# 6. Funções cúbicas e funções quadráticas. Operações com funções. Funções racionais

**PÁG. 10**

**Diagnóstico**

**1.**

| Monómio | Coeficiente | Parte literal | Grau |
|---|---|---|---|
| $5x^2$ | 5 | $x^2$ | 2 |
| $-x^3$ | $-1$ | $x^3$ | 3 |
| $-3ab^2$ | $-3$ | $ab^2$ | 3 |
| $3z^4$ | 3 | $z^4$ | 4 |
| $-s^3t^2$ | $-1$ | $s^3t^2$ | 5 |

**2.** $-x^2$ e $\sqrt{2}\,x^2$ ; $-x^3$ e $-\sqrt{3}\,x^3$ ; $-\frac{1}{3}xy$ e $3yx$ ; $-\frac{1}{3}x^2y^2$ e $-\frac{3}{2}x^2y^2$ .

**3.1** $x-3x=(1-3)\,x=-2x$

**3.2** $\frac{1}{3}x^2-3x^2=\left(\frac{1}{3}-3\right)x^2=-\frac{8}{3}x^2$

**3.3** $\sqrt{2}\,y^2-\sqrt{3}\,y^2=(\sqrt{2}-\sqrt{3})\,y^2$

**3.4** $x\times 3x=(1\times 3)\times x\times x=3x^2$

**3.5** $\frac{1}{3}x^2\times\left(-\frac{6}{5}x^3\right)=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{6}{5}\right)\times x^2\times x^3=-\frac{2}{5}x^5$

**3.6** $\sqrt{2}\,a\times\sqrt{3}\,a^2=(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times a\times a^2=\sqrt{6}\,a^3$

**4.1** $(x+4)\,(x-4)=x^2-4^2=x^2-16$

**4.2** $(x-\sqrt{2})\,(x+\sqrt{2})=x^2-\sqrt{2}^2=x^2-2$

**4.3** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+2\times\frac{1}{2}\times x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=x^2+x+\frac{1}{4}$

**4.4** $(x-\sqrt{3})^2=x^2-2\sqrt{3}\,x+\sqrt{3}^2=x^2-2\sqrt{3}\,x+3$

**5.** $(-\sqrt{2}x-3)^2=(-\sqrt{2}x)^2-2\times(-\sqrt{2}x)\times 3+3^2=2x^2+6\sqrt{2}x+9$

Opção correta: **(C)**

**6.** Como $D'_f=[c,+\infty[$ , a parábola que representa graficamente a função $f$ , tem a concavidade voltada para cima, ou seja, $a>0$ .

Por outro lado, como $f(0)=c$ e $D'_f=[c,+\infty[$ , conclui-se que $b=0$ . Além disso, o vértice da parábola tem coordenadas $(0,c)$ e o eixo de simetria da parábola tem equação $x=0$ , ou seja, $Oy$ é o eixo de simetria do gráfico de $f$ . Se $c>0$ , $f$ não tem zeros.

Opção correta: **(C)**

**PÁG. 11**

**Diagnóstico**

**7.** Dada uma função quadrática definida por $g(x)=a(x-h)^2+k$ , o gráfico é uma parábola com vértice de coordenadas $(h,k)$ .

A parábola representada na figura tem a concavidade voltada para cima, a abcissa do vértice é positiva e a ordenada é negativa.

Opção correta: **(A)**

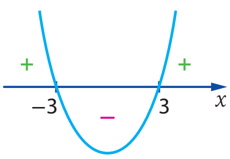
**8.** $j(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-1)\times 2}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{-2} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1-3}{-2} \vee x=\dfrac{-1+3}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-1$

**9.** $-x^2+8>-1 \Leftrightarrow -x^2>-9 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow x^2-9<0$

$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=3$




O conjunto-solução é $]-3,3[$ .

**10.1** $h(t)=0 \Leftrightarrow -4{,}9t^2+24{,}5t+29{,}4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-24{,}5\pm\sqrt{24{,}5^2-4\times(-4{,}9)\times 29{,}4}}{2\times(-4{,}9)} \Leftrightarrow t=\dfrac{-24{,}5\pm\sqrt{1176{,}49}}{-9{,}8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-24{,}5-34{,}3}{-9{,}8} \vee t=\dfrac{-24{,}5+34{,}3}{-9{,}8} \Leftrightarrow t=6 \vee t=-1$

O domínio é $[0,6]$ .

**10.2** $h(0)=-4{,}9\times 0^2+24{,}5\times 0+29{,}4=29{,}4$

$h(1)=-4{,}9\times 1^2+24{,}5\times 1+29{,}4=49$

O projétil foi lançado a $29{,}4$ m do solo e $1$ segundo após o lançamento o projétil estava a $49$ m do solo.

**10.3** $h(t)=55 \Leftrightarrow -4{,}9t^2+24{,}5t+29{,}4=55 \Leftrightarrow -4{,}9t^2+24{,}5t-25{,}6=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t=\frac{-24{,}5\pm\sqrt{24{,}5^2-4\times(-4{,}9)\times(-25{,}6)}}{2\times(-4{,}9)} \Leftrightarrow t=\frac{-24{,}5\pm\sqrt{98{,}49}}{-9{,}8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{-24{,}5-\sqrt{98{,}49}}{-9{,}8} \vee t=\frac{-24{,}5+\sqrt{98{,}49}}{-9{,}8}$$

Logo, $t\approx 3{,}5$ ou $t\approx 1{,}5$ .

O projétil atingiu os $55$ metros de altura, aproximadamente, $1{,}5$ segundos após o lançamento.

**10.4** Como o gráfico da função é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, se a abcissa do vértice $\frac{-1+6}{2}=2{,}5$ pertencer ao domínio da função, o que acontece neste caso, a ordenada do vértice $h(2{,}5)=-4{,}9\times 2{,}5^2+24{,}5\times 2{,}5+29{,}4=60{,}025$ é o máximo da função.

A altura máxima atingida pelo projétil foi $60{,}025$ metros.

## PÁG. 12

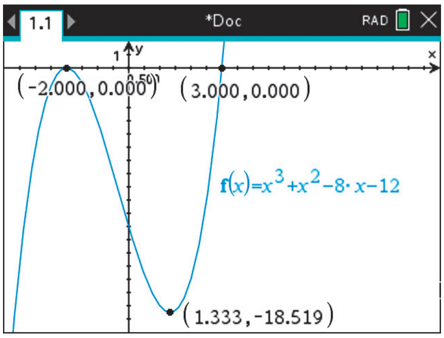
### Tarefa 1

$V=(5-2x)^2\times x=(25-20x+4x^2)\times x=4x^3-20x^2+25x$

## PÁG. 17

### Aplicar

### 3.1




Zeros: $-2$ e $3$

Interseção com $Oy$ : $(0\,,-12)$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

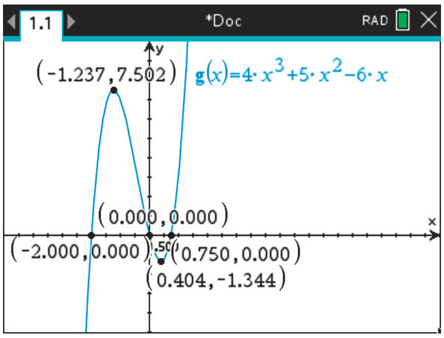
Monotonia:

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $1{,}333$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Monotonia de $f$** | $\nearrow$ | Máx. relativo | $\searrow$ | Mín. relativo | $\nearrow$ |

Extremos: máximo relativo $0$ , em $x=2$ ; mínimo relativo $\approx -18{,}519$ , em $x\approx 1{,}333$ .

Comportamento no infinito: quando $x\longrightarrow -\infty$ , $f(x)\longrightarrow -\infty$ ; quando $x\longrightarrow +\infty$ , $f(x)\longrightarrow +\infty$ .

## 3.2




Zeros: $-2$ , $0$ e $0{,}75$

Interseção com $Oy$ : $(0\ ,\ 0)$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $0$ | | $0{,}75$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

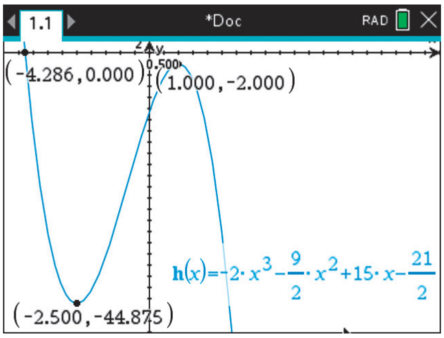
Monotonia:

| $x$ | $-\infty$ | $-1{,}237$ | | $0{,}404$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Monotonia de** $g$ | $\nearrow$ | Máx. relativo | $\searrow$ | Mín. relativo | $\nearrow$ |

Extremos: máximo relativo $\approx 7{,}502$ , em $x \approx -1{,}237$ ; mínimo relativo $\approx -1{,}344$ , em $x \approx 0{,}404$ .

Comportamento no infinito: quando $x \longrightarrow -\infty$ , $g(x) \longrightarrow -\infty$ ; quando $x \longrightarrow +\infty$ , $g(x) \longrightarrow +\infty$ .

## 3.3




Zero: $\approx -4{,}286$

Interseção com $Oy$ : $(0\ ;\ -10{,}5)$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $4{,}286$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

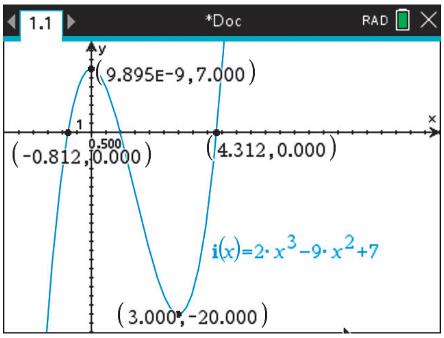
Monotonia:

| $x$ | $-\infty$ | $-2{,}5$ | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Monotonia de $h$** | $\searrow$ | Mín relativo | $\nearrow$ | Máx. relativo | $\searrow$ |

Extremos: mínimo relativo $-44{,}875$, em $x=-2{,}5$; máximo relativo $-2$, em $x=1$.

Comportamento no infinito: quando $x \longrightarrow -\infty$, $h(x) \longrightarrow +\infty$; quando $x \longrightarrow +\infty$, $h(x) \longrightarrow -\infty$.

## 3.4




Zeros: $\approx -0{,}812$; 1 e $\approx 4{,}312$

Interseção com $Oy$: $(0, 7)$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-0{,}812$ | | 1 | | $4{,}312$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

Monotonia:

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Monotonia de $i$** | $\nearrow$ | Máx relativo | $\searrow$ | Mín. relativo | $\nearrow$ |

Extremos: máximo relativo 7, em $x=0$; mínimo relativo $-20$, em $x=3$.

Comportamento no infinito: quando $x \longrightarrow -\infty$, $i(x) \longrightarrow -\infty$; quando $x \longrightarrow +\infty$, $i(x) \longrightarrow +\infty$.

**4.** Como $d<0$, excluímos as opções (B) e (D). Como $a<0$, quando $x \longrightarrow -\infty$, $f(x) \longrightarrow +\infty$, e quando $x \longrightarrow +\infty$, $f(x) \longrightarrow -\infty$.

Opção correta: **(C)**

## PÁG. 18

### Aplicar

**5.** Considerando que as expressões analíticas das funções representadas graficamente são da forma $ax^3+bx^2+cx+d$, $a \neq 0$, que o gráfico de cada uma interseta o eixo $Oy$ no ponto de coordenadas $(0, d)$, e que o comportamento no infinito depende do sinal do coeficiente $a$ (se $a>0$, quando $x \longrightarrow \pm\infty$, $y \longrightarrow \pm\infty$; se $a<0$, quando $x \longrightarrow \pm\infty$, $y \longrightarrow \mp\infty$), tem-se, para a representação gráfica:

- **I**: $a>0$ e $d<0$, o que corresponde a $k(x)$;
- **II**: $a>0$ e $d>0$, o que corresponde a $h(x)$;
- **III**: $a<0$ e $d=0$, o que corresponde a $j(x)$;
- **IV**: $a<0$ e $d<0$, o que corresponde a $f(x)$.

**6.** Como quando $x \longrightarrow -\infty$, $g(x) \longrightarrow +\infty$, concluímos que $a<0$ e excluímos as opções (C) e (D).

$$g(x)=0 \Leftrightarrow ax^3+cx=0 \Leftrightarrow x\left(ax^2+c\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee ax^2+c=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x^2=-\frac{c}{a}$$

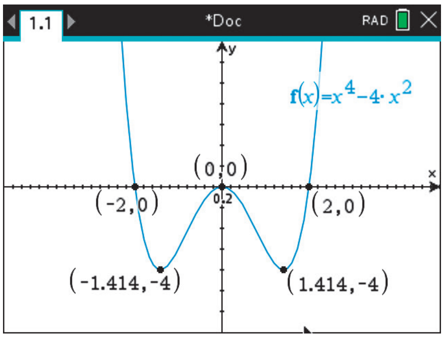
Como a função $g$ tem três zeros, a equação $x^2=-\frac{c}{a}$ tem duas soluções, e para isso acontecer tem de se ter $-\frac{c}{a}>0 \Leftrightarrow \frac{c}{a}<0$. Como $a<0$, concluímos que $c>0$.

Opção correta: **(B)**

## PÁG. 23

### Aplicar

### 9.1




Zeros: $-2$ ; $0$ e $2$

Interseção com $Oy$: $(0, 0)$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

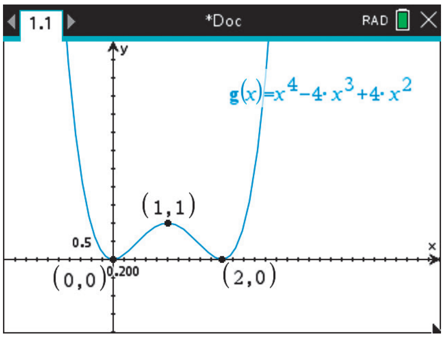
Monotonia:

| $x$ | $-\infty$ | $-1,414$ | | $0$ | | $1,1414$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Monotonia de $f$** | ↘ | Mín absoluto | ↗ | Máx. relativo | ↘ | Mín. absoluto | ↗ |

Extremos: mínimo absoluto $-4$, em $x \approx -1,414$ e em $x \approx 1,414$ ; máximo relativo $0$, em $x=0$.

Comportamento no infinito: quando $x \longrightarrow -\infty$, $f(x) \longrightarrow +\infty$ ; quando $x \longrightarrow +\infty$, $f(x) \longrightarrow +\infty$.

## 9.2




Zeros: $0$ e $2$

Interseção com $Oy$ : $(0\,,\,0)$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |

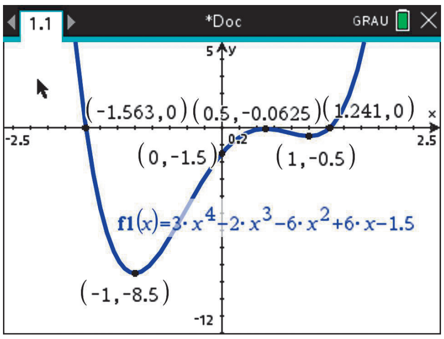
Monotonia:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Monotonia de** $g$ | ↘ | Mín absoluto | ↗ | Máx. relativo | ↘ | Mín. absoluto | ↗ |

Extremos: mínimo absoluto $0$ , em $x=0$ e em $x=2$ ; máximo relativo $1$ , em $x=1$ .

Comportamento no infinito: quando $x \longrightarrow -\infty$ , $g(x) \longrightarrow +\infty$ ; quando $x \longrightarrow +\infty$ , $g(x) \longrightarrow +\infty$ .

## 9.3




Zeros: $\approx -1{,}563$ e $\approx 1{,}241$

Interseção com $Oy$ : $(0\,;-1{,}5)$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-1{,}563$ | | $1{,}241$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

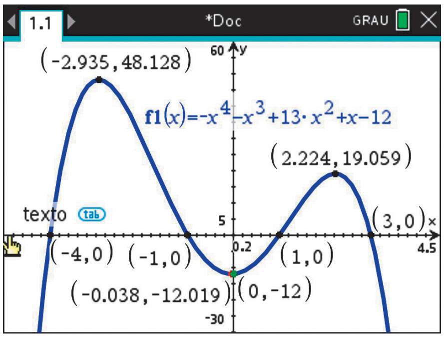
Monotonia:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0{,}5$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Monotonia de** $h$ | ↘ | Mín absoluto | ↗ | Máx. relativo | ↘ | Mín. absoluto | ↗ |

Extremos: mínimo absoluto $-8{,}5$ , em $x=-1$ ; máximo relativo $-0{,}0625$ , em $x=0{,}5$ ; mínimo relativo $-0{,}5$ , em $x=1$ .

Comportamento no infinito: quando $x \longrightarrow -\infty$ , $h(x) \longrightarrow +\infty$ ; quando $x \longrightarrow +\infty$ , $h(x) \longrightarrow +\infty$ .

## 9.4




Zeros: $-4$ , $-1$ , $1$ e $3$

Interseção com $Oy$ : $(0\,,\,-12)$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

Monotonia:

| $x$ | $-\infty$ | $-2{,}935$ | | $-0{,}038$ | | $2{,}224$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Monotonia de** $i$ | ↗ | Máx. absoluto | ↘ | Mín. relativo | ↗ | Máx. relativo | ↘ |

Extremos: máximo absoluto $\approx 48{,}128$ , em $x \approx -2{,}935$ ; máximo relativo $\approx 19{,}059$ , em $x \approx 2{,}224$ ; mínimo relativo $\approx -12{,}019$ , em $x \approx -0{,}038$ .

Comportamento no infinito: quando $x \longrightarrow -\infty$ , $i(x) \longrightarrow -\infty$ ; quando $x \longrightarrow +\infty$ , $i(x) \longrightarrow -\infty$ .

**10.** Considerando que as expressões analíticas das funções representadas graficamente são da forma $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $a \neq 0$ , que o gráfico de cada uma interseta o eixo $Oy$ no ponto de coordenadas $(0\,,\,e)$ , e que o comportamento no infinito depende do sinal do coeficiente $a$ (se $a>0$ , quando $x \longrightarrow \pm\infty$ , $y \longrightarrow +\infty$ ; se $a<0$ , quando $x \longrightarrow \pm\infty$ , $y \longrightarrow -\infty$), tem-se, para a representação gráfica:

- **I**: $a<0$ e $e>0$ , o que corresponde a $i(x)$ ;
- **II**: $a>0$ e $e>0$ , o que corresponde a $f(x)$ ;
- **III**: $a<0$ e $e=0$ , o que corresponde a $j(x)$ .

## PÁG. 24

### Aplicar

**11.** Como $a<0$, excluímos as opções (A) e (D).

$$f(x)=0 \Leftrightarrow a\left(x^2+b\right)(x+c)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=0 \vee x^2+b=0 \vee x+c=0 \underset{a<0}{\Leftrightarrow} x^2=-b \vee x=-c$$

Como $b>0$, concluímos que $-b<0$, pelo que a equação $x^2=-b$ é impossível.

Como $c<0$, concluímos que $x=-c>0$.

Ou seja, a função $f$ tem apenas um zero, positivo.

Como $a<0$ e $\left(x^2+b\right)(x+c)^2 \geqslant 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, a única representação gráfica que pode ser a da função $f$ é a da opção (B).

Opção correta: **(B)**

**12.** Como, quando $x \longrightarrow -\infty$, $g(x) \longrightarrow -\infty$, concluímos que $a<0$ e excluímos as opções (A) e (B).

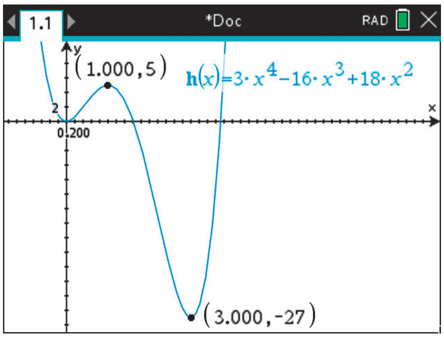
$$g(x)=0 \Leftrightarrow ax^4+cx^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(ax^2+c\right)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee ax^2+c=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x^2=-\frac{c}{a}$$

Como a função $g$ tem mais do que um zero, a equação $x^2=-\frac{c}{a}$ tem de ter soluções, e, para isso acontecer, tem de se ter $-\frac{c}{a}>0 \Leftrightarrow \frac{c}{a}<0$. Como $a<0$, concluímos que $c>0$.

Opção correta: **(D)**

**13.**




**13.1** $k>27 \Leftrightarrow k \in ]27,+\infty[$

**13.2** $k=27$

**13.3** $k \in ]-\infty,-5[ \cup ]0,27[$

**13.4** $k \in \{-5,0\}$

**13.5** $k \in ]-5,0[$

## PÁG. 25

### Tarefa 4

$$\begin{array}{r|l} 728 & 31 \\ \cline{2-2} -62 & 23 \\ \cline{1-1} 108 & \\ -93 & \\ \cline{1-1} 15 & \end{array}$$

Dividendo: $D=728$ ; divisor: $d=31$ ; quociente: $Q=23$ ; resto: $R=15$ .

## PÁG. 28

### Aplicar

**17.1** Grau do polinómio quociente: $2-1=1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+x+0 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^2-2x+0 & 2x-1 \\ \cline{1-1} -x+0 & \\ x+1 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$Q(x)=2x-1$ ; $R(x)=1$

**17.2** Grau do polinómio quociente: $2-1=1$

$$\begin{array}{r|l} x^2-3x+2 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x \phantom{+2} & x-1 \\ \cline{1-1} -x+2 & \\ x-2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$Q(x)=x-1$ ; $R(x)=0$

**17.3** Grau do polinómio quociente: $3-2=1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2+0x+1 & 2x^2+3x \\ \cline{2-2} -2x^3-3x^2 \phantom{+0x+1} & x-2 \\ \cline{1-1} -4x^2+0x+1 & \\ 4x^2+6x \phantom{+1} & \\ \cline{1-1} 6x+1 & \end{array}$$

$Q(x)=x-2$ ; $R(x)=6x+1$

**17.4** Grau do polinómio quociente: $3-2=1$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+5x^2+2x+1 & 2x^2+x-1 \\ \cline{2-2}
-x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x+\frac{9}{4} \\ \cline{1-1}
\frac{9}{2}x^2+\frac{5}{2}x+1 & \\
-\frac{9}{2}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{9}{4} & \\ \cline{1-1}
\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} &
\end{array}
$$

$Q(x)=\frac{1}{2}x+\frac{9}{4}$ ; $R(x)=\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$

**17.5** Grau do polinómio quociente: $4-2=2$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4-4x^3+x^2-x-2 & 2x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
-3x^4+3x^3-\frac{3}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4} \\ \cline{1-1}
-x^3-\frac{1}{2}x^2-x-2 & \\
x^3-x^2+\frac{1}{2}x & \\ \cline{1-1}
-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2 & \\
\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4} & \\ \cline{1-1}
-2x-\frac{5}{4} &
\end{array}
$$

$Q(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$ ; $R(x)=-2x-\frac{5}{4}$

**18.** Grau do polinómio quociente: $4-2=2$

**19.1** $D(x)=(x+3)\left(x^2-2x\right)+1=x^3-2x^2+3x^2-6x+1=x^3+x^2-6x+1$

**19.2** $D(x)=(x+3)\left(-5x^2+2x\right)+\frac{1}{2}=-5x^3+2x^2-15x^2+6x+\frac{1}{2}=-5x^3-13x^2+6x+\frac{1}{2}$

**20.** $D(x)=\left(x^2+1\right)\left(-x^3-2x+2\right)+(x-2)=$

$=-x^5-2x^3+2x^2-x^3-2x+2+x-2=$

$=-x^5-3x^3+2x^2-x$

**21.1** Sim; a divisão dá resto $0$ .

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-3 & x+3 \\ \cline{2-2} -x^2-3x & x-1 \\ \cline{1-1} -x+3 & \\ x+3 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

**21.2** Não; a divisão dá resto $5$ .

$$\begin{array}{r|l} 4x^3+2x^2+2x+6 & 2x+1 \\ \cline{2-2} -4x^3-2x^2 & 2x^2+1 \\ \cline{1-1} 2x+6 & \\ -2x-1 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

**22.**

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+0x^3+x^2-2x+1 & 2x^2+6 \\ \cline{2-2} -3x^4 \quad -9x^2 \qquad\qquad & \frac{3}{2}x^2-4 \\ \cline{1-1} -8x^2-2x+1 & \\ 8x^2 \qquad +24 & \\ \cline{1-1} -2x+25 & \end{array}$$

$A(x)=\frac{3}{2}x^2-4$ ; $B(x)=-2x+25$

**PÁG. 30**

**Aplicar**

**25.1**

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\ \cline{4-4} \end{array}$$

$Q(x)=x+4$ ; $R(x)=0$

**25.2**

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -12 \\ -4 & & -4 & 12 \\ \hline & 1 & -3 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\ \cline{4-4} \end{array}$$

$Q(x)=x-3$ ; $R(x)=0$

**25.3**

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -3 & -2 \\ 5 & & 10 & 35 \\ \hline & 2 & 7 & \multicolumn{1}{|c}{33} \\ \cline{4-4} \end{array}$$

$Q(x)=2x+7$ ; $R(x)=33$

**25.4**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $1$ | $-\frac{1}{4}$ | $1$ |
| $-\frac{3}{4}$ | | $-\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| | $1$ | $-1$ | $\boxed{\frac{7}{4}}$ |

$Q(x)=x-1$ ; $R(x)=\frac{7}{4}$

**25.5**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $1$ | | $1$ | $1$ | $0$ |
| | $1$ | $1$ | $0$ | $\boxed{0}$ |

$Q(x)=x^2+x$ ; $R(x)=0$

**25.6**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $2$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $-3$ |
| $-1$ | | $-2$ | $2$ | $-1$ | $1$ |
| | $2$ | $-2$ | $1$ | $-1$ | $\boxed{-2}$ |

$Q(x)=2x^3-2x^2+x-1$ ; $R(x)=-2$

## PÁG. 31

### Aplicar

**26.1** Não, porque o resto da divisão por $x-2$ é diferente de $0$, é $-2$.

**26.2** $d(x)=x-2$ ; $Q(x)=-x^3+2x^2+4$ ; $R(x)=-2$

**26.3** $D(x)=(x-2)\left(-x^3+2x^2+4\right)+(-2)=$

$=-x^4+2x^3+4x+2x^3-4x^2-8-2=$

$=-x^4+4x^3-4x^2+4x-10$

**27.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $1$ | $b$ | $-2$ |
| $-2$ | | $-2$ | $-2b+4$ |
| | $1$ | $b-2$ | $\boxed{-2b+2}$ |

$-2b+2=4 \Leftrightarrow b=\dfrac{4-2}{-2} \Leftrightarrow b=-1$

**28.1** $b=2$ ; $b\times a=-2 \Leftrightarrow 2\times a=-2 \Leftrightarrow a=-1$ ;

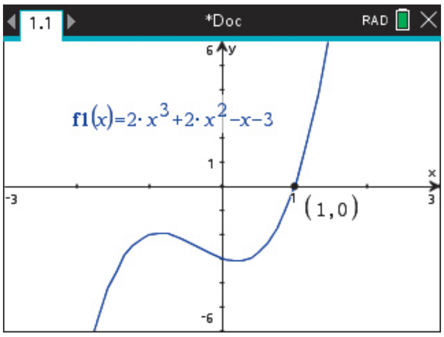
$2-2=c \Leftrightarrow c=0$ ;

$-1\times a=e \Leftrightarrow -1\times(-1)=e \Leftrightarrow e=1$ ;

$d+e=-2 \Leftrightarrow d+1=-2 \Leftrightarrow d=-3$

## 28.2

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 2 & -1 & -3 \\
k & & 2k & 2k^2+2k & 2k^3+2k^2-k \\
\hline
 & 2 & 2k+2 & 2k^2+2k-1 & \boxed{2k^3+2k^2-k-3}
\end{array}$$




$2k^3+2k^2-k-3=0 \iff k=1$

## 29.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 2 & -4 \\
a & & a & a^2+2a \\
\hline
 & 1 & a+2 & \boxed{a^2+2a-4}
\end{array}$$

$$a^2+2a-4=-1 \iff a^2+2a-3=0 \iff$$
$$\iff a=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1} \iff a=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} \iff$$
$$\iff a=\frac{-2-4}{2} \vee a=\frac{-2+4}{2} \iff a=-3 \vee a=1$$

Se $a=-3$ , $Q(x)=x+(-3)+2=x-1$ ; se $a=1$ , $Q(x)=x+1+2=x+3$ .

## 30.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & -3 & 5 \\
a & & a & a^2-3a \\
\hline
 & 1 & a-3 & \boxed{a^2-3a+5}
\end{array}$$

$$a^2-3a+5=1 \iff a^2-3a+4=0 \iff$$
$$\iff a=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times4}}{2\times1} \iff$$
$$\iff a=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2} \text{ impossível}$$

## 31.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & k & -2 & 3 \\
3 & & 3k & 9k-6 \\
\hline
 & k & 3k-2 & \boxed{9k-3}
\end{array}$$

$9k-3=0 \iff k=\frac{1}{3}$

$$P(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3=(x-3)\left(\frac{1}{3}x+3\times\frac{1}{3}-2\right)=(x-3)\left(\frac{1}{3}x-1\right)$$

## PÁG. 32
### Tarefa 5

**1.1**

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{-1} \end{array} \qquad R(x) = -1$$

$P(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 1 = -1$ . O resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 1$ é igual a $P(1)$ .

**1.2**

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 1 \\ 3 & & 3 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & \boxed{1} \end{array} \qquad R(x) = 1$$

$P(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 1 = 1$ . O resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 3$ é igual a $P(3)$ .

**1.3**

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 1 \\ -2 & & -2 & 10 \\ \hline & 1 & -5 & \boxed{11} \end{array} \qquad R(x) = 11$$

$P(-2) = (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 11$ . O resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x + 2$ é igual a $P(-2)$ .

**2.** O resto da divisão inteira de um polinómio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$ .

## PÁG. 34
### Aplicar

**33.1** $A(1) = 1^4 - 2 \times 1^3 - 1 - 1 = -3$

**33.2** $A(-2) = (-2)^4 - 2 \times (-2)^3 - (-2) - 1 = 33$

**34.1** $A(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^3 + k \times (-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow -2k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{6}{-2} \Leftrightarrow k = -3$

**34.2** $A(-1) = 2 \Leftrightarrow (-1)^3 + k \times (-1) + 2 = 2 \Leftrightarrow -k + 1 = 2 \Leftrightarrow k = -1$

**35.1** $-3$ e $2$ , com multiplicidades $1$ e $2$ , respetivamente.

**35.2** $C(x) = (x-2)^2 (x+1) \underbrace{(x^2 - 4x + 4)}_{(x-2)^2} = (x-2)^4 (x+1)$

Opção correta: **(C)**

## PÁG. 39

### Tarefa 6

Uma expressão analítica de $f$ é da forma $f(x)=a(x-(-1))(x-1)(x-3)$, com $a \neq 0$.

Para determinar o valor de $a$, basta tomar as coordenadas de um ponto do gráfico de $f$, não correspondente aos zeros, neste caso, $(0, 6)$, donde $f(0)=6$, e substituí-las na expressão analítica.

$f(0)=6 \Leftrightarrow a(0+1)(0-1)(0-3)=6 \Leftrightarrow 3a=6 \Leftrightarrow a=2$

Concluindo, $f(x)=2(x+1)(x-1)(x-3)=2\left(x^2-1\right)(x-3)=2\left(x^3-3x^2-x+3\right)=$

$=2x^3-6x^2-2x+6$.

Portanto, na forma de polinómio reduzido, $f(x)=2x^3-6x^2-2x+6$.

Uma expressão analítica de $g$ é da forma $g(x)=a(x-(-1))^2(x-0)$, com $a \neq 0$.

Para determinar o valor de $a$, basta tomar as coordenadas de um ponto do gráfico de $g$, não correspondente aos zeros, neste caso, $(-2, 24)$, donde $g(-2)=24$, e substituí-las na expressão analítica.

$g(-2)=24 \Leftrightarrow a(-2+4)^2(-2-0)=24 \Leftrightarrow -8a=24 \Leftrightarrow a=-3$

Concluindo, $g(x)=-3x(x+4)^2=-3x\left(x^2+8x+16\right)=-3x^3-24x^2-48x$.

Portanto, na forma de polinómio reduzido, $g(x)=-3x^3-24x^2-48x$.

Uma expressão analítica de $h$ é da forma $h(x)=a(x-(-1))(x-0)(x-1)^2$, com $a \neq 0$.

Para determinar o valor de $a$, basta tomar as coordenadas de um ponto do gráfico de $g$, não correspondente aos zeros, neste caso, $(2, -3)$, donde $h(2)=-3$, e substituí-las na expressão analítica.

$h(2)=-3 \Leftrightarrow a(2+1)(2-0)(2-1)^2=-3 \Leftrightarrow 6a=-3 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

Concluindo, $h(x)=-\frac{1}{2}x(x+1)(x-1)^2=\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\right)\left(x^2-2x+1\right)=$

$=-\frac{1}{2}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$

Portanto, na forma de polinómio reduzido, $h(x)=-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$.

Uma expressão analítica de $i$ é da forma $i(x)=a(x-(-1))(x-(-2))(x-2)(x-3)$, com $a \neq 0$.

Para determinar o valor de $a$, basta tomar as coordenadas de um ponto do gráfico de $i$, não correspondente aos zeros, neste caso, $(0, 96)$, donde $i(0)=96$, e substituí-las na expressão analítica.

$i(0)=96 \Leftrightarrow a(0+4)(0+2)(0-2)(0-3)=96 \Leftrightarrow 48a=96 \Leftrightarrow a=2$

Concluindo, $i(x)=2(x+4)(x+2)(x-2)(x-3)=2(x+4)(x-3)\left(x^2-4\right)=$

$=2\left(x^2+x-12\right)\left(x^2-4\right)=2\left(x^4-4x^2+x^3-4x-12x^2+48\right)$

$=2x^4+2x^3-32x^2-8x^2+96$

Portanto, na forma de polinómio reduzido, $i(x)=2x^4+2x^3-32x^2-8x+96$.

## PÁG. 40

### Aplicar

**37.1** Como $P(1)=1^3-5\times1^2+8\times1-4=0$, $P(x)$ é divisível por $x-1$.

**37.2**

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array} \qquad Q(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$$

$1$ e $2$, com multiplicidades $1$ e $2$, respetivamente.

**37.3** $P(x)=(x-1)(x-2)^2=(x-1)(x-2)(x-2)$

**38.1** Como o termo independente é $-5$, os divisores inteiros de $-5$ ($-5$, $5$, $-1$ e $1$) são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio $P(x)=x^3+5x^2-x-5$.

$P(-5)=(-5)^3+5(-5)^2-(-5)-5=0$, $P(5)=5^3+5\times 5^2-5-5=240$

$P(-1)=(-1)^3+5(-1)^2-(-1)-5=0$, $P(1)=1^3+5\times 1^2-1-5=0$

O conjunto de zeros da função $f$ é $\{-5,-1,1\}$.

Tratando-se de uma função polinomial do 3.º grau, estão determinados todos os zeros da mesma.

**38.2** $g(x)=0 \Leftrightarrow x^4+1=0 \Leftrightarrow x^4=-1$ impossível, pelo que a função não tem zeros.

**38.3** $h(x)=0 \Leftrightarrow -x^4+1=0 \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$

**38.4** $i(x)=0 \Leftrightarrow x^4-8x^2+16=0 \Leftrightarrow (x^2-4)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

**38.5** $j(x)=0 \Leftrightarrow -3x^4+30x^2-27=0 \underset{\div(-3)}{\Leftrightarrow} (x^2)^2-10x^2+9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\times 1\times 9}}{2\times 1} \Leftrightarrow x^2=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2} \Leftrightarrow x^2=\frac{10-8}{2} \vee x^2=\frac{10+8}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=1 \vee x^2=9 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1 \vee x=-3 \vee x=3$

**38.6** Como o termo independente é $-4$, os divisores inteiros de $-4$ ($-4$, $4$, $-2$, $2$, $-1$ e $1$) são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio $k(x)=x^4-3x^3+6x-4$.

$k(-4)=(-4)^4-3(-4)^3+6(-4)-4=420$, $k(4)=4^4-3\times 4^3+6\times 4-4=84$

$k(-2)=(-2)^4-3(-2)^3+6(-2)-4=24$, $k(2)=2^4-3\times 2^3+6\times 2-4=0$

$k(-1)=(-1)^4-3(-1)^3+6(-1)-4=-6$, $k(1)=1^4-3\times 1^3+6\times 1-4=0$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$k(x)=(x-2)(x^3-x^2-2x+2)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-1$ | $-2$ | $2$ |
| $1$ | | $1$ | $0$ | $-2$ |
| | $1$ | $0$ | $-2$ | $0$ |

$k(x)=(x-2)\,(x-1)\,\left(x^2-2\right)$

$x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2} \vee x=\sqrt{2}$

As raízes da função $k$ são $-\sqrt{2}$ , $1$ , $\sqrt{2}$ e $2$ .

**39.** $f(x)=(x+5)\,(x+1)\,(x-1)$

$g(x)$ não admite decomposição em fatores lineares e quadráticos.

$h(x)=-\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=-(x+1)\,(x-1)\,\left(x^2+1\right)$

$i(x)=(x+2)^2\,(x-2)^2$

$j(x)=-3\,(x+3)\,(x+1)\,(x-1)\,(x-3)$

$k(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\,(x-1)\,\left(x-\sqrt{2}\right)\,(x-2)$

**40.** $P(x)=a\,(x+2)^2\,\left(x^2+x+1\right)$

$P(-3)=-21 \Leftrightarrow a(-3+2)^2\left((-3)^2+(-3)+1\right)=-21 \Leftrightarrow 7a=-21 \Leftrightarrow a=-3$

$P(x)=-3\,(x+2)^2\left(x^2+x+1\right)=-3x^4-15x^3-27x^2-24x-12$

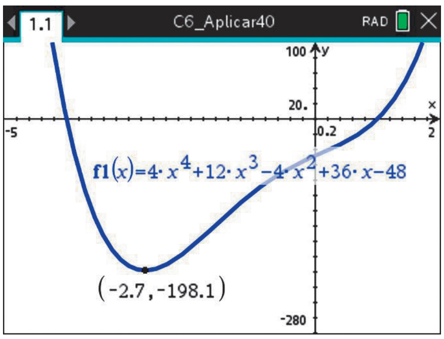
**41.** Uma expressão analítica de $f$ é da forma $f(x)=a\,(x-(-4))\,(x-1)\,\left(x^2+3\right)$ , com $a\neq 0$ .

Para determinar o valor de $a$ , basta tomar as coordenadas de um ponto do gráfico de $f$ , não correspondente aos zeros, neste caso, $(0\,,\,-48)$ , pois $f(0)=-48$ , e substituí-las na expressão analítica.

$f(0)=-48 \Leftrightarrow a\,(0+4)\,(0-1)\,\left(0^2+3\right)=-48 \Leftrightarrow -12a=-48 \Leftrightarrow a=4$

Concluindo, $f(x)=4\,(x+4)\,(x-1)\,\left(x^2+3\right)$ .

Na forma de polinómio reduzido, obtém-se $f(x)=4x^4+12x^3-4x^2+36x-48$ .

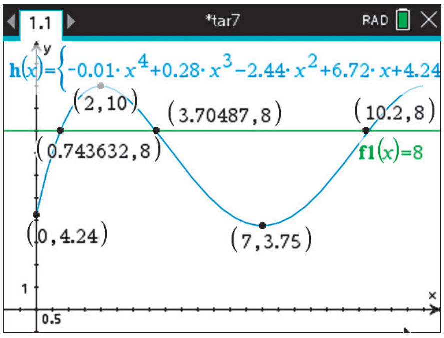



$D'_f=[-198{,}1\,;+\infty[$

## PÁG. 43

### Tarefa 7

**3.**




**3.1** Altura máxima: $10$ m ; altura mínima: $3{,}75$ m .

**3.2** $\approx (3{,}7-0{,}74)+(12-10{,}3)\approx 4{,}7$ m

## PÁG. 46

### Aplicar

**43.1** $f(x)=f(-1) \Leftrightarrow 3x^3-5x^2-11x-3=3(-1)^3-5(-1)^2-11(-1)-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^3-5x^2-11x-3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(3x^2-8x-3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1=0 \vee 3x^2-8x-3=0 \Leftrightarrow$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | −5 | −11 | −3 |
| −1 | | −3 | 8 | 3 |
| | 3 | −8 | −3 | 0 |

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times 3\times(-3)}}{2\times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{8\pm\sqrt{100}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{8-10}{6} \vee x=\frac{8+10}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-\frac{1}{3} \vee x=3$$

**43.2** **a.** $V=4(3x+1)\left[\left(x^2-7x-6\right):(x+2)\right]$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | −7 | −6 |
| −2 | | −2 | 4 | 6 |
| | 1 | −2 | −3 | 0 |

Logo, $x^3-7x-6=(x+2)\left(x^2-2x-3\right)$ , pelo que $\left(x^3-7x-6\right):(x+2)=x^2-2x-3$ .

$V=4(3x+1)\left(x^2-2x-3\right)=4\left(3x^3-5x^2-11x-3\right)=4f(x)$

**b.** $V(x)=260 \Leftrightarrow 4f(x)=260 \Leftrightarrow 4\left(3x^3-5x^2-11x-3\right)=260 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^3-5x^2-11x-3=65 \Leftrightarrow 3x^3-5x^2-11x-68=0$

Se $x=4$ , $V(4)=260$ .

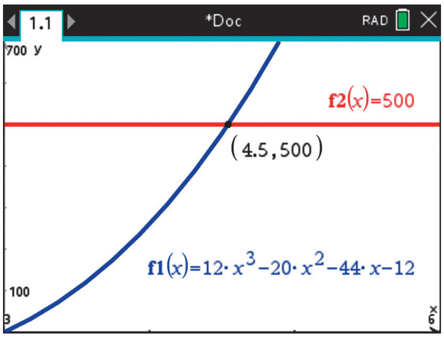
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | $-5$ | $-11$ | $-68$ |
| 4 | | 12 | 28 | 68 |
| | 3 | 7 | 17 | 0 |

Logo, $3x^3-5x^2-11x-68=(x-4)\left(3x^2+7x+17\right)$ .

$3x^2+7x+17=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times 3\times 17}}{2\times 3} \Leftrightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{-155}}{6}$ é equação impossível.

Portanto, não existe mais nenhum valor de $x$ para o qual o volume do paralelepípedo é $260$ .

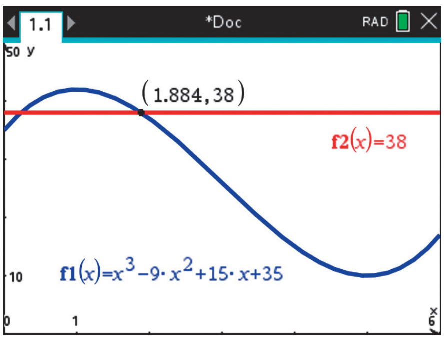
**c.** $x\approx 4{,}5$




**PÁG. 47**

**Aplicar**

**44.** $t\approx 1{,}884$




$0{,}884\times 60=53{,}04$

Passada, aproximadamente, $1$ hora e $53$ minutos.

**45.1** $5x^3-5x^2=30x \Leftrightarrow x^3-x^2-6x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-x-6\right)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=0 \lor x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=0 \lor x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-6)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \lor x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x=0 \lor x=\frac{1-5}{2} \lor x=\frac{1+5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \lor x=-2 \lor x=3$$

O conjunto-solução da equação é $\{-2\,,0\,,3\}$ .

**45.2** $x^4+x^3=8x+8 \Leftrightarrow x^4+x^3-8x-8=0$

Como o termo independente é $-8$, os divisores inteiros de $-8$ ($-8$, $8$, $-4$, $4$, $-2$, $2$, $-1$ e $1$) são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio $P(x)=x^4+x^3-8x-8$.

$P(-1)=(-1)^4+(-1)^3-8(-1)-8=0$, $P(1)=1^4+1^3-8\times 1-8=-14$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & 0 & -8 & -8 \\ -1 & & -1 & 0 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)\left(x^3-8\right)$

$x^3-8=0 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2$, ou seja, $2$ é a outra solução da equação.

O conjunto-solução da equação é $\{-1, 2\}$.

**45.3** $x^4-4x^2+3=0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2-4x^2+3=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 1\times 3}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x^2=\frac{4-2}{2} \vee x^2=\frac{4+2}{2} \Leftrightarrow x^2=1 \vee x^2=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=1 \vee x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}$$

O conjunto-solução da equação é $\left\{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\right\}$.

**45.4** $2x^3-5x^2-3=2x \Leftrightarrow 2x^3-5x^2-2x-3=0$

Como o termo independente é $-3$, os divisores inteiros de $-3$ ($-3$, $3$, $-1$ e $1$) são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio $P(x)=2x^3-5x^2-2x-3$.

$P(-3)=2\times(-3)^3-5\times(-3)^2-2\times(-3)-3=-96$, $P(3)=2\times 3^3-5\times 3^2-2\times 3-3=0$

$P(-1)=2\times(-1)^3-5\times(-1)^2-2\times(-1)-3=-8$, $P(1)=2\times 1^3-5\times 1^2-2\times 1-3=-8$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -5 & -2 & -3 \\ 3 & & 6 & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 2\times 1}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$ é equação impossível, pelo que a única solução da equação inicial é $3$.

O conjunto-solução da equação é $\{3\}$.

**45.5** $x^3+6=7x \Leftrightarrow x^3-7x+6=0$

Como o termo independente é $6$, os divisores inteiros de $6$ ($-6$, $6$, $-3$, $3$, $-2$, $2$, $-1$ e $1$) são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio $P(x)=x^3-7x+6$.

$P(1)=1^3-7\times 1+6=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)\left(x^2+x-6\right)$

$P(2)=2^3-7\times 2+6=0$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$

$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

O conjunto-solução da equação é $\{-3\,,\,1\,,\,2\}$ .

**45.6** $8x^4+5x+5=4x^3+14x^2 \Leftrightarrow 8x^4-4x^3-14x^2+5x+5=0$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 8 & -4 & -14 & 5 & 5 \\ -\frac{1}{2} & & -4 & 4 & 5 & -5 \\ \hline & 8 & -8 & -10 & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$8x^4-4x^3-14x^2+5x+5=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(8x^3-8x^2-10x+10\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^3-4x^2-5x+5\right)$

Como o termo independente é $5$ , os divisores inteiros de $5$ $(-5, 5\,,\,-1$ e $1)$ são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio $P(x)=4x^3-4x^2-5x+5$ .

$P(1)=4\times 1^3-4\times 1^2-5\times 1+5=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -4 & -5 & 5 \\ 1 & & 4 & 0 & -5 \\ \hline & 4 & 0 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=4x^3-4x^2-5x+5=(x-1)\left(4x^2-5\right)$

$4x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{5}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{\sqrt{5}}{2}$

O conjunto-solução da equação é $\left\{-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\,,\,\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

**46.1** $f(x)=h(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}=x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}=0 \Leftrightarrow x^3-5x^2-x+5=0$

$1$ é solução da equação, dado que os gráficos de $f$ e de $h$ intersetam-se no ponto de abcissa $1$ , pelo que $1$ é raiz do polinómio $P(x)=x^3-5x^2-x+5$ .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-5$ | $-1$ | 5 |
| 1 | | 1 | $-4$ | 5 |
| | 1 | $-4$ | $-5$ | 0 |

$$x^3-5x^2-x+5=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-4x-5\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{4-6}{2} \vee x=\frac{4+6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1 \vee x=5 \Leftrightarrow$$

O conjunto-solução da equação é $\{-1\,,\,1\,,\,5\}$ .

**46.2** $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}=0 \Leftrightarrow x^3-5x^2+2x+8=0$

Da alínea anterior, sabemos que $A(-1\,,\,0)$ , dado que o gráfico de $f$ e de $h$ intersetam-se no ponto $A$ e $-1$ é solução da equação $f(x)=h(x)$ .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-5$ | 2 | 8 |
| $-1$ | | $-1$ | 6 | $-8$ |
| | 1 | $-6$ | 8 | 0 |

$$x^3-5x^2+2x+8=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-6x+8\right)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \vee x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times8}}{2\times1} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{6-2}{2} \vee x=\frac{6+2}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2 \vee x=4$$

O conjunto-solução da equação é $\{-1\,,\,2\,,\,4\}$ .

**47.1** Como o termo independente é $2$ , os divisores inteiros de $2$ ($-2$, $2$, $-1$ e $1$) são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio $P(x)$ .

$P(1)=3\times1^3+2\times1^2-7\times1+2=0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | $-7$ | 2 |
| 1 | | 3 | 5 | $-2$ |
| | 3 | 5 | $-2$ | 0 |

$$P(x)=3x^3+2x^2-7x+2=(x-1)\left(3x^2+5x-2\right)$$

$$3x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times3\times(-2)}}{2\times3} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-5-7}{6} \vee x=\frac{-5+7}{6} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=\frac{1}{3}$$

As raízes de $P(x)$ são $-2$, $\frac{1}{3}$ e $1$ .

**47.2** $P(x)=1-7x \Leftrightarrow 3x^3+2x^2-7x+2=1-7x \Leftrightarrow 3x^3+2x^2+1=0$

Como o termo independente é $1$, os divisores inteiros de $1$ ($-1$ e $1$) são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio $A(x)=P(x)-(1-7x)=3x^3+2x^2+1$ .

$A(1)=3\times 1^3+2\times 1^2+1=6$

$A(1)=3\times(-1)^3+2\times(-1)^2+1=0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | 0 | 1 |
| $-1$ | | $-3$ | 1 | $-1$ |
| | 3 | $-1$ | 1 | 0 |

$3x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 3\times 1}}{3\times 1} \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{-11}}{3}$ é equação impossível, pelo que a única solução da equação inicial é $-1$ .

O conjunto-solução da equação é $\{-1\}$ .

**47.3** $P(x)=Q(x) \Leftrightarrow 3x^3+2x^2-7x+2=x^2+11x+18 \Leftrightarrow 3x^3+x^2-18x-16=0$

$-1$ é solução da equação $P(x)=Q(x)$ dado que o resto da divisão inteira de $P(x)$ e de $Q(x)$ por $x+1$ é igual, ou seja, $P(-1)=Q(-1)$ . Portanto, $-1$ é raiz do polinómio $3x^3+x^2-18x-16$ .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 1 | $-18$ | $-16$ |
| $-1$ | | $-3$ | 2 | 16 |
| | 3 | $-2$ | $-16$ | 0 |

$P(x)-Q(x)=(x+1)\left(3x^2-2x-16\right)$

$P(x)=Q(x) \Leftrightarrow P(x)-Q(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(3x^2-2x-16\right)=0 \Leftrightarrow$

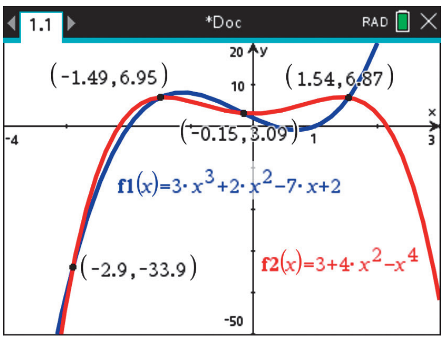
$\Leftrightarrow x+1=0 \vee 3x^2-2x-16=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 3\times(-16)}}{2\times 3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{2\pm\sqrt{196}}{6} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{2-14}{6} \vee x=\dfrac{2+14}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-2 \vee x=\dfrac{8}{3}$

O conjunto-solução da equação é $\left\{-2\,,\,-1\,,\,\dfrac{8}{3}\right\}$.

**47.4**




$\{-2{,}90\,;-1{,}49\,;-0{,}15\,;1{,}54\}$

## PÁG. 51

### Aplicar

**49.1** No máximo, três, uma vez que é um polinómio do 3.º grau.

**49.2** $F(1) = 1^3 - 9 \times 1^2 + 24 \times 1 - 16 = 0$, pelo que $1$ é raíz de $F(x)$.

**49.3**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −9 | 24 | −16 |
| 1 | | 1 | −8 | 16 |
| | 1 | −8 | 16 | 0 |

$F(x) = (x-1)\left(x^2 - 8x + 16\right) = (x-1)(x-4)^2$

$1$ (simples) e $4$ (dupla).

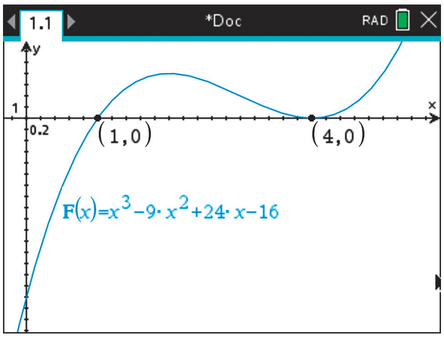
**49.4**

| $x$ | $-\infty$ | 1 | | 4 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | − | 0 | + | + | + |
| $(x-4)^2$ | + | + | + | 0 | + |
| $F(x)$ | − | 0 | + | 0 | + |

$F$ é negativa em $]-\infty, 1[$ e é positiva em $]1, +\infty[\setminus\{4\}$.

**49.5** Tendo em conta a tabela anterior, $F(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 1] \cup \{4\}$.

Graficamente:




$F(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 1] \cup \{4\}$

**50.1** Grau: $2 + 1 + 1 = 4$

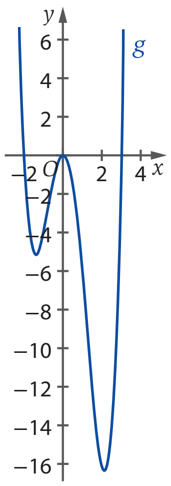
**50.2** $0$ (dupla), $-2$ (simples) e $3$ (simples).

**50.3**

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $0$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$g$ é positiva em $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$ e é negativa em $]-2, 3[\setminus\{0\}$.

**50.4**




**50.5** Tendo em conta a tabela efetuada na resolução do item **50.3.**, $g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow [-2, 3]$.

**51.1** $2x^3 - \frac{1}{2}x = x\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)$

$2x^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2x^2 - \frac{1}{2}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $2x^3 - \frac{1}{2}x$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$2x^3 - \frac{1}{2}x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, ou seja, $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ é conjunto de números reais em que a função polinomial definida por $y = 2x^3 - \frac{1}{2}x$ é positiva.

**51.2**

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\
-1 & & -1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\hline
 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \boxed{0}
\end{array}$$

$$x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}=(x+1)\left(x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)$$

$$x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}=0 \Leftrightarrow 6x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 6\times(-1)}}{2\times 6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{12} \Leftrightarrow x=\frac{1-5}{12} \vee x=\frac{1+5}{12} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3} \vee x=\frac{1}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$, ou seja, $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$ é conjunto de números reais em que a função polinomial definida por $y=x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$ é negativa.

**52.1** $x^4-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow 4\left(x^2\right)^2-9x^2+2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\times 4\times 2}}{2\times 4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{9\pm\sqrt{49}}{8} \Leftrightarrow x^2=\frac{9-7}{8} \vee x^2=\frac{9+7}{8} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \vee x^2=2$$

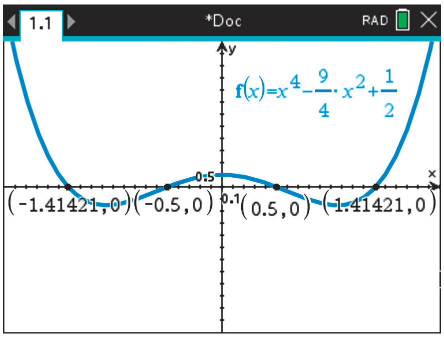
$$f(x)=x^4-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x^2-2\right)$$

**52.2**

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-\frac{1}{4}$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2-2$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$$f(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right[$$

Graficamente:




$f(x) \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[ \quad (\sqrt{2} \approx -1{,}41421)$

**53.** $x^4 - 125x^2 + 2500 = 0 \iff (x^2)^2 - 125x^2 + 2500 = 0 \iff$

$$\iff x^2 = \frac{-(-125) \pm \sqrt{(-125)^2 - 4 \times 1 \times 2500}}{2 \times 1} \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{125 \pm \sqrt{5625}}{2} \iff x^2 = \frac{125 - 75}{2} \vee x^2 = \frac{125 + 75}{2} \iff$$

$$\iff x^2 = 25 \vee x^2 = 100 \iff$$

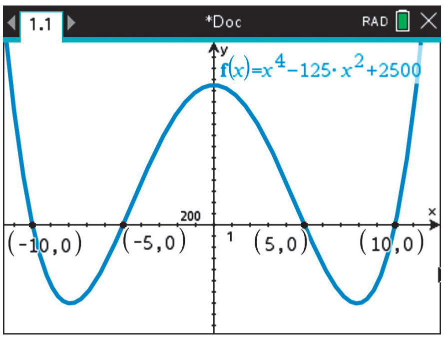
$$\iff x = -5 \vee x = 5 \vee x = -10 \vee x = 10$$

Tem-se que $x^4 - 125x^2 + 2500 = (x^2 - 25)(x^2 - 100)$, em que $-5$ e $5$ são zeros de $x^2 - 25$, e $-10$ e $10$ são zeros de $x^2 - 100$.

| $x$ | $-\infty$ | $-10$ | | $-5$ | | $5$ | | $10$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 25$ | + | + | + | 0 | − | 0 | + | + | + |
| $x^2 - 100$ | + | 0 | − | − | − | − | − | 0 | + |
| $x^4 - 125x^2 + 2500$ | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |

$x^4 - 125x^2 + 2500 < 0 \iff x \in \left]-10, -5\right[ \cup \left]5, 10\right[$

Graficamente:




$x^4 - 125x^2 + 2500 < 0 \iff x \in \left]-10, -5\right[ \cup \left]5, 10\right[$

**54.** $f(x) = a(x+1)(x-2)^2$

$f(1) = -4 \Leftrightarrow a(1+1)(1-2)^2 = -4 \Leftrightarrow 2a = -4 \Leftrightarrow a = -2$

$f(x) = -2(x+1)(x-2)^2$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-2)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ |

$f$ é positiva em $]-\infty, -1[$ e é negativa em $]-1, +\infty[\setminus\{2\}$ .

**55.1** $x^3 - 2x^2 - x < -2 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 < 0$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
1 & & 1 & -1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2)$

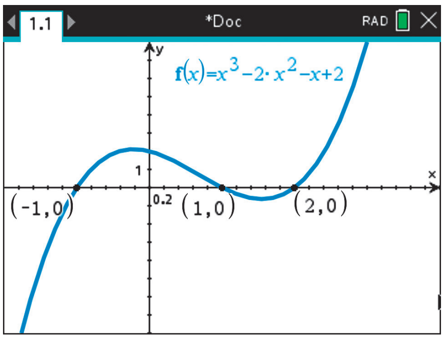
$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1-3}{2} \vee x = \frac{1+3}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2-x-2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^3-2x^2-x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$x^3 - 2x^2 - x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, 2[$

Graficamente:




$x^3 - 2x^2 - x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, 2[$

**55.2** $-2x^3+3x^2+11x>6 \Leftrightarrow -2x^3+3x^2+11x-6>0$

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 3 & 11 & -6 \\ -2 & & 4 & -14 & 6 \\ \hline & -2 & 7 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$-2x^3+3x^2+11x-6=(x+2)\left(-2x^2+7x-3\right)$

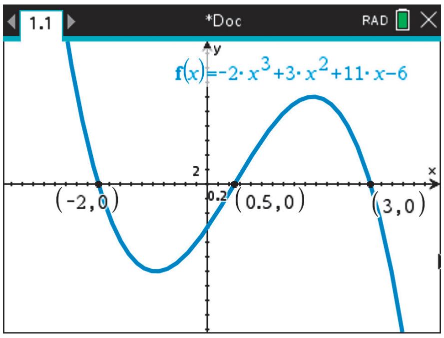
$-2x^2+7x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times(-2)\times(-3)}}{2\times(-2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{25}}{-4} \Leftrightarrow x=\dfrac{-7-5}{-4} \vee x=\dfrac{-7+5}{-4} \Leftrightarrow x=3 \vee x=\dfrac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $\frac{1}{2}$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $-2x^2+7x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $-2x^3+3x^2+11x-6$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$-2x^3+3x^2+11x-6>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty, -2\right[\cup\left]\frac{1}{2}, 3\right[$

Graficamente:




$-2x^3+3x^2+11x-6>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty, -2\right[\cup\left]\frac{1}{2}, 3\right[$

**55.3** $-6x^3+25x^2+26x\leqslant 5 \Leftrightarrow -6x^3+25x^2+26x-5\leqslant 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & -6 & 25 & 26 & -5 \\ -1 & & 6 & -31 & 5 \\ \hline & -6 & 31 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$-6x^3+25x^2+26x-5=(x+1)\left(-6x^2+31x-5\right)$

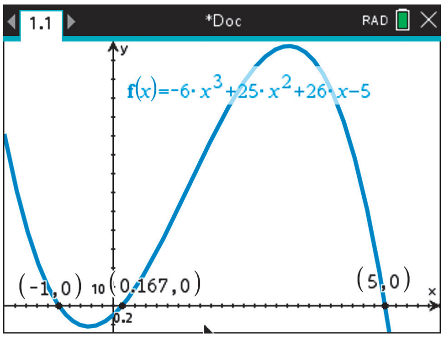
$-6x^2+31x-5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-31\pm\sqrt{31^2-4\times(-6)\times(-5)}}{2\times(-6)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-31\pm\sqrt{841}}{-12} \Leftrightarrow x=\dfrac{-31-29}{-12} \vee x=\dfrac{-31+29}{-12} \Leftrightarrow x=5 \vee x=\dfrac{1}{6}$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $\frac{1}{6}$ | | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $-6x^2+31x-5$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $-6x^3+25x^2+26x-5$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$-6x^3+25x^2+26x-5 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{1}{6}\right] \cup [5, +\infty[$

Graficamente:




$-6x^3+25x^2+26x-5 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{1}{6}\right] \cup [5, +\infty[ \quad \left(\frac{1}{6} \approx 0,167\right)$

**55.4** $12x^4-47x^3+31x^2+7x \geqslant 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x^4-47x^3+31x^2+7x-3 \geqslant 0$

| | 12 | $-47$ | 31 | 7 | $-3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 12 | $-35$ | $-4$ | 3 |
| | 12 | $-35$ | $-4$ | 3 | 0 |

$12x^4-47x^3+31x^2+7x-3=(x-1)\left(12x^3-35x^2-4x+3\right)$

| | 12 | $-35$ | $-4$ | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | | 36 | 3 | $-3$ |
| | 12 | 1 | $-1$ | 0 |

$12x^3-35x^2-4x+3=(x-3)\left(12x^2+x-1\right)$

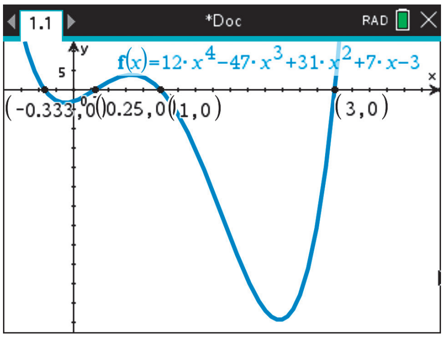
$12x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4 \times 12 \times (-1)}}{2 \times 12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{1 \pm \sqrt{49}}{24} \Leftrightarrow x=\frac{-1-7}{24} \vee x=\frac{-1+7}{24} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3} \vee x=\frac{1}{4}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{4}$ | | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $12x^2+x-1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $12x^4-47x^3+31x^2+7x-3$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$12x^4-47x^3+31x^2+7x-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, 1\right] \cup [3, +\infty[$

Graficamente:

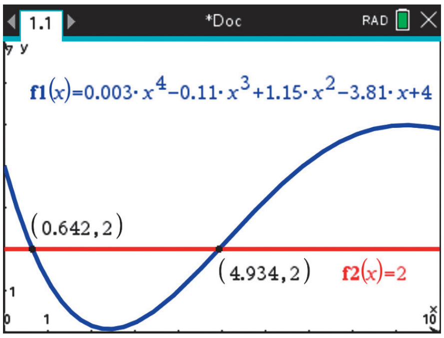



$12x^4 - 47x^3 + 31x^2 + 7x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, 1\right] \cup [3, +\infty[ \quad \left(\frac{1}{3} \approx 0{,}333\right)$.

## PÁG. 52

### Aplicar

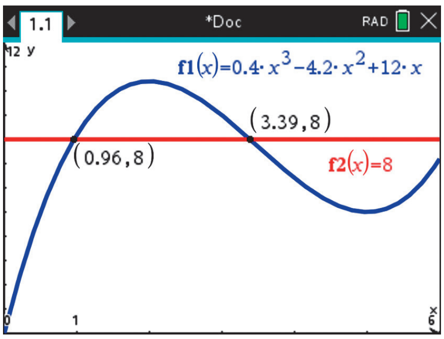
**56.** $A(t) < 2$




Durante $4{,}934 - 0{,}642 \approx 4{,}3$ segundos.

**57.** Utilizando uma calculadora para efetuar a regressão cúbica, obtém-se $h(t) = 0{,}4t^3 - 4{,}2t^2 + 12t$.

$h(t) \geqslant 8$




$3{,}39 - 0{,}96 = 2{,}43 > 2$, pelo que o teste foi bem sucedido.

**58.1** $g(x) = a(x+2)(x-1)(x-3)$

$g(0) = -1 \Leftrightarrow a(0+2)(0-1)(0-3) = -1 \Leftrightarrow -6a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$

$g(x) = -\frac{1}{6}(x+2)(x-1)(x-3)$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{6}$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$g(x)>0 \Leftrightarrow x\in ]-\infty, -2[\cup]1, 3[$

**58.2** $(x^2-1)\,g(x)+(x-x^2)\,g(x)=(x^2-1+x-x^2)\,g(x)=(x-1)\,g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $(x-1)\,g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

O conjunto-solução da condição é $]-\infty, -2]\cup\{1\}\cup[3, +\infty[$ .

**58.3** $g(x)=-\frac{1}{6}(x+2)(x-1)(x-3)=\left(-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}\right)(x^2-4x+3)=$

$=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{6}x-1$

## PÁG. 59

### Aplicar

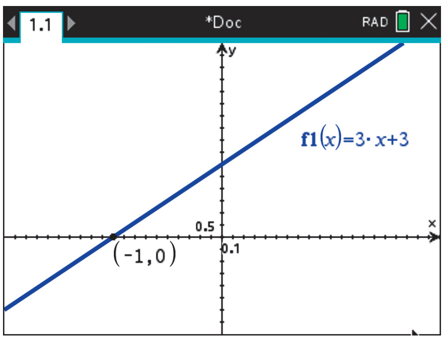
**63.1** $D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=3x+1+2=3x+3$

Zero: $(f+g)(x)=0 \Leftrightarrow 3x+3=0 \Leftrightarrow x=-1$

Sinal: $3x+3$ é um polinómio do 1.º grau; define uma função afim, cujo gráfico é uma reta de declive positivo, $3x+3$ é negativo à esquerda do zero e positivo à direita do zero;

$f+g$ é negativa em $]-\infty, -1[$ e positiva em $]-1, +\infty[$ .



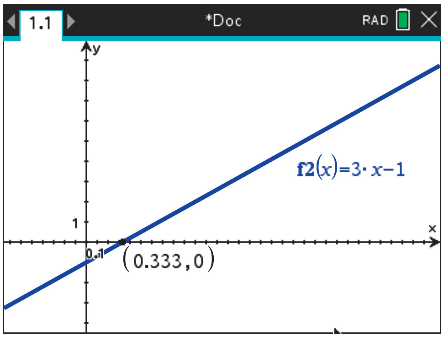
$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f-g)\ (x) = f(x) - g(x) = 3x + 1 - 2 = 3x - 1$

Zero: $(f-g)\ (x) = 0 \iff 3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$

Sinal: $3x - 1$ é um polinómio do 1.º grau; define uma função afim, cujo gráfico é uma reta de declive positivo, $3x - 1$ é negativo à esquerda do zero e positivo à direita do zero;

$f - g$ é negativa em $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ e positiva em $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ .



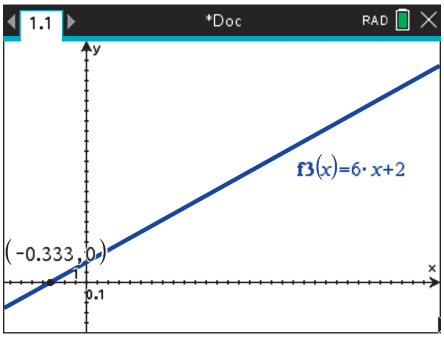

$D_{f\times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f\times g)\ (x) = f(x) \times g(x) = (3x + 1) \times 2 = 6x + 2$

Zero: $(f\times g)\ (x) = 0 \iff 6x + 2 = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$

Sinal: $6x + 2$ é um polinómio do 1.º grau; define uma função afim, cujo gráfico é uma reta de declive positivo, $6x + 2$ é negativo à esquerda do zero e positivo à direita do zero;

$f\times g$ é negativa em $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ e positiva em $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ .



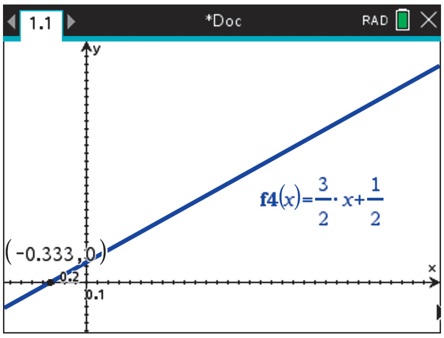

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+1}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

Zero: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \iff \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \iff x = -\frac{1}{3}$

Sinal: $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ é um polinómio do 1.º grau; define uma função afim, cujo gráfico é uma reta de declive positivo, $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ é negativo à esquerda do zero e positivo à direita do zero;

$\frac{f}{g}$ é negativa em $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ e positiva em $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ .




$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

$D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} \cap \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{1}{3}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

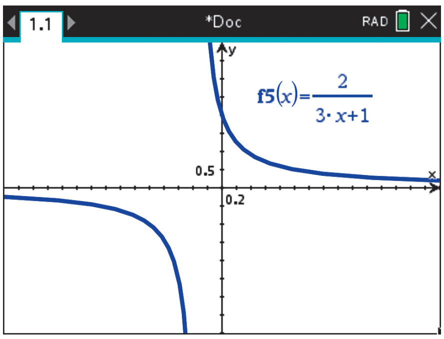
$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2}{3x+1}$

Zeros: $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3x+1} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2 = 0}_{\text{falso}} \wedge 3x + 1 \neq 0$ ; $\frac{g}{f}$ não tem zeros.

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **2** | + | + | + | + | + |
| $3x+1$ | – | – | 0 | + | + |
| $\frac{2}{3x+1}$ | – | – | N.D. | + | + |

$\frac{g}{f}$ é negativa em $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ e positiva em $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.



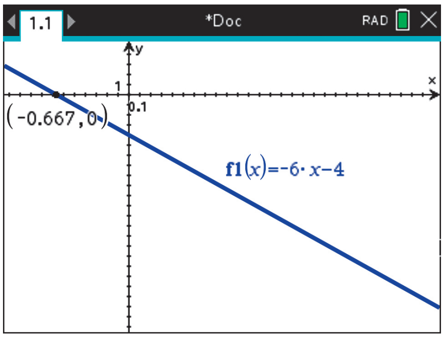

**63.2** $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -8 + 4 - 6x = -6x - 4$

Zero: $(f+g)(x) = 0 \Leftrightarrow -6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

Sinal: $-6x-4$ é um polinómio do 1.° grau; define uma função afim, cujo gráfico é uma reta de declive negativo, $-6x-4$ é positivo à esquerda do zero e negativo à direita do zero;

$f+g$ é positiva em $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[$ e negativa em $\left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$ .



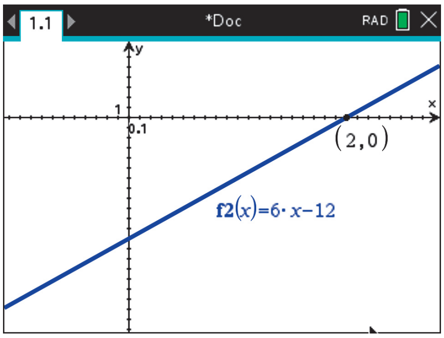

$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f-g)\ (x) = f(x) - g(x) = -8 - (4-6x) = 6x - 12$

Zero: $(f-g)\ (x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Sinal: $6x-12$ é um polinómio do 1.° grau; define uma função afim, cujo gráfico é uma reta de declive positivo, $6x-12$ é negativo à esquerda do zero e positivo à direita do zero;

$f-g$ é negativa em $]-\infty, 2[$ e positiva em $]2, +\infty[$ .



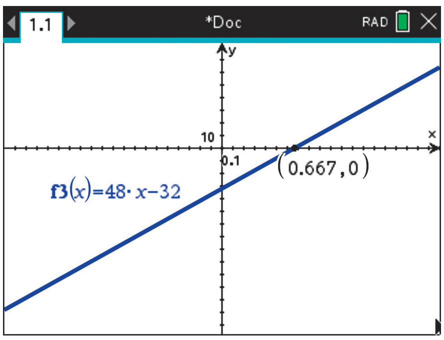

$D_{f\times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f\times g)\ (x) = f(x) \times g(x) = -8 \times (4-6x) = 48x - 32$

Zeros: $(f\times g)\ (x) = 0 \Leftrightarrow 48x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Sinal: $48x-32$ é um polinómio do 1.° grau; define uma função afim, cujo gráfico é uma reta de declive positivo, $48x-32$ é negativo à esquerda do zero e positivo à direita do zero;

$f\times g$ é negativa em $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$ e positiva em $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ .



$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$

$g(x) = 0 \iff 4 - 6x = 0 \iff x = \frac{2}{3}$

$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \cap \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{2}{3}\right\} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{2}{3}\right\}$

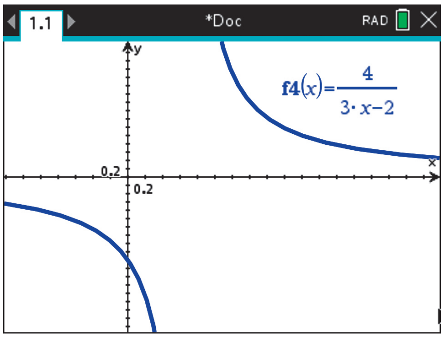
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-8}{4-6x} = \frac{4}{3x-2}$

Zeros: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \iff \frac{4}{3x-2} = 0 \iff \underbrace{4=0}_{\text{falso}} \wedge 3x - 2 \neq 0$ ; $\frac{f}{g}$ não tem zeros.

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **4** | + | + | + | + | + |
| **$3x-2$** | – | – | 0 | + | + |
| **$\frac{4}{3x-2}$** | – | – | ND | + | + |

$\frac{f}{g}$ é negativa em $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$ e positiva em $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.



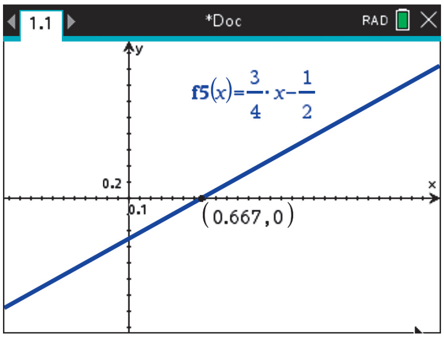

$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{4-6x}{-8} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

Zero: $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \iff \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = 0 \iff x = \frac{2}{3}$

Sinal: $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ é um polinómio do 1.º grau; define uma função afim, cujo gráfico é uma reta de declive positivo, $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ é negativo à esquerda do zero e positivo à direita do zero;

$\frac{g}{f}$ é negativa em $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$ e positiva em $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.




**63.3** $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x - 2 + x^2 + x = x^2 + 2x - 2$

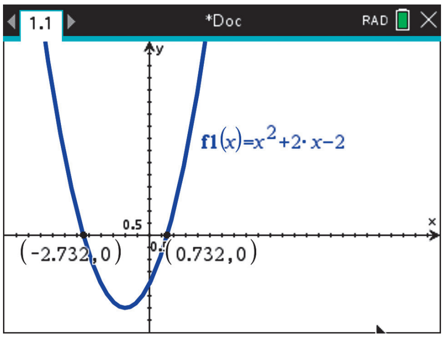
Zeros: $(f+g)(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} \vee x = \dfrac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{3} \vee x = -1 + \sqrt{3}$

Sinal: $x^2 + 2x - 2$ é um polinómio do 2.º grau; define uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima; $x^2 + 2x - 2$ é negativo entre os zeros e positivo fora do intervalo limitado pelos zeros;

$f+g$ negativa em $\left]-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right[$ e positiva em $\left]-\infty, -1-\sqrt{3}\right[ \cup \left]-1+\sqrt{3}, +\infty\right[$ .

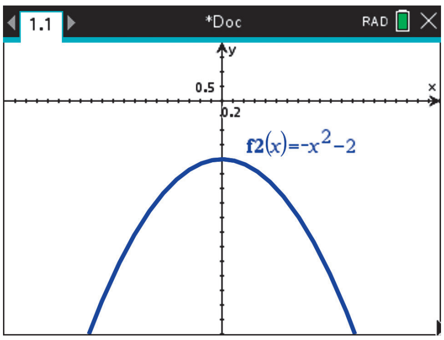



$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x - 2 - \left(x^2 + x\right) = -x^2 - 2$

Zeros: $(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2$ impossível; $f-g$ não tem zeros.

Sinal: $-x^2 - 2$ é um polinómio do 2.º grau; define uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo; $f-g$ é negativa em $\mathbb{R}$ .



$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

$(f\times g)\ (x)=f\,(x)\times g\,(x)=(x-2)\times\left(x^2+x\right)=x^3-x^2-2x$

Zeros: $(f\times g)\ (x)=0\ \Leftrightarrow\ x^3-x^2-2x=0\ \Leftrightarrow\ x\left(x^2-x-2\right)=0\ \Leftrightarrow$

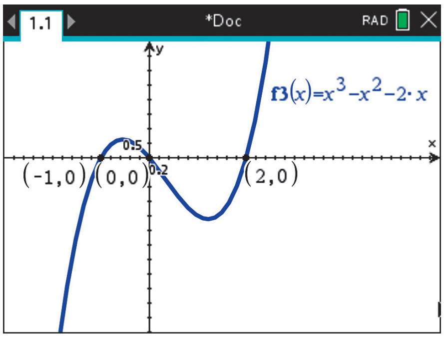
$\Leftrightarrow\ x=0\ \vee\ x^2-x-2=0\ \Leftrightarrow\ x=0\ \vee\ x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x=0\ \vee\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2}\ \Leftrightarrow\ x=0\ \vee\ x=\dfrac{1-3}{2}\ \vee\ x=\dfrac{1+3}{2}\ \Leftrightarrow\ x=0\ \vee\ x=-1\ \vee\ x=2$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2-x-2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^3-x^2-2x$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$f\times g$ é negativa em $]-\infty\,,-1[\,\cup\,]0\,,2[$ e positiva em $]-1\,,0[\,\cup\,]2\,,+\infty[$ .




$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g\cap\left\{x\in\mathbb{R}:g\,(x)\neq0\right\}$

$g\,(x)=0\ \Leftrightarrow\ x^2+x=0\ \Leftrightarrow\ x\,(x+1)=0\ \Leftrightarrow\ x=0\ \vee\ x+1=0\ \Leftrightarrow\ x=0\ \vee\ x=-1$

$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}\cap\{x\in\mathbb{R}:x\neq-1\wedge x\neq0\}=\mathbb{R}\backslash\{-1\,,0\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f\,(x)}{g\,(x)}=\dfrac{x-2}{x^2+x}$

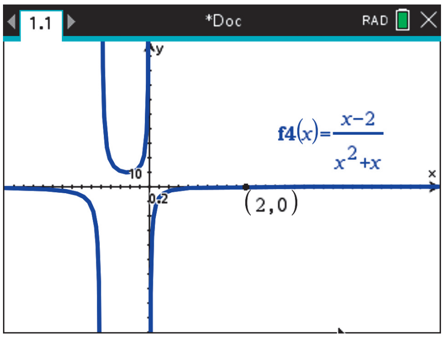
Zeros: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=0\ \Leftrightarrow\ \dfrac{x-2}{x^2+x}=0\ \Leftrightarrow\ x-2=0\wedge x^2+x\neq0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x=2\wedge x\neq-1\wedge x\neq0\ \Leftrightarrow\ x=2$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^2+x$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\dfrac{x-2}{x^2+x}$ | $-$ | ND | $+$ | ND | $-$ | $0$ | $+$ |

$\frac{f}{g}$ é negativa em $]-\infty\,,\,-1[\,\cup\,]0\,,\,2[$ e positiva em $]-1\,,\,0[\,\cup\,]2\,,\,+\infty[$ .




$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$

$D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = \mathbb{R} \backslash \{2\}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + x}{x - 2}$

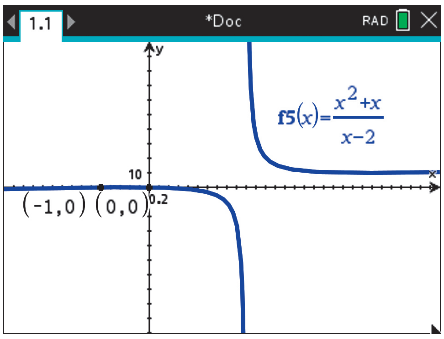
Zeros: $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2 + x}{x - 2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x = 0 \wedge x - 2 \neq 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; (x = 0 \;\vee\; x = -1) \wedge x \neq 2 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = -1$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + x$ | + | 0 | – | 0 | + | + | + |
| $x - 2$ | – | – | – | – | – | 0 | + |
| $\frac{x^2 + x}{x - 2}$ | – | 0 | + | 0 | – | ND | + |

$\frac{g}{f}$ é negativa em $]-\infty\,,\,-1[\,\cup\,]0\,,\,2[$ e positiva em $]-1\,,\,0[\,\cup\,]2\,,\,+\infty[$ .

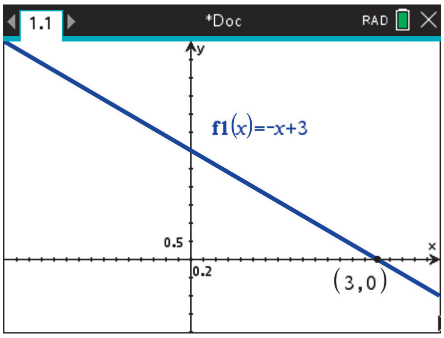



**63.4** $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 9 - x^2 + x^2 - x - 6 = -x + 3$

Zeros: $(f+g)(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3$

Sinal: $-x+3$ é um polinómio do 1.º grau; define uma função afim, cujo gráfico é uma reta com declive negativo; $f+g$ é positiva em $]-\infty, 3[$ e negativa em $]3, +\infty[$.




$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

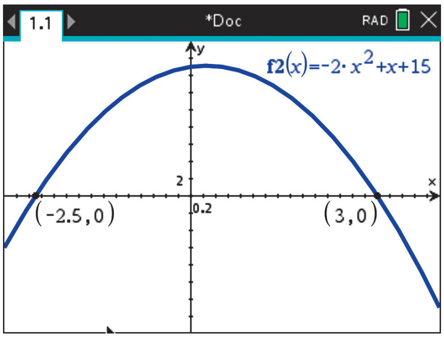
$(f-g)\ (x) = f(x) - g(x) = 9 - x^2 - (x^2 - x - 6) = -2x^2 + x + 15$

Zeros: $(f-g)\ (x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2) \times 15}}{2(-2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{121}}{-4} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1-11}{-4} \vee x = \dfrac{-1+11}{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\dfrac{5}{2}$

Sinal: $-2x^2 + x + 15$ é um polinómio do 2.º grau; define uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo; $-2x^2 + x + 15$ é positivo entre os zeros e negativo fora do intervalo limitado pelos zeros; $f-g$ é positiva em $\left]-\dfrac{5}{2}, 3\right[$ e negativa em $\left]-\infty, -\dfrac{5}{2}\right[ \cup ]3, +\infty[$.




$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f \times g)\ (x) = f(x) \times g(x) = (9 - x^2) \times (x^2 - x - 6) = -x^4 + x^3 + 15x^2 - 9x - 54$

Zeros: $(f \times g)\ (x) = 0 \Leftrightarrow (9 - x^2) \times (x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \vee x^2 - x - 6 \Leftrightarrow x^2 = 9 \vee x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \vee x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = -2 \vee x = 3$

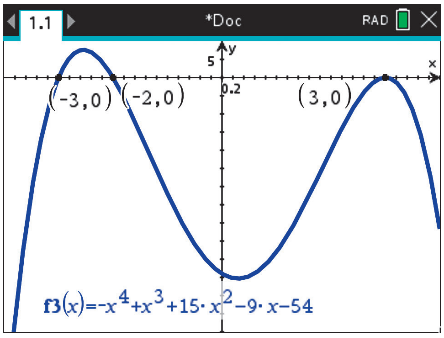
$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2 \vee x = 3$

$(f \times g)\ (x) = -(x+3)\ (x+2)\ (x-3)^2$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $-2$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $-(x-3)^2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $-x^4+x^3+15x^2-9x-54$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ |

$f \times g$ é negativa em $]-\infty, -3[ \cup ]-2, +\infty[ \setminus \{3\}$ e positiva em $]-3, -2[$ .




$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1-5}{2} \vee x = \frac{1+5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \wedge x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{9-x^2}{x^2-x-6} = \frac{(3-x)(3+x)}{(x+2)(x-3)} = -\frac{x+3}{x+2}$$

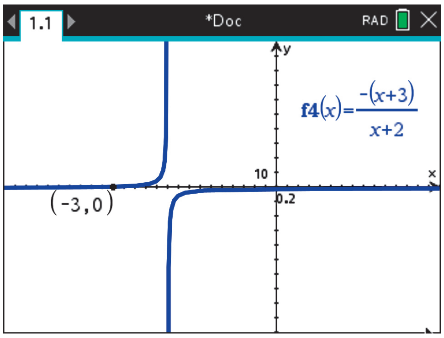
Zeros: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x+3}{x+2} = 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+2} = 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x+3=0 \wedge x+2 \neq 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = -3 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x = -3$$

Sinal de $-\frac{x+3}{x+2}$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{x+3}{x+2}$ | $+$ | $0$ | $-$ | N.D. | $+$ |
| $-\frac{x+3}{x+2}$ | $-$ | $0$ | $+$ | N.D. | $-$ |

$\frac{f}{g}$ é negativa em $]-\infty, -3[ \cup ]-2, +\infty[ \setminus \{3\}$ e positiva em $]-3, -2[$ .




$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

$D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3 \wedge x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 - x - 6}{9 - x^2} = \frac{(x+2)(x-3)}{(3-x)(3+x)} = -\frac{x+2}{x+3}$

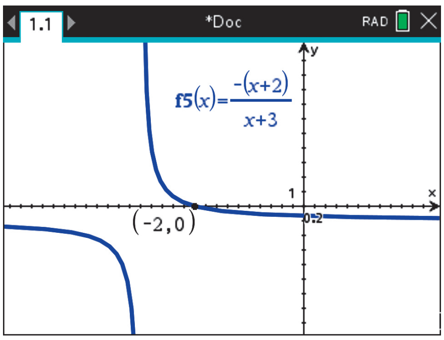
Zeros: $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x+2}{x+3} = 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+3} = 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \wedge x + 3 \neq 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x = -2$

Sinal de $-\frac{x+2}{x+3}$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $x+3$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{x+2}{x+3}$ | $+$ | N.D. | $-$ | 0 | $+$ |
| $-\frac{x+2}{x+3}$ | $-$ | N.D. | $+$ | 0 | $-$ |

$\frac{g}{f}$ é negativa em $]-\infty, -3[ \cup ]-2, +\infty[ \setminus \{3\}$ e positiva em $]-3, -2[$ .



**63.5** $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x - 10 + x^3 - 5x^2 = x^3 - 5x^2 + 2x - 10$

Zeros: $(f+g)(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = 0$

| | 1 | $-5$ | 2 | $-10$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | | 5 | 0 | 10 |
| | 1 | 0 | 2 | 0 |

$x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = (x-5)(x^2+2)$

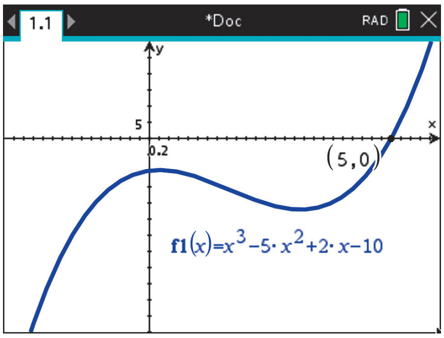
$x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2$ impossível, pelo que $x^2 + 2$ não tem zeros.

Logo, $f+g$ tem $5$ como zero.

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-5$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ |
| $x^2+2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^3-5x^2+2x-10$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ |

$f+g$ é negativa em $]-\infty, 5[$ e positiva em $]5, +\infty[$.




$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 2x - 10 - (x^3 - 5x^2) = -x^3 + 5x^2 + 2x - 10$

Zeros: $(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 5x^2 + 2x - 10 = 0$

| | $-1$ | 5 | 2 | $-10$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | | $-5$ | 0 | 10 |
| | $-1$ | 0 | 2 | 0 |

$-x^3 + 5x^2 + 2x - 10 = (x-5)(-x^2+2)$

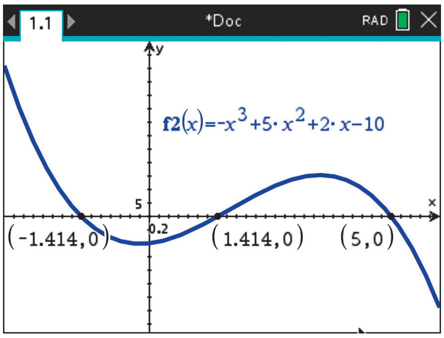
$-x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

Os zeros de $f-g$ são $-\sqrt{2}$, $5$ e $\sqrt{2}$.

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-5$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $-x^2+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $-x^3+5x^2+2x-10$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$f-g$ é positiva em $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 5[$ e negativa em $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cup]5, +\infty[$ .




$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

$(f\times g)\,(x)=f\,(x)\times g\,(x)=(2x-10)\times\left(x^3-5x^2\right)=2x^4-20x^3+50x^2$

Zeros: $(f\times g)\,(x)=0 \Leftrightarrow 2x^4-20x^3+50x^2=0 \Leftrightarrow x^4-10x^3+25x^2=0 \Leftrightarrow$

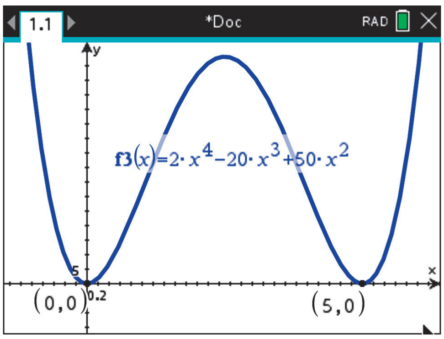
$\Leftrightarrow x^2\left(x^2-10x+25\right)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee x^2-10x+25=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee (x-5)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x-5=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=5$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-5)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $2x^4-20x^3+50x^2$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |

$f\times g$ é positiva em $\mathbb{R}\backslash\{0, 5\}$ .




$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g\cap\{x\in\mathbb{R}: g\,(x)\neq 0\}$

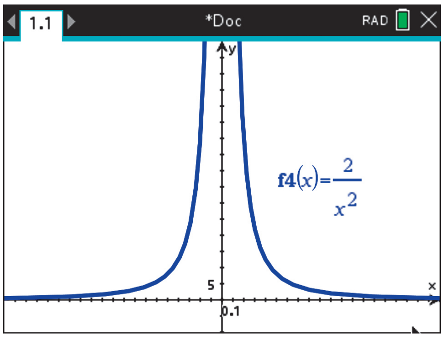
$g\,(x)=0 \Leftrightarrow x^3-5x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-5)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee x-5 \Leftrightarrow x=0 \vee x=5$

$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}\cap\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0 \wedge x\neq 5\}=\mathbb{R}\backslash\{0, 5\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x-10}{x^3-5x^2}=\frac{2(x-5)}{x^2(x-5)}=\frac{2}{x^2}$$

Zeros: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2}=0 \wedge x\neq 5 \Leftrightarrow \underbrace{2=0}_{\text{imp.}} \wedge x^2\neq 0 \wedge x\neq 5 \Leftrightarrow x\in\varnothing$ ; $\frac{f}{g}$ não tem zeros.

Sinal: $\frac{2}{x^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ . $\frac{f}{g}$ é positiva em $\mathbb{R}\backslash\{0,5\}$ .




$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g\cap\{x\in\mathbb{R}: f(x)\neq 0\}$

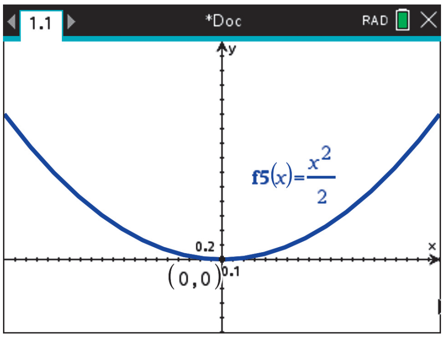
$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x-10=0 \Leftrightarrow x=5$

$D_{\frac{g}{f}}=\mathbb{R}\cap\{x\in\mathbb{R}: x\neq 5\}=\mathbb{R}\backslash\{5\}$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^3-5x^2}{2x-10}=\frac{x^2(x-5)}{2(x-5)}=\frac{x^2}{2}$$

Zeros: $\left(\frac{g}{f}\right)(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}=0 \wedge x\neq 5 \Leftrightarrow x^2=0 \wedge x\neq 5 \Leftrightarrow x=0$

Sinal: $\frac{x^2}{2}\geqslant 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ . $\frac{g}{f}$ é positiva em $\mathbb{R}\backslash\{0,5\}$ .




**63.6** $D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^3-1+x-1=x^3+x-2$

Zeros: $(f+g)(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x-2=0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 1 | $-5$ |
| 1 | | 1 | 1 | 2 |
| | 1 | 1 | 2 | 0 |

$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$

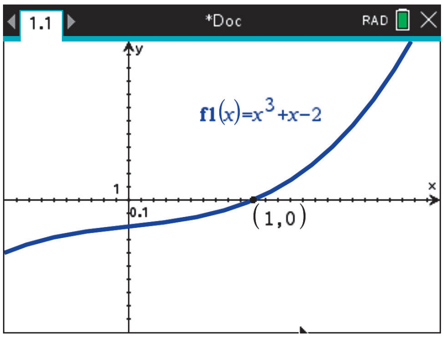
$x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times2}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$ impossível

Logo, $f+g$ tem $1$ como zero.

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $x^2+x+2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^3+x-2$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |

$f+g$ é negativa em $]-\infty, 1[$ e positiva em $]1, +\infty[$.




$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^3-1-(x-1)=x^3-x$

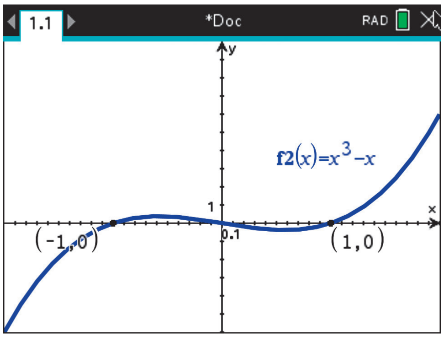
Zeros: $(f-g)(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-1 \vee x=1$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2-1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^3-x$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$f-g$ é negativa em $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ e positiva em $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$.



$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

$(f\times g)\,(x)=f\,(x)\times g\,(x)=\left(x^3-1\right)\times(x-1)=x^4-x^3-x+1$

Zeros: $(f\times g)\;(x)=0\;\Leftrightarrow\;x^4-x^3-x+1=0\;\Leftrightarrow\;\left(x^3-1\right)\,(x-1)=0\;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\;x^3-1=0\;\vee\;x-1=0\;\Leftrightarrow$

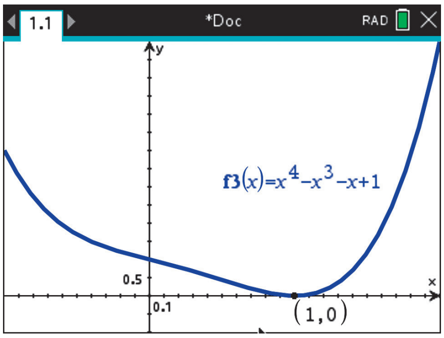
$\Leftrightarrow\;x^3=1\;\vee\;x=1\;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\;x=1\;\vee\;x=1\;\Leftrightarrow\;x=1$

Sinal:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $x^3-1$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $x^4-x^3-x+1$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ |

$f\times g$ é positiva em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ .




$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g\cap\left\{x\in\mathbb{R}:g\,(x)\neq 0\right\}$

$g\,(x)=0\;\Leftrightarrow\;x-1=0\;\Leftrightarrow\;x=1$

$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}\cap\{x\in\mathbb{R}:x\neq 1\}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f\,(x)}{g\,(x)}=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}=x^2+x+1$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | $-1$ |
| 1 | | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 |

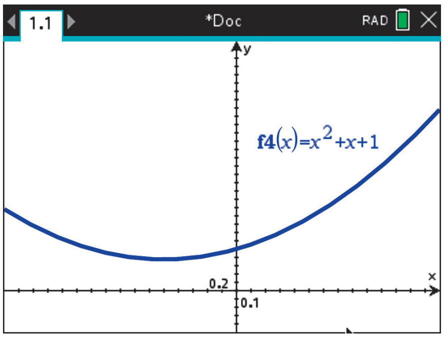
Zeros: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0\;\Leftrightarrow\;x^2+x+1=0\wedge x\neq 1\;\Leftrightarrow\;x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times 1}}{2\times 1}\wedge x\neq 1\;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\;x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\wedge x\neq 1\;\Leftrightarrow\;x\in\varnothing$$

impossível

$\frac{f}{g}$ não tem zeros.

Sinal: $\frac{f}{g}$ é positiva em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ .




$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

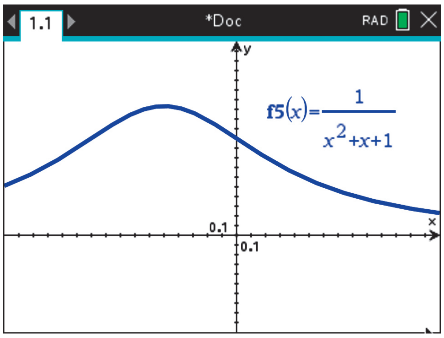
$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

$D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x-1}{x^3-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}$

Zeros: $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2+x+1} = 0 \wedge x \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{1=0}_{\text{imp.}} \wedge x^2+x+1 \neq 0 \wedge x \neq 1$ ; $\frac{g}{f}$ não tem zeros.

Sinal: $x^2+x+1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ . $\frac{g}{f}$ é positiva em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ .




**64.1** $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = a(x-1)(x-2)(x-b)(x-6)$

A função $f \times g$ tem exatamente quatro zeros se $b \neq 1 \wedge b \neq 2 \wedge b \neq 6$ .

Opção correta: **(C)**

**64.2** $D_{\frac{h}{f}} = D_h \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x-1)(x-2)(x-b) = 0 \quad \underset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad x-1=0 \ \vee \ x-2=0 \wedge x-b=0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x = 2 \wedge x = b$

$D_{\frac{h}{f}} = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq b\} = \mathbb{R}\backslash\{1, 2, b\}$

Para que o domínio de $\frac{h}{f}$ seja $\mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$ , $f$ só pode ter dois zeros distintos: $1$ e $2$ . Como $1$ e $2$ são zeros de $f$ , então $b$ tem de ser igual a $1$ ou $2$ .

## PÁG. 60

### Aplicar

**64.3** $D_{g+h} = D_g \cap D_h = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$(g+h)\ (x) = g(x) + h(x) = x - 6 + x^2 + x - 2 = x^2 + 2x - 8$

Zeros: $(g+h)\ (x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-2-6}{2} \vee x = \dfrac{-2+6}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$

Sinal: $g+h$ é negativa em $]-4\,,\,2[$ e positiva em $]-\infty\,,\,-4[\,\cup\,]2\,,\,+\infty[$ .

**64.4 a.** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2\,(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{a\,(x-1)\,(x-2)\,(x-b)}{x-6} = 2\,(x-1)\,(x-2) \Leftrightarrow a\,(x-1)\,(x-2) \times \dfrac{(x-b)}{x-6} = 2\,(x-1)\,(x-2)$

Logo, $a = 2 \wedge \dfrac{(x-b)}{x-6} = 1$ , para $x \in \mathbb{R} \backslash \{6\}$ $\left(\text{domínio de } \dfrac{f}{g}\right)$, ou seja, $a = 2 \wedge b = 6$ .

**b.** $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{2\,(x-1)\,(x-2)\,(x-6)}{x^2 + x - 2} = \dfrac{2\,(x-1)\,(x-2)\,(x-6)}{(x+2)\,(x-1)} =$

$= \dfrac{2\,(x-2)\,(x-6)}{(x+2)}$

$D_{\frac{f}{h}} = \mathbb{R} \backslash \{-2\,,\,1\}$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $1$ | | $2$ | | $6$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\,(x-2)\,(x-6)$ | + | + | + | + | + | 0 | − | 0 | + |
| $x+2$ | − | 0 | + | + | + | + | + | + | + |
| $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$ | − | ND | + | ND | + | 0 | − | 0 | + |

$\dfrac{f}{h}$ é negativa em $]-\infty\,,\,-2[\,\cup\,]2\,,\,6[$ e positiva em $]-2\,,\,1[\,\cup\,]1\,,\,2[\,\cup\,]6\,,\,+\infty[$ .

**65.** 1 $D_{\frac{h}{g}} = D_h \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$

Se $D_{\frac{h}{g}} = \mathbb{R}$ , então $g(x) \neq 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$ , ou seja, $g$ não tem zeros.

Opção correta: **(D)**

**65.2** $h$ é uma função cúbica, definida por um polinómio com uma raiz simples, $5$ , e uma raiz de multiplicidade dois, $-2$ . Assim, tem-se $h(x) = a\,(x+2)^2\,(x-5)$ .

$h(0) = -2 \Leftrightarrow a\,(0+2)^2\,(0-5) = -2 \Leftrightarrow -20a = -2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{10}$

$h(x) = \dfrac{1}{10}\,(x+2)^2(x-5)$

**65.3 a.** $(h+g)\,(5)-(h\times g)\,(0)=h(5)+g(5)-h(0)\times g(0)=$

$=\frac{1}{10}(5+2)^2(5-5)+\left(5^2+4\times5+4\right)-\frac{1}{10}(0+2)^2(0-5)\times\left(0^2+4\times0+4\right)=$

$=0+49-(-2)\times4=57$

**b.** $D_{\frac{g}{h}}=D_g\cap D_h\cap\{x\in\mathbb{R}:h(x)\neq0\}=$

$=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\{x\in\mathbb{R}:x\neq-2\wedge x\neq5\}=\mathbb{R}\backslash\{-2\,,\,5\}$

$$\left(\frac{g}{h}\right)(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{x^2+4x+4}{\frac{1}{10}(x+2)^2(x-5)}=\frac{(x+2)^2}{\frac{1}{10}(x+2)^2(x-5)}=\frac{10}{x-5}$$

$D_{\frac{h}{g}}=D_h\cap D_g\cap\{x\in\mathbb{R}:g(x)\neq0\}$

$g(x)=0\iff x^2+4x+4=0\iff(x+2)^2=0\iff x+2=0\iff x=-2$

$D_{\frac{h}{g}}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\{x\in\mathbb{R}:x\neq-2\}=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x)=\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{10}(x+2)^2(x-5)}{x^2+4x+4}=\frac{\frac{1}{10}(x+2)^2(x-5)}{(x+2)^2}=\frac{x-5}{10}=\frac{1}{10}x-\frac{1}{2}$$

**c.** $(g+h)\,(x)=g(x)+h(x)=x^2+4x+4+\frac{1}{10}(x+2)^2(x-5)=$

$=(x+2)^2+\frac{1}{10}(x+2)^2(x-5)=(x+2)^2\left[1+\frac{1}{10}(x-5)\right]=$

$=(x+2)^2\times\frac{x+5}{10}$

| $x$ | $-\infty$ | $-5$ | | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x+2)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{x+5}{10}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x+2)^2\times\frac{x+5}{10}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |

$g+h$ é negativa em $]-\infty\,,\,-5[$ e positiva em $]-5\,,\,-2[\,\cup\,]-2\,,\,+\infty[$ .

**65.4** $(h\times f)\,(x)=h(x)\times f(x)=\frac{1}{10}(x+2)^2(x-5)\times(2-7x)$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $\frac{2}{7}$ | | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $(h\times f)\,(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$h\times f$ é não negativa em $\{-2\}\cup\left[\frac{2}{7}\,,\,5\right]$ .

**66.** $g(x) = x^3 - 49x = x\left(x^2 - 49\right) = x(x-7)(x+7)$

Sejam $b$ e $c$ os dois zeros negativos de $f$. Sendo $a \neq 0$, tem-se:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a(x-b)(x-c)(x-3)(x-7)}{x^3 - 49x} = \frac{a(x-b)(x-c)(x-3)(x-7)}{x(x-7)(x+7)} = \frac{a(x-b)(x-c)(x-3)}{x(x+7)}$$

Se um dos zeros negativos de $f$ for $-7$, o número de zeros de $\frac{f}{g}$ é dois. Se nenhum dos zeros negativos de $f$ for $-7$, o número de zeros de $\frac{f}{g}$ é três. Portanto, o número mínimo de zeros de $\frac{f}{g}$ é dois.

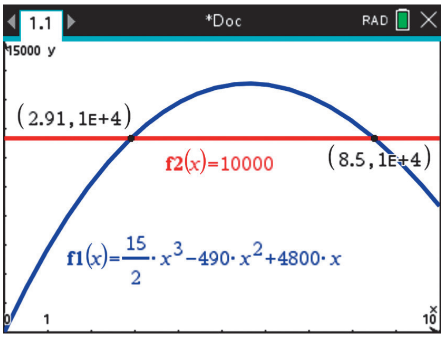
Opção correta: **(B)**

## PÁG. 61

### Aplicar

**67.1 a.** $R(t) = P(t) \times N(t) = \left(-\frac{3}{8}t + 20\right)\left(-20t^2 + 240t\right) = \frac{15}{2}t^3 - 490t^2 + 4800t$

**b.** $R(t) > 10\,000$




Aproximadamente, durante $8{,}5 - 2{,}91 = 5{,}59$ semanas, ou seja, aproximadamente, durante $5$ semanas e $0{,}59 \times 7 = 4{,}13 \approx 4$ dias.

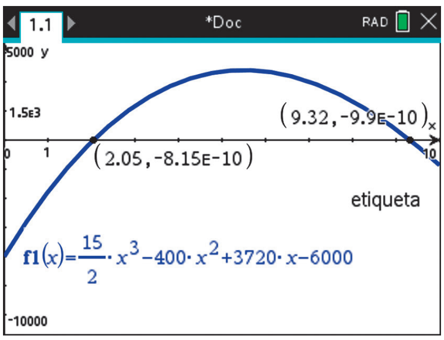
**67.2 a.** Lucro por cada unidade: $P(t) - 4{,}5$

$L(t) = N(t) \times (P(t) - 4{,}5) - 6000 =$

$$= \left(-20t^2 + 240t\right)\left(-\frac{3}{8}t + 20 - 4{,}5\right) - 6000 = \left(-20t^2 + 240t\right)\left(-\frac{3}{8}t + 15{,}5\right) - 6000 =$$

$$= \frac{60}{8}t^3 - 310t^2 - 90t^2 - 3720t - 6000 = \frac{15}{2}t^3 - 400t^2 - 3720t - 6000$$

**b.** $L(t) > 0$




Aproximadamente, durante $9{,}32 - 2{,}05 = 7{,}27$ semanas, ou seja, aproximadamente, durante $7$ semanas e $0{,}27 \times 7 = 1{,}89 \approx 2$ dias.

## PÁG. 62

### Aplicar

**68.1** Zeros de $g \times h$ :

$(g \times h)\ (x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \vee h(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -4 \vee x = 6) \vee (x = -8 \vee x = 6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -8 \vee x = -4 \vee x = 6$

Sinal de $g \times h$ :

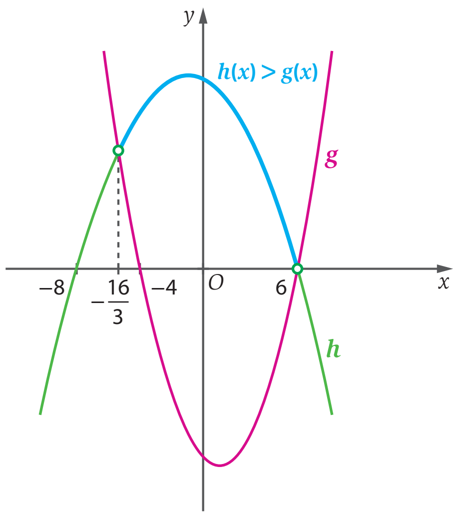
| $x$ | $-\infty$ | $-8$ | | $-4$ | | $6$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $(g \times h)\ (x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ |

$g \times h$ é negativa em $]-\infty, -8[ \cup ]-4, +\infty[ \setminus \{6\}$ e positiva em $]-8, -4[$ .

Zeros de $h - g$ :

$(h - g)\ (x) = 0 \Leftrightarrow h(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{16}{3} \vee x = 6$




Sinal de $h - g$ :

$(h - g)\ (x) > 0 \Leftrightarrow h(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{16}{3}, 6\right[$

$(h - g)\ (x) < 0 \Leftrightarrow h(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) < g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{16}{3}\right[ \cup ]6, +\infty[$

Zeros de $\frac{f}{g}$ :

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x = 6 \wedge x \neq -4 \wedge x \neq 6 \Leftrightarrow x \in \{\ \}$

$\frac{f}{g}$ não tem zeros.

Sinal de $\frac{f}{g}$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $6$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ | $+$ | ND | $-$ | ND | $-$ |

$\frac{f}{g}$ é positiva em $]-\infty, -4[$ e negativa em $]-4, 6[ \cup ]6, +\infty[$ .

**68.2** Tendo em conta os zeros de $g$ e de $h$, tem-se:

$g(x)=a(x+4)(x-6)$, $a\neq 0$ e $h(x)=b(x+8)(x-6)$, $b\neq 0$ .

Tem-se:

$$f\left(-\frac{16}{3}\right)=g\left(-\frac{16}{3}\right)=h\left(-\frac{16}{3}\right)$$

Como $f\left(-\frac{16}{3}\right)=-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{16}{3}\right)+4=\frac{32}{9}+4=\frac{68}{9}$, pode-se estabelecer que:

$$g\left(-\frac{16}{3}\right)=\frac{68}{9} \Leftrightarrow a\left(-\frac{16}{3}+4\right)\left(-\frac{16}{3}-6\right)=\frac{68}{9} \Leftrightarrow a\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{34}{3}\right)=\frac{68}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{136}{9}a=\frac{68}{9} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

Obtendo-se $g(x)=\frac{1}{2}(x+4)(x-6)$ .

De forma idêntica, agora, para a função $h$, tem-se:

$$h\left(-\frac{16}{3}\right)=\frac{68}{9} \Leftrightarrow b\left(-\frac{16}{3}+8\right)\left(-\frac{16}{3}-6\right)=\frac{68}{9} \Leftrightarrow b\left(\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{34}{3}\right)=\frac{68}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{272}{9}b=\frac{68}{9} \Leftrightarrow b=-\frac{1}{4}$$

Neste caso, obtém-se $h(x)=-\frac{1}{4}(x+8)(x-6)$

**68.3** $D_{\frac{f}{h}}=D_f\cap D_h\cap\{x\in\mathbb{R}: h(x)\neq 0\}=$

$$=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\{x\in\mathbb{R}: x\neq -8\wedge x\neq 6\}=\mathbb{R}\setminus\{-8, 6\}$$

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x)=\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{-\frac{2}{3}x+4}{-\frac{1}{4}(x+8)(x-6)}=\frac{\frac{-2x+12}{3}}{\frac{-(x+8)(x-6)}{4}}=$$

$$=\frac{4(-2x+12)}{-3(x+8)(x-6)}=\frac{4(-2)(x-6)}{-3(x+8)(x-6)}=\frac{8}{3x+24}$$

$D_{\frac{h}{g}}=D_h\cap D_g\cap\{x\in\mathbb{R}: g(x)\neq 0\}=$

$$=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\{x\in\mathbb{R}: x\neq -4\wedge x\neq 6\}=\mathbb{R}\setminus\{-4, 6\}$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x)=\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{-\frac{1}{4}(x+8)(x-6)}{\frac{1}{2}(x+4)(x-6)}=-\frac{x+8}{2(x+4)}=-\frac{x+8}{2x+8}$$

$D_{g\times h}=D_g\cap D_h=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

$$(g\times h)(x)=g(x)\times h(x)=\frac{1}{2}(x+4)(x-6)\left[-\frac{1}{4}(x+8)(x-6)\right]=$$

$$=-\frac{1}{8}(x+4)(x+8)(x-6)^2=-\frac{1}{8}\left(x^2+12x+32\right)\left(x^2-12x+36\right)=$$

$$=-\frac{1}{8}\left(x^4-12x^3+36x^2+12x^3-144x^2+432x+32x^2-384x+1152\right)=$$

$$=-\frac{1}{8}\left(x^4-76x^2+48x+1152\right)=-\frac{1}{8}x^4+\frac{19}{2}x^2-6x-144$$

**68.4** Zeros de $f+g$:

$$(f+g)(x)=0 \Leftrightarrow f(x)+g(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x+4+\frac{1}{2}(x+4)(x-6)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x-8=0 \Leftrightarrow 3x^2-10x-48=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\times 3\times(-48)}}{2\times 3} \Leftrightarrow x=\frac{10\pm 26}{6} \Leftrightarrow x=-\frac{8}{3} \vee x=6$$

Sinal de $f+g$:

Como o gráfico de $f+g$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima, $f+g$ é positiva em $\left]-\infty, -\frac{8}{3}\right[ \cup ]6, +\infty[$ e negativa em $\left]-\frac{8}{3}, 6\right[$.

Zeros de $g+h$:

$$(g+h)(x)=0 \Leftrightarrow g(x)+h(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+4)(x-6)+\left[-\frac{1}{4}(x+8)(x-6)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-6)\left[\frac{1}{2}(x+4)-\frac{1}{4}(x+8)\right]=0 \Leftrightarrow (x-6)\left[\frac{1}{2}x+2-\frac{1}{4}x-2\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x(x-6)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x-6=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=6$$

Sinal de $g+h$:

Como o gráfico de $g+h$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima, $g+h$ é positiva em $]-\infty, 0[ \cup ]6, +\infty[$ e negativa em $]0, 6[$.

**69.1** Custo de $40$ litros de sumo de morango: $0{,}2\times 40=8$ euros.

Custo de $x$ litros de sumo de framboesa: $0{,}35x$ euros.

Custo total de um lote: $C(x)=8+0{,}35x$.

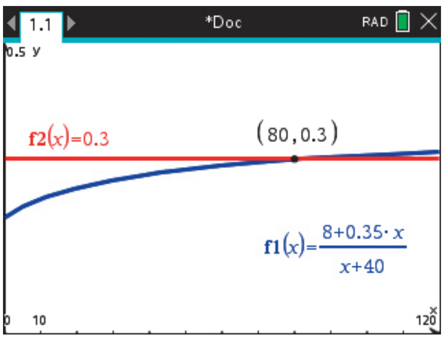
Em cada lote são usados $40$ litros de sumo de morango e $x$ litros de sumo de framboesa, ou seja, em cada lote são usados $L(x)=x+40$ litros de sumo.

**69.2** $L(x)=200 \Leftrightarrow x+40=200 \Leftrightarrow x=160$

$C(160)=8+0{,}35\times 160=64$

$64:200=0{,}32$ €

**69.3** O custo por litro é dado por, em função de $x$, por $P(x)=\frac{C(x)}{L(x)}$.




$P(x)\leqslant 0{,}3 \Leftrightarrow 0<x\leqslant 80$

Logo, no máximo, devem ser utilizados $80$ litros de sumo de framboesa de modo que o custo por litro de sumo não seja superior a $30$ cêntimos.

**PÁG. 63**

### Tarefa 8

**2.** Se $k > 0$, o gráfico é uma hipérbole com os ramos nos 1.° e 3.° quadrantes.

Se $k < 0$, o gráfico é uma hipérbole com os ramos nos 2.° e 4.° quadrantes

Quanto maior for o valor de $|k|$, maior é o afastamento da hipérbole, gráfico de $f$, dos eixos coordenados.

**PÁG. 65**

### Tarefa 9

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow \underbrace{2=0}_{\text{imp.}} \wedge x \neq 0$, $f$ não tem zeros;

$f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}>0 \underset{2>0}{\Leftrightarrow} x>0$, $f$ é positiva em $\mathbb{R}^+$;

$f(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}>0 \underset{2>0}{\Leftrightarrow} x<0$, $f$ é negativa em $\mathbb{R}^-$.

$g(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow \underbrace{-2=0}_{\text{imp.}} \wedge x \neq 0$, $g$ não tem zeros;

$g(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}<0 \underset{2>0}{\Leftrightarrow} x<0$, $g$ é positiva em $\mathbb{R}^-$;

$g(x)<0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x}<0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}>0 \underset{2>0}{\Leftrightarrow} x>0$, $g$ é negativa em $\mathbb{R}^+$.

**PÁG. 66**

### Tarefa 10

Quanto maior for o valor de $|b|$, maior é o afastamento da hipérbole, que é o gráfico de $f$, dos eixos coordenados.

Os pontos do gráfico de $f$ obtêm-se dos pontos do gráfico de $g(x)=\frac{b}{x}$ pela translação de vetor $(a, c)$, isto é $f(x)=a+g(x-c)=a+\frac{b}{x-c}$.

O domínio de $f$ é $\mathbb{R}\setminus\{c\}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

Para $c \neq 0$, o gráfico de $f$ interseta o eixo $Oy$ no ponto de coordenadas $\left(0, a-\frac{b}{c}\right)$ e para $a \neq 0$, interseta o eixo $Ox$ no ponto de coordenadas $\left(c-\frac{b}{a}, 0\right)$. Se $a=0$, $f$ não tem zeros.

Sinal:

se $b>0$ e $a=0$, $f$ é negativa em $]-\infty, c[$ e é positiva em $]c, +\infty[$;

se $b<0$ e $a=0$, $f$ é negativa em $]c, +\infty[$ e é positiva em $]-\infty, c[$;

se $b>0$ e $a>0$, $f$ é negativa em $\left]c-\frac{b}{a}, c\right[$ e é positiva em $\left]-\infty, c-\frac{b}{a}\right[ \cup ]c, +\infty[$;

se $b>0$ e $a<0$, $f$ é negativa em $]-\infty, c[ \cup \left]c-\frac{b}{a}, +\infty\right[$ e é positiva em $\left]c, c-\frac{b}{a}\right[$;

se $b<0$ e $a>0$, $f$ é negativa em $\left]c,\, c-\frac{b}{a}\right[$ e é positiva em $]-\infty,\, c[\cup\left]c-\frac{b}{a},\, +\infty\right[$ ;

se $b<0$ e $a<0$, $f$ é negativa em $\left]-\infty,\, c-\frac{b}{a}\right[\cup]c,\, +\infty[$ e é positiva em $\left]c-\frac{b}{a},\, c\right[$ .

## PÁG. 73

### Aplicar

**73.1** $D_f=\{x\in\mathbb{R} : x-4\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\{4\}$ ; $D'_f=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

Zero: $f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\frac{3}{x-4}=0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-4}=-1 \underset{x\neq 4}{\Leftrightarrow} 3=-1(x-4) \Leftrightarrow -3=x-4 \Leftrightarrow x=1$

$f(x)=1+\frac{3}{x-4}=\frac{1(x-4)+3}{x-4}=\frac{x-4+3}{x-4}=\frac{x-1}{x-4}$

| $x$ | $-\infty$ | 1 | | 4 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-4$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | N.D. | $+$ |

$f$ é positiva em $]-\infty,\, 1[\cup]4,\, +\infty[$ e negativa em $]1,\, 4[$ .

**73.2** $D_g=\{x\in\mathbb{R} : x-4\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\{4\}$ ; $D'_g=\mathbb{R}\backslash\{3\}$

Zero: $g(x)=0 \Leftrightarrow 3-\frac{6}{x-4}=0 \Leftrightarrow \frac{6}{x-4}=3 \underset{x\neq 4}{\Leftrightarrow} 6=3(x-4) \Leftrightarrow 2=x-4 \Leftrightarrow x=6$

$g(x)=3-\frac{6}{x-4}=\frac{3(x-4)-6}{x-4}=\frac{3x-12-6}{x-4}=\frac{3x-18}{x-4}$

| $x$ | $-\infty$ | 4 | | 6 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x-18$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $x-4$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $g(x)$ | $+$ | N.D. | $-$ | 0 | $+$ |

$g$ é positiva em $]-\infty,\, 4[\cup]6,\, +\infty[$ e negativa em $]4,\, 6[$ .

**73.3** $h(x)=-\frac{2}{3}+\frac{5}{5-x}=-\frac{2}{3}-\frac{5}{x-5}$

$D_h=\{x\in\mathbb{R} : x-5\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\{5\}$ ; $D'_h=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

Zero: $h(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}-\frac{5}{x-5}=0 \Leftrightarrow \frac{5}{x-5}=-\frac{2}{3} \underset{x\neq 5}{\Leftrightarrow} 15=-2(x-5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15=-2x+10 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$

$h(x)=-\frac{2}{3}+\frac{5}{5-x}=-\frac{2}{3}-\frac{5}{x-5}=\frac{-2(x-5)-5\times 3}{3(x-5)}=\frac{-2x-5}{3(x-5)}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{5}{2}$ | | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x-5$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $3(x-5)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | N.D. | $-$ |

$h$ é negativa em $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[ \cup ]5, +\infty[$ e positiva em $\left]-\frac{5}{2}, 5\right[$.

**73.4** $D_i = \{x \in \mathbb{R} : 3x+5 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{3}\right\}$ ; $D'_i = \mathbb{R}\backslash\{-6\}$

Zero: $i(x)=0 \Leftrightarrow -6+\frac{8}{3x+5}=0 \Leftrightarrow \frac{8}{3x+5}=6 \underset{x\neq -\frac{5}{3}}{\Leftrightarrow} 8=6(3x+5) \Leftrightarrow 8=18x+30 \Leftrightarrow x=-\frac{11}{9}$

$i(x)=-6+\frac{8}{3x+5}=\frac{-6(3x+5)+8}{3x+5}=\frac{-18x-22}{3x+5}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{5}{3}$ | | $-\frac{11}{9}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-18x-22$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $3x+5$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $i(x)$ | $-$ | N.D. | $+$ | $0$ | $-$ |

$i$ é negativa em $\left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[ \cup \left]-\frac{11}{9}, +\infty\right[$ e positiva em $\left]-\frac{5}{3}, -\frac{11}{9}\right[$.

**73.5** $D_j = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

Zero: $j(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3-2x}{x+2}=0 \Leftrightarrow 3-2x=0 \wedge x+2\neq 0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \wedge x \neq -2$

$$\begin{array}{rr|l} -2x & +\ 3 & x\ +\ 2 \\ \cline{3-3} 2x & +\ 4 & -2 \\ \cline{1-2} & 7 & \end{array}$$

Logo, $j(x)=\frac{3-2x}{x+2}=-2+\frac{7}{x+2}$ ; $D'_j=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ .

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3-2x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $j(x)$ | $-$ | N.D. | $+$ | $0$ | $-$ |

$j$ é negativa em $]-\infty, -2[ \cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ e positiva em $\left]-2, \frac{3}{2}\right[$.

**73.6** $D_k = \{x \in \mathbb{R} : 7x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{7}\right\}$

Zero: $k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x+4}{7x+2} = 0 \Leftrightarrow 5x + 4 = 0 \wedge 7x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \wedge x \neq -\frac{2}{7}$

$$\begin{array}{rr|l} 5x & +\ 4 & 7x + 2 \\ \cline{3-3} -5x & -\ \frac{10}{7} & \frac{5}{7} \\ \hline & \frac{18}{7} & \end{array}$$

$$k(x) = \frac{5x+4}{7x+2} = \frac{5}{7} + \frac{\frac{18}{7}}{7x+2} = \frac{5}{7} + \frac{\frac{18}{7}}{7\left(x+\frac{2}{7}\right)} = \frac{5}{7} + \frac{\frac{18}{49}}{x+\frac{2}{7}}\ ;\ D'_k = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{7}\right\}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{4}{5}$ | | $-\frac{2}{7}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $5x+4$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $7x+2$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $k(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | N.D. | $+$ |

$k$ é positiva em $\left]-\infty, -\frac{4}{5}\right[ \cup \left]-\frac{2}{7}, +\infty\right[$ e negativa em $\left]-\frac{4}{5}, -\frac{2}{7}\right[$ .

## PÁG. 74

### Aplicar

**74.** Como $f$ não tem zeros, $a = 0$ . Como $f$ é crescente em $]3, +\infty[$ , $b < 0$ .

Opção correta: **(C)**

**75.1** Como $f$ é decrescente em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$ , 2 é o zero de $x + a$ , ou seja, $a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ .

Como o gráfico de $f$ interseta o eixo $Ox$ no ponto de abcissa 3 , 3 é o zero de $f$ , ou seja, $f(3) = 0 \Leftrightarrow -3 + \frac{b}{3-2} = 0 \Leftrightarrow b = 3$ .

**75.2** $f(x) = -3 + \frac{3}{x-2} = \frac{-3(x-2)+3}{x-2} = \frac{-3x+9}{x-2}$

| $x$ | $-\infty$ | 2 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3x+9$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $x-2$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | N.D. | $+$ | 0 | $-$ |

$f$ é negativa em $]-\infty, 2[ \cup ]3, +\infty[$ e positiva em $]2, 3[$ .

**75.3** $f(x)=-6 \Leftrightarrow -3+\dfrac{3}{x-2}=-6 \Leftrightarrow 3+\dfrac{3}{x-2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(x-2)+3}{x-2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-3}{x-2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-3=0 \wedge x-2\neq 0 \Leftrightarrow x=1 \wedge x\neq 2 \Leftrightarrow x=1$

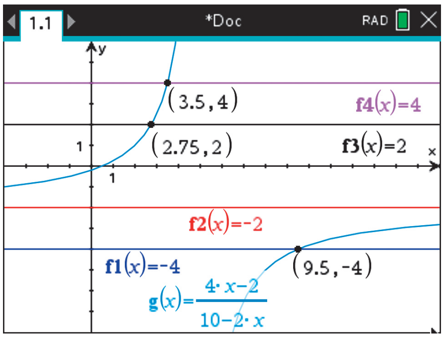
**75.4** $f(x)<-1 \Leftrightarrow -3+\dfrac{3}{x-2}<-1 \Leftrightarrow -2+\dfrac{3}{x-2}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2(x-2)+3}{x-2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x+7}{x-2}<0$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | | $\frac{7}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+7$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x-2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | N.D. | $+$ | $0$ | $-$ |

O conjunto das abcissas dos pontos do gráfico de $f$ cujas ordenadas são inferiores a $-1$ é $]-\infty, 2[\cup\left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$ .

**76.1**




$g(x)=-2 \Leftrightarrow \dfrac{4x-2}{10-2x}=-2 \underset{x\neq 5}{\Leftrightarrow} 4x-2=-2(10-2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x-2=-20+4x \Leftrightarrow 0x=-18$ equação impossível

Opção correta: **(B)**

**76.2**

$$\begin{array}{rr|l} 4x & -\;\;2 & -2x+10 \\ \cline{3-3} -4x & +\;\;20 & -2 \\ \hline & 18 & \end{array}$$

Logo, $g(x)=\dfrac{4x-2}{10-2x}=-2+\dfrac{18}{10-2x}=-2-\dfrac{18}{2(x-5)}=-2-\dfrac{9}{x-5}$ .

Opção correta: **(D)**

## PÁG. 75

### Aplicar

**77.1** Como $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e $D'_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $h(x) = 1 + \frac{b}{x+2}$.

$h(2) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{2+2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 2$

$h(x) = 1 + \frac{2}{x+2} = \frac{x+4}{x+2}$

**77.2** **a.** $h(x) + x = -4 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+2} + x = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+4+(x+4)(x+2)}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+4)(1+x+2)}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x+4)(x+3)}{x+2} = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x+3) = 0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+4 = 0 \vee x+3 = 0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -3 \wedge x \neq -2$

O conjunto-solução da equação é $\{-4, -3\}$.

**b.** $h(x) \leqslant \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+2} \leqslant \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+2} - \frac{3}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+4) - 3(x+2)}{x(x+2)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-6}{x(x+2)} \leqslant 0$

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1-5}{2} \vee x = \frac{-1+5}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$

$x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-6$ | + | 0 | – | – | – | – | – | 0 | + |
| $x(x+2)$ | + | + | + | 0 | – | 0 | + | + | + |
| $\frac{x^2+x-6}{x(x+2)}$ | + | 0 | – | ND | + | ND | – | 0 | + |

O conjunto-solução da condição é $[-3, -2[ \cup ]0, 2]$.

**77.3** $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x = -4 \wedge x \neq -2$ ; $D(-4, 0)$

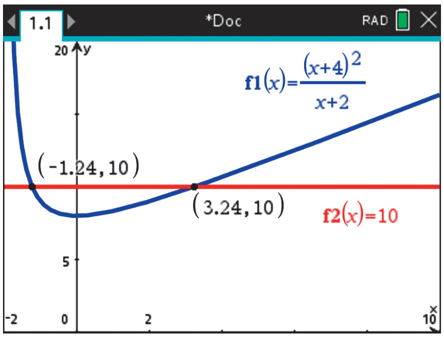
$h(0) = \frac{0+4}{0+2} = 2$ ; $B(0, 2)$

$A_{[ABCD]} = |\overline{OD}| \times \overline{OB} = 4 \times 2 = 8$

**77.4** Seja $x$ a abcissa do ponto $B$, e, consequentemente, também a do ponto $A$.

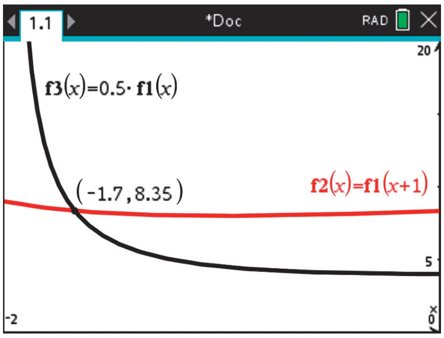
$A_{[ABCD]} = |\overline{AD}| \times \overline{AB} = |x-(-4)| \times h(x) = |x+4| \times h(x) \underset{x>-2 \;\Rightarrow\; x+4>0}{=} (x+4) \times \frac{x+4}{x+2} = \frac{(x+4)^2}{x+2}$

$$\frac{(x+4)^2}{x+2}=10$$




Aproximadamente $-1{,}24$ e $3{,}24$ .

**77.5** $f(x)=\dfrac{(x+4)^2}{x+2}$ ; $f(x+1)=0{,}5f(x)$




$x\approx -1{,}7$

## PÁG. 76

### Aplicar

**78.1** $M(2)=\dfrac{36\times 2-36}{2+4}=6$

**78.2** $M(t)\geqslant 20 \Leftrightarrow \dfrac{36t-36}{t+4}\geqslant 20 \Leftrightarrow \dfrac{36t-36}{t+4}-20\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{36t-36-20(t+4)}{t+4}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{16t-116}{t+4}\geqslant 0 \underset{t\geqslant 1 \ \Rightarrow \ t+4>0}{\Leftrightarrow} 16t-116\geqslant 0 \Leftrightarrow t\geqslant 7{,}25$

Oito dias.

**78.3** $M(t)=36 \Leftrightarrow \dfrac{36t-36}{t+4}=36 \Leftrightarrow \dfrac{36t-36}{t+4}-36=0 \Leftrightarrow$

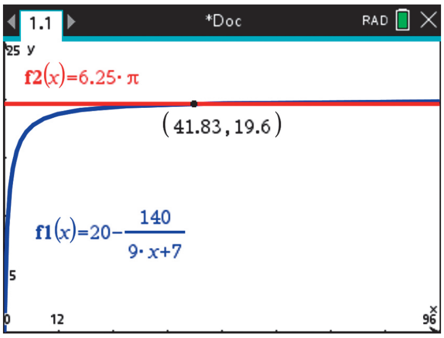
$\Leftrightarrow \dfrac{36t-36-36(t+4)}{t+4}=0 \Leftrightarrow \dfrac{-180}{t+4}=0 \Leftrightarrow \underbrace{-180=0}_{\text{imp.}} \wedge t+4\neq 0$

Não é possível, dado que a equação $M(t)=36$ é impossível.

**79.1** $A(0)=0 \Leftrightarrow a-\dfrac{140}{b\times 0+7}=0 \Leftrightarrow a=20$ (no início a área contaminada era nula)

$A(7)=18 \Leftrightarrow 20-\dfrac{140}{b\times 7+7}=18 \Leftrightarrow \dfrac{140}{7b+7}=2 \Leftrightarrow 7b+7=70 \Leftrightarrow b=9$

**79.2** $A(t) = \pi \times 2{,}5^2 \iff A(t) = 6{,}25\pi$

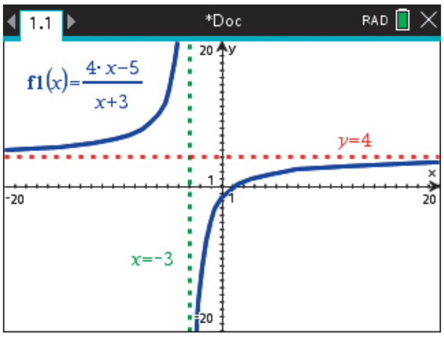



O ar envolvente à casa do Pedro ficou contaminado passadas $41$ horas e $50$ minutos $(0{,}83 \times 60 \approx 50 \text{ min})$ após as $15$ h do dia 9 de outubro, ou seja, no dia $11$ de outubro às $8$ h $50$ min, pelo que o Pedro saiu de casa antes de o ar envolvente estar contaminado, cerca de $50$ minutos antes.

## PÁG. 80

### Aplicar

**82.** $f(x) = \dfrac{4x-5}{x+3} = 4 - \dfrac{17}{x+3}$




**82.1** $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

Opção correta: **(D)**

**82.2** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$

Opção correta: **(C)**

## PÁG. 81

### Aplicar

**83.1** Como as retas de equação $y=3$ e $x=1$ são assíntotas ao gráfico de $f$, $a=3$ e $c=1$.

$f(0) = 8 \iff 3 + \dfrac{b}{0-1} = 8 \iff \dfrac{b}{-1} = 5 \iff b = -5$

**83.2** Como as retas de equação $y=2$ e $x=-2$ são assíntotas ao gráfico de $g$, $a=2$ e $c=-2$.

$g\left(-\dfrac{7}{2}\right) = 0 \iff 2 + \dfrac{b}{-\dfrac{7}{2}+2} = 0 \iff \dfrac{b}{-\dfrac{3}{2}} = -2 \iff b = 3$

**83.3** Como as retas de equação $y=-1$ e $x=3$ são assíntotas ao gráfico de $h$, $a=-1$ e $c=3$.

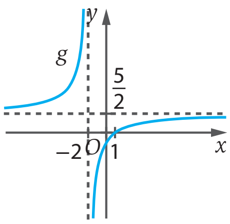
$h(2)=0 \Leftrightarrow -1+\frac{b}{2-3}=0 \Leftrightarrow \frac{b}{-1}=1 \Leftrightarrow b=-1$

**83.4** Como as retas de equação $y=\frac{1}{4}$ e $x=4$ são assíntotas ao gráfico de $i$, $a=\frac{1}{4}$ e $c=4$.

$i(2)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{b}{2-4}=0 \Leftrightarrow \frac{b}{-2}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow b=\frac{1}{2}$

**84.** $g(x)=\frac{5}{2}+\frac{b}{x+2}$

**84.1**




**84.2** $g(1)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}+\frac{b}{1+2}=0 \Leftrightarrow \frac{b}{1+2}=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow b=-\frac{15}{2}$

$g(x)=\frac{5}{2}+\frac{-\frac{15}{2}}{x+2}=\frac{5}{2}-\frac{15}{2(x+2)}=\frac{5(x+2)-15}{2(x+2)}=\frac{5x-5}{2x+4}$

Logo, $a=5$, $b=-5$, $c=2$ e $d=4$.

**85.** As equações das assíntotas ao gráfico de $f$ são $x=2$ e $y=1$.

O gráfico da função $g$ é o transformado do gráfico da função $f$ pela translação associada ao vetor de coordenadas $(3,-1)$, pelo que as equações das assíntotas ao gráfico de $g$ são $x=2+3 \Leftrightarrow x=5$ e $y=1-1 \Leftrightarrow y=0$.

Opção correta: **(B)**

**PÁG. 82**

**Aplicar**

**86.1** $g(x)=\frac{5}{3}+\frac{b}{x-3}$

$g(-3)=2 \Leftrightarrow \frac{5}{3}+\frac{b}{-3-3}=2 \Leftrightarrow \frac{b}{-6}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow b=-2$

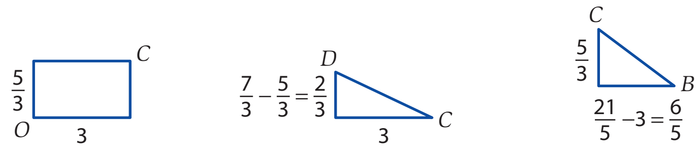
$g(x)=\frac{5}{3}-\frac{2}{x-3}=\frac{5(x-3)-2\times 3}{3(x-3)}=\frac{5x-21}{3x-9}$

**86.2** $C\left(3,\frac{5}{3}\right)$, dado que é o ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de $g$.

$g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5x-21}{3x-9}=0 \Leftrightarrow 5x-21=0 \wedge 3x-9\neq 0 \Leftrightarrow x=\frac{21}{5} \wedge x\neq 3$ ; $B\left(\frac{21}{5},0\right)$

$g(0)=\frac{5\times 0-21}{3\times 0-9}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$ ; $D\left(0,\frac{7}{3}\right)$

**86.3** O quadrilátero $[OBCD]$ pode ser decomposto num retângulo e dois triângulos:




$$A_{[OBCD]}=3\times\frac{5}{3}+\frac{3\times\frac{2}{3}}{2}+\frac{\frac{6}{5}\times\frac{5}{3}}{2}=5+1+1=7$$

**86.4** $g(x)>1 \Leftrightarrow \frac{5x-21}{3x-9}>1 \Leftrightarrow \frac{5x-21}{3x-9}-1>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-21-1(3x-9)}{3x-9}>0 \Leftrightarrow \frac{2x-12}{3x-9}>0$$

| $x$ | $-\infty$ | 3 | | 6 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x-12$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $3x-9$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | N.D. | $-$ | 0 | $+$ |

O conjunto das abcissas dos pontos do gráfico de $g$ cujas ordenadas são superiores a 1 é $]-\infty, 3[\cup]6, +\infty[$ .

**87.1** $N(0)=\frac{90\times0+12}{2\times0+1}=12$ , $12\times10=120$ animais.

**87.2** $420:10=42$ , $N(t)<42 \Leftrightarrow \frac{90t+12}{2t+1}<42 \Leftrightarrow \frac{90t+12}{2t+1}-42<0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{90t+12-42(2t+1)}{2t+1}<0 \Leftrightarrow \frac{6t-30}{2t+1}<0$$

| $t$ | 0 | | 5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $6t-30$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $2t+1$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{6t-30}{2t+1}$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |

$N(t)<52 \Leftrightarrow t\in[0, 5[$ , ou seja, durante $5\times10=50$ anos.

**87.3**

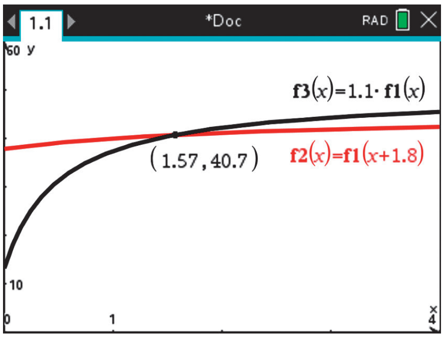
$$\begin{array}{rcr|l} 90t & - & 12 & 2t+1 \\ \cline{4-4} -90t & - & 45 & 45 \\ \hline & & -33 & \end{array}$$

Logo, $N(t) = 45 - \dfrac{33}{2t+1}$ , pelo que a reta de equação $y = 45$ é assíntota horizontal ao gráfico de $N$ , quando $t \longrightarrow +\infty$ .

Logo, $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} N(t) = 45$ .

Com o passar do tempo, o número de animais desta espécie, nesta região, tenderá para $45 \times 10 = 450$ .

**87.4** $N(t + 1{,}8) = 1{,}1N(t)$




Aproximadamente $16$ anos.

## PÁG. 83

### Aplicar +

**1.** Uma função cúbica tem até três zeros, tendo sempre pelo menos um.

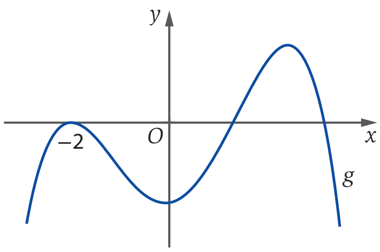
Uma função quártica tem até quatro zeros, podendo não ter zeros.

Opção correta: **(C)**

**2.** Como $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , $a < 0$ .

Opção correta: **(B)**

**3.1** Um possível gráfico de $g$ é:



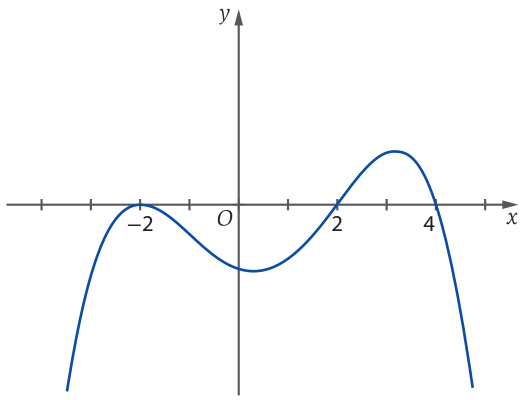

Opção correta: **(A)**

**3.2** $g(x) = a(x+2)^2 (x-b)(x-c)$, $a \neq 0$, $b$, $c > 0$

Como $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , $a < 0$ .

Como $g(x) = f(x)(x-2)(x-4)$ , $g(x) = a(x+2)^2 (x-2)(x-4)$, $a < 0$ e $f(x) = a(x+2)^2$ .

Esboçando graficamente a função $g$:




$g$ é negativa em $]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]4, +\infty[$ e é positiva em $]2, 4[$ .

**4.** Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ , $a < 0$ .

$f(0) = 0 \iff b = 0$

$f(x) = ax^3 - ax = ax(x^2 - 1)$ . O zero de $ax$ é $0$ e os zeros de $x^2 - 1$ são $-1$ e $1$ .

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $ax$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $x^2 - 1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$f$ é positiva em $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ .

Opção correta: **(D)**

## PÁG. 84

### Aplicar +

**5.** Como $a > 0$ e $h$ é quártica, então, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ . Logo, só pode ser a opção **(A)**.

Se assinalar que, como $h(x) = a(x-b)^2(x^2 - c)$ , $b$ , $c > 0$ , $h$ tem três zeros: um duplo ($b$) e dois simétricos $(-\sqrt{c}$ e $\sqrt{c})$.

Opção correta: **(A)**

**6.1** $f(x) = (x-1)(ax^3 + bx) = ax^4 - ax^3 + bx^2 - bx$

Se $a < 0$ , $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ .

Opção correta: **(C)**

**6.2** $f(x) = (x-1)(ax^3 + bx) = (x-1)x(ax^2 + b)$

Como $f$ tem quatro zeros distintos, a equação $ax^2 + b = 0 \iff x^2 = -\dfrac{b}{a}$ é possível e tem duas soluções distintas se $\dfrac{b}{a} < 0$ , pelo que, $a$ e $b$ têm sinais contrários.

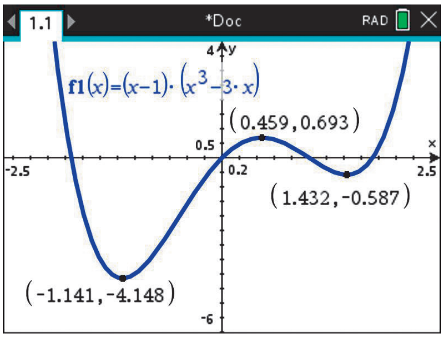
**6.3** $f(x)=(x-1)\left(4x^3+(-1)x\right)=(x-1)\left(4x^3-x\right)=(x-1)x\left(4x^2-1\right)$

$4x^2-1=0 \Leftrightarrow 4x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $4x^2-1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$f$ é positiva em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]0, \frac{1}{2}\right[ \cup ]1, +\infty[$ e é negativa em $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

**6.4** $f(x)=(x-1)\left(1x^3+(-3)x\right)=(x-1)\left(x^3-3x\right)$

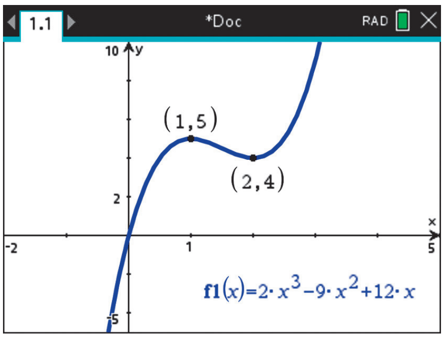



$f$ é crescente em $[-1{,}141 ; 0{,}459]$ e em $[1{,}432 ; +\infty[$ e é decrescente em $]-\infty ; -1{,}141]$ e em $[0{,}459 ; 1{,}432]$.

Tem máximo relativo $0{,}693$, em $x \approx 0{,}459$, e tem mínimos relativos $-4{,}148$, em $x \approx -1{,}141$, e $-0{,}587$, em $x \approx 1{,}432$ (valores arredondados às milésimas).

## PÁG. 85
### Aplicar +

**7.1** $g(x)=2x^3-9x^2+12x+k$

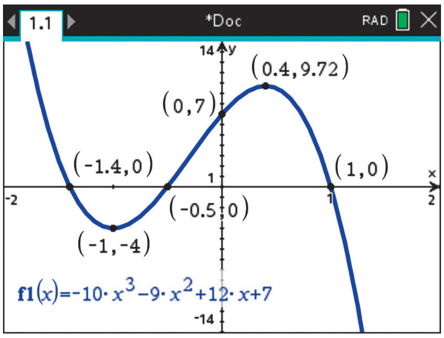



**a.** $k \in ]-\infty, -5[ \cup ]-4, +\infty[$

**b.** $k=-5 \vee k=-4$

**c.** $k \in ]-5\,,\,-4[$

**7.2** $g(x) = -10x^3 - 9x^2 + 12x + 7$




Zeros: $-1{,}4$ ; $-0{,}5$ e $1$ .

Interseção com o eixo $Oy$ : $(0\,,\,7)$ .

Sinal: $g$ é positiva em $]-\infty\,;\,-1{,}4[\,\cup\,]-0{,}5\,;\,1[$ e é negativa em $]-1{,}4\,;\,-0{,}5[\,\cup\,]1\,,\,+\infty[$ .

Monotonia: $g$ é decrescente em $]-\infty\,,\,-1]$ e em $[0{,}4\,;\,+\infty[$ e é crescente em $[-1\,;\,0{,}4]$ .

Extremos: mínimo relativo $-4$ em $x=-1$ e máximo relativo $9{,}72$ em $x=0{,}4$ .

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ .

**8.** Observando o gráfico de $h$ , concluímos que $a<0$ , $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty \text{ e } \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty\right)$ e $h(0)<0$ .

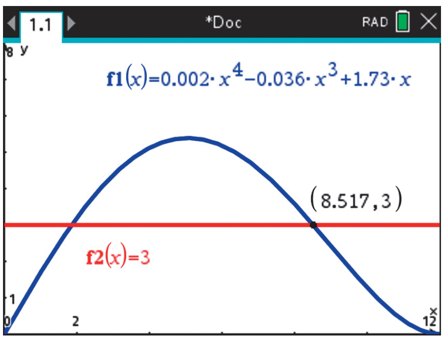
Opção correta: **(D)**

## PÁG. 86

### Aplicar +

**9.1** $C(1{,}75) \approx 2{,}85$ mg/l de sangue

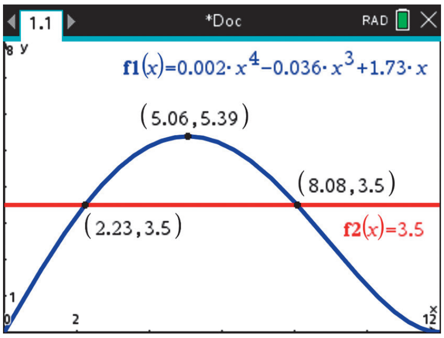
**9.2** $C(t) = 3$




$t \approx 8{,}517$

Uma nova dose de medicamento deve ser tomada passadas, aproximadamente, $8$ horas e $31$ minutos $(0{,}517 \times 60 \approx 31)$ .

**9.3**




A concentração de medicamento no organismo da Laura é superior a $3{,}5$ mg/l de sangue durante $8{,}08-2{,}23=5{,}85$ horas.

A concentração máxima é $5{,}39$ mg/l de sangue, que é superior a $4{,}5$ mg/l .

Logo, este antipirético é eficaz se tomado pela Laura.

**10.1** $g$ e $h$ são funções quadráticas. Como a concavidade do gráfico de $g$ está voltada para cima, o termo de maior grau de $g(x)$ é do tipo $a_1x^2$ , com $a_1>0$ , e como a concavidade do gráfico de $h$ está voltada para baixo, o termo de maior grau de $h(x)$ é do tipo $a_2x^2$ , com $a_2<0$ . Logo, $g(x)\times h(x)$ é a expressão analítica de uma função quártica em que o termo de maior grau é $a_1\times a_2x^4$ , com $a_1\times a_2<0$ , pelo que $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)\times h(x))=-\infty$ .

**10.2** $f$ é uma função afim crescente, pelo que $f(x)=a_3x+b$ , com $a_3>0$ e $b>0$ . Assim, $f(x)\times g(x)$ é a expressão analítica de uma função cúbica em que o termo de maior grau é $a_1\times a_3x^3$ , com $a_1\times a_3>0$ e $f(x)\times h(x)$ é a expressão analítica de uma função cúbica em que o termo de maior grau é $a_2\times a_3x^3$ , com $a_2\times a_3<0$ , pelo que:

(A) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\times g(x)\right)=-\infty$

(B) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\times h(x)\right)=+\infty$

**(C)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\times g(x)\right)=+\infty$

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\times h(x)\right)=-\infty$

Opção correta: **(C)**

**10.3** $g(x)<h(x) \Leftrightarrow x\in\,]0,2[$ , ou seja, $g(x)-h(x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]0,2[$ .

$g(x)>h(x) \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]2,+\infty[$ , ou seja, $g(x)-h(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]2,+\infty[$ .

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $g(x)-h(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $j(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$j$ é negativa em $]-\infty,-1[\,\cup\,]0,2[$ e é positiva em $]-1,0[\,\cup\,]2,+\infty[$ .

## PÁG. 87

### Aplicar +

**11.** Como $f$ é uma função afim decrescente, concluímos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ .

Como $g$ é uma função cúbica decrescente em $]-\infty, 0]$ , concluímos que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ .

$f(x) \times g(x)$ é a expressão analítica de uma função quártica cujo coeficiente do termo de maior grau ($x^4$) é positivo (o coeficiente do termo de maior grau de $f(x)$ , $x$ , é negativo assim como o coeficiente do termo de maior grau de $g(x)$ , $x^3$).

Logo, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) \times g(x)\right) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) \times g(x)\right) = +\infty$ .

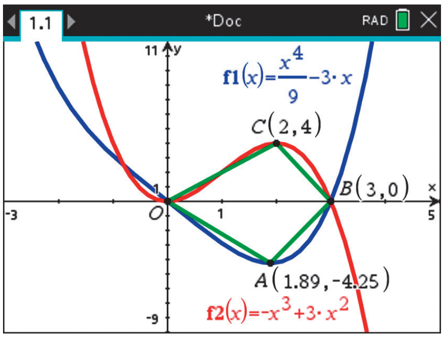
Opção correta: **(B)**

**12.1** $g(x) = h(x) \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = \frac{x^4}{9} - 3x \Leftrightarrow x^4 + 9x^3 - 27x^2 - 27x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x\left(x^3 + 9x^2 - 27x - 27\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 + 9x^2 - 27x - 27 = 0$$

Como o termo independente do polinómio $x^3 + 9x^2 - 27x - 27$ é $-27$ , os divisores inteiros de $-27$ ($-27$ , $27$ , $-9$ , $9$ , $-3$ , $3$ , $-1$ e $1$) são os «candidatos» a raízes inteiras. Substituindo $x$ por cada um destes valores, concluímos que $3$ é a única raiz inteira. Logo, $B(3, 0)$ .

**12.2**




$$A_{[OABC]} = A_{[OAB]} + A_{[OBC]} = \frac{3 \times 4}{2} + \frac{3 \times 4{,}25}{2} \approx 12{,}4$$

**13.** Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ , concluímos que $a < 0$ .

Como $f$ tem apenas um zero, a equação

$$ax^4 + cx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(ax^2 + c\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = -\frac{c}{a}$$

tem apenas uma solução $(x = 0)$ , pelo que $-\frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} > 0 \underset{a<0}{\Leftrightarrow} c < 0$ .

Opção correta: **(A)**

**PÁG. 88**

**Aplicar +**

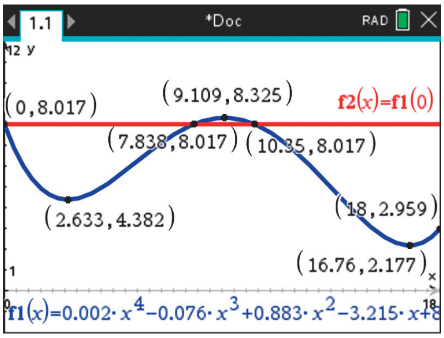
**14.1** Utilizando uma calculadora para efetuar a regressão quártica, obtém-se $h(x) = 0{,}002x^4 - 0{,}076x^3 + 0{,}883x^2 - 3{,}215x + 8{,}017$ .

**14.2** $h(0) \approx 8$ m

**14.3** A altura máxima é $8{,}33$ m e o ponto está a $9{,}11$ m da vertical.

**14.4** Sobe-se nos intervalos $[2{,}63 ; 9{,}11]$ e $[16{,}76 ; 18]$ . Desce-se nos intervalos $[0 ; 2{,}63]$ e $[9{,}11 ; 16{,}76]$ .

**14.5** $7{,}84$ m e $10{,}35$ m .

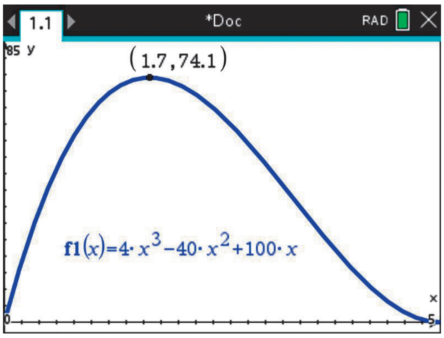



**PÁG. 89**

**Aplicar +**

**15.1** $V = (10 - 2x)^2 x = 4x^3 - 40x^2 + 100x$

**15.2** O volume da caixa é máximo para $x \approx 1{,}7$ cm .




**16.** Como o polinómio $A(x)$ tem grau $4$ e o polinómio $B(x)$ tem grau $2$ , ao efetuar a divisão inteira entre os polinómios $A(x)$ e $B(x)$ , o polinómio quociente $Q(x)$ tem grau $4 - 2 = 2$ .

Opção correta: **(C)**

**17.** $P(x) = (x^2 - 5)(-2x + 1) + (3x - 1) = -2x^3 + x^2 + 10x - 5 + 3x - 1 = -2x^3 + x^2 + 13x - 6$

Opção correta: **(B)**

**18.** Na divisão de polinómios, o grau do polinómio resto é inferior ao grau do polinómio divisor.

Opção correta: **(D)**

**19.1** $A(x) = 6x^3 + 13x^2 - 9x - 6$

**a.**

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 13x^2 - 9x - 6 & 2x+5 \\ \cline{2-2} -6x^3 - 15x^2 \qquad\quad & 3x^2 - x - 2 \\ \cline{1-1} -2x^2 - 9x - 6 & \\ 2x^2 + 5x \quad\;\; & \\ \cline{1-1} -4x - 6 & \\ 4x + 10 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

$Q(x) = 3x^2 - x - 2$ e $R(x) = 4$ .

**b.** Pela alínea anterior, tem-se que $A(x) = (3x^2 - x - 2)B(x) + 4 = (3x^2 - x - 2)\ (2x+5) + 4$ .

Logo, $A(x) = 4 \Leftrightarrow (3x^2 - x - 2)\ (2x+5) + 4 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3x^2 - x - 2)\ (2x+5) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0 \vee 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} \vee x = -\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{6} \vee x = -\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1-5}{6} \vee x = \dfrac{1+5}{6} \vee x = -\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3} \vee x = 1 \vee x = -\dfrac{5}{2}$

O conjunto-solução da equação é $\left\{-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{2}{3}, 1\right\}$.

**19.2**

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 13x^2 - 9x + a \qquad & x^2 + 3x + b \\ \cline{2-2} -6x^3 - 18x^2 - 6bx \qquad\qquad & 6x - 5 \\ \cline{1-1} -5x^2 - 9x - 6bx + a & \\ 5x^2 + 15x \qquad\quad + 5b & \\ \cline{1-1} (6-6b)x + a + 5b & \end{array}$$

$A(x)$ é divisível por $C(x)$ se $6 - 6b = 0$ e $a + 5b = 0$ , ou seja, se $b = 1$ e $a = -5$ .

## PÁG. 90

### Aplicar +

**20.1** Por exemplo, $C(x) = xB(x) = 2x^3 + 4x^2 + x$ .

**20.2**

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - x^3 + 0x^2 + 0x + 3 & 2x^2 + 4x + 1 \\
\cline{2-2}
-2x^4 - 4x^3 - x^2 \qquad\qquad & x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{2} \\
\cline{1-1}
-5x^3 - x^2 + 0x + 3 & \\
5x^3 + 10x^2 + \frac{5}{2}x \quad & \\
\cline{1-1}
9x^2 + \frac{5}{2}x + 3 & \\
-9x^2 - 18x - \frac{9}{2} & \\
\cline{1-1}
-\frac{31}{2}x - \frac{3}{2} &
\end{array}
$$

Quociente: $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$ ; Resto: $-\frac{31}{2}x - \frac{3}{2}$

**21.**

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 + 7x^3 + 0x^2 - 9x + 0 & 3x^2 - 1 \\
\cline{2-2}
-2x^4 \qquad + \frac{2}{3}x^2 \qquad\qquad & \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{2}{9} \\
\cline{1-1}
7x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 9x + 0 & \\
-7x^3 \qquad\qquad \frac{7}{3}x \qquad & \\
\cline{1-1}
\frac{2}{3}x^2 - \frac{20}{3}x + 0 & \\
-\frac{2}{3}x^2 \qquad\qquad \frac{2}{9} & \\
\cline{1-1}
-\frac{20}{3}x + \frac{2}{9} &
\end{array}
$$

$A(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{2}{9}$ e $B(x) = -\frac{20}{3}x + \frac{2}{9}$ .

**22. a.**

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 \\
2 & & 4 & 8 & 16 & 22 \\
\hline
 & 2 & 4 & 8 & 11 & \boxed{23}
\end{array}
$$

$Q(x) = 2x^3 + 4x^2 + 8x + 11$ e $R(x) = 23$ .

**b.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | 0 | $-5$ | 1 |
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 | $-5$ | $\boxed{1}$ |

$Q(x)=2x^3-5$ e $R(x)=1$ .

**c.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | 0 | $-5$ | 1 |
| $-3$ | | $-6$ | 18 | $-54$ | 177 |
| | 2 | $-6$ | 18 | $-59$ | $\boxed{178}$ |

$Q(x)=2x^3-6x^2+18x-59$ e $R(x)=178$ .

**d.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | 0 | $-5$ | 1 |
| $-\frac{1}{2}$ | | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{21}{8}$ |
| | 2 | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{21}{4}$ | $\boxed{\frac{29}{8}}$ |

$Q(x)=2x^3-x^2+\frac{1}{2}x-\frac{21}{4}$ e $R(x)=\frac{29}{8}$ .

**23.** $A(-1)=0 \Leftrightarrow 2(-1)^3-4(-1)^2+3(-1)+k=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2-4-3+k=0 \Leftrightarrow k=9$

Opção correta: **(D)**

**24.** Sendo $A(x)=ax^3-ax^2-2x-2$ , o resto da divisão de $A(x)$ por $x-2$ é dado por $A(2)$ .

Assim, $A(2)=a\times 2^3-a\times 2^2-2\times 2-2=8a-4a-4-2=4a-6$

Opção correta: **(A)**

**25.** $P(-2)=0 \Leftrightarrow (m^2-1)(-2)^3+(m+1)(-2)^2+(-2)-6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8(m^2-1)+4(m+1)-8=0 \Leftrightarrow -8m^2+8+4m+4-8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8m^2-4m-4=0 \underset{\div 4}{\Leftrightarrow} 2m^2-m-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2} \Leftrightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=\frac{1-3}{4} \vee m=\frac{1+3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2} \vee m=1$

**26.** Se $P(x)$ é divisível por $Q(x)=x+a$ , então $P(-a)=0$ :

$$P(-a)=0 \Leftrightarrow (-a)^2-3a(-a)-b=0 \Leftrightarrow a^2+3a^2-b=0 \Leftrightarrow 4a^2=b \Leftrightarrow a^2=\frac{b}{4} \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a=\frac{\sqrt{b}}{2}$$

Opção correta: **(B)**

**27.** $P(-2)=0 \Leftrightarrow 2(-2)^3+a(-2)^2+7(-2)+b=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -16+4a-14+b=0 \Leftrightarrow 4a+b=30$$

$$P(1)=18 \Leftrightarrow 2\times 1^3+a\times 1^2+7\times 1+b=18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+a+7+b=18 \Leftrightarrow a+b=9$$

$$\begin{cases}4a+b=30\\ a+b=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=30-4a\\ a+30-4a=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=30-4a\\ -3a=-21\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=30-4\times 7\\ a=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2\\ a=7\end{cases}$$

**28.** Como $P(x)$ é sempre de grau $4$ , $k\neq 0$ , pois se $k=0$ , $P(x)$ seria de grau $1$ .

$$P(2)=4 \Leftrightarrow k^2\times 2^4-4k\times 2^3+3\times 2-2=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16k^2-32k+4=4 \Leftrightarrow 16k(k-2)=0 \underset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} k-2=0 \Leftrightarrow k=2$$

## PÁG. 91

### Aplicar +

**29.** Na divisão inteira de $A(x)$ por $(x-4)(x+2)$ , o grau de $R(x)$ tem de ser menor do que $2$ , ou seja, o maior grau que $R(x)$ pode ter é $1$ , pelo que $R(x)=ax+b$, $a, b\in \mathbb{R}$ .

$A(x)=Q(x)(x-4)(x+2)+R(x)$ , sendo $Q(x)$ o quociente da divisão inteira de $A(x)$ por $(x-4)(x+2)$ .

Tem-se que $A(4)=Q(4)\underbrace{(4-4)}_{0}(4+2)+R(4)=R(4)$ , pelo que, como $A(4)=2$ :

$$A(4)=2 \Leftrightarrow R(4)=2 \Leftrightarrow 4a+b=2$$

Tem-se que $A(-2)=Q(-2)(-2-4)\underbrace{(-2+2)}_{0}+R(-2)=R(-2)$ , pelo que, como $A(-2)=1$ :

$$A(-2)=1 \Leftrightarrow R(-2)=1 \Leftrightarrow -2a+b=1$$

$$\begin{cases}4a+b=2\\ -2a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2-4a\\ -2a+2-4a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2-4\times\frac{1}{6}\\ a=\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{4}{3}\\ a=\frac{1}{6}\end{cases}$$

Logo, $R(x)=\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$ .

**30.** $P(x)=(1-2x^2)(x-k)+(x-k)=(1-2x^2+1)(x-k)=(2-2x^2)(x-k)$

$$P\left(\frac{k}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(2-2\left(\frac{k}{2}\right)^2\right)\left(\frac{k}{2}-k\right)=0 \Leftrightarrow \left(2-\frac{k^2}{2}\right)\left(-\frac{k}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{k^2}{2}=0 \vee -\frac{k}{2}=0 \Leftrightarrow k^2=4 \vee k=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=-2 \vee k=2 \vee k=0$$

**31.** $B(-2)=0 \Leftrightarrow a(-2)^3+a(-2)^2-3(-2)+4b=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -8a+4a+6+4b=0 \Leftrightarrow -4a+4b=-6 \underset{:(-4)}{\Leftrightarrow} a-b=\frac{3}{2}$$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

Opção correta: **(B)**

**32.**

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 4 & 8 & -3 & -5 & 2 \\
-2 & & -8 & 0 & 6 & -2 \\
\hline
 & 4 & 0 & -3 & 1 & 0
\end{array}$$

$P(x)=(x+2)\left(4x^3-3x+1\right)$

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 4 & 0 & -3 & 1 \\
-1 & & -4 & 4 & -1 \\
\hline
 & 4 & -4 & 1 & 0
\end{array}$$

$P(x)=(x+2)(x+1)\left(4x^2-4x+1\right)=(x+2)(x+1)(2x-1)^2=$

$$=(x+2)(x+1)\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2=4(x+2)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

Os zeros de $P(x)$ são $\frac{1}{2}$, com multiplicidade dois, e $-2$ e $-1$, com multiplicidade um.

**33.** $P(x)=a\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2)(x+3)^2,\ a\neq 0$

$P(-1)=24 \Leftrightarrow a\left(-1+\frac{1}{3}\right)(-1-2)(-1+3)^2=24 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a\left(-\frac{2}{3}\right)(-3)\times 4=24 \Leftrightarrow 8a=24 \Leftrightarrow a=3$$

$P(x)=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2)(x+3)^2=(3x+1)(x-2)\left(x^2+6x+9\right)=$

$$=\left(3x^2-5x-2\right)\left(x^2+6x+9\right)=3x^4+13x^3-5x^2-57x-18$$

**34.1**

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & -2 & 4 & -1 & 2 \\
\frac{4}{3} & & -\frac{8}{3} & \frac{16}{9} & \frac{28}{27} \\
\hline
 & -2 & \frac{4}{3} & \frac{7}{9} & \frac{82}{27}
\end{array}$$

Quociente: $-2x^2+\frac{4}{3}x+\frac{7}{9}$; Resto: $\frac{82}{27}$

**34.2** **a.** $P(x)=2 \Leftrightarrow -2x^3+4x^2-x+2=2 \Leftrightarrow -2x^3+4x^2-x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(-2x^2+4x-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee -2x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-2)(-1)}}{2(-2)} \Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{-4\pm\sqrt{8}}{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{-4-2\sqrt{2}}{-4} \vee x=\dfrac{-4+2\sqrt{2}}{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

O conjunto-solução da equação é $\left\{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

**b.** $P(x)=6-3x \Leftrightarrow -2x^3+4x^2-x+2=6-3x \Leftrightarrow -2x^3+4x^2+2x-4=0 \Leftrightarrow -x^3+2x^2+x-2=0$

Como o termo independente do polinómio $A(x)=-x^3+2x^2+x-2$ é $-2$, os divisores inteiros de $-2$ ($-2$, $2$, $-1$ e $1$) são os «candidatos» a raízes inteiras. Substituindo $x$ por cada um destes valores, concluímos que $-1$, $1$ e $2$ são raízes do polinómio $A(x)$, pelo que o conjunto-solução é $\{-1, 1, 2\}$.

**34.3**

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & & -4 & 0 & -2 \\ \hline & -2 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-2)\left(-2x^2-1\right)$

$-2x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=-\dfrac{1}{2}$ Equação impossível.

Logo, $P(x)$ tem apenas uma raiz, o $2$ e não é raiz de multiplicidade $2$ de $P(x)$, é raiz simples.

**34.4**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $-2x^2-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $P(x)$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |

$P(x)>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty, 2[$

Alternativamente:

Como $-2x^2-1<0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, então:

$P(x)>0 \Leftrightarrow (x-2)\underbrace{\left(-2x^2-1\right)}_{<0,\ \forall x\in\mathbb{R}}>0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

O conjunto-solução da inequação é $]-\infty, 2[$.

**34.5**

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{4}$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $1-4x$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $(1-4x)P(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$(1-4x)P(x)\leqslant 0 \iff x\in\left[\frac{1}{4}, 2\right]$

**PÁG. 92**

**Aplicar +**

**35.1** $P(x)=0 \iff x^4-5x^2+4=0 \iff (x^2)^2-5x^2+4=0 \iff$

$$\iff x^2=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times4}}{2\times1} \iff x^2=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2} \iff$$

$$\iff x^2=\frac{5-3}{2} \lor x^2=\frac{5+3}{2} \iff x^2=1 \lor x^2=4 \iff$$

$$\iff x=-1 \lor x=1 \lor x=-2 \lor x=2$$

**35.2** $P(x)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=(x^2-1)(x^2-4)$, em que $-1$ e $1$ são zeros do polinómio $x^2-1$ e $-2$ e $2$ são zeros do polinómio $x^2-4$.

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2-4$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $P(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$P(x)\leqslant 0 \iff x\in[-2,-1]\cup[1,2]$

**36.** $P(x)=(x^2+1)(2x+17)+(17x-31)=2x^3+17x^2+19x-14$

**36.1** $P(-7)=2(-7)^3+17(-7)^2+19(-7)-14=0$

$-7$ é raiz de $P(x)$, ou seja, $P(x)$ é divisível por $x+7$.

**36.2**

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 17 & 19 & -14 \\ -7 & & -14 & -21 & 14 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+7)(2x^2+3x-2)$

$$2x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 2\times(-2)}}{2\times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x=\frac{-3-5}{4} \vee x=\frac{-3+5}{4} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=\frac{1}{2}$$

Os zeros de $P(x)$ são $-7$, $-2$ e $\frac{1}{2}$, e $P(x)=2(x+7)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

**36.3**

| $x$ | $-\infty$ | $-7$ | | $-2$ | | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+7$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2x^2+3x-2$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $P(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$P(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty, -7\right]\cup\left[-2, \frac{1}{2}\right]$

**36.4** $9-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=3$

| $x$ | $-\infty$ | $-7$ | | $-3$ | | $-2$ | | $\frac{1}{2}$ | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $9-x^2$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $P(x)\times(9-x^2)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

$P(x)\times(9-x^2)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty, -7\right[\cup\left]-3, -2\right[\cup\left]\frac{1}{2}, 3\right[$

**37.1**

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & -6 & -11 & 23 & 32 & -20 \\
\frac{3}{2} & & -9 & -30 & -\frac{21}{2} & \frac{129}{4} \\
\hline
 & -6 & -20 & -7 & \frac{43}{2} & \boxed{\frac{49}{4}}
\end{array}$$

Quociente: $-6x^3-20x^2-7x+\frac{43}{2}$ ; Resto: $\frac{49}{4}$

**37.2**

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & -6 & -11 & 23 & 32 & -20 \\
-2 & & 12 & -2 & -42 & 20 \\
\hline
 & -6 & 1 & 21 & -10 & \boxed{0}
\end{array}$$

$P(x)=(x+2)\left(-6x^3+x^2+21x-10\right)$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -6 & 1 & 21 & -10 \\
-2 & & 12 & -26 & 10 \\
\hline
 & -6 & 13 & -5 & \boxed{0}
\end{array}$$

$P(x)=(x+2)\,(x+2)\,\left(-6x^2+13x-5\right)$

$$-6x^2+13x-5=0 \iff x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4(-6)\,(-5)}}{2\,(-6)} \iff$$

$$\iff x=\frac{-13\pm\sqrt{49}}{-12} \iff x=\frac{-13-7}{-12} \vee x=\frac{-13+7}{-12} \iff x=\frac{5}{3} \vee x=\frac{1}{2}$$

$P(x)=-6\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)^2$ e $-2$ é uma raiz de multiplicidade $2$ de $P(x)$ .

**37.3**

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{5}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x+2)^2$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $-6x^2+13x-5$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $P(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$P(x)\geqslant 0 \iff x\in\{-2\}\cup\left[\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right]$

**38.1** $A\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{8} \iff 2\left(\frac{1}{2}\right)^4-m\left(\frac{1}{2}\right)^3+n\left(\frac{1}{2}\right)^2+m\left(\frac{1}{2}\right)-n-2=-\frac{15}{8} \iff$

$$\iff 2\times\frac{1}{16}-m\times\frac{1}{8}+n\times\frac{1}{4}+\frac{m}{2}-n-2=-\frac{15}{8} \iff$$

$$\iff -\frac{m}{8}+\frac{n}{4}+\frac{m}{2}-n=-\frac{15}{8}-\frac{1}{8}+2 \iff$$

$$\iff \frac{3m-6n}{8}=0 \iff 3m-6n=0 \iff$$

$$\iff m=2n$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & -2n & n & 2n & -n-2 \\
1 & & 2 & 2-2n & 2-n & 2+n \\
\hline
 & 2 & 2-2n & 2-n & 2+n & \boxed{0} \\
1 & & 2 & 4-2n & 6-3n & \\
\hline
 & 2 & 4-2n & 6-3n & \boxed{8-2n} &
\end{array}$$

$8-2n=0 \iff n=4$ e $m=2\times 4=8$ .

**38.2** Da alínea anterior, dado que $n=4$, conclui-se que:

$$A(x)=(x-1)(x-1)\left(2x^2+(4-2\times 4)x+6-3\times 4\right)=(x-1)^2\left(2x^2-4x-6\right)=2(x-1)^2\left(x^2-2x-3\right)$$

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 1\times(-3)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2-4}{2} \vee x=\frac{2+4}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=3$$

$$A(x)=2(x-1)^2(x+1)(x-3)$$

**38.3**

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2(x-1)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2-2x-3$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $A(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$A(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-1,3\right[\setminus\{1\}$

**38.4** $A(x)=xB(x)+x^2B(x)+C(x)=\left(x^2+x\right)B(x)+C(x)$

$B(x)$ e $C(x)$ são, respetivamente, o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x^2+x$.

$$\begin{array}{r|l}
2x^4-8x^3+4x^2+8x-6 & x^2+x \\ \cline{2-2}
-2x^4-2x^3 \qquad\qquad\qquad & 2x^2-10x+14 \\ \cline{1-1}
-10x^3+4x^2+8x-6 & \\
10x^3+10x^2 \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
14x^2+8x-6 & \\
-14x^2-14x \quad & \\ \cline{1-1}
-6x-6 &
\end{array}$$

$B(x)=2x^2-10x+14$ e $C(x)=-6x-6$.

**38.5** $A(x)=-16x\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow 2(x-1)^2(x+1)(x-3)=-16x(x-1)(x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2(x+1)(x-3)+16x(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x+1)[(x-1)(x-3)+8x]=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x+1=0 \vee (x-1)(x-3)+8x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1 \vee x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1 \vee x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times 1\times 3}}{2\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1 \vee x=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1 \vee x=\frac{-4-2}{2} \vee x=\frac{-4+2}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1 \vee x=-3 \vee x=-1$$

O conjunto-solução da equação é $\{-3,-1,1\}$.

**39.1**

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 6 & 6 & 2 \\
-1 & & -2 & -4 & -2 \\
\hline
 & 2 & 4 & 2 & \boxed{0} \\
-1 & & -2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 2 & \boxed{0} & \\
-1 & & -2 & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

Logo, $-1$ é raiz de multiplicidade $3$ de $B(x)$ e $B(x)=2(x+1)^3$ .

**39.2** $(-8-5x)\,B(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow (-8-5x)\times 2(x+1)^3\leqslant 0 \Leftrightarrow (-8-5x)\,(x+1)^3\leqslant 0$

$-8-5x=0 \Leftrightarrow -5x=8 \Leftrightarrow x=-\frac{8}{5}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{8}{5}$ | | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-8-5x$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $(x+1)^3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(-8-5x)\,(x+1)^3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

O conjunto-solução da condição $(-8-5x)\,B(x)\leqslant 0$ é $\left]-\infty, -\frac{8}{5}\right]\cup[-1, +\infty[$ .

**PÁG. 93**

**Aplicar +**

**40.** $P(x)=a(x+2)\left(x^2-1\right),\ a\neq 0$

**40.1** Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x-a$ é $a^3-a^2-2a$ , então $P(a)=a^3-a^2-2a$ .

Como $P(a)=a(a+2)\left(a^2-1\right)$ , tem-se:

$$
a(a+2)\left(a^2-1\right)=a^3-a^2-2a \Leftrightarrow \cancel{a}(a+2)\left(a^2-1\right)=\cancel{a}\left(a^2-a-2\right) \Leftrightarrow
$$

$$
\underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a^3-a+2a^2-2=a^2-a-2 \Leftrightarrow a^3+a^2=0 \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow a^2(a+1)=0 \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a+1=0 \Leftrightarrow a=-1
$$

**40.2** $P(x)<0 \Leftrightarrow -(x+2)\left(x^2-1\right)<0 \Leftrightarrow (-x-2)\left(x^2-1\right)<0$

$-x-2=0 \Leftrightarrow -x=2 \Leftrightarrow x=-2$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x-2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $x^2-1$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $P(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$P(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-2,-1[\cup]1,+\infty[$

**41.1**

**a.** $h(x)=f(x)-16=a(x-0)^2(x-3)=ax^2(x-3)$

Portanto, $f(x)-16=ax^2(x-3) \Leftrightarrow f(x)=ax^2(x-3)+16$ .

$f(4)=0 \Leftrightarrow a\times 4^2(4-3)+16=0 \Leftrightarrow a=-1$

$f(x)=-x^2(x-3)+16=-x^3+3x^2+16$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 3 & 0 & 16 \\
4 & & -4 & -4 & -16 \\
\hline
 & -1 & -1 & 4 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$f(x)=(x-4)\left(-x^2-x-4\right)$

**b.** Se $4$ é o único zero de $g$, com multiplicidade superior a $1$ e $g$ é uma função polinomial de grau $3$, então $4$ tem multiplicidade $3$, pelo que $g(x)=a(x-4)^3$ ($4$ não pode ter multiplicidade $2$, pois, nesse caso, $g$ teria de ter mais um zero).

$g(3)=-1 \Leftrightarrow a(3-4)^3=-1 \Leftrightarrow a=1$

$g(x)=(x-4)^3$

**41.2** $f(x)<-g(x) \Leftrightarrow (x-4)\left(-x^2-x-4\right)<-(x-4)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(x-4)\left(x^2+x+4\right)<-(x-4)^3 \Leftrightarrow (x-4)\left(x^2+x+4\right)>(x-4)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)\left(x^2+x+4\right)-(x-4)^3>0 \Leftrightarrow (x-4)\left[\left(x^2+x+4\right)-(x-4)^2\right]>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)\left(x^2+x+4-x^2+8x-16\right)>0 \Leftrightarrow (x-4)(9x-12)>0$

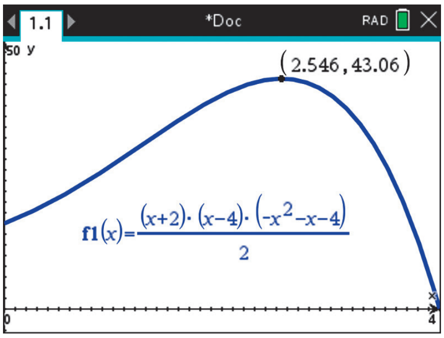
$9x-12=0 \Leftrightarrow 9x=12 \Leftrightarrow x=\frac{12}{9} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{4}{3}$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-4$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $9x-12$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-4)(9x-12)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

O conjunto-solução da inequação $f(x)<-g(x)$ é $\left]-\infty,\frac{4}{3}\right[\cup]4,+\infty[$ .

**41.3** Sendo $c$ a abcissa de $C$, tem-se que $\overline{AB}=c+2$ e $\overline{BC}=f(c)=(c-4)\left(-c^2-c-4\right)$, pelo que a área do triângulo $[ABC]$, em função da abcissa, $c$, do ponto $C$ é dada por:

$$\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2}=\frac{(c+2)(c-4)\left(-c^2-c-4\right)}{2}$$




Abcissa de $C$: $c\approx 2{,}55$

Ordenada de $C$: $f(c)\approx 18{,}9$

## PÁG. 94

### Aplicar +

**42.1** $f(x)=a(x-2)^2(x-4)$

$f(3)=1 \Leftrightarrow a(3-2)^2(3-4)=1 \Leftrightarrow a=-1$

$f(x)=-(x-2)^2(x-4)$

**42.2** $g(x)=a(x+4)^2(x-1)^2$

$g(0)=1{,}6 \Leftrightarrow a(0+4)^2(0-1)^2=1{,}6 \Leftrightarrow a=0{,}1$

$g(x)=0{,}1(x+4)^2(x-1)^2$

**42.3** $h(x)=ax(x-1)(x-3)$

$h(2)=-2{,}4 \Leftrightarrow a\times 2(2-1)(2-3)=-2{,}4 \Leftrightarrow a=1{,}2$

$h(x)=1{,}2x(x-1)(x-3)$

**42.4** $i(x)=a(x+2)(x-2)$

$i(0)=-2{,}4 \Leftrightarrow a(0+2)(0-2)=-2{,}4 \Leftrightarrow a=0{,}6$

$i(x)=0{,}6(x+2)(x-2)$

**42.5** $j(x)=a(x+2)^3$

$j(0)=-4 \Leftrightarrow a(0+2)^3=-4 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

$j(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^3$

**43.1** $g(x) = a(x+1)(x-1)(x-2)^2$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-2)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $(x+1)(x-1)(x-2)^2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |

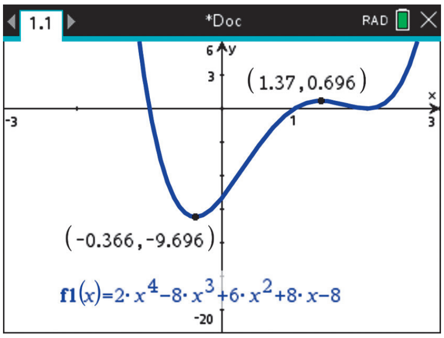
Se $a<0$, $g$ é negativa em $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\setminus\{2\}$ e é positiva em $]-1, 1[$.

**43.2** O zero é o $2$, dado que tem multiplicidade $2$. Como $a>0$ e $2$ é o maior zero de $g$, então $g(2)$ é mínimo relativo de $g$.

**43.3** **a.** $g(3)=16 \Leftrightarrow a(3+1)(3-1)(3-2)^2=16 \Leftrightarrow a=2$

$g(x)=2(x+1)(x-1)(x-2)^2=(2x^2-2)(x^2-4x+4)=2x^4-8x^3+6x^2+8x-8$

**b.**




$k\in]-\infty; -0{,}696[\cup]0; 9{,}696[$ (valores arredondados às milésimas)

## PÁG. 95

### Aplicar +

**44.** $-x^3+7x+1=-5 \Leftrightarrow -x^3+7x+6=0$. Como o gráfico de $f$ e a reta de equação $y=-5$ intersetam-se no ponto $D$, de abcissa $-1$, $-1$ é raiz do polinómio $-x^3+7x+6$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -1 & 0 & 7 & 6 \\
-1 & & 1 & -1 & -6 \\
\hline
 & -1 & 1 & 6 & \boxed{0}
\end{array}$$

$-x^3+7x+6=0 \Leftrightarrow (x+1)(-x^2+x+6)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \vee -x^2+x+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)\times 6}}{2(-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{-2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{-1-5}{-2} \vee x=\dfrac{-1+5}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=3 \vee x=-2$

Logo, $B(-2\,,\,-5)$ , $C(3\,,\,-5)$ e $D(-1\,,\,-5)$ .

$$A_{[ABC]}=\frac{(x_C-x_B)\times(y_A-y_C)}{2}=\frac{(3+2)\times(7+5)}{2}=30$$

**45.1** $f(1)=-3\times 1^3+12\times 1^2+21\times 1-30=0$

$f(x)$ é divisível por $x-1$ .

$f(-1)=-3\times(-1)^3+12\times(-1)^2+21\times(-1)-30=-36$

O resto da divisão inteira de $f(x)$ por $x+1$ é $-36$ .

**45.2**

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -3 & 12 & 21 & -30 \\ 1 & & -3 & 9 & 30 \\ \hline & -3 & 9 & 30 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)\left(-3x^2+9x+30\right)=-3(x-1)\left(x^2-3x-10\right)$

$$x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 1\times(-10)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3-7}{2} \vee x=\frac{3+7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=5$$

$f(x)=-3(x-1)(x+2)(x-5)$

**45.3 a.**

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $1$ | | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $-3(x-1)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $x-5$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty\,,\,-2\right[\cup\left]1\,,\,5\right[$

**b.** $f(x)\geqslant 27x-30 \Leftrightarrow -3x^3+12x^2+21x-30\geqslant 27x-30 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -3x^3+12x^2-6x\geqslant 0 \Leftrightarrow -3x\left(x^2-4x+2\right)\geqslant 0$$

$$x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 1\times 2}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4-2\sqrt{2}}{2} \vee x=\frac{4+2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2-\sqrt{2} \vee x=2+\sqrt{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | $2-\sqrt{2}$ | | $2+\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x$ | + | 0 | – | – | – | – | – |
| $x^2-4x+2$ | + | + | + | 0 | – | 0 | + |
| $-3x\,(x^2-4x+2)$ | + | 0 | – | 0 | + | 0 | – |

$f(x)\geqslant 27x-30 \Leftrightarrow -3x\left(x^2-4x+2\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty, 0\right]\cup\left[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right]$

**c.** $x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-6)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{1-5}{2} \vee x=\frac{1+5}{2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=3$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | 1 | | 3 | | 5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + | 0 | – | 0 | + | + | + | 0 | – |
| $x^2-x-6$ | + | 0 | – | – | – | 0 | + | + | + |
| $(x^2-x-6)\,f(x)$ | + | 0 | + | 0 | – | 0 | + | 0 | – |

$\left(x^2-x-6\right)f(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in\{-2\}\cup[1, 3]\cup[5, +\infty[$

**d.** $f(x)<x^2-6x+5 \Leftrightarrow -3\,(x+2)\,(x-1)\,(x-5)<x^2-6x+5$

$x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times 1\times 5}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{6\pm 4}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=5$

Logo, $x^2-6x+5=(x-1)\,(x-5)$ .

Portanto, tem-se:

$-3\,(x+2)\,(x-1)\,(x-5)<(x-1)\,(x-5) \Leftrightarrow -3\,(x+2)\,(x-1)\,(x-5)-(x-1)\,(x-5)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)\,(x-5)\,[-3\,(x+2)-1]<0 \Leftrightarrow (x-1)\,(x-5)\,(-3x-7)<0$

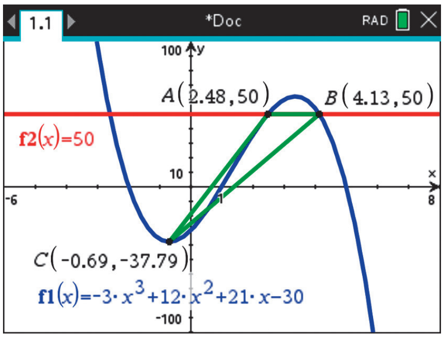
$-3x-7=0 \Leftrightarrow -3x=7 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{3}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{7}{3}$ | | 1 | | 5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | – | – | – | 0 | + | + | + |
| $x-5$ | – | – | – | – | – | 0 | + |
| $-3x-7$ | + | 0 | – | – | – | – | – |
| $(x-1)\,(x-5)\,(-3x-7)$ | + | 0 | – | 0 | + | 0 | – |

$f(x)<x^2-6x+5 \Leftrightarrow (x-1)\,(x-5)\,(-3x-7)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{7}{3}, 1\right[\cup]5, +\infty[$

**45.4** Como o coeficiente do termo de maior grau do polinómio $f(x)$ é negativo e $f$ é uma função cúbica, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ .

**45.5**




$x_A \approx 2{,}48$ ; $x_B \approx 4{,}13$ ; $C(-0{,}69\,;\,-37{,}79)$

$$A_{[ABC]} = \frac{(4{,}13 - 2{,}48) \times (37{,}79 + 50)}{2} \approx 72{,}4$$

## PÁG. 96

### Aplicar +

**46.1** $D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$

$D_{\frac{g}{f}} = [0\,,\,3] \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{-2\,,\,0\,,\,2\} = ]0\,,\,3] \setminus \{2\}$

Opção correta: **(C)**

**46.2** Sendo $x$ a abcissa de $B$ , tem-se $B(x\,,\,g(x))$ e o retângulo $[OABC]$ é um quadrado se $g(x) = x$ .

Assim:

$$g(x) = x \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + \frac{11}{4}x + \frac{9}{2} = x \underset{\times 4}{\Leftrightarrow} 4x^3 - 16x^2 + 11x + 18 = 4x \Leftrightarrow 4x^3 - 16x^2 + 7x + 18 = 0$$

Sabemos que se $x = 2$ , o retângulo $[OABC]$ é um quadrado, pelo que $2$ é solução da equação $4x^3 - 16x^2 + 7x + 18 = 0$ , ou seja, $2$ é raiz do polinómio $4x^3 - 16x^2 + 7x + 18$ .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | −16 | 7 | 18 |
| 2 | | 8 | −16 | −18 |
| | 4 | −8 | −9 | 0 |

$$4x^3 - 16x^2 + 7x + 18 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(4x^2 - 8x - 9) = 0 \Leftrightarrow$$

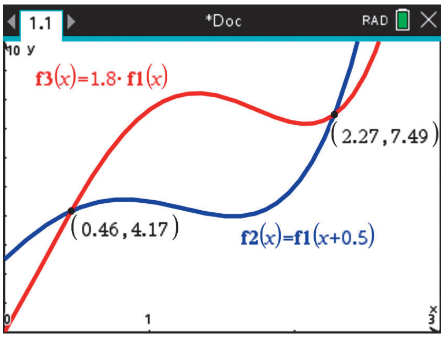
$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 4 \times (-9)}}{2 \times 4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{8 \pm \sqrt{208}}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{8 - 4\sqrt{13}}{8} \vee x = \frac{8 + 4\sqrt{13}}{8} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1 - \frac{\sqrt{13}}{2} \vee x = 1 + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Como $1 - \frac{\sqrt{13}}{2} < 0$ e $1 + \frac{\sqrt{13}}{2} \in [0\,,\,3]$ , a outra abcissa do ponto $B$ tal que $[OABC]$ é um quadrado é $1 + \frac{\sqrt{13}}{2}$ .

**46.3** A área do retângulo $[OABC]$ é dada por $A(x) = x\,g(x)$ .

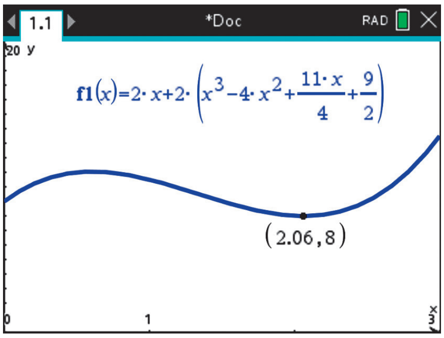
$A(x+0{,}5) = 1{,}8A(x)$




$x \approx 0{,}46$ ou $x \approx 2{,}27$ .

Na imagem, $f_1(x) = A(x)$ .

**46.4** O perímetro do retângulo $[OABC]$ é dado por $P(x) = 2x + 2g(x)$ .



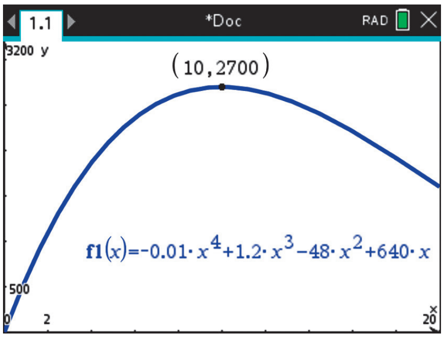

O perímetro mínimo do retângulo $[OABC]$ é, aproximadamente, $8$ .

**PÁG. 97**

**Aplicar +**

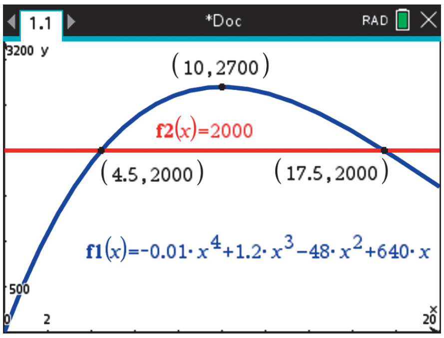
**47.1** $14$ de novembro corresponde a $t = 2$ , pelo que a $14$ de novembro existiam $I(2) \approx 1097$ infetados ativos.

**47.2**




O número máximo de infetados ativos foi de $2700$ e ocorreu no dia $10$ de janeiro de 2025 (dez semanas após o dia 1 de novembro de 2024).

**47.3** $l(t) > 2000$




O número de infetados ativos foi superior a $2000$ durante, aproximadamente, $17{,}5 - 4{,}5 = 13$ semanas.

**48.1** $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Opção correta: **(B)**

**48.2** $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \wedge f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x = -1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x \in \{\}$

Opção correta: **(A)**

**48.3** $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = a(x+1)^2(x-3) \times b(x+1) = ab(x+1)^3(x-3)$

Logo, os zeros de $f \times g$ são $-1$, com multiplicidade $3$, e $3$ com multiplicidade $1$.

**48.4** $f(x) = a(x+1)^2(x-3)$

$f(1) = 4 \Leftrightarrow a(1+1)^2(1-3) = 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2(x-3) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)(x^2 + 2x + 1) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

**48.5** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$g(x) = b(x+1)$

$g(1) = 4 \Leftrightarrow b(1+1) = 4 \Leftrightarrow 2b = 4 \Leftrightarrow b = 2$

$g(x) = 2(x+1)$

$(f-g)(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2(x-3) - 2(x+1) =$

$= (x+1)\left[-\frac{1}{2}(x+1)(x-3) - 2\right] = -\frac{1}{2}(x+1)[(x+1)(x-3)+4] =$

$= -\frac{1}{2}(x+1)(x^2 - 2x + 1) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-1)^2$

**48.6** $(f+g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+1)^2(x-3) + 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+1)^2(x-3) + 2(x+1) = 0 \underset{\times(-2)}{\Leftrightarrow} (x+1)^2(x-3) - 4(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)[(x+1)(x-3) - 4] = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \vee x^2 - 2x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{2-4\sqrt{2}}{2} \vee x=\frac{2+4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1-2\sqrt{2} \vee x=1+2\sqrt{2}$$

Os zeros de $f+g$ são $1-2\sqrt{2}$, $-1$ e $1+2\sqrt{2}$.

**PÁG. 98**

**Aplicar +**

**49.1** $(f-g)(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Os gráficos das funções $f$ e $g$ intersetam-se em três pontos, pelo que $f-g$ tem três zeros.

Opção correta: **(C)**

**49.2** $(f\times g)(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\times g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \vee g(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=0 \vee x=2 \vee x=2 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=0 \vee x=2$$

Opção correta: **(C)**

**49.3** $\left(\frac{g}{f}\right)(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \wedge f(x)\neq 0 \Leftrightarrow x=2 \wedge x\neq -2 \wedge x\neq 0 \wedge x\neq 2 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

Opção correta: **(A)**

**49.4** $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g\cap\{x\in\mathbb{R}: g(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\setminus\{2\}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Opção correta: **(B)**

**49.5** $f(x)=g(x)\times h(x)$

Como a função $f$ tem grau $3$ e a função $g$ tem grau $1$, concluímos que a função $h$ tem grau $2$.

Como os coeficientes dos termos de maior grau das funções $f$ e $g$ são positivos, concluímos que o coeficiente do termo de maior grau da função $h$ também é positivo.

Como os zeros da função $f$ são $-2$, $0$ e $2$ e o zero de $g$ é $2$, concluímos que os zeros de $h$ são $-2$ e $0$. A única expressão que satisfaz estas condições é a da opção B.

Opção correta: **(B)**

**49.6**

(A) $\left(\frac{g}{f}\right)(-2)=\frac{g(-2)}{f(-2)}$, $g(-2)<0$ e $f(-2)=0$, pelo que $\left(\frac{g}{f}\right)(-2)$ não existe.

(B) $(g+f)(3)=\underbrace{g(3)}_{>0}+\underbrace{f(3)}_{>0}>0$

(C) $(f+g)(0)+(f\times g)(-1)=\underbrace{f(0)}_{0}+\underbrace{g(0)}_{<0}+\underbrace{\underbrace{f(-1)}_{>0}\times\underbrace{g(-1)}_{<0}}_{<0}<0$

**(D)** $(f\times g)(1)-(g-f)(-1)=\underbrace{\underbrace{f(1)}_{<0}\times\underbrace{g(1)}_{<0}}_{>0}-\underbrace{\left(\underbrace{g(-1)}_{<0}-\underbrace{f(-1)}_{>0}\right)}_{<0}>0$

Opção correta: **(D)**

**49.7** $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$f(x) = a(x+2)(x-0)(x-2) = ax(x^2-4)$

$g(x) = b(x-2)$

Logo, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a(x+2)(x-0)(x-2)}{b(x-2)} = \frac{a}{b}x(x+2)$

$\left(\frac{g}{f}\right)(1) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{b(1-2)}{a(1+2)\times 1\times(1-2)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{-b}{-3a} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{a}{b}x(x+2) = \frac{4}{3}x(x+2) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}$

## PÁG. 99

### Aplicar +

**50.1** $(f\times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\times g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=-1 \vee x=4 \vee x=1 \vee x=4 \Leftrightarrow x\in\{-2, -1, 1, 4\}$

Opção correta: **(D)**

**50.2** $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x\in\mathbb{R} : g(x)\neq 0\} = \mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\backslash\{1, 4\} = \mathbb{R}\backslash\{1, 4\}$

Opção correta: **(B)**

**50.3** $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \wedge f(x)\neq 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=4 \wedge x\neq -2 \wedge x\neq -1 \wedge x\neq 4 \Leftrightarrow x\in\{1\}$

Opção correta: **(A)**

**50.4** $(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Os gráficos das funções $f$ e $g$ intersetam-se em apenas um ponto, pelo que $f-g$ tem apenas um zero.

Opção correta: **(B)**

**50.5** $f(x) = a(x+2)(x+1)(x-4)$

$f(0) = \frac{8}{5} \Leftrightarrow a(0+2)(0+1)(0-4) = \frac{8}{5} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{5}$

$f(x) = -\frac{1}{5}(x+2)(x+1)(x-4) = \left(-\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}\right)(x^2-3x-4) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + 2x + \frac{8}{5}$

$g(x) = a(x-1)(x-4)$

$y_V = \frac{9}{4}$ e $x_V = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ são, respetivamente, a ordenada e a abcissa do vértice da parábola que é o gráfico de $g$.

$g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-4\right) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a = -1$

$g(x) = -1(x-1)(x-4) = -x^2 + 5x - 4$

**50.6** $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{5}x^2+2x+\frac{8}{5}+\left(-x^2+5x-4\right)=$

$$=-\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{5}x^2+2x+\frac{8}{5}-x^2+5x-4=-\frac{1}{5}x^3-\frac{4}{5}x^2+7x-\frac{12}{5}$$

**50.7** $(f+g)(x)=0 \iff f(x)+g(x)=0 \iff$

$$\iff -\frac{1}{5}x^3-\frac{4}{5}x^2+7x-\frac{12}{5}=0 \iff -x^3-4x^2+35x-12=0$$

Sabemos que $4$ é um zero de $f$ e também de $g$, pelo que $f(4)+g(4)=0+0=0$. Logo, $4$ é um zero do polinómio $(f+g)(x)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-4$ | $35$ | $-12$ |
| $4$ | | $-4$ | $-32$ | $12$ |
| | $-1$ | $-8$ | $3$ | $0$ |

$$-x^3-4x^2+35x-12=(x-4)\left(-x^2-8x+3\right)$$

$$-x^2-8x+3=0 \iff x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times(-1)\times 3}}{2\times(-1)} \iff x=\frac{8\pm\sqrt{76}}{-2} \iff$$

$$\iff x=\frac{8-2\sqrt{19}}{-2} \lor x=\frac{8+2\sqrt{19}}{-2} \iff x=-4+\sqrt{19} \lor x=-4-\sqrt{19}$$

Logo, os zeros de $f+g$ são $4$, $-4-\sqrt{19}$ e $-4+\sqrt{19}$.

**Alternativamente**

Da alínea **50.5**, $f(x)=-\frac{1}{5}(x+2)(x+1)(x-4)$ e $g(x)=-1(x-1)(x-4)$, pelo que:

$$(f+g)(x)=0 \iff f(x)+g(x)=0 \iff -\frac{1}{5}(x+2)(x+1)(x-4)-(x-1)(x-4)=0 \iff$$

$$\underset{\times(-5)}{\iff} (x+2)(x+1)(x-4)+5(x-1)(x-4)=0 \iff (x-4)\left[(x+1)(x+2)+5(x-1)\right]=0 \iff$$

$$\iff x-4=0 \lor x^2+3x+2+5x-5=0 \iff x=4 \lor x^2+8x-3=0 \iff$$

$$\iff x=4 \lor x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times 1\times(-3)}}{2\times 1} \iff x=4 \lor x=\frac{-8\pm 2\sqrt{19}}{2} \iff$$

$$\iff x=4 \lor x=-4-\sqrt{19} \lor x=-4+\sqrt{19}$$

**50.8** $\left(\frac{g}{h}\right)(x)=\frac{x-4}{2x-2} \iff \frac{g(x)}{h(x)}=\frac{x-4}{2x-2} \iff$

$$\iff \frac{-(x-1)(x-4)}{h(x)}=\frac{x-4}{2x-2} \iff$$

$$\iff h(x)=-\frac{2(x-1)(x-1)(x-4)}{x-4} \iff$$

$$\iff h(x)=-2(x-1)^2 \iff$$

$$\iff h(x)=-2\left(x^2-2x+1\right) \iff$$

$$\iff h(x)=-2x^2+4x-2$$

## PÁG. 100

### Aplicar +

**51.1** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \wedge g(x)\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=1 \vee x=3 \wedge x\neq -1 \wedge x\neq 1 \wedge x\neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in \{3\}$

Opção correta: **(A)**

**51.2** $D_{\frac{g}{f}}=D_g \cap D_f \cap \{x\in \mathbb{R} : f(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\cap [-1, +\infty[ \cap \mathbb{R}\setminus\{-1, 1, 3\}=]-1, +\infty[\setminus\{1, 3\}$

Opção correta: **(B)**

**51.3**

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | – | 0 | – | – | – | 0 | + |
| $g(x)$ | 0 | + | 0 | – | 0 | + | + | + |
| $f(x)\times g(x)$ | 0 | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |

**51.4**

**a.** $D_{f+g}=D_f \cap D_g=[-1, +\infty[ \cap \mathbb{R}=[-1, +\infty[$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$f(x)=a(x+1)(x-1)^2(x-3)$

$f(0)=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow a(0+1)(0-1)^2(0-3)=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)^2(x-3)$

$g(x)=a(x+1)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$g(0)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow a(0+1)(0-1)\left(0-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

$g(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)^2(x-3)+\frac{1}{2}(x+1)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)\left[(x-1)(x-3)+2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right]=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)\left[x^2-4x+3+2x-3\right]=$$

$$=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)\underbrace{(x^2-2x)}_{x(x-2)}=\frac{1}{4}x(x+1)(x-1)(x-2)$$

**b.** $f(x) \geqslant -g(x) \iff f(x)+g(x) \geqslant 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{4}x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)+g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$f(x)+g(x) \geqslant 0 \iff x \in ]-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup [2, +\infty[$

**52.1** $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x^3 - x - 6 + \left(-2x^3 + 2x^2 + 18x\right) = -x^3 + 2x^2 + 17x - 6$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3 + 2x^2 + 17x - 6\right) = -\infty$ , dado que o coeficiente de $x^3$ é negativo.

**52.2**

**a.** $h(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x - 6 - \left(-2x^3 + 2x^2 + 18x\right) = 3x^3 - 2x^2 - 19x - 6$

Como o termo independente do polinómio $3x^3 - 2x^2 - 19x - 6$ é $-6$ , os divisores inteiros de $-6$ $(-6,\ 6,\ -3,\ 3,\ -2,\ 2,\ -1$ e $1)$ são os «candidatos» a raízes inteiras. Substituindo $x$ por cada um destes valores, concluímos que $-2$ e $3$ são as raízes inteiras.

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -2 & -19 & -6 \\
-2 & & -6 & 16 & 6 \\
\hline
 & 3 & -8 & -3 & 0 \\
3 & & 9 & 3 & \\
\hline
 & 3 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

$h(x) = (x+2)(x-3)(3x+1)$

**b.** $(h+j)(x) = h(x) + j(x) = (x+2)(x-3)(3x+1) + \left(3x^2 + x\right) =$

$$= (x+2)(x-3)(3x+1) + x(3x+1) = (3x+1)\left[(x+2)(x-3)+x\right] = (3x+1)\left(x^2-6\right)$$

$3x+1=0 \iff x = -\frac{1}{3}$

$x^2 - 6 = 0 \iff x^2 = 6 \iff x = -\sqrt{6} \lor x = \sqrt{6}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{6}$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $\sqrt{6}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2-6$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(h+j)(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$h+j$ é negativa em $\left]-\infty, -\sqrt{6}\right[ \cup \left]-\frac{1}{3}, \sqrt{6}\right[$ e é positiva em $\left]-\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\right[ \cup \left]\sqrt{6}, +\infty\right[$ .

**c.** $h(x)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)(3x+1)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \vee x-3=0 \vee 3x+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=3 \vee x=-\frac{1}{3}$

$D_{\frac{j}{h}}=D_j \cap D_h \cap \{x \in \mathbb{R} : h(x) \neq 0\}=\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \backslash \left\{-2, -\frac{1}{3}, 3\right\}=\mathbb{R} \backslash \left\{-2, -\frac{1}{3}, 3\right\}$

$\left(\frac{j}{h}\right)(x)=\frac{j(x)}{h(x)}=\frac{3x^2+x}{(x+2)(x-3)(3x+1)}=\frac{x(3x+1)}{(x+2)(x-3)(3x+1)}=\frac{x}{x^2-x-6}$

**PÁG. 101**

**Aplicar +**

**53.1** $D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}=[-3, 3] \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \backslash \{-1, 1, 3\}=[-3, 3[ \backslash \{-1, 1\}$

**53.2** $f(x)=0 \Leftrightarrow (9-x^2)^2=0 \Leftrightarrow 9-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=3$

$h(x)=0 \Leftrightarrow 4x+4=0 \Leftrightarrow 4x=-4 \Leftrightarrow x=-1$

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | + | + | + | 0 |
| $h(x)$ | – | – | 0 | + | + |
| $(f \times h)(x)$ | 0 | – | 0 | + | 0 |

O conjunto-solução da inequação $(f \times h)(x) \geqslant 0$ é $\{-3\} \cup [-1, 3]$.

**53.3**

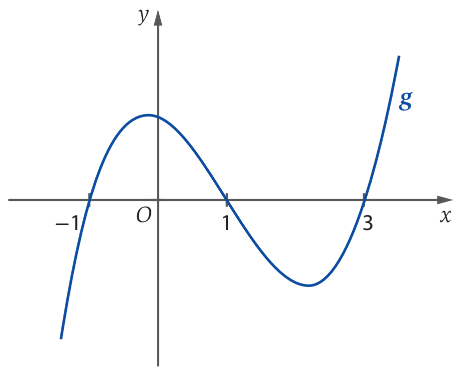
**a.** $g(x)=a(x+1)(x-1)(x-3)$

Como $g(2)<0$, tem-se $a(2+1)(2-1)(2-3)<0 \Leftrightarrow -3a<0 \Leftrightarrow a>0$

Logo, como $a>0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=+\infty$.

**b.** Como os coeficientes dos termos de maior grau das funções $h$ e $g$ são positivos, concluímos que o coeficiente do termo de maior grau da função $h \times g$, quártica, também é positivo.
Logo, $\lim\limits_{x \to -\infty} (h \times g)(x)=+\infty$.

**c.** Tendo em conta os zeros da função $g$, $-1$, $1$ e $3$ e o facto de $g(2)<0$, um esboço do gráfico de $g$ é o seguinte:



Portanto, $g(x)>0 \Leftrightarrow x\in]-1\,,\,1[\cup]3\,,+\infty[$ e $g(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty\,,-1[\cup]1\,,\,3[$ .

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$ | $+$ | ND | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$\left(\frac{g}{h}\right)(x)<0 \Leftrightarrow x\in]1\,,\,3[$

## 53.4

**a.** $(f\times g)(-3)+(g+h)(2)=6 \Leftrightarrow f(-3)\times g(-3)+g(2)+h(2)=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\times g(-3)+g(2)+4\times 2+4=6 \Leftrightarrow 0+g(2)+12=6 \Leftrightarrow g(2)=-6$

$g(x)=a(x+1)(x-1)(x-3)$

$g(2)=-6 \Leftrightarrow a(2+1)(2-1)(2-3)=-6 \Leftrightarrow a=2$

$g(x)=2(x+1)(x-1)(x-3)=(2x-6)\left(x^2-1\right)=2x^3-6x^2-2x+6$

**b.** $(g-h)(x)=0 \Leftrightarrow g(x)-h(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x+1)(x-1)(x-3)-(4x+4)=0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x-1)(x-3)-4(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x+1)[(x-1)(x-3)-2]=0 \Leftrightarrow 2(x+1)=0 \vee (x-1)(x-3)-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1=0 \vee x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 1\times 1}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{4-2\sqrt{3}}{2} \vee x=\frac{4+2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2-\sqrt{3} \vee x=2+\sqrt{3}$

O conjunto-solução da equação é $\left\{-1\,,\,2-\sqrt{3}\,,\,2+\sqrt{3}\right\}$ .

**54.1** Não existe, porque $(f-h)(1)=f(1)-h(1)=1^2-1-0=0$ .

**54.2** $g(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2+x-2\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-2 \vee x=1$

Logo, $g(x)=(x-0)(x-1)(x+2)=x(x-1)(x+2)$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g\cap\{x\in\mathbb{R} : g(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\backslash\{-2\,,\,0\,,\,1\}=\mathbb{R}\backslash\{-2\,,\,0\,,\,1\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-1}{x^3+x^2-2x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+2)}=\frac{x+1}{x(x+2)}=\frac{x+1}{x^2+2x}$

**54.3**

| $x$ | 0 | | 1 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | + | + | 0 | – | 0 | + |
| $g(x)$ | 0 | – | 0 | + | + | + |
| $\left(\frac{h}{g}\right)(x)$ | N.D. | – | N.D. | – | 0 | + |

$\left(\frac{h}{g}\right)(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in ]0, 3] \backslash \{1\}$

**54.4** $h(x) = a(x-1)(x-3)$

$h(0) = 2 \Leftrightarrow a(0-1)(0-3) = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$

$h(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-3)$

$(g+h)(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) + h(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+2) + \frac{2}{3}(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[x(x+2) + \frac{2}{3}(x-3)\right] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x(x+2) + \frac{2}{3}(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee 3x^2 + 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

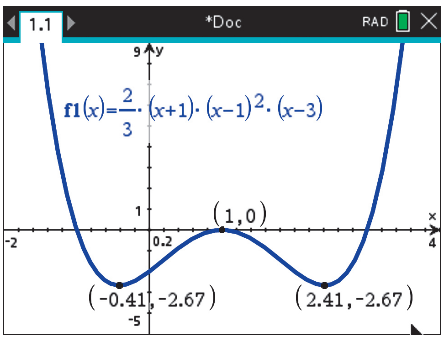
$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 3 \times (-6)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-8 \pm \sqrt{136}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-8 - 2\sqrt{34}}{6} \vee x = \frac{-8 + 2\sqrt{34}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \underbrace{\frac{-4 - \sqrt{34}}{3}}_{<0} \vee x = \frac{-4 + \sqrt{34}}{3}$

Como $\frac{-4 - \sqrt{34}}{3} < 0$ , $1 > 0$ e $\frac{-4 + \sqrt{34}}{3} > 0$ , os zeros da função $g + h$ são $1$ e $\frac{-4 + \sqrt{34}}{3}$ .

**54.5** $(f \times h)(x) = f(x) \times h(x) = (x-1)(x+1) \times \frac{2}{3}(x-1)(x-3) = \frac{2}{3}(x+1)(x-1)^2(x-3)$




Mínimo absoluto $-2{,}67$ em $x \approx -0{,}41$ e em $x \approx 2{,}41$ ; máximo relativo $0$ em $x = 1$ .

## PÁG. 102

### Aplicar +

**55.1** $32x - 0{,}21x^2 = 0 \Leftrightarrow x(32 - 0{,}21x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 32 - 0{,}21x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3200}{21}$$

Como $R$ é uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, vem que $R$ é não negativa em $\left[0, \frac{3200}{21}\right]$.

$D_R = \left[0, \frac{3200}{21}\right]$

**55.2**

**a.** $L(x) = R(x) - c(x) = 32x - 0{,}21x^2 - (3x + 87{,}75) = -0{,}21x^2 + 29x - 87{,}75$

**b.** $L(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -0{,}21x^2 + 29x - 87{,}75 \geqslant 0$

$$-0{,}21x^2 + 29x - 87{,}75 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-29 \pm \sqrt{29^2 - 4(-0{,}21)(-87{,}75)}}{2(-0{,}21)} \Leftrightarrow x = \frac{-29 \pm \sqrt{767{,}29}}{-0{,}42} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-29 - 27{,}7}{-0{,}42} \vee x = \frac{-29 + 27{,}7}{-0{,}42} \Leftrightarrow x = 135 \vee x = \frac{65}{21}$$

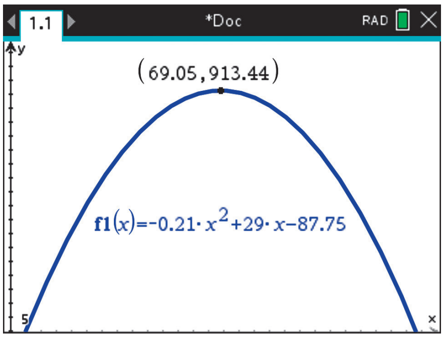
Como $L$ é uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, vem que $L(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{65}{21}, 135\right]$.

Como $\frac{65}{21} \times 100 \approx 309{,}5$ e $135 \times 100 = 13500$, a empresa deverá exportar entre $310$ e $13500$ litros de bebida.

**c.** A abcissa do vértice da parábola que é o gráfico de $L$ é $\frac{\frac{65}{21} + 135}{2} = \frac{1450}{21} \approx 69{,}05$ e a ordenada é $L\left(\frac{1450}{21}\right) = \frac{76729}{84} \approx 913{,}44048$.

Como $L$ é uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, a ordenada do seu vértice é o máximo de $L$, caso a abcissa deste pertença ao domínio da função $\left(\text{pertence, } 69{,}05 \in \left[0, \frac{3200}{21}\right]\right)$. Portanto o máximo de $L$ é, aproximadamente, $913{,}44048$ em $x \approx 69{,}05$.

A empresa deverá exportar aproximadamente $69{,}05 \times 100 = 6905$ litros, tendo um lucro máximo de $913{,}44048 \times 100 = 913440{,}48$ €.



**56.1** Como $g$ é crescente em $]-1\,,+\infty[$ e decrescente em $]-\infty\,,-1[$, o domínio de $g$ é $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, pelo que $c=-1$.

**56.2**

$$\begin{array}{rrr|l} 2x & - & 4 & x+1 \\ \cline{4-4} -2x & - & 2 & 2 \\ \cline{1-3} & & -6 & \end{array}$$

Logo, $g(x)=\dfrac{2x-4}{x+1}=2-\dfrac{6}{x+1}$, pelo que $a=2$ e $b=-6$.

Opção correta: **(D)**

**56.3** $2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$ ; $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x-4$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $g(x)$ | $+$ | N.D. | $-$ | $0$ | $+$ |

$g$ é positiva em $]-\infty\,,-1[\,\cup\,]2\,,+\infty[$ e é negativa em $]-1\,,2[$.

**56.4** $g(x)>-2 \Leftrightarrow \dfrac{2x-4}{x+1}>-2 \Leftrightarrow \dfrac{2x-4}{x+1}+2>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-4+2(x+1)}{x+1}>0 \Leftrightarrow \frac{4x-2}{x+1}>0$$

$4x-2=0 \Leftrightarrow 4x=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ; $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{4x-2}{x+1}$ | $+$ | N.D. | $-$ | $0$ | $+$ |

O conjunto das abcissas dos pontos do gráfico de $g$ cujas ordenadas são superiores a $-2$ é $]-\infty\,,-1[\,\cup\,\left]\dfrac{1}{2}\,,+\infty\right[$.

**56.5** $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 1-2x=\dfrac{2x-4}{x+1} \underset{x+1\neq 0}{\Leftrightarrow} (1-2x)(x+1)=2x-4 \Leftrightarrow$

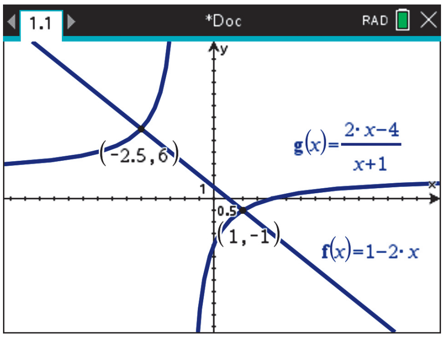
$$\Leftrightarrow -2x^2-3x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times(-2)\times 5}}{2(-2)} \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{49}}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3-7}{-4} \vee x=\frac{3+7}{-4} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{5}{2}$$

$f(1)=1-2\times 1=-1$ e $f\left(-\frac{5}{2}\right)=1-2\times\left(-\frac{5}{2}\right)=6$

Os gráficos de $f$ e de $g$ intersetam-se nos pontos de coordenadas $(1\,,-1)$ e $\left(-\frac{5}{2},6\right)$.

Recorrendo a uma calculadora para representar graficamente $f$ e $g$:




Portanto, $g(x)<f(x) \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right[\cup\left]-1\,,1\right[$ .

**PÁG. 103**

**Aplicar +**

**57.** $f(x)=2-\dfrac{3x+1}{x-2}=\dfrac{2(x-2)-(3x+1)}{x-2}=\dfrac{-x-5}{x-2}$

$$\begin{array}{rrr|l} -x & - & 5 & x-2 \\ \cline{4-4} x & - & 2 & -1 \\ \cline{1-3} & & -7 & \end{array}$$

Logo, $f(x)=\dfrac{-x-5}{x-2}=-1-\dfrac{7}{x-2}$ , pelo que o contradomínio de $f$ é $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ .

Opção correta: **(C)**

**58.1** $h(-2)=0 \Leftrightarrow \dfrac{4(-2)+a}{a(-2)+4}=0 \Leftrightarrow \dfrac{-8+a}{-2a+4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8+a=0 \wedge -2a+4\neq 0 \Leftrightarrow a=8\wedge a\neq 2$

Logo, $a=8$ .

**58.2** $h(x)=\dfrac{4x+8}{8x+4}=\dfrac{x+2}{2x+1}$

$2+h(x)=2+\dfrac{x+2}{2x+1}=\dfrac{2(2x+1)+x+2}{2x+1}=\dfrac{5x+4}{2x+1}$

$$\begin{array}{rrr|l} 5x & + & 4 & 2x+1 \\ \cline{4-4} -5x & - & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \cline{1-3} & & \frac{3}{2} & \end{array}$$

Logo, $2+h(x)=\dfrac{5x+4}{2x+1}=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\frac{3}{2}}{2x+1}$ .

Assim, o contradomínio da função definida pela expressão analítica $2+h(x)$ é $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{2}\right\}$, pelo que a equação $2+h(x)=\frac{5}{2}$ é impossível.

Opção correta: **(D)**

**58.3** $h(x)<0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2x+1}<0$

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ ; $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ .

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $h(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | ND | $+$ |

Os valores de $x$ para os quais a função $h$ é negativa são os valores pertencentes ao intervalo $\left]-2, -\frac{1}{2}\right[$ .

**58.4**

**a.** $h(x)+3x+4>0 \Leftrightarrow h(x)>-3x-4$

O conjunto-solução da inequação é o conjunto das abcissas dos pontos para os quais o gráfico da função $h$ está acima da reta $r$ . Como o domínio de $h$ é $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, o conjunto-solução é $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .

**b.** $h(x)=-3x-4 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2x+1}=-3x-4 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2x+1}+3x+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+2+(3x+4)(2x+1)}{2x+1}=0 \Leftrightarrow \frac{6x^2+12x+6}{2x+1}=0 \Leftrightarrow 6x^2+12x+6=0 \wedge 2x+1\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \wedge x\neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \wedge x\neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+1=0 \wedge x\neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-1 \wedge x\neq -\frac{1}{2}$

Assim, o ponto $A$ tem abcissa $-1$ e ordenada $y=-3(-1)-4=-1$ , ou seja, as coordenadas do ponto $A$ são $(-1, -1)$ .

**c.** $h(0)=\frac{0+2}{2\times 0+1}=2$ ; $B(0, 2)$

$A_{[AOB]}=\frac{\overline{OB}\times |x_A|}{2}=\frac{2\times 1}{2}=1$

## PÁG. 104

### Aplicar +

**59.1** Observando o gráfico de $f$, concluímos que os valores que não pertencem ao domínio e ao contradomínio de $f$ são positivos.

Como o domínio de $f$ é $\mathbb{R}\setminus\{-c\}$, concluímos que $-c>0 \Leftrightarrow c<0$ . O contradomínio de $f$ é $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, pelo que $a>0$ .

Opção correta: **(A)**

**59.2** Como o domínio de $f$ é $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, excluímos as opções (B) e (D), pois nesses casos o domínio é $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Como o contradomínio de $f$ é $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, excluímos a opção (A), pois nesse caso o contradomínio é $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

Opção correta: **(C)**

**60.1** A parte de sumo de manga existente no sumo de fruta é $\dfrac{m}{m+200}$ e a percentagem, $p$, é dada por $p(m)=\dfrac{m}{m+200}\times 100=\dfrac{100m}{m+200}$.

**60.2** Meio litro corresponde a $50$ centilitros, pelo que, a percentagem pedida é $p(50)=\dfrac{100\times 50}{50+200}=20\%$.

**60.3** $p(m)>60 \Leftrightarrow \dfrac{100m}{m+200}>60 \Leftrightarrow \dfrac{100m}{m+200}-60>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{100m-60(m+200)}{m+200}>0 \Leftrightarrow \frac{40m-1200}{m+200}>0$$

$$\underset{m+200>0}{\Leftrightarrow} 40m-1200>0 \Leftrightarrow m>300$$

$300$ centilitros, ou seja, $3$ litros.

**61.1** Se o recipiente demorar $h$ horas a encher, então em uma hora a parte do recipiente que fica enchida é $\dfrac{1}{h}$.

A primeira torneira demora $8$ horas a encher o recipiente. Logo, em uma hora enche $\dfrac{1}{8}$ do recipiente.

A segunda torneira demora $4$ horas a encher o recipiente. Logo, em uma hora enche $\dfrac{1}{4}$ do recipiente.

A terceira torneira demora $t$ horas a encher o recipiente. Logo, em uma hora enche $\dfrac{1}{t}$ do recipiente.

Assim, em uma hora, as três torneiras juntam enchem $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{t}$ do recipiente, pelo que:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{t}=\frac{1}{h(t)} \Leftrightarrow \frac{t+2t+8}{8t}=\frac{1}{h(t)} \Leftrightarrow \frac{3t+8}{8t}=\frac{1}{h(t)} \Leftrightarrow h(t)=\frac{8t}{3t+8}$$

Logo, $h(t)=\dfrac{8t}{3t+8}$.

**61.2** $h(t)=1{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{8t}{3t+8}=1{,}5 \underset{t>0\ \Rightarrow\ 3t+8\neq 0}{\Leftrightarrow} 8t=1{,}5(3t+8) \Leftrightarrow t\approx 3{,}43$

$3{,}43-3=0{,}43$ e $0{,}43\times 60\approx 26$

Aproximadamente $3$ horas e $26$ minutos.

**PÁG. 105**

**Aplicar +**

**62.1** $\dfrac{2100+45\times5\times30}{30}=295$ €

**62.2** $p(x)=\dfrac{2100+45\times5\times20+45\times5\times x}{20+x}=\dfrac{6600+225x}{20+x}$

**62.3** $p(x)=277{,}50 \Leftrightarrow \dfrac{6600+225x}{20+x}=277{,}50 \underset{x\geqslant0 \;\Rightarrow\; 20+x\neq1}{\Leftrightarrow} 6600+225x=277{,}50(20+x) \Leftrightarrow x=20$

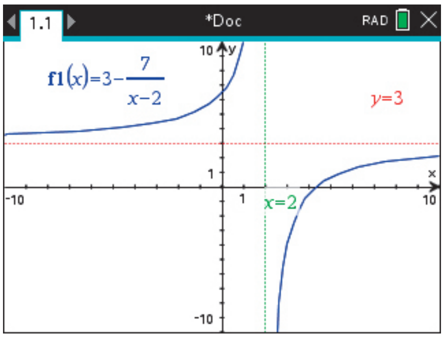
São necessários mais 20 além dos 20 iniciais.

**62.4** $p(x)>270 \Leftrightarrow \dfrac{6600+225x}{20+x}>270 \underset{x\geqslant0 \;\Rightarrow\; 20+x\neq0}{\Leftrightarrow} 6600+225x>270(20+x) \Leftrightarrow x<\dfrac{1200}{45}$

Se $x<\dfrac{1200}{45}$, então, $x+20<\dfrac{1200}{45}+20 \Leftrightarrow x+20<\dfrac{140}{3}$.

Logo, como $\dfrac{140}{3}=46,(6)$, a viagem terá, no máximo, 46 participantes.

**63.** A reta de equação $x=2$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$ e a reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f$. Podemos usar uma calculadora para representar graficamente a função $f$.




**63.1** Tendo em conta a representação gráfica de $f$, quando $x\longrightarrow2^+$, $f(x)\longrightarrow-\infty$.

Opção correta: **(A)**

**63.2** Tendo em conta a representação gráfica de $f$, quando $x\longrightarrow+\infty$, $f(x)\longrightarrow3$.

Opção correta: **(C)**

**64.**

$$\begin{array}{rr|l} 2x & +\ 1 & -x\ +\ 3 \\ \cline{3-3} -2x & +\ 6 & -2 \\ \cline{1-2} & 7 & \end{array}$$

Logo, $g(x)=\dfrac{2x+1}{3-x}=-2+\dfrac{7}{3-x}=-2-\dfrac{7}{x-3}$, pelo que a reta de equação $y=-2$ é assíntota horizontal ao gráfico de $g$ e, portanto, quando $x\longrightarrow\pm\infty$, $g(x)\longrightarrow-2$, ou seja, $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} g(x)=-2$.

Opção correta: **(B)**

## PÁG. 106

### Aplicar +

**65.1**

$$\begin{array}{rrr|l} -3x & + & 1 & x + 4 \\ \hline 3x & + & 12 & -3 \\ \hline & & 13 & \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{-3x+1}{x+4} = -3 + \dfrac{13}{x+4}$

**65.2** $x = -4$ e $y = -3$ .

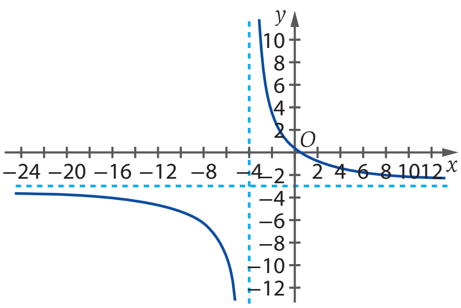
**65.3** $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3x+1}{x+4} = 0 \Leftrightarrow -3x+1 = 0 \wedge x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3} \wedge x \neq -4$

O gráfico de $f$ interseta o eixo $Ox$ no ponto de coordenadas $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$ .

$f(0) = \dfrac{-3 \times 0 + 1}{0+4} = \dfrac{1}{4}$

O gráfico de $f$ interseta o eixo $Oy$ no ponto de coordenadas $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ .

**65.4**




$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$ e $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = -\infty$ .

**65.5** $f(x) \geqslant \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-3x+1}{x+4} \geqslant \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-3x+1}{x+4} - \dfrac{7}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(-3x+1) - 7(x+4)}{2(x+4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-6x+2-7x-28}{2(x+4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-13x-26}{2(x+4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-13(x+2)}{2(x+4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x+4} \leqslant 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+4$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\dfrac{x+2}{x+4}$ | $+$ | N.D. | $-$ | $0$ | $+$ |

O conjunto-solução da condição é $]-4, -2]$ .

**66.1** $D_g=\{x\in\mathbb{R}:(x\neq 0\wedge x>1)\vee(x+3\neq 0\wedge x\leqslant 1)\}=\{x\in\mathbb{R}:x>1\vee(x\neq -3\wedge x\leqslant 1)\}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

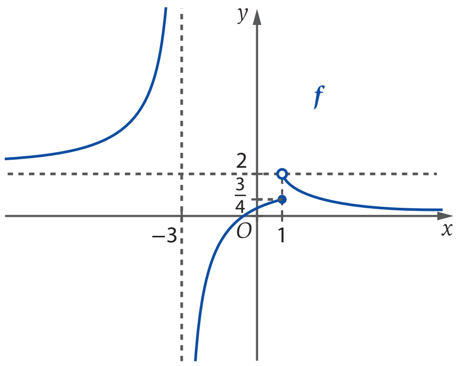
**66.2** $g(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{x}=0\wedge x>1\right)\vee\left(\frac{2x+1}{x+3}=0\wedge x\leqslant 1\right)$

$\frac{2}{x}=0\wedge x>1 \Leftrightarrow \underbrace{2=0}_{\text{imp.}}\wedge x\neq 0\wedge x>1$

$\frac{2x+1}{x+3}=0\wedge x\leqslant 1 \Leftrightarrow 2x+1=0\wedge x+3\neq 0\wedge x\leqslant 1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\wedge x\neq -3\wedge x\leqslant 1$

Logo, $g(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$, pelo que o único zero de $g$ é $-\frac{1}{2}$.

**66.3**




Assíntota vertical: $x=-3$ ; assíntotas horizontais: $y=2$ (quando $x\longrightarrow -\infty$) e $y=0$ (quando $x\longrightarrow +\infty$).

**66.4**

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | N.D. | $-$ | 0 | $+$ |

**67.** Como a reta de equação $x=-1$ é assíntota ao gráfico de $f$ e $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-a\}$, concluímos que $-a=-1 \Leftrightarrow a=1$ e, assim, $f(x)=2+\frac{c}{x+1}$.

$A_{[AOB]}=4 \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2}=4 \Leftrightarrow \overline{OA}\times\overline{OB}=8$

Ponto $A$:

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2+\frac{c}{x+1}=0 \Leftrightarrow \frac{c}{x+1}=-2 \underset{x+1\neq 0}{\Leftrightarrow} c=-2(x+1) \Leftrightarrow c=-2x-2 \Leftrightarrow x=-\frac{c+2}{2}$, pelo que $A\left(-\frac{c+2}{2},0\right)$ e, portanto, $\overline{OA}=\frac{c+2}{2}$ (Observando o gráfico, a abcissa do ponto $A$ é negativa.).

Ponto $B$:

$f(0)=2+\frac{c}{0+1}=2+c$, pelo que $B(0,c+2)$ e, portanto, $\overline{OB}=c+2$.

Logo, $\overline{OA}\times\overline{OB}=8 \Leftrightarrow \frac{c+2}{2}\times(c+2)=8 \Leftrightarrow (c+2)^2=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c+2=-4 \vee c+2=4 \Leftrightarrow c=-6 \vee c=2$

Como $c>0$, concluímos que $c=2$.

**PÁG. 107**

**Aplicar +**

**68.** $f(x) = mx + b_1$ ; $f(1) = 0 \iff m(1) + b_1 = 0 \iff b_1 = -m$ ; $f(x) = mx + (-m) = m(x-1)$ .

$g(x) = mx + b_2$ ; $g(-2) = 0 \iff m(-2) + b_2 = 0 \iff b_2 = 2m$ ; $g(x) = mx + 2m = m(x+2)$ .

**68.1** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{m(x-1)}{m(x+2)} = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$ , pelo que as retas de equação $x = -2$ e $y = 1$ são assíntotas ao gráfico de $\frac{f}{g}$ .

Opção correta: **(B)**

**68.2**

**a.** $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{m(x+2)}{m(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$

**b.**

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | N.D. | $+$ |

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) \leqslant 0 \iff x \in [-2, 1[$

**c.** $\left(\frac{g}{f}\right)(x) > 2x \iff \frac{x+2}{x-1} > 2x \iff \frac{x+2}{x-1} - 2x > 0 \iff$

$\iff \frac{x+2-2x(x-1)}{x-1} > 0 \iff \frac{-2x^2+3x+2}{x-1} > 0$

$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-2) \times 2}}{2(-2)} \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-4} \iff$

$\iff x = \frac{-3-5}{-4} \vee x = \frac{-3+5}{-4} \iff x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$

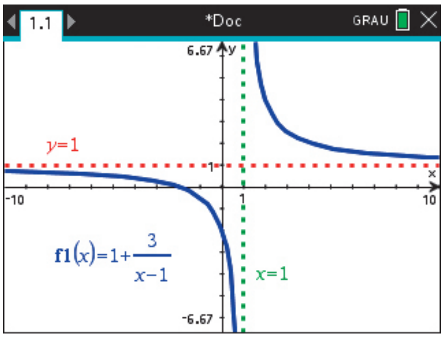
| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2+3x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{-2x^2+3x+2}{x-1}$ | $+$ | $0$ | $-$ | N.D. | $+$ | $0$ | $-$ |

O conjunto-solução da inequação é $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[ \cup ]1, 2[$ .

**d.**

$$\begin{array}{rrr|l} x & + & 2 & x - 1 \\ \cline{4-4} -x & + & 1 & 1 \\ \cline{1-3} & & 3 & \end{array}$$

Logo, $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 1 + \frac{3}{x-1}$ , pelo que a reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de $\frac{g}{f}$ e a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de $\frac{g}{f}$ . Podemos usar uma calculadora para representar graficamente a função $f$ .




Logo, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{g}{f}\right)(x) = 1$ ,

$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{g}{f}\right)(x) = -\infty$ ,

$\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{g}{f}\right)(x) = +\infty$ .

**69.1**

$$\begin{array}{rrr|l} 2x & + & a & x - 3 \\ \cline{4-4} -2x & + & 6 & 2 \\ \cline{1-3} & & a+6 & \end{array}$$

Logo, $f(x) = 2 + \frac{a+6}{x-3}$ .

O gráfico de $f$ é uma hipérbole, e como $a < -6 \Leftrightarrow a + 6 < 0$ , o seu gráfico é do tipo apresentando na primeira imagem seguinte.

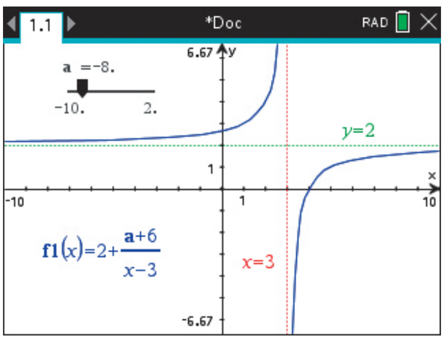



Gráfico de $f$ para $a < -6 \Leftrightarrow a + 6 < 0$ .

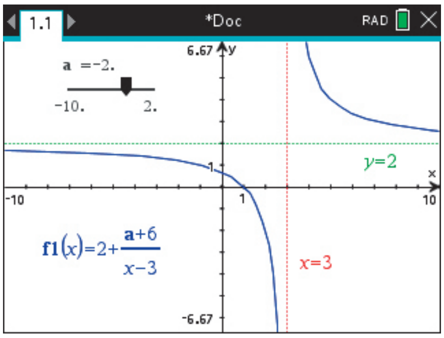



Gráfico de $f$ para $a>-6 \Leftrightarrow a+6>0$ .

A reta de equação $x=3$ é a assíntota vertical ao gráfico de $f$ . Assim, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$ .

Opção correta: **(A)**

**69.2** $f(x)=\frac{2x+a}{x-3}=2+\frac{a+6}{x-3}$

As equações das assíntotas ao gráfico de $f$ são $x=3$ e $y=2$ .

O gráfico da função $g$ é o transformado do gráfico da função $f$ pela translação associada ao vetor de coordenadas $(2,-2)$ .

As equações das assíntotas ao gráfico de $g$ são $x=3+2=5$ e $y=2-2=0$ .

Opção correta: **(C)**

**69.3** Se $a=0$ , $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ .

$$f(x)\leqslant\frac{1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{2x}{x-3}\leqslant\frac{1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{2x}{x-3}-\frac{1}{x+3}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(x+3)-(x-3)}{(x-3)(x+3)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+5x+3}{x^2-9}\leqslant 0$$

$$2x^2+5x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 2\times 3}}{2\times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm 1}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2} \vee x=-1$$

$$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x=-3 \vee x=3$$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $-1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2+5x+3$ | + | + | + | 0 | – | 0 | + | + | + |
| $x^2-9$ | + | 0 | – | – | – | – | – | 0 | + |
| $\frac{2x^2+5x+3}{(x-3)(x+3)}$ | + | ND | – | 0 | + | 0 | – | ND | + |

O conjunto-solução da condição é $\left]-3,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,3[$ .

## PÁG. 108

### Aplicar +

**70.** Tendo em conta a figura, e o domínio de $g$, $c = -1$, $a > 0$ e $b < 0$. Logo:

(A) $a \times b \times c = -a \times b > 0$

(B) $a \times c + b = b - a < 0$

(C) $b \times c + a = a - b > 0$

**(D)** $a \times b + c = a \times b - 1 < 0$

Opção correta: **(D)**

**71.1** $A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC}$

$A(-3c, f(-3c))$ e $C(c, f(c))$.

$f(-3c) = a + \dfrac{b}{-3c+c} = a - \dfrac{b}{2c}$ e $f(c) = a + \dfrac{b}{c+c} = a + \dfrac{b}{2c}$.

$\overline{AB} = c + 3c = 4c$

$\overline{BC} = f(c) - f(-3c) = a + \dfrac{b}{2c} - \left(a - \dfrac{b}{2c}\right) = 2 \times \dfrac{b}{2c} = \dfrac{b}{c}$

$A_{[ABCD]} = 4c \times \dfrac{b}{c} = 4b$

**71.2 a.** $A_{[ABCD]} = 16 \Leftrightarrow 4b = 16 \Leftrightarrow b = 4$

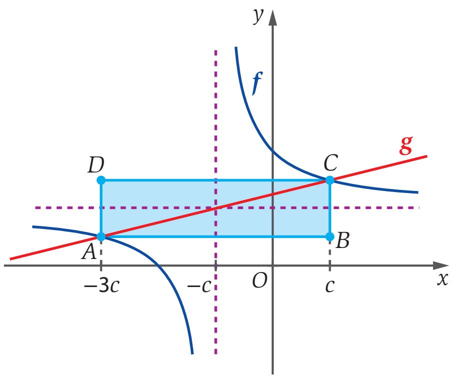
Como $f(x) \longrightarrow 2$ quando $x \longrightarrow \pm\infty$, a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f$, pelo que se conclui que $a = 2$ e portanto, $f(x) = 2 + \dfrac{4}{x+c}$.

A reta de equação $x = -c$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$. Assim, como $f(0) = 4 \Leftrightarrow 2 + \dfrac{4}{0+c} = 4 \Leftrightarrow c = 2$, conclui-se que a reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$.

**b.** Da alínea anterior, sabe-se que $a = 2$, $b = 4$ e $c = 2$, pelo que:

$f(x) = 2 + \dfrac{4}{x+2} = \dfrac{2(x+2)+4}{x+2} = \dfrac{2x+8}{x+2}$

**c.** Consideremos a seguinte figura:




Por observação da figura, conclui-se que $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in ]-3c, -c[ \cup ]c, +\infty[$. Como $c = 2$, o conjunto-solução da inequação é $]-6, -2[ \cup ]2, +\infty[$.

**Alternativamente**:

Tem-se que $A\left(-3c\,,\ a-\dfrac{b}{2c}\right)$ e $C\left(c\,,\ a+\dfrac{b}{2c}\right)$, pelo que, como $a=2$ , $b=4$ e $c=2$ ,

$A(-6\,,\ 1)$ e $C(2\,,\ 3)$ .

$m=\dfrac{3-1}{2-(-6)}=\dfrac{1}{4}$

$3=\dfrac{1}{4}\times 2+b \iff b=\dfrac{5}{2}$

$AC:\ y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{2}$ , ou seja, $g(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{2}$ .

$$f(x)<g(x) \iff \frac{2x+8}{x+2}<\frac{1}{4}x+\frac{5}{2} \iff \frac{2x+8}{x+2}<\frac{x+10}{4} \iff \frac{2x+8}{x+2}-\frac{x+10}{4}<0 \iff$$

$$\iff \frac{4(2x+8)-(x+2)(x+10)}{4(x+2)}<0 \iff \frac{-x^2-4x+12}{4(x+2)}<0$$

$$-x^2-4x+12=0 \iff x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times(-1)\times 12}}{2(-1)} \iff x=\frac{4\pm\sqrt{64}}{-2} \iff$$

$$\iff x=\frac{4-8}{-2} \vee x=\frac{4+8}{-2} \iff x=2 \vee x=-6$$

| $x$ | $-\infty$ | $-6$ | | $-2$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2-4x+12$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $4(x+2)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\dfrac{-x^2-4x+12}{4(x+2)}$ | $+$ | $0$ | $-$ | ND | $+$ | $0$ | $-$ |

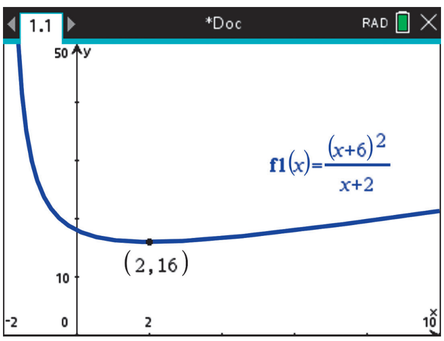
O conjunto-solução da inequação é $]-6\,,\ -2[\,\cup\,]2\,,\ +\infty[$ .

**71.3** $C(c\,,\ f(c))$ , $c>-2$ , ou seja, $C\left(c\,,\ \dfrac{2c+8}{c+2}\right)$ , $c>-2$

$A(-6\,,\ f(-6))$ , ou seja, $A(-6\,,\ 1)$ ; $B(c\,,\ 1)$ e $D\left(-6\,,\ \dfrac{2c+8}{c+2}\right)$ .

$$A_{[ABCD]}=\overline{AB}\times\overline{BC}=(c+6)\times(f(c)-1)=(c+6)\times\left(\frac{2c+8}{c+2}-1\right)=$$

$$=(c+6)\times\frac{2c+8-c-2}{c+2}=(c+6)\times\frac{c+6}{c+2}=\frac{(c+6)^2}{c+2}$$




Portanto, a área do retângulo é mínima se $c=2$ , pelo que $C(2\,,\ f(2))$ , ou seja, $C(2\,,\ 3)$ .

## PÁG. 109

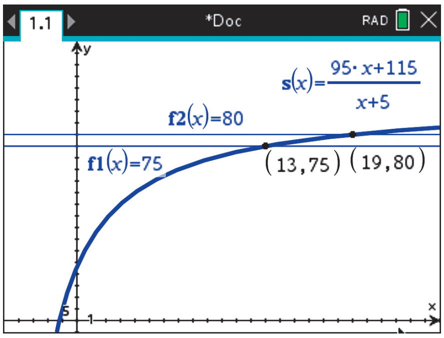
### Aplicar +

**72.1** $s(7)=\dfrac{95\times 7+115}{7+5}=65$ e $200\times 0,65=130$ , ou seja, espera-se que $130$ sejam eficazes.

**72.2** Sabendo que a eficácia dos serviços do Tiago está em $75\%$ , resolvemos a equação $s(t)=75$ e concluímos que o Tiago treinou $13$ horas.

Como a eficácia dos serviços do atleta que o Tiago vai defrontar é $80\%$ , resolvemos a equação $s(t)=80$ e concluímos que para atingir esse nível de eficácia o Tiago terá de treinar $19$ horas.

Assim, o Tiago deve treinar mais $19-13=6$ horas.




**72.3** Não. $145$ em $150$ representa uma percentagem de eficácia de, aproximadamente, $96,67\%$ $\left(\dfrac{145}{150}\times 100\approx 96,67\right)$ e a equação $s(t)=96,67$ é impossível.

$$s(t)=96,67 \Leftrightarrow \frac{95t+115}{t+5}=96,67 \underset{t\geqslant 0}{\Leftrightarrow} 95t+115=96,67(t+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 95t+115=96,67t+483,35 \Leftrightarrow -1,67t=368,35 \Leftrightarrow t=-\frac{368,35}{1,67}<0$$

**72.4**

$$\begin{array}{rr|l} 95t & +\ 115 & t\ +\ 5 \\ \cline{3-3} -95t & -\ 475 & 95 \\ \cline{1-2} & -360 & \end{array}$$

Logo, $s(t)=95-\dfrac{360}{t+5}$ , pelo que a reta de equação $y=95$ é assíntota horizontal ao gráfico de $s$ e, portanto, $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)=95$ . Conclui-se, portanto, que à medida que o tempo passa, a percentagem de eficácia do serviço do Tiago tende para $95\%$ , nunca ultrapassando este valor, dado que a função $s$ é crescente.

**73.1** $L(x)=R(x)-C(x)=50x-(30x+1000)=20x-1000$

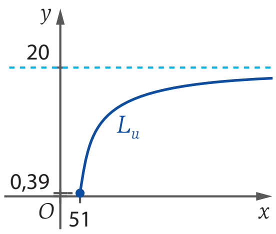
**73.2** $L(x)>0 \Leftrightarrow 20x-1000>0 \Leftrightarrow x>50$

Portanto, o número mínimo de camisas que devem ser produzidas de modo que a empresa obtenha lucro é $51$ .

**73.3** O lucro unitário de cada camisa, $L_u$, é dado por $L_u(x)=\frac{20x-1000}{x}=20-\frac{1000}{x}$, com $x \geqslant 51$.

Como o gráfico de $L_u$ tem uma assíntota horizontal de equação $y=20$, quando $x \longrightarrow +\infty$, e a função é crescente, sabemos que o valor da função (ou seja, o lucro unitário) não ultrapassará o valor $20$ euros, aproximando-se dele tanto quanto se queira.

Interpretação: à medida que o número de camisas aumenta, os $1000$ euros, constantes na expressão de $C(x)$, correspondente a custos fixos de produção, vão ficando cada vez mais diluídos pelo custo das diversas camisas, sendo cada vez menor, por camisa produzida, até se tornar residual. Assim, o lucro unitário tenderá para o valor de $50-30$, ou seja $20$ euros.




## PÁG. 110

### Aplicar +

**74.1** Seja $t$ o tempo, em segundos, ao fim do qual os dois carros se encontram.

O carro que parte de $A$ percorre $10t$ metros, pelo que $x=10t \Leftrightarrow t=\frac{x}{10}$.

O carro que parte de $B$ percorre $100-x$ metros, que à velocidade $v$ m/s durante $t$ segundos corresponde a $vt$ metros.

Assim, tem-se $vt=100-x$. Como $t=\frac{x}{10}$, tem-se $v\times\frac{x}{10}=100-x$ pelo que:

$$v\times\frac{x}{10}=100-x \Leftrightarrow v\times x=1000-10x \Leftrightarrow v=\frac{1000-10x}{x},$$

ou seja, $v(x)=\frac{1000-10x}{x}$, com $0<x<100$.

**74.2** $v(20)=\frac{1000-10\times 20}{20}=40$ m/s

**74.3** $v(x)=30 \Leftrightarrow \frac{1000-10x}{x}=30 \underset{x>0 \;\Rightarrow\; x\neq 0}{\Leftrightarrow} 1000-10x=30x \Leftrightarrow 1000=40x \Leftrightarrow x=25$

Encontram-se a $25$ m do ponto $A$.

**74.4** $\lim\limits_{x\longrightarrow 100} v(x)=0$ m/s

Significa que, se o ponto de encontro dos carros for $B$, o carro que parte desse ponto não chega a arrancar, ou seja, tem velocidade nula.

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} v(x)=+\infty$

Significa que, para que o ponto de encontro dos carros fosse o ponto $A$, o carro que parte de $B$ teria de se deslocar com velocidade infinita.

**75.1** Se a piscina demorar $m$ horas a encher, então em uma hora a parte da piscina que fica enchida é $\frac{1}{m}$.

Quatro horas e meia são $4{,}5 \times 60 = 270$ minutos. A mangueira mais antiga demora $270$ minutos a encher a piscina. Logo, em uma hora enche $\frac{1}{270}$ da piscina.

A mangueira mais recente demora $t$ horas a encher o recipiente. Logo, em uma hora enche $\frac{1}{t}$ da piscina.

Assim, em uma hora, as duas mangueiras juntas enchem $\frac{1}{270}+\frac{1}{t}$ da piscina, pelo que:

$$\frac{1}{270}+\frac{1}{t}=\frac{1}{m(t)} \Leftrightarrow \frac{t+270}{270t}=\frac{1}{m(t)} \Leftrightarrow m(t)=\frac{270t}{t+270}$$

Logo, $m(t)=\frac{270t}{t+270}$.

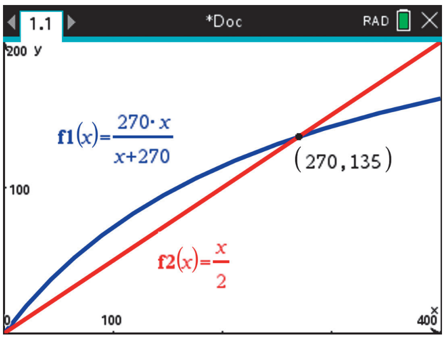
**75.2** Três horas são $3 \times 60 = 180$ minutos.

$$m(t)=180 \Leftrightarrow \frac{270t}{t+270}=180 \underset{t>0 \Rightarrow t+270 \neq 0}{\Leftrightarrow} 270t=180(t+270) \Leftrightarrow 270t=180t+48600 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90t=48600 \Leftrightarrow t=\frac{48600}{90} \Leftrightarrow t=540$$

Demoraria $540$ minutos, ou seja, $\frac{540}{60}=9$ horas.

**75.3** $m(t)>\frac{t}{2}$




$t \in ]0, 270[$

**75.4**

$$m(t)=270-\frac{270^2}{t+270}$$

$$\begin{array}{rr|l} 270t & +\ 0 & t+270 \\ \hline -270t & +\ 270^2 & 270 \\ \hline & 270^2 & \end{array}$$

Assim, a reta de equação $y=270$ é assíntota horizontal ao gráfico de $m$.

Se, hipoteticamente, o tempo que a mangueira mais recente demora a encher a piscina tendesse para $+\infty$, o tempo que as duas mangueiras juntas demorariam a encher a piscina em conjunto tenderia para $270$ minutos $\left(\lim\limits_{t \to +\infty} m(t)=270\right)$, ou seja, mesmo que a mangueira mais recente demore muito tempo a encher, sozinha, a piscina, as duas juntas encherão sempre a piscina num tempo inferior a $270$ minutos.

## PÁG. 117

### Autoavaliação

**1.** $P(x)=\left(x^2-5\right)\times(-2x+1)+(3x-1)=-2x^3+x^2+10x-5+3x-1=$

$=-2x^3+x^2+13x-6$

Opção correta: **(B)**

**2.**

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2+0x-5 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^3-x^2\phantom{+0x-5} & x^2+3x-3 \\ \cline{1-1} 3x^2+0x-5 & \\ -3x^3-3x\phantom{-5} & \\ \cline{1-1} -3x-5 & \\ 3x+3 & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

$Q(x)=x^2+3x-3$ e $R(x)=-2$ .

**3.** Uma função quártica tem até quatro zeros, podendo não ter zeros. A função representada na figura da opção (D) tem $5$ zeros, logo não pode ser quártica.

Opção correta: **(D)**

**4.** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \wedge g(x)\neq 0 \Leftrightarrow (x=-2 \vee x=0 \vee x=2)\wedge x\neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=0$

Opção correta: **(C)**

## PÁG. 118

### Autoavaliação

**5.** Comecemos por escrever uma expressão de $f(x)$ na forma $a+\frac{b}{x-c}$ .

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x-2 \\ \cline{2-2} -x+2 & 1 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

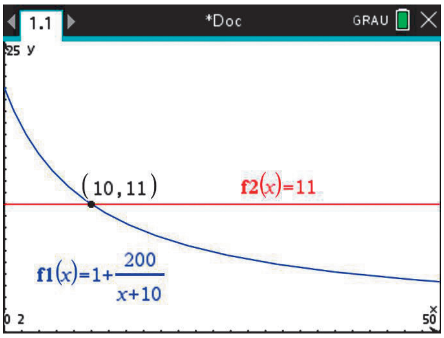
$f(x)=1+\frac{3}{x-2}$

As assíntotas ao gráfico da função $f$ são as retas de equações $x=2$ e $y=1$ , que se intersetam no ponto de coordenadas $(2\,,\,1)$ .

Opção correta: **(D)**

**6.1** $P(0)=1+\frac{200}{0+10}=21$ mg/litro

**6.2** $P(t) < 11$




São necessárias $10$ horas de tratamento.

**6.3** O tratamento não é totalmente eficaz, porque o poluente não desaparece totalmente, dado que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 1$ .

**7.** Tendo em conta que $1$ e $2$ são zeros da função, sendo $1$ um zero de multiplicidade $2$ , tem-se:
$f(x) = a(x-1)^2(x-2)$ , com $a \neq 0$ .

Como $f(0) = 4$ , tem-se: $a(0-1)^2(0-2) = 4 \Leftrightarrow a = -2$ .

Concluindo, $f(x) = -2(x-1)^2(x-2)$ .

## PÁG. 119

### Autoavaliação

**8.1** $(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

$f-g$ é positiva nas abcissas para as quais os pontos do gráfico de $f$ estão acima dos pontos do gráfico de $g$ e negativa caso contrário. Assim, obtém-se o seguinte quadro de sinal.

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(f-g)(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |

**8.2** $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$g(x) = a(x+2)(x+1)(x-3)$

$g(1) = f(1) \Leftrightarrow a(1+2)(1+1)(1-3) = 6 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x+1)(x-3)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 4 + \left(-\frac{1}{2}(x+2)(x+1)(x-3)\right) =$$

$$= 2(x+2) + \left(-\frac{1}{2}(x+2)(x+1)(x-3)\right) = (x+2)\left(2 - \frac{1}{2}(x+1)(x-3)\right) =$$

$$= (x+2)\left(-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}\right) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{7}{2}x + -x^2 + 2x + 7 = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{2}x + 7$$

**9.1**

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x^2+9x+16 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^3-x^2 \quad\quad\quad\quad & x^2-7x+16 \\ \hline -7x^2+9x+16 & \\ 7x^2+7x \quad\;\; & \\ \hline 16x+16 & \\ -16x-16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)\left(x^2-7x+16\right)$

**9.2** $f(x)=18 \Leftrightarrow x^3-6x^2+9x+16=18 \Leftrightarrow x^3-6x^2+9x-2=0$

Como o resto da divisão inteira de $f(x)$ por $x-2$ é $18$, tem-se $f(2)=18$, ou seja, $f(2)-18=0$, pelo que $f(x)-18=x^3-6x^2+9x-2$ é divisível por $x-2$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 9 & -2 \\ 2 & & 2 & -8 & 2 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-6x^2+9x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-4x+1\right)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \vee x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x^2-4x+1=0$

$x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times1}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} \vee x=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2-\sqrt{3} \vee x=2+\sqrt{3}$

O conjunto-solução da equação é $\left\{2-\sqrt{3}, 2, 2+\sqrt{3}\right\}$.

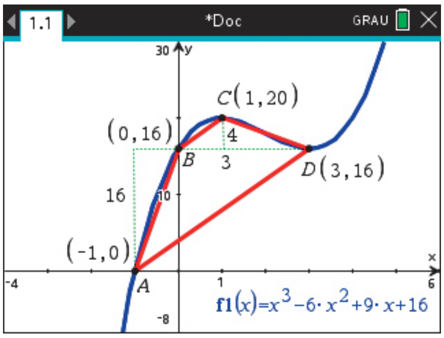
**9.3** $f(x)>16 \Leftrightarrow x^3-6x^2+9x+16>16 \Leftrightarrow x^3-6x^2+9x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-6x+9\right)>0 \Leftrightarrow x(x-3)^2>0$

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-3)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $+$ |
| $x(x-3)^2$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ |

O conjunto-solução da inequação é $]0, 3[\cup]3, +\infty[$.

**9.4**




$A(-1, 0)$ , $B(0, 16)$ , $C(1, 20)$ , $D(3, 16)$

$\overrightarrow{BC} = C - B$ tem coordenadas $(1 - 0, 20 - 16) = (1, 4)$ .

$\overrightarrow{AD} = D - A$ tem coordenadas $(3 - (-1), 16 - 0) = (4, 16)$ .

$\overrightarrow{BC}(1, 4)$ e $\overrightarrow{AD}(4, 16)$ são vetores colineares; logo, $[BC]$ e $[AD]$, não tendo a mesma reta suporte, são paralelos; e, portanto, $[ABCD]$ é um trapézio.

$$\text{A}_{[ABCD]} = \text{A}_{[ABD]} + \text{A}_{[BCD]} = \frac{3 \times 16}{2} + \frac{3 \times 4}{2} = 30$$

$$\text{A}_{[ABCD]} = 30 \iff \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \text{altura} = 30 \iff \frac{\sqrt{1^2 + 4^2} + \sqrt{4^2 + 16^2}}{2} \times \text{altura} = 30 \iff$$

$$\iff \text{altura} = \frac{30 \times 2}{\sqrt{17} + \sqrt{272}} \iff \text{altura} \approx 2{,}91$$

**Outro processo**:

A altura do trapézio $[ABCD]$ é a distância do ponto $B$ à reta $AD$ .

$\overrightarrow{AD}(4, 16)$ e $m_{AD} = \frac{16}{4} = 4$ .

$AD: \ y = 4x + b$

$0 = 4(-1) + b \iff b = 4$ ; $AD: \ y = 4x + 4$

$BC//AD$ e $m_{BC} = 4$ .

A reta perpendicular a $AD$ que passa em $B$ tem equação $y = -\frac{1}{4}x + 16$ .

Seja $B'$ o ponto de interseção da reta $AD$ com esta reta perpendicular à reta $AD$, ou seja, a projeção ortogonal de $B$ na reta $AD$ .

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + 16 \\ y = 4x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 4 = -\frac{1}{4}x + 16 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{48}{17} \\ y = 4 \times \frac{48}{17} + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{48}{17} \\ y = \frac{260}{17} \end{cases}$$

$B'\left(\frac{48}{17}, \frac{260}{17}\right)$

Conclui-se que a altura do trapézio é $\overline{BB'} = \sqrt{\left(\frac{48}{17} - 0\right)^2 + \left(\frac{260}{17} - 16\right)^2} \approx 2{,}91$ .

## PÁG. 120

### Começar a preparar o exame

**1.** Volume do tanque: $7 \times 5 \times 4 = 140 \text{ m}^3$

Área da base: $7 \times 5 = 35 \text{ m}^2$

$V(t) = 2t$

$h(t) = \frac{V(t)}{\text{A}_{\text{base}}} = \frac{2t}{35}$

$2t = 140 \Leftrightarrow t = 70$

O tanque ficará cheio ao fim de $70$ horas, pelo que o domínio da função é $[0, 70]$.

Opção correta: **(B)**

**2.** O resto da divisão inteira de $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ por $x - 1$ obtém-se substituindo $x$ por $1$ no polinómio $1^3 + 2 \times 1^2 + 3 \times 1 + 2 = 8$.

Opção correta: **(D)**

**3.1** Sendo $4$ um dos zeros de $f$, $f(x)$ é divisível por $x - 4$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ 4 & & 4 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = (x - 4)\left(x^2 + x - 2\right)$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1-3}{2} \vee x = \frac{-1+3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $1$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 4$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^2 + x - 2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

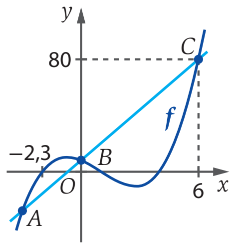
$f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2] \cup [1, 4]$

**3.2** $A(-3, -28)$ ; $B(0, 8)$

$m = \frac{-28 - 8}{-3 - 0} = 12$

Equação reduzida da reta $AB$: $y = 12x + 8$

Representado graficamente a função $f$ e a reta $AB$, obtém-se:




Conclui-se que as coordenadas de $C$ são $(6, 80)$.

**4.** Uma função cúbica tem até três zeros, pelo que a representação gráfica da opção (D) não pode ser o de uma função cúbica.

Opção correta: **(D)**

## PÁG. 121

### Começar a preparar o exame

**5.1** O resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x+2$ é $A(-2)=(-2)^4+(-2)^3-(-2)-3=15$.

**5.2**

$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3+2x^2-x-3 & x^2+x+3 \\ \cline{2-2} -x^4-x^3-3x^2 & x^2-1 \\ \cline{1-1} -x^2-x-3 & \\ x^2+x+3 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$A(x)=x^4+x^3+2x^2-x-3=(x^2+x+3)\ (x^2-1)=(x^2+x+3)\ (x-1)\ (x+1)$

$x^2+x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times3}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$ Impossível

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x+3$ | + | + | + | + | + |
| $x^2-1$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $A(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |

$A(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty, -1\right]\cup\left[1, +\infty\right[$

**6.1** O resto da divisão é um polinómio de grau inferior a $3$. Como se sabe que os coeficientes dos dois termos de maior grau do resto são simétricos e o o coeficiente do termo de maior grau é positivo, tem-se:

$R(x)=ax^2-ax+b$, com $a>0$.

Como o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x+1$ é $1$, tem-se $P(-1)=1$ e

$P(-1)=R(-1) \Leftrightarrow 1=a(-1)^2-a(-1)+b \Leftrightarrow 2a+b=1$.

Como o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x+2$ é $2$, tem-se $P(-2)=2$ e

$P(-2)=R(-2) \Leftrightarrow 2=a(-2)^2-a(-2)+b \Leftrightarrow 6a+b=2$.

Conjugando as equações $2a+b=1$ e $6a+b=2$, obtém-se:

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 6a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-2a \\ 6a+1-2a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-2\times\dfrac{1}{4} \\ a=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Conclui-se, portanto, que $R(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

**6.2** Como $P(x)$ é divisível por $x-1$ e $2$ é raiz de multiplicidade $2$ de $P(x)$, podemos definir $P(x)$ como $P(x)=a(x-1)(x-2)^2$, com $a\neq 0$.

Como o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x$ é $8$, tem-se:

$P(0)=8 \Leftrightarrow a(0-1)(0-2)^2=8 \Leftrightarrow a=-2$

$P(x)=-2(x-1)(x-2)^2$

| $x$ | $-\infty$ | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2(x-1)$ | + | 0 | – | – | – |
| $(x-2)^2$ | + | + | + | 0 | + |
| $P(x)$ | + | 0 | – | 0 | – |

$P(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty, 1[$

O conjunto-solução é $]-\infty, 1[$.

**7.1** Como a distância ao solo de um ponto da rampa situado a $x$ metros à direita da parede representada por $[AB]$ é dada por $f(x)$, tem-se:

$\overline{AB}=f(0)=0{,}0001\times 0^4-0{,}005\times 0^3+0{,}11\times 0^2-0+3{,}4=3{,}4$

e

$\overline{CD}=f(21)=0{,}0001\times 21^4-0{,}005\times 21^3+0{,}11\times 21^2-21+3{,}4=4{,}0531$.

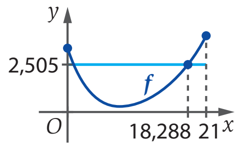
Assim, a diferença entre as alturas das paredes representadas por $[CD]$ e $[AB]$ é dada por $4{,}0531-3{,}4$, ou seja, é aproximadamente $0{,}7$ metros.

## PÁG. 122
### Começar a preparar o exame

**7.2** A distância a que os dois jovens estão do solo é igual a $f(1)$. Assim, a distância a que os jovens estão da parede representada por $[AB]$ são as soluções da equação:

$f(x)=f(1)$

Recorrendo a uma calculadora gráfica, obtém-se:




Assim, o jovem que está mais próximo da parede representada por $[CD]$ está a aproximadamente $18{,}288$ metros da parede representada por $[AB]$. Como as duas paredes estão distanciadas $21$ metros uma da outra, $d = 21 - 18{,}288 \approx 2{,}7$ m .

**8.1** Como $g$ é uma função cúbica com os zeros $2$ e $5$, sendo $2$ duplo (por observação do gráfico), tem-se:

$g(x) = a(x-2)^2(x-5)$, com $a \neq 0$ .

Como o gráfico da função $g$ interseta o eixo $Oy$ no ponto $A$ de ordenada $-20$, tem-se:

$g(0) = -20 \iff a(0-2)^2(0-5) = -20 \iff a = 1$

Conclui-se, portanto, que $g(x) = (x-2)^2(x-5) = \left(x^2 - 4x + 4\right)(x-5) =$

$$= x^3 - 5x^2 - 4x^2 + 20x + 4x - 20 = x^3 - 9x^2 + 24x - 20 \,.$$

**8.2** $g(x) = 16 \iff x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 16 \iff x^3 - 9x^2 + 24x - 36 = 0$

Como o resto da divisão inteira de $g(x)$ por $x-6$ é $16$, tem-se $g(6) = 16$, ou seja, $g(6) - 16 = 0$, pelo que $g(x) - 16$ é divisível por $x-6$. Vamos utilizar este facto para fatorizar o polinómio $x^3 - 9x^2 + 24x - 36$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-9$ | 24 | $-36$ |
| 6 | | 6 | $-18$ | 36 |
| | 1 | $-3$ | 6 | 0 |

$x^3 - 9x^2 + 24x - 36 = 0 \iff (x-6)\left(x^2 - 3x + 6\right) = 0$

$$x^2 - 3x + 6 = 0 \iff x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \iff$$

$$\iff x = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{2} \quad \text{Impossível}$$

Conclui-se que o conjunto-solução da equação é $\{6\}$ .

**8.3** $g(x) \leqslant -4 \iff x^3 - 9x^2 + 24x - 20 \leqslant -4 \iff x^3 - 9x^2 + 24x - 16 \leqslant 0$

Como o $g(1) = 4$ , $g(1) - 4 = 0$ , pelo que $g(x) - 4$ é divisível por $x - 1$ . Vamos utilizar este facto para fatorizar o polinómio $x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ .

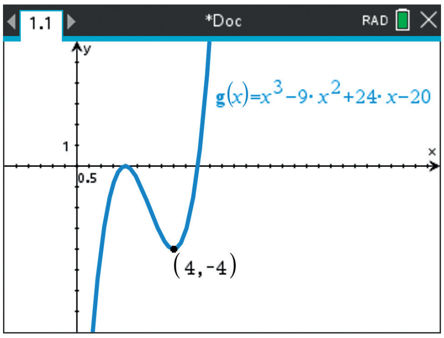
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-9$ | 24 | $-16$ |
| 1 | | 1 | $-8$ | 16 |
| | 1 | $-8$ | 16 | 0 |

$x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = (x-1)\left(x^2 - 8x + 16\right) = (x-1)(x-4)^2$

| $x$ | $-\infty$ | 1 | | 4 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-4)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $+$ |
| $x^3-9x^2+24x-16$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ |

$x^3-9x^2+24x-16 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 1] \cup \{4\}$

**8.4** A função $g(x)-k$, $k \in \mathbb{R}$, tem $3$ zeros para valores de $k$ entre o mínimo relativo de $g$, $-4$, e o seu máximo relativo, $0$ (o zero duplo de $g$).




Assim, $k \in ]-4, 0[$ .

**8.5** $A(0, -20)$ , $C(4, -4)$ (coordenadas de $C$ obtidas no item anterior).

$m = \dfrac{-4-(-20)}{4-0} = 4$ ; $AC:\ y = 4x - 20$

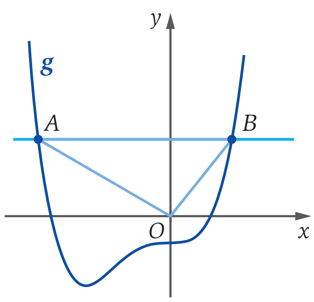
$D(5, 0)$ ; como, $0 = 4 \times 5 - 20$ , verifica-se que o ponto $D$ pertence à reta $AC$ . Assim, a área do triângulo $[ABC]$ , pode ser obtida como se segue.

$A_{[ABC]} = A_{[ABD]} - A_{[BCD]} = \dfrac{3 \times 20}{2} - \dfrac{3 \times 4}{2} = 24$

## PÁG. 123

### Começar a preparar o exame

**9.** Recorrendo a uma calculadora gráfica, obtém-se $A(-2{,}32 ; 3)$ e $B(1{,}09 ; 3)$ .




$A_{[AOB]} = \dfrac{(1{,}09 + 2{,}32) \times 3}{2} \approx 5{,}1$

**10.1** Dados os três zero da função cúbica, obtém-se:

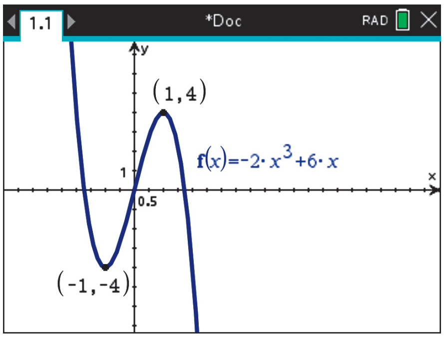
$f(x)=a(x+\sqrt{3})\,x\,(x-\sqrt{3})=ax(x^2-3)$

Como o resto da divisão inteira de $f(x)$ por $x+\frac{3}{2}$ é $-\frac{9}{4}$, tem-se $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$. Assim, obtém-se:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4} \Leftrightarrow a\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2-3\right)=-\frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{9}{8}a=-\frac{9}{4} \Leftrightarrow a=-2$$

Concluindo-se que $f(x)=-2x(x^2-3)=-2x^3+6x$.

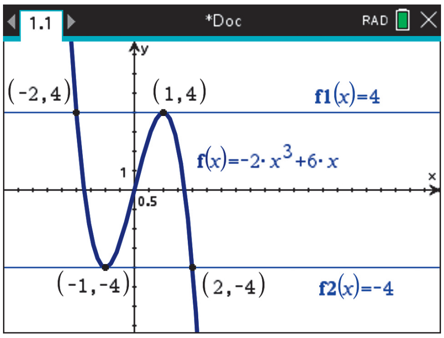
**10.2**




$B(1\,,4)$ e $D(-1\,,-4)$.

Equações que permitem determinar as abcissas dos vértices $A$ e $C$:

$f(x)=4$ e $f(x)=-4$




$A(-2\,,4)$ e $C(2\,,-4)$.

$\overrightarrow{AB}=B-A$ tem coordenadas $(1-(-2)\,,4-4)=(3\,,0)$.

$\overrightarrow{BC}=C-B$ tem coordenadas $(2-1\,,-4-4)=(1\,,-8)$.

$\overrightarrow{AD}=D-A$ tem coordenadas $(-1-(-2)\,,-4-4)=(1\,,-8)$.

$\overrightarrow{DC}=C-D$ tem coordenadas $(2-(-1)\,,-4-(-4))=(3\,,0)$.

Como $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, conclui-se que $[ABCD]$ é um paralelogramo e a sua área é dada por:

$A_{[ABCD]}=(1+2)\times(4+4)=24$

## PÁG. 124

### Começar a preparar o exame

**11.** Comecemos por escrever uma expressão de $g(x)$ na forma $a+\dfrac{b}{x-c}$.

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x+1 \\ \cline{2-2} -x-1 & 1 \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

$g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$

As assíntotas ao gráfico da função $g$ são as retas de equações $x=-1$ e $y=1$.

Logo, $P(-1\,,\,1)$.

$h(x)=f(x)+k=x^3+3x^2-9x-11+k$

$h(-1)=1 \Leftrightarrow (-1)^3+3(-1)^2-9(-1)-11+k=1 \Leftrightarrow k=1$

**12.**

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $-1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $-x-3$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $P(x)(-x-3)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$P(x)(-x-3)<0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,,\,-3[\,\cup\,]-1\,,\,2[$

Opção correta: **(C)**

**13.1** $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \wedge f(x)\neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x=-1 \vee x=1 \vee x=\frac{3}{2}\right)\wedge(x\neq -1 \wedge x\neq 1 \wedge x\neq 3) \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

Opção correta: **(A)**

**13.2** $(g-f)(x)=0 \Leftrightarrow g(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=f(x)$

Os gráficos das funções $g$ e $f$ intersetam-se em quatro pontos.

Opção correta: **(D)**

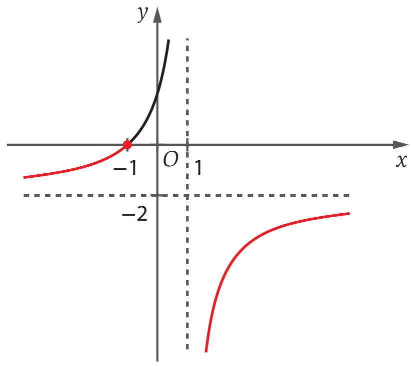
**13.3** A função $f\times g$ é negativa nos intervalos em que as funções $f$ e $g$ têm sinais contrários.

Opção correta: **(B)**

**PÁG. 125**

**Começar a preparar o exame**

**14.1**




$f(x) \leqslant 0 \iff x \in ]-\infty, -1] \cup ]1, +\infty[$

Opção correta: **(D)**

**14.2** $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

**14.3** Tendo em conta as equações das assíntotas ao gráfico de $f$, $x=1$ e $y=-2$, uma expressão analítica de $f$ pode ser escrita na seguinte forma:

$f(x) = -2 + \dfrac{b}{x-1}$, com $b \in \mathbb{R}$.

Como $f(-1)=0$, tem-se:

$f(-1)=0 \iff -2 + \dfrac{b}{-1-1} = 0 \iff b = -4$

Conclui-se, portanto, que $f(x) = -2 - \dfrac{4}{x-1}$.

**15.** Tendo em conta as equações das assíntotas ao gráfico de $f$, $x=2$ e $y=-1$, uma expressão analítica de $f$ pode ser escrita na seguinte forma:

$f(x) = 2 + \dfrac{b}{x+3}$

Como o ponto de coordenadas $(0, 4)$ pertence ao gráfico de $f$, tem-se $f(0)=4$ e, portanto,

$f(0)=4 \iff 2 + \dfrac{b}{0+3} = 4 \iff b = 6$.

Assim, conclui-se que $f(x) = 2 + \dfrac{6}{x+3}$.

Opção correta: **(D)**

**16.1** Para que $f(x)=k$ seja impossível, $k$ tem de ser igual a $-1$, pois o contradomínio de $f$ é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, dado que $y=-1$ é uma equação da assíntota horizontal ao gráfico de $f$.

**16.2** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ (À medida que o valor de $x$ aumenta, tanto quanto se queira, o gráfico da função $f$ aproxima-se, também tanto quanto se queira, da reta de equação $y=-1$, a sua assíntota horizontal.)

**17.** $r:\ y=4$ (assíntota horizontal) e $s:\ x=-2$ (assíntota vertical).

Como $C$ é a interseção das retas $r$ e $s$, tem coordenadas $(-2\,,\,4)$.

Como $D$ pertence à reta $r$ e ao eixo $Oy$, tem coordenadas $(0\,,\,4)$.

Como $f(0)=4-\frac{4}{0+2}=2$, $A$ tem coordenadas $(0\,,\,2)$.

O ponto $B$ tem ordenada nula, sendo a sua abcissa o zero de $f$:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 4-\frac{4}{x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{4(x+2)-4}{x+2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+4}{x+2}=0 \Leftrightarrow 4x+4=0 \wedge x+2\neq 0 \Leftrightarrow x=-1$$

Logo, $B$ tem coordenadas $(-1\,,\,0)$.

Designemos por $E$ o ponto de interseção da reta $s$ com o eixo $Ox$. O ponto $E$ tem coordenadas $(-2\,,\,0)$.

A área do quadrilátero $[ABCD]$ obtém-se subtraindo à área do retângulo $[OECD]$ as áreas dos triângulos $[OAB]$ e $[BCE]$, obtendo-se, portanto: $2\times 4-\frac{1\times 2}{2}-\frac{1\times 4}{2}=5$.