

## 5. Sucessões

### PÁG. 68

#### Diagnóstico

1. Substituindo  $n$  por 1, exclui-se a opção (A). Substituindo  $n$  por 2, excluem-se as opções (C) e (D).

Opção correta: **(B)**

2.1 No referencial, estão representados 5 pontos.

Opção correta: **(D)**

2.2 1 é o termo de ordem 3.

Opção correta: **(C)**

3.  $v_8 = 8^2 + 2 \times 8 + 1 = 81 = 3^4$

Opção correta: **(A)**

4.  $u_6 = -10 \Leftrightarrow k \times 6 + 2 = -10 \Leftrightarrow k = -2$

Opção correta: **(D)**

5.1 É crescente, porque os termos da sequência aumentam de um qualquer termo para o seguinte.

5.2  $b_n = 284 \Leftrightarrow 7n - 3 = 284 \Leftrightarrow n = 41$

A sequência tem 41 termos.

### PÁG. 69

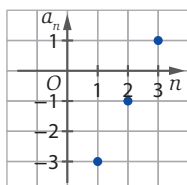
#### Diagnóstico

6.1 Cada figura tem mais duas aves do que a figura anterior. Logo, o 5.º termo da sequência tem  $9 + 2 + 2 = 13$  aves.

6.2 Como cada figura tem mais duas aves do que a anterior, uma expressão que dá o número de aves da figura de ordem  $n$  é da forma  $2n + b$ . Como a primeira figura tem 5 aves, então  $2 \times 1 + b = 5 \Leftrightarrow b = 3$ , pelo que a expressão é  $2n + 3$ .

**Ou:** em cada figura há três andorinhas (as três primeiras da formação em V) e o número das restantes é sempre igual ao dobro da ordem do termo.

#### 7.1



**7.2**  $a_{20} = 2 \times 20 - 5 = 35$

**7.3**  $a_n = 501 \Leftrightarrow 2n - 5 = 501 \Leftrightarrow n = 253$  e  $253 \in \mathbb{N}^+$ .

Logo, 501 é o termo de ordem 253.

**8.**  $c_6 + u_2 = -7 + \frac{1}{3} \times 6 + (-3) = -7 + 2 - 3 = -8$

**9.1** O polígono de ordem  $n$  tem  $n+2$  lados. Logo, o polígono com 20 lados é o de ordem 18, pelo que o número de diagonais é  $d_{18} = 0,5 \times 18^2 + 0,5 \times 18 - 1 = 170$ .

**9.2**  $d_n = 65 \Leftrightarrow 0,5n^2 + 0,5n - 1 = 65 \Leftrightarrow 0,5n^2 + 0,5n - 66 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow n = \frac{-0,5 \pm \sqrt{0,5^2 - 4 \times 0,5(-66)}}{2 \times 0,5} \Leftrightarrow n = \frac{-0,5 \pm \sqrt{132,25}}{1} \Leftrightarrow n = \frac{-0,5 \pm 11,5}{1}$   
 $\Leftrightarrow n = -0,5 - 11,5 \vee n = -0,5 + 11,5 \Leftrightarrow n = -12 \vee n = 11$

O polígono tem  $11 + 2 = 13$  lados.

## PÁG. 70

### Tarefa 1

**a.**  $t_{100} = \frac{100 \times (100 + 1)}{2} = 5050$

**b.**  $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$

## PÁG. 75

### Aplicar

#### 3.1

| $n$ | $u_n = 5n - 3$              |
|-----|-----------------------------|
| 1   | $u_1 = 5 \times 1 - 3 = 2$  |
| 2   | $u_2 = 5 \times 2 - 3 = 7$  |
| 3   | $u_3 = 5 \times 3 - 3 = 12$ |
| 4   | $u_4 = 5 \times 4 - 3 = 17$ |
| 5   | $u_5 = 5 \times 5 - 3 = 22$ |

**3.2**  $u_{30} = 5 \times 30 - 3 = 147$

**3.3**  $u_n = 53 \Leftrightarrow 5n - 3 = 53 \Leftrightarrow n = \frac{56}{5} \notin \mathbb{N}^+$ ; como  $\frac{56}{5} \notin \mathbb{N}^+$ , 53 não é termo da sucessão.

$u_n = 77 \Leftrightarrow 5n - 3 = 77 \Leftrightarrow n = 16 \in \mathbb{N}^+$ ; como  $16 \in \mathbb{N}^+$ , 77 é o termo de ordem 16 da sucessão.

**4.1** Cada termo tem mais dois quadrados do que o termo anterior. Logo, o 4.º termo da sequência tem  $8 + 2 = 10$  quadrados e o 7.º termo da sequência tem  $10 + 2 + 2 + 2 = 16$  quadrados.

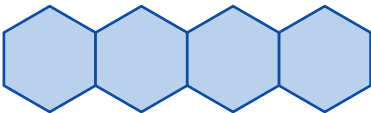
**4.2**  $q_n = 2n + 2$

Cada termo tem 2 quadrados, os dos extremos da linha de baixo, mais um número de quadrados, colocados entre os extremos da linha de baixo, que é igual ao dobro da ordem do termo.

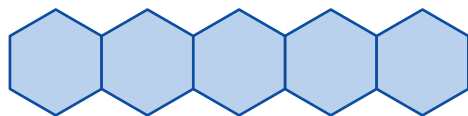
## PÁG. 76

### Aplicar

**5.1** 4.º termo



5.º termo



**5.2**

|                                    |   |    |    |    |    |
|------------------------------------|---|----|----|----|----|
| <b>Ordem do termo</b>              | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  |
| <b>Número de hexágonos</b>         | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  |
| <b>Número de segmentos de reta</b> | 6 | 11 | 16 | 21 | 26 |

**5.3** Cada termo tem mais 5 segmentos de reta do que o anterior.

O 10.º termo da sucessão tem  $6 + 5 \times 9 = 51$  segmentos e o 100.º termo tem  $6 + 5 \times 99 = 501$ .

**5.4**  $n$

**5.5** Os números de segmentos de reta dos termos desta sucessão são os múltiplos de 5 positivos adicionados de 1 unidade, ou seja, o número de segmentos de reta do termo de ordem  $n$  da sucessão é dado por  $5n + 1$ .

**6.** Cada termo tem mais 3 círculos do que o termo anterior.

Substituindo  $n$  por 1, exclui-se a opção (A). Substituindo  $n$  por 2, excluem-se as opções (B) e (C).

Opção correta: **(D)**

**7.1**  $\frac{9}{20}$

**7.2**  $\frac{2n-1}{4n}$ ; os numeradores dos sucessivos termos são os números ímpares e os denominadores são os múltiplos positivos de 4.

**PÁG. 77**

**8.1**  $2n + 1$

**8.2**  $n^2$

**8.3**  $n^2 + 1$

**8.4**  $\frac{n}{n+1}$

**8.5**  $5n - 8$

**8.6**  $\frac{2n-1}{n^2}$

**9.1**  $u_1 = (1-1)^2 = 0$ ,  $u_2 = (2-1)^2 = 1$ ,  $u_3 = (3-1)^2 = 4$ .

**9.2**  $u_n = -1 \Leftrightarrow (n-1)^2 = -1$  impossível;  $-1$  não é termo da sucessão;

$u_n = 81 \Leftrightarrow (n-1)^2 = 81 \Leftrightarrow n-1 = -9 \vee n-1 = 9 \Leftrightarrow n = -8 (-8 \notin \mathbb{N}^+) \vee n = 10 (10 \in \mathbb{N}^+);$

81 é o termo de ordem 10 da sucessão.

$u_n = 99 \Leftrightarrow (n-1)^2 = 99 \Leftrightarrow n-1 = -\sqrt{99} \vee n-1 = \sqrt{99} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 1 - \sqrt{99} (1 - \sqrt{99} \notin \mathbb{N}^+) \vee n = 1 + \sqrt{99} (1 + \sqrt{99} \notin \mathbb{N}^+);$

99 não é termo da sucessão.

**10.1** Executando o programa dado, obtêm-se os valores abaixo calculados para os termos da sucessão:

| $n$ | $u_n = 5 - 4n$                   |
|-----|----------------------------------|
| 1   | $u_1 = 5 - 4 \times 1 = 1$       |
| 2   | $u_2 = 5 - 4 \times 2 = -3$      |
| 3   | $u_3 = 5 - 4 \times 3 = -7$      |
| 4   | $u_4 = 5 - 4 \times 4 = -11$     |
| 5   | $u_5 = 5 - 4 \times 5 = -15$     |
| 6   | $u_6 = 5 - 4 \times 6 = -19$     |
| 7   | $u_7 = 5 - 4 \times 7 = -23$     |
| 8   | $u_8 = 5 - 4 \times 8 = -27$     |
| 9   | $u_9 = 5 - 4 \times 9 = -31$     |
| 10  | $u_{10} = 5 - 4 \times 10 = -35$ |

**10.2**  $u_n = 5 - 4n$

## 10.3

```
for n in range(100,150):
    u_n=5-4*n
    print(str(n)+'.'º termo = '+str(u_n))
```

## 10.4

```
n=int(input('Indica a ordem do termo: '))
u_n=5-4*n
print(str(n)+'.'º termo = '+str(u_n))
```

## 10.5

```
t=float(input('Indica um número: '))
if (5-t)/4==int((5-t)/4) and (5-t)/4>0:
    n=int((5-t)/4)
    print(str(t)+' é o termo de ordem '+str(n)+'.'º)
else:
    print(str(t)+' não é termo da sucessão.'º)
```

## PÁG. 78

## Tarefa 2

1. Os dois primeiros termos são iguais a 1, e, a partir do 3.º termo, cada termo é obtido pela soma dos dois anteriores.

13, 21, 24, 55 e 89

$$2. F_1 = \frac{(1+\sqrt{5})^1 - (1-\sqrt{5})^1}{\sqrt{5} \times 2^1} = \frac{1+\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$$

$$F_2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^2}{\sqrt{5} \times 2^2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5 - 1+2\sqrt{5}-5}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1$$

Como pretendido, verifica-se que  $F_1 = F_2$ .

## PÁG. 83

## Aplicar

13.1  $u_1 = 6$ ,  $u_2 = u_1 + 3 = 6 + 3 = 9$ ,  $u_3 = u_2 + 3 = 9 + 3 = 12$

13.2  $-6$  e  $20$  não são termos de  $(u_n)$ , pois os seus termos são múltiplos de 3 superiores ou iguais a 6.

13.3  $u_n = 3n + 3$ ; os termos de  $(u_n)$  são os sucessivos múltiplos de 3 superiores ou iguais a 6.

14.1  $a_1 = 6$

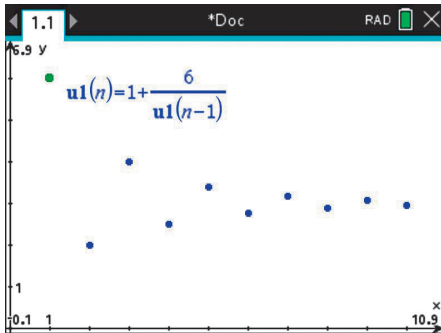
$$a_2 = 1 + \frac{6}{a_1} = 1 + \frac{6}{6} = 2$$

$$a_3 = 1 + \frac{6}{a_2} = 1 + \frac{6}{2} = 4$$

$$a_4 = 1 + \frac{6}{a_3} = 1 + \frac{6}{4} = \frac{5}{2}$$

## 14.2

a.



b. Nem crescente nem decrescente. Basta observar a variação dos três primeiros termos:  $a_2 < a_1$  e  $a_3 > a_2$ .

c. Variam entre 2 e 6.

## PÁG. 84

## Aplicar

15.1 O primeiro termo é 2 e cada termo pode ser obtido adicionando 4 ao termo anterior:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + 4, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

15.2 O primeiro termo é 28 e cada termo pode ser obtido subtraindo 3 ao termo anterior:

$$\begin{cases} u_1 = 28 \\ u_n = u_{n-1} - 3, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

15.3 O primeiro termo é 4 e cada termo pode ser obtido multiplicando 2 pelo termo anterior:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = 2 \times u_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

15.4 O primeiro termo é 2 e cada termo pode ser obtido multiplicando  $\frac{1}{2}$  pelo termo anterior:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \frac{1}{2} \times u_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

15.5 O primeiro termo é 7 e cada termo pode ser obtido multiplicando  $-3$  pelo termo anterior:

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_n = -3 \times u_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

15.6 O primeiro termo é 5 e cada termo pode ser obtido subtraindo 3 ao termo anterior e multiplicando

$$-1 \text{ por esse resultado: } \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_n = -1 \times (u_{n-1} - 3), \quad n \geq 2 \end{cases}$$

## 16.1

$$\text{a. } \begin{cases} c_1 = 2500 \\ c_n = c_{n-1} + 40, \quad n \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} c_1 = 2500 \times 0,016 \\ c_n = c_{n-1} + 40, \quad n \in \{2, 3, 4, 5\} \end{cases}$$

## 16.2

| Ano | Rendimento acumulado |
|-----|----------------------|
| 1   | 40 €                 |
| 2   | $40 + 40 = 80$ €     |
| 3   | $80 + 40 = 120$ €    |
| 4   | $120 + 40 = 160$ €   |
| 5   | $160 + 40 = 200$ €   |
| 6   | $200 + 40 = 240$ €   |
| 7   | $240 + 40 = 280$ €   |
| 8   | $280 + 40 = 320$ €   |
| 9   | $320 + 40 = 360$ €   |
| 10  | $360 + 40 = 400$ €   |
| 11  | $400 + 40 = 440$ €   |
| 12  | $440 + 40 = 480$ €   |
| 13  | $480 + 40 = 520$ €   |

Ao fim de 13 anos.

**17.1**  $c_1$  é o capital no final do 1.º ano:  $3000 \times 1,02 = 3060$  .

O capital, em cada ano seguinte, até ao 7.º ( $n = 6$ ), é igual ao valor acumulado até ao ano anterior multiplicado por 1,02 .

**17.2** Capital no final do 2.º ano:  $3060 \times 1,02 = 3121,2$  ;

capital no final do 3.º ano:  $3121,2 \times 1,02 = 3183,624$  ;

capital no final do 4.º ano:  $3183,624 \times 1,02 \approx 3247,296$  ;

capital no final do 5.º ano:  $3247,296 \times 1,02 \approx 3312,242$  , ou seja, 3312,24€ .

$$\text{17.3 } \begin{cases} m_1 = 3005 \\ m_{n+1} = m_n \times \left(1 + \frac{0,02}{12}\right), \quad n \in \{1, 2, \dots, 83\} \end{cases}$$

Capitalização anual:

$$c_6 = 3312,242 \times 1,02 = 3378,49 \quad \text{e} \quad c_7 = 3378,49 \times 1,02 \approx 3446,06 .$$

Capitalização mensal:

$$m_{83} = 3444,68 \quad \text{e} \quad m_{84} = 3450,42 .$$

○ Xavier ganharia a mais  $3450,42 - 3446,06 = 4,36 \text{ €}$  .

## PÁG. 85

### Tarefa 3

| $n$ | $u_n = 3n + 2$              |                           |
|-----|-----------------------------|---------------------------|
| 1   | $u_1 = 3 \times 1 + 2 = 5$  |                           |
| 2   | $u_2 = 3 \times 2 + 2 = 8$  | $u_2 - u_1 = 8 - 5 = 3$   |
| 3   | $u_3 = 3 \times 3 + 2 = 11$ | $u_3 - u_2 = 11 - 8 = 3$  |
| 4   | $u_4 = 3 \times 4 + 2 = 14$ | $u_4 - u_3 = 14 - 11 = 3$ |
| 5   | $u_5 = 3 \times 5 + 2 = 17$ | $u_5 - u_4 = 17 - 14 = 3$ |

A diferença entre termos consecutivos é igual a 3 .

## PÁG. 85

### Tarefa 4

$(u_n)$  é a sucessão dos números ímpares consecutivos, iniciando em 3 ; logo, a diferença entre termos consecutivos é 2 ; trata-se, então, de uma progressão aritmética, de 1.º termo 3 e razão 2 .

## PÁG. 85

### Tarefa 5

$$\begin{cases} u_1 = 50 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad u_n = 50 + (n - 1) \times 2 = 2n + 48 .$$

## PÁG. 87

### Aplicar

**21.1**  $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 1 - (2n - 1) = 2n + 2 - 1 - 2n + 1 = 2$  ; é uma progressão aritmética de razão  $r = 2$  .

**21.2**  $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+3}{5} - \frac{2n+3}{5} = \frac{2n+2+3-2n-3}{5} = \frac{2}{5}$  ; é uma progressão aritmética de razão  $r = \frac{2}{5}$  .

**21.3**  $u_{n+1} - u_n = 5 - 2(n+1) - (5 - 2n) = 5 - 2n - 2 - 5 + 2n = -2$  ; é uma progressão aritmética de razão  $r = -2$  .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{21.4} \quad u_{n+1} - u_n &= 2 - \frac{4}{n+1+1} - \left(2 - \frac{4}{n+1}\right) = 2 - \frac{4}{n+2} - 2 + \frac{4}{n+1} = \\
 &= \frac{4}{n+1} - \frac{4}{n+2} = \frac{4(n+2) - 4(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{4n+8-4n-4}{(n+1)(n+2)} = \frac{4}{(n+1)(n+2)}
 \end{aligned}$$

depende de  $n$ , pelo que não é progressão aritmética.

**21.5**  $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1 = 2n$  depende de  $n$ , pelo que não é progressão aritmética.

**21.6**  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2} = -\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$  depende de  $n$ , pelo que não é progressão aritmética.

**21.7**  $u_{n+1} = u_n + 3 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 3$  é uma progressão aritmética de razão  $r = 3$ .

**21.8**  $u_n = u_{n-1} + 2 \Leftrightarrow u_n - u_{n-1} = 2$  é uma progressão aritmética de razão  $r = 2$ .

**21.9**  $u_{n+1} = u_n - 2 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -2$  é uma progressão aritmética de razão  $r = -2$ .

## PÁG. 88

### Aplicar

$$\mathbf{22.1} \quad u_n = 2 + (n-1) \times 4 = 4n - 2$$

$$\mathbf{22.2} \quad u_n = -2 + (n-1) \times 1 = n - 3$$

$$\mathbf{22.3} \quad u_n = -3 + (n-1) \times (-4) = -4n + 1$$

$$\mathbf{22.4} \quad u_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}n + 1$$

$$\mathbf{22.5} \quad u_n = \frac{1}{3} + (n-1) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{22.6} \quad u_n = 4 + (n-2) \times 5 = 5n - 6$$

$$\mathbf{22.7} \quad u_n = -1 + (n-10) \times 2 = 2n - 21$$

$$\mathbf{22.8} \quad u_n = 3 + (n-11) \times (-11) = -11n + 124$$

**23.1** Os três termos são 8, 15, 22 e a razão é 7.

$$\mathbf{23.2} \quad u_n = -6 + (n-1) \times 7 = 7n - 13$$

$$\mathbf{24.1} \quad 2000 \times 0,035 \times 5 = 350 \text{ €}$$

$$\mathbf{24.2} \quad 2000 \times (1 + 0,035n)$$

Opção correta: **(C)**

**25.1** A sucessão do número de flexões que a Maria realizará por dia em cada semana é uma progressão aritmética de primeiro termo 10 e razão 5. Logo, uma expressão do termo geral é  $10 + (n - 1) \times 5 = 5n + 5$ .

$$\mathbf{25.2} \quad 5n + 5 = 150 \Leftrightarrow n = \frac{150 - 5}{5} \Leftrightarrow n = 29$$

A Maria atingirá o objetivo de fazer 150 flexões por dia ao fim de  $28 \times 7 = 196$  dias.

## PÁG. 92

### Aplicar

**28.** A razão da progressão é  $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$  e uma expressão do termo geral é

$$1 + (n - 1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}n.$$

O 10.º termo da progressão é  $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times 10 = -\frac{7}{2}$  e a soma dos dez primeiros termos é

$$\frac{1 + \left(-\frac{7}{2}\right)}{2} \times 10 = -\frac{25}{2}.$$

$$\mathbf{29.1} \quad b_1 = 3 \times 1 - 5 = -2, \quad b_{20} = 3 \times 20 - 5 = 55 \quad \text{e} \quad S_{20} = \frac{-2 + 55}{2} \times 20 = 530.$$

$$\mathbf{29.2} \quad b_1 = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 1, \quad b_{20} = \frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2} \quad \text{e} \quad S_{20} = \frac{1 + \frac{21}{2}}{2} \times 20 = 115.$$

$$\mathbf{29.3} \quad b_n = b_{n-1} - 3 \Leftrightarrow b_n - b_{n-1} = -3 \quad \text{e} \quad b_n = 1 + (n - 1) \times (-3) = -3n + 4.$$

$$b_{20} = -3 \times 20 + 4 = -56 \quad \text{e} \quad S_{20} = \frac{1 + (-56)}{2} \times 20 = -550.$$

$$\mathbf{29.4} \quad b_{20} = 2 + (20 - 1) \times 2 = 40 \quad \text{e} \quad S_{20} = \frac{2 + 40}{2} \times 20 = 420.$$

$$\mathbf{29.5} \quad b_{20} = -7 + (20 - 1) \times 3 = 50 \quad \text{e} \quad S_{20} = \frac{-7 + 50}{2} \times 20 = 430.$$

$$\mathbf{29.6} \quad r = 6 - 5 = 1, \quad b_{20} = 5 + 19 \times 1 = 24 \quad \text{e} \quad S_{20} = \frac{5 + 24}{2} \times 20 = 290.$$

$$\mathbf{29.7} \quad r = \frac{-8 + 2}{2} = -3, \quad b_{20} = -2 + 19 \times (-3) = -59 \quad \text{e} \quad S_{20} = \frac{-2 - 59}{2} \times 20 = -610.$$

$$\mathbf{29.8} \quad r = \frac{70 - 20}{10} = 5 \quad \text{e} \quad b_n = 20 + (n - 10) \times 5 = 5n - 30;$$

$$b_1 = 5 \times 1 - 30 = -25 \quad \text{e} \quad S_{20} = \frac{-25 + 70}{2} \times 20 = 450.$$

**30.** A razão da progressão é 1 e uma expressão do termo geral é  $3 + (n - 1) \times 1 = n + 2$ .

O 100.º termo da progressão é  $100 + 2 = 102$  e a soma dos 100 primeiros termos é  $\frac{3 + 102}{2} \times 100 = 5250$ , sendo este o número total de pontos até ao termo de ordem 100.

**31.** Trata-se de uma progressão de 1.º termo 100, razão 20 e termo geral  $100 + (n - 1) \times 20 = 20n + 80$ .

$$S_n = 1900 \Leftrightarrow \frac{100 + 20n + 80}{2} \times n = 1900 \Leftrightarrow \frac{20n + 180}{2} \times n = 1900 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (10n + 90) \times n = 1900 \Leftrightarrow 10n^2 + 90n - 1900 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 9n - 190 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 1 \times (-190)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-9 \pm 29}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-9 - 29}{2} \vee n = \frac{-9 + 29}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -19 \vee n = 10$$

Durante 10 semanas.

**32.** Na primeira semana, a Maria realizará  $(5 \times 1 + 5) \times 7 = 70$  flexões e na décima semana (70 dias correspondem a dez semanas) realizará  $(5 \times 10 + 5) \times 7 = 385$  flexões.

A sucessão do número de flexões que a Maria realizará em cada semana é uma progressão aritmética de primeiro termo 70 e razão 35, dado que em cada semana, à exceção da primeira, faz mais  $5 \times 7 = 35$  do que na semana anterior.

Assim, o número total de flexões que a Maria realizará nos primeiros 70 dias do plano corresponde à soma dos primeiros 10 termos dessa progressão.

Logo, nos primeiros 70 dias do plano, a Maria realizará  $\frac{70 + 385}{2} \times 10 = 2275$  flexões.

## PÁG. 93

### Tarefa 6

#### 1.

| Fase             | 1 | 2             | 3             | 4             | 5              | 6              |
|------------------|---|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| Área do quadrado | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ |

A área de cada quadrado é metade da área do quadrado anterior.

**2. a.**  $a_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^9$  e  $a_{15} = \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$ .

**b.**  $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

**c.** Sim, a fase 11, porque  $2^{10} = 1024$ .

**PÁG. 95****Aplicar**

$$36.1 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-1} = \frac{1}{3}, \text{ pelo que é uma progressão geométrica de razão } \frac{1}{3}.$$

$$36.2 \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(-2)^{n+1}}{(-2)^n} = (-2)^{n+1-1} = -2, \text{ pelo que é uma progressão geométrica de razão } -2.$$

$$36.3 \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{5^{1-(n+1)}}{5^{1-n}} = 5^{1-n-1-1+n} = 5^{-1} = \frac{1}{5}, \text{ pelo que é uma progressão geométrica de razão } \frac{1}{5}.$$

$$36.4 \quad \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{4^{n+1+1}}{4^{n+1}} = 4^{n+2-n-1} = 4, \text{ pelo que é uma progressão geométrica de razão } 4.$$

$$36.5 \quad \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1+2}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n+3-n-2} = \frac{1}{5}, \text{ pelo que é uma progressão geométrica de razão } \frac{1}{5}.$$

$$36.6 \quad \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{(-2)^{3(n+1)+2}}{(-2)^{3n+2}} = (-2)^{3n+3+2-3n-2} = (-2)^3 = -8, \text{ pelo que é uma progressão geométrica de razão } -8.$$

**PÁG. 96****Aplicar**

$$37.1 \quad u_1 = (-2)^{1+1} = 4, u_2 = (-2)^{2+1} = -8, u_3 = (-2)^{3+1} = 16 \text{ e } u_4 = (-2)^{4+1} = -32.$$

37.2 Nem crescente, nem decrescente, uma vez que, por exemplo,  $u_2 < u_1$ , mas  $u_3 > u_2$ .

$$37.3 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-2)^{n+1+1}}{(-2)^{n+1}} = (-2)^{n+2-n-1} = -2, \text{ pelo que é uma progressão geométrica de razão } -2.$$

38. Sendo  $r$  a razão,  $\frac{1,35}{15} = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 0,09$ ; dado que a progressão é de termos positivos,  $r > 0$ , obtém-se  $r = \sqrt{0,09} = 0,3$ .

$$39. \text{ Sendo } r \text{ a razão, } \frac{v_5}{v_2} = r^3 \Leftrightarrow \frac{48}{6} = r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8, r = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ e}$$

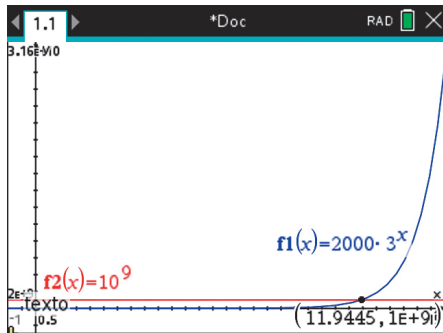
$$v_n = 6 \times 2^{n-2} = 3 \times 2 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^{n-1}.$$

$$40.1 \quad 50\,000 \times 0,8^2 = 32\,000 \text{ €}$$

40.2 A afirmação é falsa, pois o valor comercial do automóvel ao fim de cinco anos é  $50\,000 \times 0,8^5 = 16\,384 \text{ €}$ .

**41.1**  $2000 \times 3^5 = 486\,000$

**41.2**  $2000 \times 3^n > 10^9$



Aproximadamente, ao fim de 12 horas.

**41.3** No instante em que foi introduzido o agente químico, o número de bactérias era  $2000 \times 3^6$ . Como a cada hora a população de bactérias diminui 20%, a sucessão do número de bactérias existentes em cada hora a partir do instante em que a população entrou em contacto com o agente químico tem termo geral  $1\,458\,000 \times 0,8^{n-1}$ , com  $n \geq 1$ .

**41.4** Seja  $r$  o fator de crescimento horário.

Ao fim de 8 horas após o início do estudo, o número de bactérias é dado por  $2000 \times r^8$ .

Como  $\frac{512\,000}{2000} = 256 = 2^8$ , conclui-se que  $r = 2$ .

## PÁG. 97

### Aplicar

**42.1** Na opção A, o capital acumulado ao fim de um ano é 510 €.

Ano após ano, o capital é multiplicado por 1,02.

Logo, o capital inicial era  $\frac{510}{1,02} = 500$  €.

**42.2** São, pois 5 anos correspondem a 60 meses.

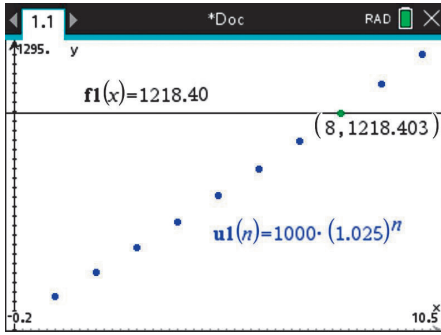
**42.3** Opção A:  $1,02 - 1 = 0,02 = 2\%$ ; Opção B:  $(1,0015 - 1) \times 12 = 0,018 = 1,8\%$ .

**42.4** A opção A é mais vantajosa, pois o capital no final do prazo será de  $510 \times (1,02)^4 \approx 552,04$  €, enquanto na opção B será de  $500,75 \times (1,0015)^{59} \approx 547,05$  €.

**43.1** Capital aplicado: 1000 €. Taxa de juro anual líquida: 2,5%.

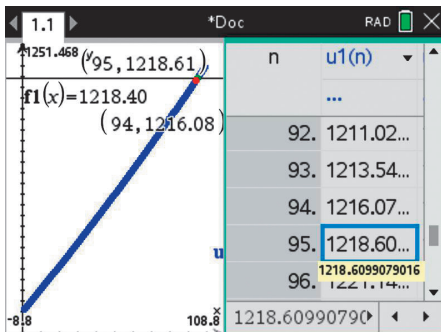
**43.2**  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1000 \times 1,025^{n+1}}{1000 \times 1,025^n} = 1,025$ , pelo que é uma progressão geométrica de razão 1,025.

**43.3 a.**  $1000 \times 1,025^n = 1218,40$



8 anos

**b.**  $1000 \times \left(1 + \frac{0,025}{12}\right)^n = 1218,40$



95 meses

**PÁG. 98**

**Tarefa 7**

**1.** A sucessão do número de grãos de trigo é uma progressão geométrica porque cada termo (a partir do segundo) obtém-se multiplicando o termo anterior por 2. A razão é 2.

**2.**  $u_n = 1 \times 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^{n-1}$

**3.**

|    | A           | B                   | C           | D                           |
|----|-------------|---------------------|-------------|-----------------------------|
| 1  | <b>Casa</b> | <b>N.º de grãos</b> |             |                             |
| 2  | 1           | 1                   |             |                             |
| 3  | 2           | 2                   |             |                             |
| 4  | 3           | 4                   |             |                             |
| 5  | 4           | 8                   |             |                             |
| 6  | 5           | 16                  |             |                             |
| 7  | 6           | 32                  |             |                             |
| 8  | 7           | 64                  |             |                             |
| 9  | 8           | 128                 |             |                             |
| 10 | 9           | 256                 |             |                             |
| 11 | 10          | 512                 |             |                             |
| 59 |             |                     |             |                             |
| 61 | 59          | 288230376151712000  |             |                             |
| 62 | 60          | 576460752303423000  |             |                             |
| 63 | 61          | 1152921504606850000 |             |                             |
| 64 | 62          | 2305843009213690000 |             |                             |
| 65 | 63          | 4611686018427390000 |             |                             |
| 66 | 64          | 9223372036854780000 | <b>Soma</b> | <b>18446744073709600000</b> |
| 67 |             |                     |             |                             |

**PÁG. 99****Tarefa 8**

$$1 \times \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

**PÁG. 100****Aplicar**

$$45. \quad S_{15} = 7 \times \frac{1-2^{15}}{1-2} = 229\,369$$

46. Até sexto dia, a sucessão é uma progressão geométrica de razão 1,2 e primeiro termo 2000, pelo que, até ao sexto dia, o José correu  $2000 \times \frac{1-1,2^6}{1-1,2} = 19\,859,84$  metros.

Em cada um dos restantes quatro dias, correu o mesmo que no sexto dia, isto é,  $2000 \times 1,2^5 = 4976,64$  metros.

Logo, no total, o José correu  $19\,859,84 + 4 \times 4976,64 = 39\,766,4$  metros.

**Alternativamente:**

| Dia | Distância (metros)            |
|-----|-------------------------------|
| 1   | 2000                          |
| 2   | $2000 \times 1,2 = 2400$      |
| 3   | $2000 \times 1,2^2 = 2880$    |
| 4   | $2000 \times 1,2^3 = 3456$    |
| 5   | $2000 \times 1,2^4 = 4147,2$  |
| 6   | $2000 \times 1,2^5 = 4976,64$ |
| 7   | $2000 \times 1,2^5 = 4976,64$ |
| 8   | $2000 \times 1,2^5 = 4976,64$ |
| 9   | $2000 \times 1,2^5 = 4976,64$ |
| 10  | $2000 \times 1,2^5 = 4976,64$ |

Durantes os 10 dias de treino, o José correu

$$2000 + 2400 + 2880 + 3456 + 4147,2 + 4976,64 \times 5 = 39\,766,4 \text{ metros.}$$

$$47.1 \quad u_1 = 3^1 = 3, \quad r = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3, \quad S_{10} = 3 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = 88\,572.$$

$$47.2 \quad u_1 = 3^{1-2} = \frac{1}{3}, \quad r = \frac{3^{n+1-2}}{3^{n-2}} = 3, \quad S_{10} = \frac{1}{3} \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = \frac{29\,524}{3}.$$

$$47.3 \quad u_n = u_{n-1} \times 3 \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n-1}} = 3, \quad S_{10} = 1 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = 29\,524.$$

$$47.4 \quad S_{10} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{256}$$

$$47.5 \quad \frac{u_2}{u_1} = r \Leftrightarrow u_1 = \frac{4}{4} = 1, \quad S_{10} = 1 \times \frac{1 - 4^{10}}{1 - 4} = 349\,525.$$

$$47.6 \quad \frac{u_2}{u_1} = r \Leftrightarrow \frac{6}{4} = r \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}, \quad S_{10} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{58\,025}{128}.$$

$$47.7 \quad \frac{u_4}{u_1} = r^3 \Leftrightarrow \frac{16}{-2} = r^3 \Leftrightarrow -8 = r^3 \Leftrightarrow r = -2, \quad S_{10} = -2 \times \frac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)} = 682.$$

$$47.8 \quad \frac{u_{10}}{u_7} = r^3 \Leftrightarrow \frac{-\frac{512}{2187}}{\frac{64}{81}} = r^3 \Leftrightarrow -\frac{8}{27} = r^3 \Leftrightarrow r = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{u_7}{u_1} = r^6 \Leftrightarrow u_1 = \frac{\frac{64}{81}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^6} = 9$$

$$S_{10} = 9 \times \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{11\,605}{2187}$$

**PÁG. 101****Aplicar**

$$48. \quad \frac{u_6}{u_1} = r^5 \Leftrightarrow \frac{1}{8} = r^5 \Leftrightarrow \frac{1}{32} = r^5 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{8} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{4096}$$

$$49. \quad S_8 = 2550 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 2550 \Leftrightarrow u_1 = \frac{2550}{2^8 - 1} \Leftrightarrow u_1 = 10$$

$$u_5 = u_1 \times r^4 \Leftrightarrow u_5 = 10 \times 2^4 \Leftrightarrow u_5 = 160$$

$$50. \quad \underbrace{S_5 - S_4}_{u_5} = \frac{1215}{1024} \Leftrightarrow u_5 = \frac{1215}{1024} \quad \text{e} \quad \underbrace{S_8 - S_7}_{u_8} = \frac{32\,805}{65\,536} \Leftrightarrow u_8 = \frac{32\,805}{65\,536}.$$

$$\frac{u_8}{u_5} = r^3 \Leftrightarrow \frac{\frac{32\,805}{65\,536}}{\frac{1215}{1024}} = r^3 \Leftrightarrow \frac{27}{64} = r^3 \Leftrightarrow r = \frac{3}{4}$$

$$\frac{u_5}{u_1} = r^4 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1215}{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \frac{15}{4}$$

$$S_8 = \frac{15}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{884\,625}{65\,536}$$

**51.1** O lado de cada quadrado, à exceção do primeiro, é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem metade do lado do quadrado anterior. Assim, sendo  $l$  a medida do lado de um dos quadrados, a medida do lado do quadrado seguinte é dada por

$$\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \times \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{2}l}{2}, \text{ pelo que a razão entre os lados de dois quadrados}$$

consecutivos é  $\frac{\sqrt{2}l}{l} = \frac{\sqrt{2}l}{2l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ou seja, a sucessão dos lados dos quadrados e, conseqüentemente, do

perímetro dos quadrados é uma progressão geométrica de razão  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Como o perímetro do primeiro quadrado é  $4a$ , a soma dos perímetros dos seis primeiros quadrados é

$$4a \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4a \times \frac{1 - \frac{1}{8}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = 8a \times \frac{\frac{7}{8}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{8a \times \frac{7}{8}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{7a}{2 - \sqrt{2}}.$$

Multiplicando e dividindo por  $2 + \sqrt{2}$ , obtemos  $\frac{7(2 + \sqrt{2})a}{2}$ .

**51.2** Como cada quadrado, à exceção do primeiro, tem vértices nos pontos médios do quadrado anterior, a área de cada quadrado, à exceção do primeiro, é metade da área do anterior. Assim, a sucessão das áreas dos quadrados é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ .

$$S_{12} = a^2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2 \times \left(\frac{2^{12} - 1}{2^{12}}\right) = \frac{2^{12} - 1}{2^{11}} a = \frac{4095}{2048} a$$

**51.3** A sucessão cujo termo de ordem  $n$  é a diferença entre a área do primeiro quadrado e a soma das áreas dos  $n - 1$  quadrados seguintes tem termo geral

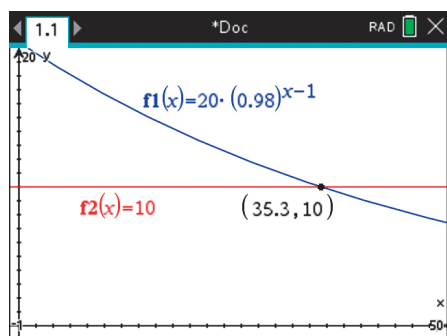
$$a^2 - \frac{a^2}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = a^2 - a^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = a^2 - a^2 + a^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = a^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\frac{a^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-1}}{a^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n+1} = \frac{1}{2}$$

A sucessão definida pela diferença acima descrita é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ .

**52.** Começemos por determinar ao fim de quantos segundos, depois de começar a abrandar, o automóvel percorre menos de 10 metros por segundo.

$$20 \times 0,98^{n-1} < 10 \quad (\text{a sucessão de termo geral } 20 \times 0,98^{n-1} \text{ é uma progressão geométrica de razão } 0,98)$$



O automóvel começa por percorrer menos de 10 metros por segundo, a partir do 36.º segundo, inclusive, após o instante em que começa a abrandar. Assim, a distância percorrida pelo automóvel desde esse instante até ao 36.º segundo, é dada pela soma das distâncias percorridas nos 36 primeiros segundos, ou seja, é dado por:

$$S_{36} = 20 \times \frac{1 - 0,98^{36}}{1 - 0,98} \approx 517$$

O automóvel percorreu, aproximadamente, 517 metros.

**PÁG. 102**

**Tarefa 9**

1.  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2$  e  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n} = \frac{1}{2}$ , pelo que  $u_n$  é uma progressão geométrica

de razão 2 e  $v_n$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ .

2.  $(u_n)$  é crescente e  $(v_n)$  é decrescente.

3. Sim. Trata-se de uma sucessão de termos positivos, e cada termo é igual ao dobro do anterior, pelo que é sempre possível ultrapassar um determinado valor, ou seja, obter um termo tão grande quanto se queira.

4. Sim, pois trata-se de uma sucessão de termos positivos, em que cada termo é igual a metade do anterior, pelo que é sempre possível obter um termo tão pequeno quanto se queira.

5. Se  $a > 1$ , os termos da sucessão crescem tanto quanto se queira; dado um número real finito  $K$ , existe sempre uma ordem tal que os termos da sucessão excedem  $K$ ; se  $0 < a < 1$ , os termos da sucessão decrescem tanto quanto se queira e são tão próximos de zero tanto quanto se queira.

**PÁG. 103**

**Tarefa 10**

2. Com o aumento do número de termos, a soma dos termos da sucessão  $(v_n)$  parece aproximar-se de 1.

3. Se  $|a| < 1$ , com o aumento do número de termos, a soma dos termos da sucessão definida por  $a^n$  parece aproximar-se de um valor finito.

4. Se  $a > 1$ , com o aumento do número de termos, a soma dos termos da sucessão definida por  $a^n$  parece aumentar tanto quanto se queira.

Se  $a < -1$ , com o aumento do número de termos, a soma dos termos da sucessão definida por  $a^n$  parece aumentar, em valor absoluto, tanto quanto se queira.

## PÁG. 104

### Tarefa 11

1.

| Fase | Área                            |
|------|---------------------------------|
| 1    | $\frac{1}{4}$                   |
| 2    | $\frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$  |
| 3    | $\frac{1}{4^3}$                 |
| 4    | $\frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$ |

2. O triângulo correspondente a cada fase tem  $\frac{1}{4}$  da área do triângulo da fase anterior, tendo o primeiro área igual a  $\frac{1}{4}$ .

Assim,  $(a_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{4}$  e primeiro termo  $\frac{1}{4}$ , logo,

$$a_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1+n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

$$3. \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

Se aumentarmos o valor de  $n$ , o valor de  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$  toma valores tão próximos de zero quanto se queira, isto é,  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$  tende para zero.

O valor da soma tende para  $\frac{1}{4} \times \frac{1-0}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$ .

## PÁG. 104

### Tarefa 12

1. A linha poligonal de cada fase tem comprimento  $\frac{4}{3}$  vezes maior do que a linha poligonal da fase anterior, tendo a primeira comprimento igual a  $\frac{4}{3}$ .

Assim,  $(c_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{4}{3}$  e primeiro termo  $\frac{4}{3}$ ; logo

$$c_n = \frac{4}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1+n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

2. A soma parece crescer sem parar, ou seja, parece que ultrapassará qualquer número em que se pense.

3. Sim.

## PÁG. 106

### Aplicar

#### 54.

| Sucessão  | Razão  |                               |
|---|--|-------------------------------|
| $a_n = 2^n$   | $2 > 1$  | Crescente                     |
| $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$  | $0 < \frac{1}{3} < 1$  | Decrescente                   |
| $c_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n$  | $\frac{5}{3} > 1$  | Crescente                     |
| $d_n = \pi^n$   | $\pi > 1$  | Crescente                     |
| $e_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{-n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$        | $0 < \frac{3}{4} < 1$  | Decrescente                   |
| $f_n = 3^{2-n} = 3^2 \times 3^{-n} = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ | $0 < \frac{1}{3} < 1$ e $9 > 0$  | Decrescente                   |
| $g_n = (-2)^n$  | $\frac{(-2)^{n+1}}{(-2)^n} = -2$   | Nem crescente nem decrescente |
| $h_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$                                   | $\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = -\frac{1}{2}$ | Nem crescente nem decrescente |
| $i_n = \frac{5^n}{3^{2n}} = \left(\frac{5}{9}\right)^n$                   | $0 < \frac{5}{9} < 1$  | Decrescente                   |
| $j_n = 2^n \times 3^{2-n} = 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$          | $0 < \frac{2}{3} < 1$ e $9 > 0$  | Decrescente                   |

55.1 Soma infinita, pois  $r = 3 > 1$ .

55.2 Soma finita, pois  $r = \frac{1}{5}$  e  $0 < \frac{1}{5} < 1$ .

$$S_n = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \text{ tende para } \frac{1}{4} \times (1 - 0), \text{ ou seja, a soma de todos os termos de } (b_n) \text{ é } \frac{1}{4}.$$

$$55.3 \quad c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = 2^n$$

Soma infinita, pois  $r = 2 > 1$ .

$$55.4 \quad \text{Soma infinita, pois } r = \frac{7^{n+1-4}}{7^{n-4}} = 7^{n-3-n+4} = 7 \text{ e } 7 > 1.$$

$$55.5 \quad \text{Soma finita, pois } r = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-n+1} = \frac{2}{3} \text{ e } 0 < \frac{2}{3} < 1.$$

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \text{ tende para } 3 \times (1 - 0), \text{ ou seja, a soma de todos os termos de } (e_n) \text{ é } 3.$$

$$55.6 \quad \text{Soma finita, pois } r = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2(n+1)-3}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2n-3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2n+2-3-2n+3} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \text{ e } 0 < \frac{9}{16} < 1.$$

$$S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times \frac{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^n}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{4}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^n}{\frac{7}{16}} = \frac{64}{21} \times \left(1 - \left(\frac{9}{16}\right)^n\right) \text{ tende para } \frac{64}{21} \times (1 - 0), \text{ ou seja, a soma de todos os termos de } (f_n) \text{ é } \frac{64}{21}.$$

$$55.7 \quad \text{Soma finita, pois } r = \frac{3^{-2(n+1)}}{3^{-2n}} = 3^{-2n-2+2n} = 3^{-2} = \frac{1}{9} \text{ e } 0 < \frac{1}{9} < 1.$$

$$S_n = 3^{-2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{8} \times \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right) \text{ tende para } \frac{1}{8} \times (1 - 0), \text{ ou seja, a soma de todos os termos de } (g_n) \text{ é } \frac{1}{8}.$$

$$55.8 \quad h_n = 3^n \times 5^{1-n} = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\text{Soma finita, pois } r = \frac{5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{3}{5} \text{ e } 0 < \frac{3}{5} < 1.$$

$$S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{5}} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{2}{5}} = \frac{15}{2} \times \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) \text{ tende para } \frac{15}{2} \times (1 - 0), \text{ ou seja, a soma de todos os termos de } (h_n) \text{ é } \frac{15}{2}.$$

$$55.9 \quad h_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times 4^{2n} = \left(\frac{16}{5}\right)^n$$

Soma infinita, pois  $r = \frac{16}{5} > 1$ .

56. Para  $(u_n)$  é possível, pois trata-se de uma progressão geométrica de razão  $\frac{5}{7}$  e  $0 < \frac{5}{7} < 1$ .

$$S_n = \frac{7}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n}{1 - \frac{5}{7}} = \frac{7}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n}{\frac{2}{7}} = \frac{49}{10} \times \left(1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n\right) \text{ tende para } \frac{49}{10} \times (1 - 0), \text{ ou seja, a soma de todos os}$$

termos de  $(u_n)$  é  $\frac{49}{10}$ .

Para  $(v_n)$  não é possível, pois trata-se de uma progressão geométrica de razão  $r = \frac{7}{5}$  e  $\frac{7}{5} > 1$ .

## PÁG. 107

### Aplicar

57.1 O perímetro de cada triângulo, à exceção do primeiro, é metade do perímetro do anterior. Como o primeiro tem perímetro 3, uma expressão do termo geral da sucessão dos perímetros dos sucessivos triângulos é  $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

$$57.2 \quad S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

57.3 A soma é finita, pois  $r = \frac{1}{2}$  e  $0 < \frac{1}{2} < 1$ .

A soma tende para  $6 \times (1 - 0)$ , ou seja, a soma de todos os termos é 6.

58.1 Começemos por observar o que se passa com as medidas dos primeiros três quadrados e das três primeiras circunferências.

| Quadrado   |                  | Circunferência       |  |
|------------|------------------|----------------------|--|
| Lado       | Área             | Raio                 | Comprimento                                    |
| 2          | $2^2 = 4$        | $\frac{2}{2} = 1$    | $2\pi \times 1 = 2\pi$                         |
| $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}^2 = 2$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi$ |
| 1          | $1^2 = 1$        | $\frac{1}{2}$        | $2\pi \times \frac{1}{2} = \pi$                |

Em geral temos:

O diâmetro de cada circunferência inscrita num quadrado é igual ao lado desse quadrado.

A diagonal de cada quadrado inscrito numa circunferência é igual ao diâmetro dessa circunferência.

Se  $l$  for o lado de um quadrado, o diâmetro da circunferência inscrita é também  $l$ . Logo, sendo  $a$  a medida do lado do quadrado seguinte ao quadrado de lado  $l$ , tem-se:

$$l^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow l^2 = 2a^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{2a^2} \Leftrightarrow l = a\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \frac{l}{\sqrt{2}}, \text{ isto é, a medida do lado do quadrado seguinte é } \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

A razão entre os comprimentos dos lados de quadrados sucessivos é  $\frac{\frac{l}{\sqrt{2}}}{l} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (o que se verifica no último quadro da página anterior).

A razão entre as áreas de quadrados sucessivos é  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ .

A sucessão cujos termos são as áreas dos sucessivos quadrados é uma progressão geométrica de primeiro termo 4 e razão  $\frac{1}{2}$ . Assim, esta sucessão tem termo geral  $q_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

**58.2** Se  $l$  for a medida do lado de um quadrado,  $l$  é a medida do diâmetro da circunferência inscrita e o seu comprimento é  $\pi l$ ; o quadrado seguinte tem lado  $\frac{l}{\sqrt{2}}$  e a circunferência inscrita nesse quadrado tem diâmetro  $\frac{l}{\sqrt{2}}$  e, conseqüentemente, comprimento  $\pi \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{\pi l}{\sqrt{2}}$ .

A razão entre os comprimentos das sucessivas circunferências é  $\frac{\frac{\pi l}{\sqrt{2}}}{\pi l} = \frac{\pi l}{\pi l \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , que é igual à razão entre os respectivos raios (pois os comprimentos de circunferências são diretamente proporcionais aos seus raios).

A sucessão cujos termos são os comprimentos das sucessivas circunferências é uma progressão geométrica de primeiro termo  $2\pi$  e razão  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Assim, esta sucessão tem termo geral  $c_n = 2\pi \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ .

**58.3** A soma dos primeiros  $n$  termos de  $(q_n)$  é dada por

$$S_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 8 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

**58.4** A soma dos primeiros  $n$  termos de  $(c_n)$  é dada por

$$S_n = 2\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2} - 1} \times \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).$$

**58.5** As somas são finitas pois as duas sucessões são progressões geométricas de razões, em módulo, inferiores a 1.

A soma de todos os termos de  $(q_n)$  tende para  $8 \times (1 - 0)$ , ou seja, a soma de todos os termos de  $(q_n)$  é 8.

A soma de todos os termos de  $(c_n)$  tende para  $\frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2} - 1} \times (1 - 0)$ , ou seja, a soma de todos os termos de

$$(c_n) \text{ é } \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2} - 1}.$$

**PÁG. 108**

**Aplicar +**

**1.1**

| Termo                       | 1 | 2 | 3         | 4         | 5         |
|-----------------------------|---|---|-----------|-----------|-----------|
| N.º de pontos de interseção | 0 | 2 | 2 + 2 = 4 | 4 + 2 = 6 | 6 + 2 = 8 |

**1.2** Não, pois o número de pontos de interseção é par.

**1.3**  $2n - 2$ , pois trata-se da sucessão dos números pares, considerando 0 um número par.

**1.4**

**a.** O número de pontos de interseção da 74.ª figura é  $2 \times 74 - 2 = 146$ .

**b.**  $2n - 2 = 500 \Leftrightarrow n = \frac{500 + 2}{2} \Leftrightarrow n = 251$

**2.**

| Termo             | 1                    | 2                             | 3                              | ... | $n$      |
|-------------------|----------------------|-------------------------------|--------------------------------|-----|----------|
| N.º de quadrados  | $3 = 1 + 2$          | $3 + 1 = 4 = 2 + 2$           | $4 + 1 = 5 = 3 + 2$            | ... | $n + 2$  |
| N.º de triângulos | $8 = 4 \times 1 + 4$ | $8 + 4 = 12 = 4 \times 2 + 4$ | $12 + 4 = 16 = 4 \times 3 + 4$ | ... | $4n + 4$ |

**2.1**  $10 + 2 = 12$  quadrados e  $4 \times 10 + 4 = 44$  triângulos.

**2.2** Opção correta: **(C)**

**2.3**  $n + 2$

**PÁG. 109**

**Aplicar +**

**3.1** O número de círculos pretos do termo de ordem  $n$  é  $n$ .

Assim, o 4.º termo da sucessão tem  $3 \times 4 + 6 - 4 = 14$  círculos brancos.

**3.2** O 100.º termo tem  $3 \times 100 + 6 - 100 = 206$  círculos brancos.

**3.3**  $3n + 6 - n = 28 \Leftrightarrow 2n = 22 \Leftrightarrow n = 11$ . É o termo de ordem 11.

**3.4** O número de círculos brancos do termo de ordem  $n$  é a diferença entre o número total de círculos do termo de ordem  $n$  e o número de círculos pretos do termo de ordem  $n$ :

$$3n + 6 - n = 2n + 6.$$

**4.1 a.** 2, 4, 6, 8, 10

b.  $u_n = 2n$

c.  $u_{20} = 2 \times 20 = 40$

4.2 a.  $v_{20} = \frac{1}{u_{20}} = \frac{1}{40}$ .

b. Não, pois na figura de ordem  $n$ , a área colorida é  $\frac{1}{2n}$  e a equação  $\frac{1}{2n} = \frac{1}{13}$  é impossível em  $\mathbb{N}^+$ .

## PÁG. 110

### Aplicar +

5.1 Tendo em conta a sucessão de figuras, observa-se que a 10.<sup>a</sup> figura terá 10 quadrados. Cada um desses quadrados tem um triângulo acima e outro abaixo, portanto  $2 \times 10$  triângulos, aos quais se adicionam mais dois, um à esquerda e outro à direita. Logo, a 10.<sup>a</sup> figura tem  $2 \times 10 + 2 = 22$  triângulos.

5.2 a. Observando a sucessão de figuras, cada uma, à exceção da primeira, tem mais dois triângulos do que a anterior, sendo que a primeira tem 4 triângulos.

Logo, 
$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

b. A figura de ordem  $n$  tem  $n$  quadrados. Cada um desses quadrados tem um triângulo acima e outro abaixo, portanto,  $2n$  triângulos, aos quais se adicionam mais dois, um à esquerda e outra à direita. Logo,  $u_n = 2n + 2$ .

**Alternativamente** (recorrendo ao conceito de progressão aritmética):

Como cada figura, à exceção da primeira, tem mais dois triângulos do que a figura anterior, a sucessão  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão 2. Como  $u_1 = 4$ ,  $u_n = 4 + (n - 1) \times 2 = 4 + 2n - 2 = 2n + 2$ .

6.1  $u_{10} = 3 - \frac{1}{2 \times 10} = \frac{59}{20}$  e  $u_{11} = 2$ .

6.2  $\frac{89}{30}$  não é termo da sucessão, pois  $\frac{89}{30} \neq 2$  e

$$3 - \frac{1}{2n} = \frac{89}{30} \Leftrightarrow -\frac{1}{2n} = \frac{89}{30} - 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{30} \Leftrightarrow 2n = 30 \Leftrightarrow n = 15, \text{ mas } 15 \text{ não é par.}$$

Como  $u_{16} = 3 - \frac{1}{2 \times 16} = \frac{95}{32}$ , é o termo de ordem 16 da sucessão.

7.1  $v_{100} = 3$

7.2  $v_n = 3$  (à exceção do primeiro, que é 3, cada termo é sempre igual ao anterior, ou seja, igual a 3, pelo que todos os termos são iguais a 3).

8.1  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 3 \times 3 = 9$ ,  $u_3 = 3 \times 9 = 27$ .

8.2  $u_n = 3^n$

O primeiro termo é 3 e cada termo (a partir do segundo) obtém-se multiplicando o termo anterior por 3, pelo que, os termos de  $(u_n)$  são as potências positivas de base 3.

**9.1**  $v_1 = 25$

$$v_2 = v_1 + (-1)^{1+1} \times 2 \times 1 = 25 + 2 = 27$$

$$v_3 = v_2 + (-1)^{2+1} \times 2 \times 2 = 27 + (-1) \times 4 = 23$$

$$v_4 = v_3 + (-1)^{3+1} \times 2 \times 3 = 23 + 6 = 29$$

$$v_5 = v_4 + (-1)^{4+1} \times 2 \times 4 = 29 + (-1) \times 8 = 21$$

## PÁG. 111

### Aplicar +

## 9.2

|    | A  | B  | C | D | E | F |
|----|----|----|---|---|---|---|
| 1  | 1  | 25 |   |   |   |   |
| 2  | 2  | 27 |   |   |   |   |
| 3  | 3  | 23 |   |   |   |   |
| 4  | 4  | 29 |   |   |   |   |
| 5  | 5  | 21 |   |   |   |   |
| 6  | 6  | 31 |   |   |   |   |
| 26 | 26 | 51 |   |   |   |   |
| 27 | 27 | -1 |   |   |   |   |

27.º termo

**9.3**  $v_{100} = 125$

**10.1** O primeiro termo é  $-3$  e cada termo pode ser obtido adicionando  $6$  ao termo anterior:

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_n = u_{n-1} + 6, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

**10.2** O primeiro termo é  $26$  e cada termo pode ser obtido subtraindo  $4$  ao termo anterior:

$$\begin{cases} u_1 = 26 \\ u_n = u_{n-1} - 4, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

**10.3** O primeiro termo é  $16$  e cada termo pode ser obtido multiplicando  $\frac{1}{2}$  pelo termo anterior:

$$\begin{cases} u_1 = 16 \\ u_n = \frac{1}{2} \times u_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

**10.4** O primeiro termo é  $-3$  e cada termo pode ser obtido multiplicando  $-\frac{1}{3}$  pelo termo anterior:

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_n = -\frac{1}{3} \times u_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

**10.5** O primeiro termo é  $7$ . O segundo termo obtém-se somando  $2$ , o terceiro somando  $4$ , o quarto somando  $6$ , e assim sucessivamente.  $2, 4, 6, \dots$  é a sucessão dos números pares, pelo que:

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = u_n + 2n, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_n = u_{n-1} + 2n - 2, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

**10.6** O primeiro termo é 0. O segundo termo obtém-se somando 1, o terceiro somando -3, o quarto somando 5, e assim sucessivamente. 1, -3, 5, -7, ... pode ser definida por  $(-1)^{n+1}(2n-1)$ , pelo que:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{n+1} \times (2n-1), \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + (-1)^n \times (2n-3), \quad n \geq 2 \end{cases}$$

**11.** O primeiro termo é 1 e cada termo (a partir do segundo) obtém-se adicionando ao termo anterior a sequência dos múltiplos de 3 acrescidos de 1.

Opção correta: **(C)**

**12.1**  $7 + (n-1) \times 2 = 2n + 5$

**12.2** Razão:  $7 - 2 = 5$ ; termo geral:  $2 + (n-1) \times 5 = 5n - 3$ .

**12.3**  $5 + (n-4) \times 10 = 10n - 35$

**12.4** Razão:  $\frac{-10 - 10}{2} = -10$ ; termo geral:  $10 + (n-2) \times (-10) = -10n + 30$ .

**13.**  $u_2 + u_6 = 3 \Leftrightarrow \begin{matrix} u_1 + r + u_1 + 5r = 3 \\ u_2 = u_1 + r \\ u_6 = u_1 + 5r \end{matrix} \Leftrightarrow 2u_1 + 6r = 3$

$u_3 + u_8 = 6 \Leftrightarrow \begin{matrix} u_1 + 2r + u_1 + 7r = 6 \\ u_3 = u_1 + 2r \\ u_8 = u_1 + 7r \end{matrix} \Leftrightarrow 2u_1 + 9r = 6$

$$\begin{cases} 2u_1 + 6r = 3 \\ 2u_1 + 9r = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 = 3 - 6r \\ 3 - 6r + 9r = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{3}{2} \\ r = 1 \end{cases}$$

$u_{10} = u_1 + 9r \Leftrightarrow u_{10} = -\frac{3}{2} + 9 \Leftrightarrow u_{10} = \frac{15}{2}$

## PÁG. 112

### Aplicar +

**14.1**  $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 - (-3n+1) = -3$ , logo é progressão aritmética de razão -3.

**14.2**  $u_{n+1} - u_n = 5(n+1-2) - 5(n-2) = 5$ , logo é progressão aritmética de razão 5.

**14.3**  $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$ , não é constante, pelo que não é progressão aritmética.

**14.4**  $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+1}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}$ , logo é progressão aritmética de razão  $\frac{1}{2}$ .

**14.5**  $u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ , não é constante, pelo que não é progressão aritmética.

**14.6**  $u_{n+1} - u_n = (n+1)(n+1+1) - n(n+1) = (n+1)(n+2-n) = 2(n+1)$ , não é constante, pelo que não é progressão aritmética.

$$15.1 \text{ a. } \begin{cases} c_1 = 2000 \\ c_n = c_{n-1} + 30, \quad n \in \{2, 3, 4, 5\} \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} c_1 = 2000 \times 1,015 \\ c_n = c_{n-1} + 30, \quad n \in \{2, 3, 4\} \end{cases}$$

## 15.2

| Ano | Rendimento acumulado |
|-----|----------------------|
| 1   | 30 €                 |
| 2   | $30 + 30 = 60$ €     |
| 3   | $60 + 30 = 90$ €     |
| 4   | $90 + 30 = 120$ €    |
| 5   | $120 + 30 = 150$ €   |
| 6   | $150 + 30 = 180$ €   |
| 7   | $180 + 30 = 210$ €   |

Ao fim de 3 anos (7 - 4), após o fim do prazo inicial.

**Alternativamente:**

Seendo  $c_n$  o capital ao fim de  $n$  anos,  $(c_n)$  é uma progressão aritmética de razão 30 e  $c_1 = 2000 \times 1,015 = 2030$ . Assim,  $c_n = 2030 + (n - 1) \times 30 = 2030 + 30n - 30 = 30n + 2000$ .

Pretende-se determinar ao fim de quantos anos, após o prazo inicial, o rendimento seria superior a 200 €, ou seja, quando o capital acumulado é superior a 2200 €.

$30n + 2000 > 2200 \Leftrightarrow 30n > 200 \Leftrightarrow n > \frac{20}{3}$ . Como  $\frac{20}{3} = 6,6$ , terão de passar sete anos, ou seja, três anos após o final do prazo inicial.

$$16.1 \quad 1275 - 25 = 1250 \text{ €}$$

$$16.2 \quad 6 \text{ anos. } 1275 + 5 \times 25 = 1400 \text{ €}$$

$$16.3 \quad \frac{1250}{1275} = 0,02, \text{ ou seja, } 2\%.$$

$$17. \quad v_3 - v_2 = v_2 - v_1 \Leftrightarrow 3a + 1 - (b + 2a) = b + 2a - 4a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3a + 1 - b - 2a = b - 2a \Leftrightarrow 3a - 2b + 1 = 0$$

Para  $n \geq 3$ ,  $v_{n+1} - v_n = a(n+1) + 1 - (an+1) = an + a + 1 - an - 1 = a$

$$\underbrace{b - 2a}_{v_2 - v_1} = a \Leftrightarrow 3a = b$$

$$3a - 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b - 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1 \text{ e } 3a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

Opção correta: **(D)**

## PÁG. 113

## Aplicar +

$$18.1 \quad S_{20} = \frac{2+2+19 \times 3}{2} \times 20 = 610$$

$$18.2 \quad \text{Razão: } 5 - (-3) = 8, S_{20} = \frac{-3 + (-3) + 19 \times 8}{2} \times 20 = 1460$$

$$18.3 \quad u_n = 16 + (n - 6) \times (-4) = -4n + 40, \text{ pelo que } u_1 = -4 \times 1 + 40 = 36 \text{ e } u_{20} = -4 \times 20 + 40 = -40.$$

$$S_{20} = \frac{36 + (-40)}{2} \times 20 = -40$$

$$18.4 \quad -25 = 7 + 4r \Leftrightarrow r = \frac{-25 - 7}{4} \Leftrightarrow r = -8, u_n = 7 + (n - 3) \times (-8) = -8n + 31, \text{ pelo que}$$

$$u_1 = -8 \times 1 + 31 = 23 \text{ e } u_{20} = -8 \times 20 + 31 = -129.$$

$$S_{20} = \frac{23 - 129}{2} \times 20 = -1060$$

$$19. \quad 100 + 101 + 102 + 103 + \dots + 199 = \frac{100 + 199}{2} \times 100 = 14\,950 \text{ (É a soma dos primeiros cem naturais superiores ou iguais a } 100 \text{.)}$$

$$20. \quad S_{10} = 100 \Leftrightarrow \frac{w_1 + w_{10}}{2} \times 10 = 100 \Leftrightarrow \frac{w_1 + w_1 + 9 \times 3}{2} \times 10 = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2w_1 + 27}{2} \times 10 = 100 \Leftrightarrow 2w_1 = \frac{100 \times 2}{10} - 27 \Leftrightarrow w_1 = -\frac{7}{2}$$

$$w_{11} = -\frac{7}{2} + 10 \times 3 = \frac{53}{2}$$

$$21. \quad u_8 + u_{20} = 11 \Leftrightarrow u_1 + 7r + u_1 + 19r = 11 \Leftrightarrow 2u_1 + 26r = 11$$

$$21.1 \quad u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16} = \frac{u_{12} + u_{16}}{2} \times 5 = \frac{u_1 + 11r + u_1 + 15r}{2} \times 5 = \frac{2u_1 + 26r}{2} \times 5 = \frac{11}{2} \times 5 = \frac{55}{2}$$

## Alternativamente:

$$u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16} = \frac{u_{12} + u_{16}}{2} \times 5 \underset{\substack{u_{12} = u_8 + 4r \\ u_{16} = u_{20} - 4r}}{=} \frac{u_8 + 4r + u_{20} - 4r}{2} \times 5 = \frac{u_8 + u_{20}}{2} \times 5 = \frac{11}{2} \times 5 = \frac{55}{2}$$

Opção correta: **(C)**

$$21.2 \quad u_{20} = 7 \Leftrightarrow u_1 + 19r = 7$$

$$\begin{cases} u_1 + 19r = 7 \\ 2u_1 + 26r = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 - 19r \\ 2(7 - 19r) + 26r = 11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 - 19r \\ 14 - 38r + 26r = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 - 19r \\ -12r = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 - 19r \\ r = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Opção correta: **(B)**

$$\begin{aligned} \mathbf{21.3} \quad u_8 + u_{20} = 11 &= 5 - 4r + 5 + 8r = 11 \Leftrightarrow 4r = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{4} \\ u_8 = u_{12} - 4r &= 5 - 4r \\ u_{20} = u_{12} + 8r &= 5 + 8r \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } u_n = 5 + (n - 12) \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{4}n + 2.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{22.} \quad S_7 = -21 &\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_7}{2} \times 7 = -21 \Leftrightarrow u_1 + u_7 = \frac{-21 \times 2}{7} \Leftrightarrow u_1 + u_7 = -6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u_1 + u_1 + 6r = -6 \Leftrightarrow 2u_1 + 6r = -6 \Leftrightarrow u_1 = -3 - 3r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{10} = 0 &\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 = 0 \Leftrightarrow u_1 + u_{10} = \frac{0 \times 2}{10} \Leftrightarrow u_1 + u_{10} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u_1 + u_1 + 9r = 0 \Leftrightarrow 2u_1 + 9r = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 = -3 - 3r \\ 2u_1 + 9r = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -3 - 3r \\ 2(-3 - 3r) + 9r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -3 - 3r \\ -6 - 6r + 9r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -3 - 3r \\ 3r = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -3 - 6 \\ r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -9 \\ r = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{S_{17}}{17} = \left( \frac{u_1 + u_{17}}{2} \times 17 \right) \times \frac{1}{17} = \frac{u_1 + u_{17}}{2} = \frac{u_1 + u_1 + 16r}{2} = \frac{2u_1 + 16r}{2} = u_1 + 8r = -9 + 8 \times 2 = 7$$

$$\mathbf{23.1} \quad v_{12} = v_1 + 11r \Leftrightarrow 169 - 15 = 11r \Leftrightarrow r = \frac{154}{11} \Leftrightarrow r = 14$$

$$v_{20} = v_1 + 19r = 15 + 19 \times 14 = 281$$

$$\begin{aligned} \mathbf{23.2} \quad v_{10} + v_{15} = 102 &\Leftrightarrow v_1 + 9r + v_1 + 14r = 102 \Leftrightarrow 2v_1 + 23r = 102 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r = \frac{102 - 2 \times 5}{23} \Leftrightarrow r = 4 \end{aligned}$$

$$v_{20} = v_1 + 19r = 5 + 19 \times 4 = 81$$

$$\mathbf{23.3} \quad v_{10} - v_{11} = -2 \Leftrightarrow v_{11} - v_{10} = 2 \Leftrightarrow r = 2$$

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + \dots + v_{20} = 420 &\Leftrightarrow S_{20} = 420 \Leftrightarrow \frac{v_1 + v_{20}}{2} \times 20 = 420 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_1 + v_{20} = \frac{420 \times 2}{20} \Leftrightarrow v_1 + v_1 + 19r = 42 \Leftrightarrow 2v_1 + 19 \times 2 = 42 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_1 = \frac{42 - 38}{2} \Leftrightarrow v_1 = 2 \end{aligned}$$

$$v_{20} = 2 + 19 \times 2 = 40$$

$$\begin{aligned} \mathbf{23.4} \quad v_5 + v_6 + \dots + v_{14} = -80 &\Leftrightarrow \frac{v_5 + v_{14}}{2} \times 10 = -80 \Leftrightarrow v_5 + v_{14} = \frac{-80 \times 2}{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_5 + v_{14} = -16 \Leftrightarrow v_1 + 4r + v_1 + 13r = -16 \Leftrightarrow 2v_1 + 17r = -16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{12} + v_8 = -10 &\Leftrightarrow v_1 + 11r + v_1 + 7r = -10 \Leftrightarrow 2v_1 + 18r = -10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_1 + 9r = -5 \Leftrightarrow v_1 = -9r - 5. \end{aligned}$$

Substituindo na equação  $2v_1 + 17r = -16$ ,  $v_1$  por  $-9r - 5$ :

$$2(-9r - 5) + 17r = -16 \Leftrightarrow -18r - 10 + 17r = -16 \Leftrightarrow -r = -6 \Leftrightarrow r = 6$$

$$v_1 = -9 \times 6 - 5 \Leftrightarrow v_1 = -59$$

$$v_{20} = -59 + 19 \times 6 = 55$$

**23.5** Para  $n = 1$ ,  $v_1 = 2 \times 1 - 1^2 \Leftrightarrow v_1 = 1$ .

Para  $n = 2$ ,  $v_1 + v_2 = 2 \times 2 - 2^2 \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 0$ ;  $v_2 = -v_1 \Leftrightarrow v_2 = -1$ .

$$r = -1 - 1 = -2$$
;  $v_{20} = 1 + 19 \times (-2) = -37$ .

**24.**  $u_{n+1} = u_n + 2 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 2 \Leftrightarrow r = 2$

$$u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25} = 57 \Leftrightarrow \frac{u_7 + u_{25}}{2} \times 19 = 57 \Leftrightarrow u_7 + u_{25} = \frac{57 \times 2}{19} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 + 6r + u_1 + 24r = 6 \Leftrightarrow 2u_1 + 30r = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{u_1 = a \text{ e } r = 2}{2a + 30 \times 2 = 6} \Leftrightarrow a = \frac{6 - 60}{2} \Leftrightarrow a = -27$$

Opção correta: **(D)**

## PÁG. 114

### Aplicar +

**25.1**  $1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

**25.2** Razão:  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ; termo geral:  $2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ .

**25.3**  $-81 \times (-3)^{n-4} = -(-3)^4 \times (-3)^{n-4} = -(-3)^{4+n-4} = -(-3)^n$

**25.4**  $\frac{250}{10} = r^2 \Leftrightarrow r = 5$ ; termo geral:  $10 \times 5^{n-2} = 2 \times 5 \times 5^{n-2} = 2 \times 5^{1+n-2} = 2 \times 5^{n-1}$ .

**26.1**  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1) - 1}{3n - 1} = \frac{3n + 2}{3n - 1}$  não é constante, pelo que não é progressão geométrica.

**26.2**  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5(n+1) - 10}{5n - 10} = \frac{5n - 5}{5n - 10} = \frac{n - 1}{n - 2}$  não é constante, pelo que não é progressão geométrica.

**26.3**  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5$ , pelo que é progressão geométrica de razão 5.

**26.4**  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{2(n+1)-1}}{3 \times 2^{2n-1}} = \frac{2^{2n+1}}{2^{2n-1}} = 2^2 = 4$ , pelo que é progressão geométrica de razão 4.

**26.5**  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n+1} = n+1$  não é constante, pelo que não é progressão geométrica de razão 5.

**26.6**  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-7)^{n+1}}{(-7)^n} = -7$ , pelo que é progressão geométrica de razão  $-7$ .

**27.1**  $u_1 = \frac{3 \times (-2)^{1-1}}{3^1} = 1$

$u_2 = \frac{3 \times (-2)^{2-1}}{3^2} = -\frac{2}{3}$

$u_3 = \frac{3 \times (-2)^{3-1}}{3^3} = \frac{4}{9}$

**27.2**  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3 \times (-2)^{n+1-1}}{3^{n+1}}}{\frac{3 \times (-2)^{n-1}}{3^n}} = \frac{3 \times (-2)^{n+1-1} \times 3^n}{3^{n+1} \times 3 \times (-2)^{n-1}} = -\frac{2}{3}$ , pelo que é progressão geométrica de razão  $-\frac{2}{3}$ .

**28.1**  $\frac{x}{12} = \frac{192}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2304 \Leftrightarrow x = 48$   
 $x > 0$

Opção correta: **(B)**

**28.2**  $r = \frac{48}{12} = 4$

Opção correta: **(A)**

**29.1**  $u_1 = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1$ ,  $u_2 = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,

$u_3 = \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1$ ,  $u_4 = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

**29.2**  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\sin\left((n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}}{\frac{\sin\left(n\pi + \pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{-\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = -1$ , pelo que é uma progressão geométrica de razão  $-1$ .

**29.3** Como  $u_1 = -1$ , e  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $-1$ , então  $u_n = -1 \times (-1)^{n-1} = (-1)^{1+n-1} = (-1)^n$ .

## PÁG. 115

**30.1**  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 2.

Uma expressão para o termo geral da sucessão é  $u_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$ .

**30.2** Começemos por determinar os perímetros das três primeiras construções.

| Número de semicírculos | Diâmetro      | Perímetro   |
|------------------------|---------------|---|
| 1                      | 1             | $\left(\frac{1}{2} \times \pi \times 1\right) \times 1 + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$           |
| 2                      | $\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2} \times \pi \times \frac{1}{2}\right) \times 2 + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$ |
| 4                      | $\frac{1}{4}$ | $\left(\frac{1}{2} \times \pi \times \frac{1}{4}\right) \times 4 + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$ |

Observando a tabela, verifica-se que o perímetro das figuras é constante e tem valor  $\frac{\pi}{2} + 1$ .

Verifiquemos que esta constância se mantém para qualquer figura da sucessão.

A figura de ordem  $n$  tem  $n$  segmentos de reta que totalizam um comprimento igual a 1 e tem  $2^{n-1}$  semicírculos. Sendo  $c_n$  o comprimento de cada uma das semicircunferências da figura de ordem  $n$ , então

$(c_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ , pelo que, como  $c_1 = \frac{2\pi \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\pi}{2}$ ,  $c_n = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Logo,  $p_n = c_n \times 2^{n-1} + 1 = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} \times 2^{n-1} + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$ .

**30.3 a.** Começemos por determinar as áreas das três primeiras construções.

| Número de semicírculos | Raio          | Área   |
|------------------------|---------------|--|
| 1                      | $\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \times 1 = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ |
| 2                      | $\frac{1}{4}$ | $\left(\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) \times 2 = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$ |
| 4                      | $\frac{1}{8}$ | $\left(\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{1}{8}\right)^2\right) \times 4 = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$ |

Observando a tabela, verifica-se que a área da figura de ordem  $n$  é dada por  $\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$ .

Verifiquemos que é assim mesmo.

Sendo  $r_n$  o raio de cada um dos semicírculos da figura de ordem  $n$ , a sucessão  $(r_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$  e  $r_1 = \frac{1}{2}$ , pelo que  $r_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Assim, a área de cada semicírculo da

figura de ordem  $n$  é dada por  $\frac{1}{2} \pi \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = \frac{1}{2} \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$ . Logo:

$$a_n = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \times 2^{n-1} = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1+1-n} = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

**b.**  $a_{10} = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10+2} = \frac{\pi}{4096}$

**c.** É uma progressão geométrica, pois  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1+2}}{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}} = \frac{1}{2}$ .

**31.1** A cada dobragem a espessura da folha duplica, pelo que  $(e_n)$  é uma progressão geométrica de razão 2 e  $e_1 = 0,1 \times 2$  pelo que o termo geral é  $e_n = 0,1 \times 2^n$ .

**31.2** Admitindo, como é referido, que se pode dobrar a folha sem parar, a espessura da folha dobrada aumenta tanto quanto se queira, atingindo, aproximadamente, 439 805 km na 42.ª dobragem (na 41.ª dobragem o valor era ainda inferior a 384 400 km).

|    | A  | B               | C | D |
|----|----|-----------------|---|---|
| 1  | 1  | 0,2             |   |   |
| 2  | 2  | 0,40            |   |   |
| 41 | 41 | 219902325555,20 |   |   |
| 42 | 42 | 439804651110,40 |   |   |
| 43 |    |                 |   |   |

## PÁG. 116

### Aplicar +

#### 32.1

$$\mathbf{a.} \begin{cases} a_1 = 1500 \times 1,024 \\ a_{n+1} = a_n \times 1,024, n \in \{1, 2\} \end{cases} = \begin{cases} a_1 = 1536 \\ a_{n+1} = a_n \times 1,024, n \in \{1, 2\} \end{cases}$$

**b.**  $a_n = 1536 \times 1,024^{n-1}$ , dado que  $(a_n)$  é uma progressão geométrica de razão 1,024.

**c.**  $a_3 = 1536 \times 1,024^2 \approx 1610,61 \text{ €}$

$$\mathbf{32.2 a.} \begin{cases} b_1 = 1500 \times \left(1 + \frac{0,024}{12}\right) \\ b_{n+1} = b_n \times \left(1 + \frac{0,024}{12}\right), n \in \{1, 2\} \end{cases} = \begin{cases} b_1 = 1503 \\ b_{n+1} = b_n \times 1,002, n \in \{1, 2, \dots, 35\} \end{cases}$$

**b.**  $b_n = 1503 \times 1,002^{n-1}$ , dado que  $(b_n)$  é uma progressão geométrica de razão 1,002.

**c.**  $b_{35} = 1503 \times 1,002^{35} \approx 1611,87 \text{ €}$

**32.3 a.** O capital no final de cada ano é igual ao capital no início do ano (final do ano anterior)

multiplicado por  $\left(1 + \frac{0,024}{12}\right)^{12}$ ; logo, os termos de  $(c_n)$  são termos de uma progressão geométrica de razão  $\left(1 + \frac{0,024}{12}\right)^{12}$ , ou seja,  $1,002^{12}$ . Este valor corresponde a 1 mais a taxa anual líquida que a conta deveria ter, com capitalizações anuais, para que o rendimento fosse equivalente ao da conta com capitalizações mensais e taxa anual de 2,4%.

**b.**  $c_n = 1500 \times 1,002^{12n}$

**c.**  $c_3 = 1500 \times 1,002^{12 \times 3} \approx 1611,87 \text{ €}$

Os valores são iguais (como não poderia deixar de ser).

**33.1**  $(d_n)$  não é uma progressão aritmética, pois  $d_{n+1} - d_n$  não é constante.

**33.2**  $(e_n)$  não é uma progressão geométrica, pois  $\frac{e_2}{e_1} = \frac{-2}{-1} = 2$ ,  $e_3 = \frac{e_2}{e_1} = \frac{-2}{-1} = 2$  e  $\frac{e_3}{e_2} = \frac{2}{-2} = -1$ .

$$\mathbf{33.3} \quad e_{n+6} = \frac{e_{n+5}}{e_{n+4}} = \frac{e_{n+3}}{e_{n+4}} = \frac{1}{e_{n+3}} = \frac{1}{\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}} = \frac{e_{n+1}}{e_{n+2}} = \frac{e_{n+1}}{\frac{e_{n+1}}{e_n}} = e_n$$

Logo,  $e_{n+6} - e_n = 0$ .

$$\mathbf{34.1} \quad S_{12} = 3 \times \frac{1-2^{12}}{1-2} = 12\,285$$

$$\mathbf{34.2} \quad r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad S_{12} = 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4095}{256}.$$

$$\mathbf{34.3} \quad 1.^\circ \text{ termo: } 27 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times u_1 \Leftrightarrow u_1 = \frac{27}{\left(\frac{1}{3}\right)^5} \Leftrightarrow u_1 = \frac{3^3}{3^{-5}} \Leftrightarrow u_1 = 3^8$$

$$S_{12} = 3^8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{265\,720}{27}$$

$$\mathbf{34.4} \quad \frac{8}{4} = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2} \quad (r > 0)$$

$$1.^\circ \text{ termo: } \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{12} = 2\sqrt{2} \times \frac{1 - (\sqrt{2})^{12}}{1 - \sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \times \frac{1 - 2^6}{1 - \sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \times \frac{63}{\sqrt{2} - 1} = \frac{126\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

**35.** As parcelas da soma cujo valor pretendemos calcular são termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 10, razão 2 e termo geral  $10 \times 2^{n-1}$ . Para calcular o valor da soma, precisamos de saber o número de termos da soma:

$$10 \times 2^{n-1} = 81\,920 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 8192 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{13} \Leftrightarrow n - 1 = 13 \Leftrightarrow n = 14$$

$$S_{14} = 10 \times \frac{1-2^{14}}{1-2} = 163\,830$$

## PÁG. 117

### Aplicar +

$$\mathbf{36.} \quad S_6 = \frac{7812}{25} \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^6}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{7812}{25} \Leftrightarrow u_1 = 250$$

$$u_7 = 250 \times \left(\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{2}{125}$$

$$37. u_1 = S_1 = \frac{3^{2 \times 1} - 1}{2} = 4 \text{ e } S_2 = u_1 + u_2 \Leftrightarrow \frac{3^{2 \times 2} - 1}{2} = 4 + u_2 \Leftrightarrow 40 - 4 = u_2 \Leftrightarrow u_2 = 36.$$

Logo, a razão é  $\frac{u_2}{u_1} = \frac{36}{4} = 9$ , pelo que uma expressão do termo geral da progressão é  $4 \times 9^{n-1}$ .

$$38.1 \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n, n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$

$u_{n+1} = 3u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$ , pelo que é uma progressão geométrica de razão 3.

$$38.2 S_5 = 2 \times \frac{1 - 3^5}{1 - 3} = 242$$

Em cinco dias a Cláudia leu 242 páginas.

Com as duas primeiras e a última não estão ocupadas por contos, o livro tem  $242 + 3 = 245$  páginas.

38.3 Seja  $(v_n)$  a sequência do número de páginas que a Madalena lê no dia  $n$ .

Trata-se de uma progressão aritmética de primeiro termo 2, razão 4 e termo geral  $2 + (n - 1) \times 4 = 4n - 2$ .

$$S_n = 242 \Leftrightarrow \frac{2 + 4n - 2}{2} \times n = 242 \Leftrightarrow 4n^2 = 484 \Leftrightarrow n^2 = 121 \Leftrightarrow n = 11$$

$n \in \mathbb{N}^+$

A Madalena irá demorar onze dias a ler o livro.

$$39.1 a_p + a_{p+1} + a_{p+2} = 210 \Leftrightarrow a_{p+2} = 210 - a_p - a_{p+1}$$

Como  $a_p$ ,  $a_{p+1} + 45$  e  $a_{p+2}$  são três termos consecutivos da progressão aritmética  $(b_n)$ , tem-se:

$$a_{p+1} + 45 - a_p = a_{p+2} - (a_{p+1} + 45) \Leftrightarrow a_{p+1} + 45 - a_p = 210 - a_p - a_{p+1} - a_{p+1} - 45 \Leftrightarrow$$

$a_{p+2} = 210 - a_p - a_{p+1}$

$$\Leftrightarrow 3a_{p+1} = 210 - 45 - 45 \Leftrightarrow 3a_{p+1} = 120 \Leftrightarrow a_{p+1} = 40$$

Como  $a_{p+1} = a_p \times r \Leftrightarrow a_p = \frac{40}{r}$  e  $a_{p+2} = a_{p+1} \times r = 40r$ , sendo  $r$  a razão da progressão  $(a_n)$ , tem-se:

$$a_p + a_{p+1} + a_{p+2} = 210 \Leftrightarrow \frac{40}{r} + 40 + 40r = 210 \Leftrightarrow 40 + 40r + 40r^2 = 210r \Leftrightarrow$$

$\begin{matrix} \times r \\ r \neq 0 \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow 40r^2 - 170r + 40 = 0 \Leftrightarrow 4r^2 - 17r + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \times 4 \times 4}}{2 \times 4} \Leftrightarrow r = \frac{17 \pm 15}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{17 - 15}{8} \vee r = \frac{17 + 15}{8} \Leftrightarrow r = \frac{1}{4} \vee r = 4$$

Como  $a_p < a_{p+1}$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}^+$ , conclui-se que  $r = 4$ .

39.2 a. Tendo em conta que  $r = 4$ , tem-se

$$a_{p+1} = a_p \times 4 \Leftrightarrow 40 = a_p \times 4 \Leftrightarrow a_p = 10.$$

Assim,  $b_8 = a_p = 10$ .

A razão da progressão  $(b_n)$  é  $a_{p+1} + 45 - a_p$ , ou seja,  $40 + 45 - 10 = 75$ .

Logo,  $b_n = 10 + (n - 8) \times 75 = 75n - 590$ .

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \frac{b_8 + b_{k+7}}{2} \times k = 5980 &\Leftrightarrow \frac{10 + 75(k+7) - 590}{2} \times k = 5980 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{75k - 55}{2} \times k = 5980 \Leftrightarrow 75k^2 - 55k - 11960 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 15k^2 - 11k - 2392 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 15 \times (-2392)}}{2 \times 15} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow k = \frac{11 \pm 379}{30} \Leftrightarrow k = \frac{11 - 379}{30} \vee k = \frac{11 + 379}{30} \\
 &\Leftrightarrow k = -\frac{184}{15} \vee k = 13
 \end{aligned}$$

Como  $k \in \mathbb{N}^+$ ,  $k = 13$ .

**40.** O comprimento de cada salto que o João dá é maior do que a soma dos comprimentos de todos os saltos anteriores. Desta forma, o João não conseguirá voltar ao ponto de partida.

Com efeito, sendo  $u_n = 2^{n-1}$ , tem-se  $u_n > S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ , já que

$$S_{n-1} = 1 \times \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} = 2^{n-1} - 1 < 2^{n-1} = u_n.$$

## PÁG. 118

### Aplicar +

#### 41.

(A)  $\frac{3^n}{5} = \frac{1}{5} \times 3^n$  crescente

(B)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} = 2^{n-1}$  crescente

(C)  $\frac{3^{n-2}}{2^{n-3}} = \frac{3^n \times 3^{-2}}{2^n \times 2^{-3}} = \frac{8}{9} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$  crescente

(D)  $\frac{5^n}{2^{3n}} = \frac{5^n}{(2^3)^n} = \left(\frac{5}{8}\right)^n$  decrescente

Opção correta: **(D)**

#### 42.

(A)  $r = \frac{3}{4}$  e  $0 < \frac{3}{4} < 1$ , soma finita

(B)  $\frac{3^{3n}}{4^{2n}} = \frac{(3^3)^n}{(4^2)^n} = \left(\frac{27}{16}\right)^n$  e  $r = \frac{27}{16} > 1$ , soma infinita

(C)  $\left(\frac{5}{3}\right)^{2-n} = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$ ,  $r = \frac{3}{5}$  e  $0 < \frac{3}{5} < 1$ , soma finita

(D)  $\frac{3^{-2n}}{5^{-n}} = \frac{5^n}{(3^2)^n} = \left(\frac{5}{9}\right)^n$ ,  $r = \frac{5}{9}$  e  $0 < r = \frac{5}{9} < 1$ , soma finita

Opção correta: **(B)**

$$43.1 \quad w_{n+1} = \frac{w_n}{5} \Leftrightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{5}$$

$(w_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{5}$ .

$$S_{10} = 20 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{5}} = 25 \times \frac{5^{10} - 1}{5^{10}} = \frac{5^{10} - 1}{5^8} = \frac{9\,765\,624}{390\,625}$$

43.2 Como  $0 < \frac{1}{5} < 1$ , a soma é finita.

$$\text{Assim, } S_n = 20 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = 20 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}} = 25 \times \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \text{ tende para } 25 \times (1 - 0), \text{ e, portanto,}$$

a soma de todos os termos de  $(w_n)$  é 25.

$$44.1 \quad r^3 = \frac{u_7}{u_4} \Leftrightarrow r^3 = \frac{2048}{\frac{3}{32}} \Leftrightarrow r^3 = \frac{2592}{6144} \Leftrightarrow r = \frac{3}{4}$$

$$u_1 = \frac{32}{r^3} \Leftrightarrow u_1 = \frac{32}{\frac{3}{6144}} \Leftrightarrow u_1 = \frac{18432}{3} \Leftrightarrow u_1 = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{2}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{2}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{9} \times \left(1 - \frac{3^{10}}{4^{10}}\right) = \\ &= \frac{8}{9} \times \left(\frac{4^{10} - 3^{10}}{4^{10}}\right) = \frac{2}{9} \times \left(\frac{4^{10} - 3^{10}}{4^9}\right) = \frac{2}{9} \times \frac{989\,527}{262\,144} = \frac{989\,527}{1\,179\,648} \end{aligned}$$

44.2 É possível, pois  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{3}{4}$  e, como  $0 < \frac{3}{4} < 1$ , a soma de todos os termos de  $(u_n)$  é finita.

$$S_n = \frac{2}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{2}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{9} \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \text{ tende para } \frac{8}{9} \times (1 - 0), \text{ ou seja, a soma de todos os}$$

termos de  $(u_n)$  é  $\frac{8}{9}$ .

45. A sucessão do número de intervalos retirados na iteração  $n$  é  $2^{n-1}$  e a sucessão das amplitudes de cada intervalo retirado na iteração  $n$  é  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

A soma das amplitudes dos intervalos retirados na iteração  $n$  é  $\left(\frac{1}{3}\right)^n \times 2^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times 2^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

e a soma das amplitudes de todos os intervalos retirados é  $\frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$  e tende para  $1 - 0$ , ou

seja, a soma das amplitudes de todos os intervalos retirados é 1.

**PÁG. 122****Autoavaliação****1.**

- (A) 2, 4, 6, ..., 2n sucessão dos números pares  
 (B) 3, 6, 9, ..., 3n sucessão dos múltiplos de 3  
 (C) 1, 3, 5, ..., 2n - 1 sucessão dos números ímpares  
 (D) 2, 5, 8, ..., 3n - 1 sucessão dos múltiplos de 3 subtraídos de 1

Opção correta: **(C)****2.**

- (A)  $\frac{2(n+1)}{2n} = \frac{2n+2}{2n} = 1 + \frac{1}{n}$  não é constante, pelo que não é progressão geométrica.  
 (B)  $\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ , pelo que é progressão geométrica de razão 2.  
 (C)  $\frac{3(n+1)-1}{3n-1} = \frac{3n+2}{3n-1}$  não é constante, pelo que não é progressão geométrica.  
 (D)  $\frac{3^{n+1}-1}{3^n-1}$  não é constante, pelo que não é progressão geométrica.

Opção correta: **(B)**

- 3.**  $u_{n+1} = u_n - 3 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -3$ , pelo que é uma progressão aritmética de razão -3.

Opção correta: **(B)**

- 4.**  $10^2 - 10 = 90$

Opção correta: **(A)**

- 5.**  $u_8 + u_{20} = 11 \Leftrightarrow u_{12} - 4r + u_{12} + 8r = 11 \Leftrightarrow 2u_{12} + 4r = 11 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2 \times 5 + 4r = 11 \Leftrightarrow 4r = 11 - 10 \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}$

$$u_n = 5 + (n - 12) \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{4}n + 2$$

- 6.1**  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$ , pelo que é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ .

- 6.2** A soma é finita, pois  $r = \frac{1}{2}$ .

$$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \text{ tende para } \frac{1}{2} \times (1 - 0), \text{ ou seja, a soma de todos os}$$

termos de  $(v_n)$  é  $\frac{1}{2}$ .

7. Os números de células em cada hora após a primeira subdivisão são termos de uma progressão geométrica de razão 2 .

Assim, um dia após a primeira subdivisão o número total de células é  $2 \times 2^{24} = 2^{25} = 33\,554\,432$  .

8.1  $a_4 = \frac{7}{8}$  e  $a_5 = \frac{9}{10}$

8.2

|                      |   |  |
|----------------------|---|--|
| $a_1 = \frac{1}{2}$  | $a_{n+1} - a_n$   | $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  |
| $a_2 = \frac{3}{4}$  | $a_2 - a_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$   | $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$    |
| $a_3 = \frac{5}{6}$  | $a_3 - a_2 = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$  | $\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{10}{9}$   |
| $a_4 = \frac{7}{8}$  | $a_4 - a_3 = \frac{7}{8} - \frac{5}{6} = \frac{1}{24}$  | $\frac{a_4}{a_3} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{5}{6}} = \frac{21}{20}$  |
| $a_5 = \frac{9}{10}$ | $a_5 - a_4 = \frac{9}{10} - \frac{7}{8} = \frac{1}{40}$ | $\frac{a_5}{a_4} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{7}{8}} = \frac{36}{35}$ |

$(a_n)$  não é uma progressão, porque nem a diferença nem a razão entre dois termos consecutivos é constante.

8.3  $a_n = \frac{2n-1}{2n}$  , dado que no numerador se encontra a sucessão dos números ímpares e no denominador a sucessão dos números pares;  $a_{10} = \frac{2 \times 10 - 1}{2 \times 10} = \frac{19}{20}$  .

9.1

| n | Raio          | Comprimento   |
|---|---------------|---|
| 1 | 1             | $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 1 = \pi$                      |
| 2 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\pi$ |
| 3 | 2             | $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = 2\pi$                     |
| 4 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\pi$ |
| 5 | 3             | $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 3 = 3\pi$                     |

9.2 O diâmetro de cada semicircunferência, à exceção do primeira, tem mais 1 unidade do que o anterior, pelo que se  $d_n$  for o diâmetro da semicircunferência de ordem  $n$  ,  $(d_n)$  é uma progressão aritmética de razão 1 . Como  $d_1 = 2$  ,  $d_n = 2 + (n - 1) \times 1 = n + 1$  .

A sucessão dos comprimentos das semicircunferências também é uma progressão aritmética de razão  $\frac{\pi}{2}$  e o comprimento da semicircunferência de ordem  $n$  é dado por  $\frac{d_n \times \pi}{2}$ .

Assim, o comprimento da primeira semicircunferência é  $\frac{d_1 \times \pi}{2} = \frac{2 \times \pi}{2} = \pi$  e o da 20.ª é

$$\frac{d_{20} \times \pi}{2} = \frac{(20+1)\pi}{2} = \frac{21\pi}{2}.$$

Logo, o comprimento total da espiral é  $S_{20} = \frac{\pi + \frac{21}{2}\pi}{2} \times 20 = 115\pi$ .

$$10.1 \quad u_n = -\frac{4\left(n + \frac{3}{2}\right)\left(2n - \frac{5}{2}\right)}{2n+3} = -\frac{4\left(\cancel{n + \frac{3}{2}}\right)\left(2n - \frac{5}{2}\right)}{2\left(\cancel{n + \frac{3}{2}}\right)} = -2\left(2n - \frac{5}{2}\right) = -4n + 5.$$

$u_{n+1} - u_n = -4(n+1) + 5 - (-4n + 5) = -4n - 4 + 5 + 4n - 5 = -4$ , pelo que  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $-4$ .

$$10.2 \quad u_1 = -4 \times 1 + 5 = 1 \text{ e } u_k = -4k + 5.$$

$$\begin{aligned} S_k = -740 &\Leftrightarrow \frac{1 - 4k + 5}{2} \times k = -740 \Leftrightarrow (6 - 4k)k = -1480 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6k - 4k^2 + 1480 = 0 \Leftrightarrow -2k^2 + 3k + 740 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-2) \times 740}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 77}{-4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \frac{-3 - 77}{-4} \vee k = \frac{-3 + 77}{-4} \Leftrightarrow k = 20 \vee k = -\frac{37}{2} \end{aligned}$$

Como  $k \in \mathbb{N}^+$ , concluímos que  $k = 20$ .

$$10.3 \quad S = \frac{u_{17} + u_{27}}{2} \times 11 = \frac{-63 - 103}{2} \times 11 = -913$$

$$\begin{aligned} 11. \quad u_3 + u_4 = \frac{16}{3} &\Leftrightarrow u_2 \times r + u_2 \times r^2 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow 12r + 12r^2 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 36r^2 + 36r - 16 = 0 \Leftrightarrow 9r^2 + 9r - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 9 \times (-4)}}{2 \times 9} \Leftrightarrow r = \frac{-9 \pm 15}{18} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-9 - 15}{18} \vee r = \frac{-9 + 15}{18} \Leftrightarrow r = -\frac{4}{3} \vee r = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Como  $(u_n)$  tem termos positivos, conclui-se que  $r = \frac{1}{3}$ .

O 1.º termo é  $\frac{12}{\frac{1}{3}} = 36$  e o termo geral é  $36 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ .

$$\begin{aligned} 36 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{243} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2187} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^7} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^7 \Leftrightarrow n - 1 = 7 \Leftrightarrow n = 8 \end{aligned}$$

**PÁG. 124****Começar a preparar o exame**

$$\begin{aligned}
 1. \quad u_3 = v_2 &\Leftrightarrow \frac{5 \times 3 + a}{3 \times 3 + 1} = 7 - 3 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{15 + a}{10} = 7 - 3 \operatorname{sen} \left( \frac{7\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{15 + a}{10} = 7 + 3 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \frac{15 + a}{10} = 7 + 3 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{15 + a}{10} = \frac{17}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2(15 + a) = 17 \times 10 \Leftrightarrow 30 + 2a = 170 \Leftrightarrow a = \frac{170 - 30}{2} \Leftrightarrow a = 70
 \end{aligned}$$

Opção correta: **(B)**

$$\begin{aligned}
 2. \quad w_3 = -\frac{55}{9} &\Leftrightarrow 8u_2 - w_2 = -\frac{55}{9} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 8 \times \frac{2 - 5 \times 2}{2 + 7} - (8u_1 - w_1) = -\frac{55}{9} \Leftrightarrow 8 \times \left( -\frac{8}{9} \right) - \left( 8 \times \frac{2 - 5 \times 1}{1 + 7} - a \right) = -\frac{55}{9} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\frac{64}{9} - 8 \times \left( -\frac{3}{8} \right) + a = -\frac{55}{9} \Leftrightarrow -\frac{64}{9} + 3 + a = -\frac{55}{9} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\frac{37}{9} + a = -\frac{55}{9} \Leftrightarrow a = -\frac{55}{9} + \frac{37}{9} \Leftrightarrow a = -2
 \end{aligned}$$

Opção correta: **(A)**

$$3. \text{ Para } N=1, S_1 = -\frac{5 \times 1^2 + 3 \times 1}{2} = -4, \text{ ou seja, } v_1 = -4;$$

$$\text{para } N=2, S_2 = -\frac{5 \times 2^2 + 3 \times 2}{2} = -13, \text{ ou seja, } \frac{v_1 + v_2}{2} \times 2 = -13.$$

$$\text{Assim, } \frac{-4 + v_2}{2} \times 2 = -13 \Leftrightarrow v_2 = -13 + 4 \Leftrightarrow v_2 = -9,$$

$$r = -9 - (-4) = -5 \text{ e } v_{12} = -4 + 11 \times (-5) \Leftrightarrow v_{12} = -59.$$

Opção correta: **(B)**

$$4. \quad u_1 + u_5 = 26 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 4r = 26 \Leftrightarrow 2u_1 + 4r = 26 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 13$$

$$u_9 = 31 \Leftrightarrow u_1 + 8r = 31 \Leftrightarrow 13 - 2r + 8r = 31 \Leftrightarrow 6r = 31 - 13 \Leftrightarrow r = 3$$

$$u_1 = 13 - 2 \times 3 \Leftrightarrow u_1 = 7$$

$$u_n = 7 + (n - 1) \times 3 = 3n + 4$$

$$u_n = 835 \Leftrightarrow 3n + 4 = 835 \Leftrightarrow n = \frac{835 - 4}{3} \Leftrightarrow n = 277$$

Sim, 835 é o termo de ordem 277 da progressão.

$$5. \quad v_{10} = \frac{5}{4} v_9 \Leftrightarrow v_9 + r = \frac{5}{4} v_9 \Leftrightarrow v_9 - \frac{5}{4} v_9 + r = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} v_9 + r = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} (v_3 + 6r) + r = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} v_3 - \frac{6}{4} r + r = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \times 1 - \frac{2}{4} r = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} = \frac{1}{2} r \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$$

$$v_n = 1 + (n-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow v_n = -\frac{1}{2}n + \frac{5}{2}$$

$$v_n = -50 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}n + \frac{5}{2} = -50 \Leftrightarrow -n + 5 = -100 \Leftrightarrow n = 105$$

Sim,  $-50$  é o termo de ordem  $105$  da progressão.

$$6. u_{30} + u_{40} = 40 \Leftrightarrow u_1 + 29r + u_1 + 39r = 40 \Leftrightarrow 2u_1 + 68r = 40 \Leftrightarrow u_1 + 34r = 20$$

$$6.1 \frac{u_{10} + u_{60}}{2} \times 51 = \frac{u_1 + 9r + u_1 + 59r}{2} \times 51 = \frac{2u_1 + 68r}{2} \times 51 = \frac{40}{2} \times 51 = 1020$$

Opção correta: **(B)**

$$6.2 u_{10} = 5r \Leftrightarrow u_1 + 9r = 5r \Leftrightarrow u_1 = -4r$$

$$u_1 + 34r = 20 \Leftrightarrow -4r + 34r = 20 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$u_1 = -4 \times \frac{2}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$u_n = -\frac{8}{3} + (n-3) \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow u_n = \frac{2}{3}n - \frac{10}{3} \Leftrightarrow u_n = \frac{2n-10}{3}$$

## PÁG. 125

### Começar a preparar o exame

$$7. u_1 + u_2 + u_3 = 9 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + r + u_1 + 2r = 9 \Leftrightarrow 3u_1 + 3r = 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_1 + r = 3 \Leftrightarrow u_1 = 3 - r$$

$$u_5 + u_{14} = 66 \Leftrightarrow u_1 + 4r + u_1 + 13r = 66 \Leftrightarrow 2u_1 + 17r = 66 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(3 - r) + 17r = 66 \Leftrightarrow 6 - 2r + 17r = 66 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 15r = 60 \Leftrightarrow r = 4$$

$$u_1 = 3 - 4 = -1$$

$$u_n = -1 + (n-1) \times 4 = 4n - 5$$

$$\text{A soma dos cinquenta primeiros termos de } (u_n) \text{ é } \frac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 = \frac{-1 + 195}{2} \times 50 = 4850.$$

Os termos de  $(v_n)$  repetem-se de quatro em quatro:  $0, -1, 0, 1, \dots$

A soma dos cinquenta primeiros termos de  $(v_n)$  é  $v_{49} + v_{50} = 0 + (-1) = -1$ .

A soma dos cinquenta primeiros termos de  $(w_n)$  é  $4850 + (-1) = 4849$ .

## 8.

Se  $(v_n)$  for progressão aritmética de razão  $r$ , então  $v_8 - v_6 = 2r \Leftrightarrow 9 - 3 = 2r \Leftrightarrow r = 3$ ;

se  $(v_n)$  for progressão geométrica de razão  $r$ , então  $r^2 = \frac{v_8}{v_6} \Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{3} \Leftrightarrow r = -\sqrt{3} \vee r = \sqrt{3}$ .

Opção correta: **(D)**

$$9.1 \quad 5v_{n+1} = v_n \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5}$$

$$v_1 = \frac{5^{5-4 \times 1}}{125^{2-1}} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{5^{5-4(n+1)}}{125^{2-(n+1)}}}{\frac{5^{5-4n}}{125^{2-n}}} = \frac{5^{5-4n-4} \times 125^{2-n}}{5^{5-4n} \times 125^{2-n-1}} = 5^{5-4n-4-5+4n} \times 125^{2-n-2+n+1} = \frac{1}{5}$$

$$9.2 \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5}, \text{ pelo que é uma progressão geométrica de razão } \frac{1}{5}.$$

$$9.3 \quad S = 5^{-4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^6}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{5^4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^6}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4 \times 5^3} \times \left(1 - \frac{1}{5^6}\right) =$$

$$= \frac{1}{4 \times 5^3} \times \left(\frac{5^6 - 1}{5^6}\right) = \frac{5^6 - 1}{4 \times 5^9}$$

$$10. \quad S_5 = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \frac{2}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1 - \frac{2^5}{3^5}}{\frac{1}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{3^5 - 2^5}{3^5} = 211 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 \times \frac{(3^5 - 2^5) \times 3}{3^5} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{3^5 - 2^5}{3^4} = 211 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{211 \times 3^4}{3^5 - 2^5} \Leftrightarrow u_1 = \frac{211 \times 3^4}{211} \Leftrightarrow u_1 = 3^4$$

$$u_5 = 3^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 2^4 = 16$$

## PÁG. 126

### Começar a preparar o exame

**11.1** Cada fila, a partir da primeira, tem menos três cartas do que a fila imediatamente anterior, pelo que a sequência em cada termo é o número de cartas colocadas em cada fila e é uma progressão aritmética de razão  $-3$ .

**11.2** Sendo  $u_n$  o número de cartas colocadas em cada fila, já vimos que  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $-3$ . Como  $u_{100} = 2$ , então  $u_1 = u_{100} - 99 \times (-3) = 299$ .

O número total de cartas é  $\frac{2+299}{2} \times 100 = 301 \times 50 = 15\,050$ .

$$12. \quad u_{n+1} = u_n + 6 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 6$$

$(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $6$ .

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_6}{u_2} \Leftrightarrow \frac{u_1 + 6}{u_1} = \frac{u_1 + 5 \times 6}{u_1 + 6} \Leftrightarrow (u_1 + 6)^2 = u_1(u_1 + 30) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1^2 + 12u_1 + 36 = u_1^2 + 30u_1 \Leftrightarrow 36 = 18u_1 \Leftrightarrow u_1 = 2$$

A soma dos doze termos consecutivos de  $(u_n)$  a partir do décimo, incluindo-o, é

$$\frac{u_{10} + u_{21}}{2} \times 12 = (2 + 9 \times 6 + 2 + 20 \times 6) \times 6 = 178 \times 6 = 1068.$$

$$13. \quad u_2 = u_8 + 6 \Leftrightarrow u_1 + r = u_1 + 7r + 6 \Leftrightarrow -6r = 6 \Leftrightarrow r = -1$$

$$13.1 \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{16^{n+1}}{8^{-2u_{n+1}+1}}}{\frac{16^n}{8^{-2u_n+1}}} = \frac{16^{n+1} \times 8^{-2u_n+1}}{16^n \times 8^{-2u_{n+1}+1}} = 16^{n+1-n} \times 8^{-2u_n+1+2u_{n+1}-1} =$$

$$= 16 \times 8^{2u_{n+1}-2u_n} = 2^4 \times (2^3)^{2(u_{n+1}-u_n)} = 2^4 \times (2^3)^{2(-1)} = 2^{4-6} = \frac{1}{4}$$

$$13.2 \quad v_3 = \frac{16^3}{8^{-2u_3+1}} = \frac{16^3}{8^{-2 \times 0+1}} = \frac{16^3}{8} = \frac{(2^4)^3}{2^3} = 2^9$$

$$2^9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^6}{1 - \frac{1}{4}} = 2^9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^6}{\frac{3}{4}} = \frac{2^9 \times 4}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^6}\right) = \frac{(2^9 \times 4)(4^6 - 1)}{3 \times 4^6} =$$

$$= \frac{2^9 \times 2^2 \times [(2^2)^6 - 1]}{3 \times (2^2)^6} = \frac{2^{11}(2^{12} - 1)}{3 \times 2^{12}} = \frac{2^{12} - 1}{3 \times 2} = \frac{1365}{2}$$

13.3 É possível determinar a soma de todos os termos de  $(v_n)$  porque  $r = \frac{1}{4}$  e  $0 < \frac{1}{4} < 1$ .

$$S_n = v_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} v_1 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \text{ tende para } \frac{4}{3} v_1 \times (1 - 0) = \frac{4}{3} v_1$$

Se a soma de todos os termos de  $(v_n)$  for 4, então  $\frac{4}{3} v_1 = 4 \Leftrightarrow v_1 = 3$ .

## PÁG. 127

### Começar a preparar o exame

14.1 Os comprimentos dos segmentos de reta da linha poligonal posicionados na horizontal são termos consecutivos de uma progressão aritmética de 1.º termo 8 e razão 6.

Uma expressão do termo geral da progressão é  $8 + (n - 1) \times 6 = 6n + 2$ .

Substituindo  $n$  por 13, obtém-se  $6 \times 13 + 2 = 80$  cm.

14.2 Os comprimentos dos segmentos de reta da linha poligonal são termos consecutivos de uma progressão aritmética de 1.º termo 5 e razão 3.

Uma expressão do termo geral da progressão é  $5 + (n - 1) \times 3 = 3n + 2$ .

Uma expressão da soma dos  $n$  primeiros termos da progressão é  $\frac{5 + 3n + 2}{2} \times n = \frac{3n + 7}{2} \times n$ .

$$\begin{aligned} \frac{3n+7}{2} \times n = 1550 &\Leftrightarrow 3n^2 + 7n - 3100 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 3 \times (-3100)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm 193}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-7 - 193}{6} \vee n = \frac{-7 + 193}{6} \Leftrightarrow n = -\frac{100}{3} \vee n = 31 \end{aligned}$$

Se o comprimento total da linha poligonal for 15,5 m, será constituída por 31 segmentos de reta.

**15.1** Os comprimentos dos lados das bases maiores dos troncos de pirâmide são termos consecutivos de uma progressão aritmética de 1.º termo 55 e razão  $-5,25$ .

O tronco superior é o nono e o comprimento pedido é  $55 + 8 \times (-5,25) = 13$  metros.

**15.2** Seja  $(t_n)$  a sucessão dos tempos que o turista fica no degrau  $n$ .

Como o quociente entre o tempo em que o turista ficou num degrau e o tempo em que ficou no degrau anterior é 1,05, conclui-se que  $(t_n)$  é uma progressão geométrica de razão 1,05.

O tempo que o turista demorou a subir toda a escadaria é a soma dos 91 primeiros termos da progressão:

$$S_{91} = 0,5 \times \frac{1 - 1,05^{91}}{1 - 1,05} = 0,5 \times \frac{1 - 84,767}{-0,05} \approx 837,67 \text{ s}$$

$837,67 : 60 \approx 14$  minutos

**16.** A sequência dos raios das semicircunferências pode ser definida por  $r_n = 2^{n-1}$  e a sequência dos comprimentos das semicircunferências pode ser definida por  $c_n = \frac{1}{2} \times 2\pi \times r_n = \pi \times 2^{n-1}$ .

$(c_n)$  é uma progressão geométrica de 1.º termo  $c_1 = \pi \times 2^{1-1} = \pi$  e razão  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\pi \times 2^{n+1-1}}{\pi \times 2^{n-1}} = 2$ .

O comprimento total das 25 semicircunferências é a soma dos 25 primeiros termos da sequência:

$$S_{25} = \pi \times \frac{1 - 2^{25}}{1 - 2} = \pi \times 33\,554\,431 \approx 1,0541 \times 10^8 \approx 1054 \text{ km}$$

## PÁG. 128

### Começar a preparar o exame

**17.** Como cada segmento de reta tem mais 2 cm do que o anterior, a sequência dos comprimentos dos segmentos, em centímetros, é uma progressão aritmética de razão 2.

Como o comprimento total da linha poligonal, construída até ao 100.º segmento, é 104 metros, ou seja, 10 400 centímetros, temos que a soma dos 100 primeiros termos é 10 400.

Designando por  $u_1$  o primeiro termo, temos que o termo de ordem 100 da sequência é

$$u_{100} = u_1 + 99r = u_1 + 99 \times 2 = u_1 + 198.$$

$$S_{100} = 10\,400 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 = 10\,400 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_1 + 198}{2} \times 100 = 10\,400 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2u_1 + 198}{2} = \frac{10\,400}{100} \Leftrightarrow 2u_1 + 198 = 104 \times 2 \Leftrightarrow 2u_1 = 208 - 198 \Leftrightarrow u_1 = 5$$

Logo, o comprimento do segmento de reta  $[AB]$  é 5 cm.

**18.1** Seja  $(r_n)$  a sequência dos raios das circunferências.

$(r_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$  e 1.º termo  $\frac{1}{2} \times 4 = 2$  :

$$r_n = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

A área da  $n$ ésima região sombreada da figura é dada por:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\pi \times r_n^2}{2} - \frac{\pi \times r_{n+1}^2}{2} = \frac{\pi(r_n^2 - r_{n+1}^2)}{2} = \\ &= \frac{\pi \left[ \left(4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 - \left(4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)^2 \right]}{2} = \frac{\pi \left[ 4^2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 - 4^2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right]}{2} = \\ &= \frac{\pi \left[ 16 \left(\frac{1}{4}\right)^n - 16 \times \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n \right]}{2} = \frac{(16\pi - 4\pi) \left(\frac{1}{4}\right)^n}{2} = 6\pi \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

**18.2**  $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{6\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{6\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4}$  e  $A_1 = 6\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{3}{2}\pi$ .

$$S_n = \frac{3}{2}\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\pi \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 2\pi \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

de todos os termos de  $(A_n)$  é  $2\pi$ .

**19.**  $\frac{2}{a} = \frac{8}{a^2} \Leftrightarrow \frac{2}{a^2} = \frac{8a}{2a^2} \Leftrightarrow \frac{2}{a^2} = \frac{4}{a} \Leftrightarrow 4a^2 = 2a \Leftrightarrow 4a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a(2a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$$

Como  $a$  é um número real não nulo, conclui-se que  $a = \frac{1}{2}$ .

$$u_3 = \frac{2}{a} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$u_1 = u_3 - 2r = 4 - 2r$  e  $u_{20} = u_3 + 17r = 4 + 17r$ , sendo  $r$  a razão da progressão aritmética  $(u_n)$ .

$$S_{20} = 1130 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = 1130 \Leftrightarrow \frac{4 - 2r + 4 + 17r}{2} \times 20 = 1130 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 + 15r}{2} = \frac{1130}{20} \Leftrightarrow 8 + 15r = 113 \Leftrightarrow 15r = 113 - 8 \Leftrightarrow r = \frac{105}{15} \Leftrightarrow r = 7$$

$$u_n = 4 + (n - 3) \times 7 = 7n - 17$$

$$7n - 17 = 228 \Leftrightarrow n = \frac{228 + 17}{7} \Leftrightarrow n = 35$$

228 é o termo de ordem 35 de  $(u_n)$ .

**PÁG. 129****Começar a preparar o exame**

$$20. \quad 3 - a = a^2 - 3 = r_1$$

$$\frac{a^2}{a} = r_2 \Leftrightarrow a = r_2$$

Como a progressão geométrica é não monótona, a sua razão é negativa.

$$20.1 \quad 3 - a = a^2 - 3 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-6)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow a = \frac{-1 - 5}{2} \vee a = \frac{-1 + 5}{2} \Leftrightarrow a = -3 \vee a = 2$$

Como  $r_2 < 0$  e  $r_2 = a$ , conclui-se que  $a = -3$ , ou seja,  $r_2 = -3$ .

Por outro lado,  $r_1 = 3 - a = 3 - (-3) = 6$ .

$$20.2 \quad u_n = \frac{r_2 n + r_1}{2n + 1} = \frac{-3n + 6}{2n + 1}$$

$$u_n = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{-3n + 6}{2n + 1} = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow 5(-3n + 6) = -6(2n + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -15n + 30 = -12n - 6 \Leftrightarrow -15n + 12n = -6 - 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3n = -36 \Leftrightarrow n = 12$$

Sim,  $-\frac{6}{5}$  é o termo de ordem 12 da sucessão  $(u_n)$ .

**21.1**

| Termo | Quadrados      |
|-------|----------------|
| 1     | $1 = 2^1 - 1$  |
| 2     | $3 = 2^2 - 1$  |
| 3     | $7 = 2^3 - 1$  |
| 4     | $15 = 2^4 - 1$ |

Observando o que se verifica nos quatro primeiros termos podemos conjecturar que o número de quadrados da árvore de ordem 1000 é  $2^{1000} - 1$ . Vejamos que assim é.

Em cada passo do processo de construção, o número de quadrados acrescentados é o dobro do número de quadrados acrescentados no passo anterior.

Designando por  $(a_n)$  a sucessão do número de quadrados acrescentados, tem-se  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$ , ou seja,

$$a_n = 2^{n-1}.$$

O número total de quadrados da árvore de ordem 1000 é dado pela soma dos 1000 primeiros termos

$$\text{de } (a_n) : 1 \times \frac{1 - 2^{1000}}{1 - 2} = 2^{1000} - 1.$$

**21.2** Sejam  $l_n$  a medida do lado do quadrado do termo de ordem  $n$  e  $l_{n+1}$  a medida do lado do quadrado do termo de ordem  $n+1$ . Tem-se  $l_n^2 = l_{n+1}^2 + l_{n+1}^2 \Leftrightarrow l_n^2 = 2l_{n+1}^2 \Leftrightarrow l_{n+1}^2 = \frac{1}{2} l_n^2$ .

A sucessão das áreas de cada quadrado acrescentado é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$  e

$$1.^\circ \text{ termo } 1 : A_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Como são acrescentados  $2^{n-1}$  quadrados, a soma das suas áreas é  $A_n \times 2^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times 2^{n-1} = 1$ .

### PÁG. 130

#### Teste global

1.  $C\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$$A_{[OBC]} = \frac{\overline{BC} \times y_C}{2} = \frac{2|x_C| \times y_C}{2} = \left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right| \times \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Opção correta: **(A)**

2.  $3x + 4y = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

$$\cos(r, t) = \frac{|(4, -3) \cdot (1, 0)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2} \times \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{4}{5}, \quad (r, t) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 37^\circ$$

Opção correta: **(A)**

3. Em cada dia, pode ser escolhido um de treze nomes. Portanto, aplicando o princípio da multiplicação, o número de sequências que podem ser geradas é  $13^7$ , o que corresponde a  ${}^{13}A_7$  (é uma escolha ordenada de sete amigos entre os treze, com eventuais repetições).

Opção correta: **(D)**

4. Se os números são pares, terminam em 2, 4, 6 ou 8.

1.º caso: termina em 4

Há quatro possibilidades para colocar o outro 4.

Nas três posições restantes poderá ficar qualquer um dos oito restantes algarismos, sem repetições. O número de maneiras de fazer esta distribuição é  ${}^8A_3$ .

Neste caso, há  $4 \times {}^8A_3 = 1344$  números.

2.º caso: termina em 2, 6 ou 8

Há três possibilidades para a escolha do algarismo das unidades.

Para escolher as posições dos dois 4, há  ${}^4C_2$  possibilidades.

Nas duas posições restantes poderá ficar qualquer um dos sete algarismos restantes, sem repetição.

O número de maneiras de fazer esta distribuição é  ${}^7A_2$ .

Neste caso, há  $3 \times {}^4C_2 \times {}^7A_2 = 756$  números.

Logo, há  $1344 + 756 = 2100$  números nas condições dadas.

Opção correta: **(C)**

**PÁG. 131**

5.  $v_2 = 2v_1 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$ ,  $v_3 = 2v_2 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13$

$$w_3 = v_2 \Leftrightarrow \frac{v_3 + a}{3 + 1} = 5 \Leftrightarrow \frac{13 + a}{4} = 5 \Leftrightarrow a = 5 \times 4 - 13 \Leftrightarrow a = 7$$

Opção correta: **(D)**

**6.**

|                         |   |   |   |    |     |          |
|-------------------------|---|---|---|----|-----|----------|
| <b>Círculos brancos</b> | 1 | 4 | 9 | 16 | ... | $n^2$    |
| <b>Círculos pretos</b>  | 3 | 5 | 7 | 9  | ... | $2n + 1$ |

$$100^2 - (2 \times 100 + 1) = 9799$$

Opção correta: **(B)**

**7.1** Como a reta que contém a altura da pirâmide é perpendicular à sua base, um vetor diretor da reta é normal ao plano que contém a base.

Assim, uma equação do plano  $ABC$  é da forma  $0x + 6y - 8z + d = 0$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $6y - 8z + d = 0$ ,  $d \in \mathbb{R}$ .

Como o plano  $ABC$  contém a origem do referencial,  $6 \times 0 - 8 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$ .

Logo, uma equação do plano  $ABC$  é  $6y - 8z = 0 \Leftrightarrow 3y - 4z = 0$ .

**7.2** O centro da base da pirâmide é o ponto de interseção da reta que contém a altura da pirâmide com o plano que contém a sua base.

Os pontos da reta que contém a altura da pirâmide têm coordenadas da forma  $(5, 7 + 6k, -1 - 8k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Substituindo na equação do plano  $ABC$ , obtém-se

$$3(7 + 6k) - 4(-1 - 8k) = 0 \Leftrightarrow 21 + 18k + 4 + 32k = 0 \Leftrightarrow 50k + 25 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

O centro da base da pirâmide é o ponto de coordenadas  $(5, 7 + 6(-\frac{1}{2}), -1 - 8(-\frac{1}{2}))$ , ou seja,  $(5, 4, 3)$ .

Designemos por  $E$  o centro da base da pirâmide.

Tem-se  $\overline{OE} = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{50}$ . Assim,  $\overline{OB} = 2\sqrt{50}$   
e  $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow (2\sqrt{50})^2 = 2\overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 100$ .

Por outro lado,  $\overline{DE} = \sqrt{(5 - 5)^2 + (13 - 4)^2 + (-9 - 3)^2} = 15$ .

Logo,  $V = \frac{1}{3} \times 100 \times 15 = 500$ .

**8.**  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \text{tg}(-\alpha) = \text{sen } \alpha - \text{tg } \alpha$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 12 &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} = 12 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} = 12 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} = 12 \Leftrightarrow -\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 - 9 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -3 \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-3}{3 \times 3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Como } 0 < \alpha < \pi, \text{ sen } \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

$$\text{sen } \alpha - \text{tg } \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} - (-2\sqrt{2}) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

9. I - a.; II - c.; III - a.; IV - b.

$$f(x) = 1 - 3 \cos(4x - \pi) = 1 + 3 \cos(4x)$$

O período positivo mínimo da função  $f$  é  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 3 \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) = -\frac{1}{3}$$

Em  $]-\pi, \pi[$  existem dois objetos tal que  $\cos x = -\frac{1}{3}$ , pelo que nesse intervalo existem oito objetos tal que  $\cos(4x) = -\frac{1}{3}$ .

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(4x) \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos(4x) \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 3 \leq 1 + 3 \cos(4x) \leq 1 + 3 \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 4, \text{ pelo que } D_f = [-2, 4]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = -2 &\Leftrightarrow 1 + 3 \cos(4x) = -2 \Leftrightarrow \cos(4x) = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

10.

$$\underbrace{6 \times {}^3C_2 \times 2!}_{\text{vogais}} \times \underbrace{{}^5C_3}_{\text{três 3}} \times \underbrace{{}^9C_2 \times 2}_{\text{restantes}} = 25\,920$$

As vogais podem ocupar as seis posições: 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, 4 e 5, 5 e 6, 6 e 7. Para cada uma destas posições, existem  ${}^3C_2 \times 2!$  de escolher duas das três vogais do conjunto e, em seguida, permutá-las pelas duas posições escolhidas. Para cada uma destas maneiras de dispor as vogais, existem  ${}^5C_3$  maneiras de escolher três das restantes cinco posições para os três 3. Finalmente, para as restantes duas posições, escolhem-se, ordenadamente, dois dos restantes nove algarismos.

11.1 Com dois símbolos iguais, há 10 peças.

Nas peças com dois símbolos diferentes, cada um dos 10 símbolos conjuga-se com os outros 9. Assim, com dois símbolos diferentes há  $\frac{10 \times 9}{2} = 45$  peças (divide-se por 2 porque ao fazer  $10 \times 9$  cada peça é contabilizada duas vezes). Alternativamente, dos dez símbolos escolhem-se dois, o número de maneiras de o fazer é  ${}^{10}C_2 = 45$ .

Logo, o dominó tem  $10 + 45 = 55$  peças.

**11.2** Vamos designar por  $(x, y)$  uma peça deste dominó, em que a ordem é irrelevante, e  $x$  e  $y$  designam o número de pintas de cada lado da peça.

As peças cujo total de pintas é 8 são  $(0, 8)$ ;  $(1, 7)$ ;  $(2, 6)$ ;  $(3, 5)$ ;  $(4, 4)$ .

Assim, vamos considerar dois casos distintos:

**1.º caso:** Duas peças com oito pintas, sem ser a  $(4, 4)$ , e dois *dobles*, sem ser a  $(4, 4)$ .

Das quatro peças com oito pintas no total, sem ser a  $(4, 4)$ , escolhem-se duas; o número de maneiras de o fazer é  ${}^4C_2$ . Para cada uma destas maneiras, existem  ${}^9C_2$  formas distintas de escolher dois *dobles* entre os restantes nove. Finalmente, das restantes  $55 - 5 - 9 = 41$  peças, escolhe-se uma. O número de maneiras de o fazer é  ${}^{41}C_1 = 41$ .

Assim, para este caso, temos  ${}^4C_2 \times {}^9C_2 \times 41$  possibilidades.

**2.º caso:** Escolher o  $(4, 4)$  mais uma peça com oito pintas e um *double*, sem ser a  $(4, 4)$ .

Escolhe-se o  $(4, 4)$  e das restantes quatro peças com oito pintas no total escolhe-se uma; o número de maneiras de o fazer é  $1 \times {}^4C_1 = 4$ . Para cada uma destas maneiras, existem  ${}^9C_1 = 9$  formas distintas de escolher um *double* entre os restantes nove.

Finalmente, das restantes  $55 - 5 - 9 = 41$  peças, escolhem-se duas. O número de maneiras de o fazer é  ${}^{41}C_2$ .

Logo, para este caso, temos  $4 \times 9 \times {}^{41}C_2$  possibilidades.

Portanto, uma expressão que é resposta a esta questão é  ${}^4C_2 \times {}^9C_2 \times 41 + 4 \times 9 \times {}^{41}C_2$ .

### PÁG. 133

**12.** Os números de telhas por fila são termos de uma progressão aritmética de razão  $-2$ .

$$S_{20} = 1620 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = 1620 \Leftrightarrow u_1 + u_{20} = 162 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 + u_1 + 19 \times (-2) = 162 \Leftrightarrow u_1 = 100$$

$$u_{20} = 100 + 19 \times (-2) = 62$$

A 1.ª fila tem 100 telhas e a 20.ª fila tem 62 telhas.

$$\mathbf{13.1} \quad \frac{u_6}{u_3} = r^3 \Leftrightarrow \frac{\frac{128}{27}}{\frac{16}{16}} = r^3 \Leftrightarrow \frac{128}{27 \times 16} = r^3 \Leftrightarrow r^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$v_n = \frac{\frac{2}{3}n + 2}{2n + 3} = \frac{\frac{2n + 6}{3}}{2n + 3} = \frac{2n + 6}{3(2n + 3)} = \frac{2n + 6}{6n + 9}$$

$$v_n = \frac{4}{11} \Leftrightarrow \frac{2n + 6}{6n + 9} = \frac{4}{11} \Leftrightarrow 11(2n + 6) = 4(6n + 9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 22n + 66 = 24n + 36 \Leftrightarrow 30 = 2n \Leftrightarrow n = 15$$

Sim,  $\frac{4}{11}$  é o termo de ordem 15 da sucessão  $(v_n)$ .

**13.2**  $S = u_3 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{1 - \frac{2}{3}} = 16 \times 3 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)$  tende para  $48 \times (1 - 0)$ , ou seja, a soma de todos os termos consecutivos de  $(u_n)$ , a partir do terceiro, inclusive, é 48.

**14.1** Começemos por contar quantos percursos têm oito caminhos. Como, em cada vértice da quadrícula, podemos optar por Este ou Norte, existem  $2^8$  percursos de oito caminhos.

Retiremos a estes os que passam por  $B$ . Para ir de  $A$  para  $B$  têm de ser percorridos seis caminhos: três no sentido Norte ( $N$ ) e três no sentido Este ( $E$ ), havendo tantos percursos quantas sequências com três  $N$  e três  $E$ , como, por exemplo,  $NNENEE$ . Para determinar este número, temos de escolher três das seis posições na sequência para  $N$  (ou para  $E$ ). Assim, o número destas sequências é dado por  ${}^6C_3$ . Como até  $B$  apenas foram percorridos seis caminhos, faltam ainda dois para completar o percurso. Como para estes dois caminhos podemos optar por Este ou Norte, há  $2^2$  maneiras de continuar a partir de  $B$ . Portanto, existem  ${}^6C_3 \times 2^2$  percursos de oito caminhos que passam por  $B$ .

Logo, o número de percursos de oito caminhos que não passam por  $B$  é  $2^8 - {}^6C_3 \times 2^2 = 176$ .

**14.2** Seja  $(u_n)$  a sequência de percursos com  $n$  caminhos.

$(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 2. Assim,  $u_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ .

O número de percursos de, no máximo, dez caminhos, corresponde à soma dos dez primeiros termos de

$$(u_n) : S_{10} = 2 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2046.$$