightarrow n = -10 \vee n = 7 \end{aligned}$$

Como n é o número de pontos sobre a reta s , tem-se $n = 7$.

19.2 Para definir um quadrilátero com os pontos assinalados nas duas retas é necessário seleccionar 2 pontos de cada reta.

O número de quadriláteros que é possível definir é ${}^5C_2 \times {}^n C_2$.

Como é possível definir 780 quadriláteros, tem-se ${}^5C_2 \times {}^n C_2 = 780$.

Resolvendo esta equação, obtém-se o valor de n :

$$\begin{aligned} {}^5C_2 \times {}^n C_2 = 780 &\Leftrightarrow 10 \times \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = 780 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10 \times \frac{n \times (n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 780 \Leftrightarrow \frac{10 \times n \times (n-1)}{2} = 780 \\ &\Leftrightarrow 5n^2 - 5n - 780 = 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 156 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-156)}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 25}{2} \\ &\Leftrightarrow n = -12 \vee n = 13 \end{aligned}$$

Como n é o número de pontos sobre a reta s , tem-se $n = 13$.

20.1 Como a palavra CONSOANTE tem dois O e tem dois N, o número de sequência com estas letras é ${}^9C_2 \times {}^7C_2 \times 5!$ (das nove posições escolhem-se duas para o dois O, 9C_2 , das restantes sete posições escolhem-se duas para os dois N, 7C_2 , e ordenam-se as restantes cinco letras nas restantes cinco posições, $5!$).

Opção correta: **(A)**

20.2 Para que as vogais fiquem em posições consecutivas, agrupamo-las num bloco: o número de maneiras de ordenar o bloco e as restantes cinco letras em que duas são as letras N é $\frac{6!}{2!}$ (permutar o bloco e as restantes cinco letras, em que há duas repetidas, dois N).

Para cada uma destas ordenações, dentro do bloco os dois O não podem ficar juntos, por isso, podem ficar de três formas diferentes (O?O? ou ?O?O ou O??O) e as outras duas vogais podem ser ordenadas de $2!$ maneiras.

Assim, existem $\frac{6!}{2!} \times 3 \times 2! = 2160$ sequências nas condições enunciadas.

21.1 Se, ao número total de maneiras de retirar duas bolas do saco, se subtrair o número de maneiras de retirar duas bolas azuis, o resultado é o número de maneiras de retirar duas bolas em que pelo menos uma é branca.

O número total de maneiras de retirar duas bolas do saco é ${}^{30}C_2$ e o número de maneiras de retirar duas bolas azuis do saco é nC_2 .

Então, o número de maneiras de retirar duas bolas do saco, sendo, pelo menos, uma branca, é ${}^{30}C_2 - {}^nC_2$.

Como há 245 maneiras de retirar duas bolas, sendo, pelo menos uma branca, tem-se

$${}^{30}C_2 - {}^nC_2 = 275.$$

Resolvendo esta equação, determinamos o valor de n :

$$\begin{aligned} {}^{30}C_2 - {}^nC_2 = 275 &\Leftrightarrow 435 - \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = 245 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 435 - \frac{n \times (n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 245 \Leftrightarrow 435 - \frac{n \times (n-1)}{2} - 245 = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{n^2 - n}{2} + 190 = 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 380 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-380)}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 39}{2} \\ &\Leftrightarrow n = -19 \vee n = 20 \end{aligned}$$

Como n é o número de bolas azuis no saco, tem-se $n = 20$.

21.2 a. Vamos começar por colocar uma bola azul em cada caixa numerada com um número par e uma bola branca em cada caixa numerada com um número ímpar. Dado que as bolas são indistinguíveis, há apenas uma maneira de o fazer. Assim, sobram três bolas azuis ($8 - 5 = 3$) e duas bolas brancas ($7 - 5 = 2$) para serem colocadas.

Das dez caixas, escolhem-se três para colocar as 3 bolas azuis: o número de maneiras de o fazer é ${}^{10}C_3$. Para cada uma destas escolhas, escolhem-se duas das restantes sete caixas (porque não pode haver mais de duas bolas em cada caixa); o número de maneiras de o fazer é 7C_2 .

Assim, o número de maneiras de colocar as bolas pelas dez caixas, nas condições enunciadas, é ${}^{10}C_3 \times {}^7C_2 = 2520$.

b. As bolas azuis são oito e só podem ser colocadas em caixas com um número par. Assim, para cada bola azul há duas escolhas possíveis, ou escolhe-se a caixa numerada com o número 2 ou a caixa numerada com o número 4. Como são oito bolas azuis o número de maneiras de as distribuir pelas duas caixas é $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$ (ou ${}^2A'_8$, fazer oito escolhas ordenadas, não necessariamente diferentes, de duas caixas). No entanto, temos de retirar dois casos, os casos em que se escolhe a caixa 2 para todas as bolas e o caso em que se escolhe a caixa 4 para todas as bolas. Assim, o número de maneiras de distribuir as oito bolas azuis pelas caixas numeradas com um par é $2^8 - 2$.

Para as bolas brancas, o raciocínio é o mesmo. Como são sete bolas brancas, o número de maneiras de distribuir as sete bolas brancas pelas caixas numeradas com um ímpar é $2^7 - 2$.

Logo, o número de maneiras de colocar as quinze bolas nas quatro caixas, nas condições enunciadas, é $(2^8 - 2) \times (2^7 - 2) = 32\,004$.

Alternativamente:

Vamos começar por determinar o número de maneiras de distribuir as bolas numeradas azuis pelas duas caixas com número par, e em seguida, determinar o número de maneiras de distribuir as bolas numeradas brancas pelas duas caixas com número ímpar.

Escolhem-se, por exemplo, as bolas azuis que ficam na caixa número 2. Consequentemente, as restantes ficam na caixa número 4.

Como nenhuma das caixas pode ficar vazia as possíveis distribuições são:

ficar só com 1 bola: o número de maneiras de o fazer é 8C_1 ;

ficar só com 2 bolas: o número de maneiras de o fazer é 8C_2 ;

ficar só com 3 bolas; o número de maneiras de o fazer é 8C_3 ;

ficar só com 4 bolas: o número de maneiras de o fazer é 8C_4 ;

ficar só com 5 bolas: o número de maneiras de o fazer é 8C_5 ;

ficar só com 6 bolas: o número de maneiras de o fazer é 8C_6 ;

ficar só com 7 bolas: o número de maneiras de o fazer é 8C_7 .

Assim, o número de maneiras de distribuir as oito bolas azuis pelas caixas com número par é

$${}^8C_1 + {}^8C_2 + {}^8C_3 + {}^8C_4 + {}^8C_5 + {}^8C_6 + {}^8C_7 = 254.$$

Vamos escolher, por exemplo, as bolas brancas que ficam na caixa número 1. Consequentemente, as restantes ficam na caixa número 3.

Como nenhuma das caixas pode ficar vazia as possíveis distribuições são:

ficar só com 1 bola: o número de maneiras de o fazer é 7C_1 ;

ficar só com 2 bolas: o número de maneiras de o fazer é 7C_2 ;

ficar só com 3 bolas: o número de maneiras de o fazer é 7C_3 ;

ficar só com 4 bolas: o número de maneiras de o fazer é 7C_4 ;

ficar só com 5 bolas: o número de maneiras de o fazer é 7C_5 ;

ficar só com 6 bolas: o número de maneiras de o fazer é 7C_6 .

Assim, o número de maneiras de distribuir as sete bolas brancas pelas caixas com número ímpar é

$${}^7C_1 + {}^7C_2 + {}^7C_3 + {}^7C_4 + {}^7C_5 + {}^7C_6 = 126.$$

Portanto, existem $254 \times 126 = 32\,004$ maneiras diferentes das bolas ficarem colocadas nas quatro caixas.