7. Cálculo diferencial

PÁG. 132

Diagnóstico

1.1 $m = \dfrac{-3-5}{-2-2} = 2$

1.2 $5 = 2 \times 2 + b \iff b = 1$; $f(x) = 2x + 1$.

2.1 0 e $\dfrac{5}{2}$; no intervalo $]1, 4[$, o gráfico da função f é um segmento de reta, cujo declive é $\dfrac{2-(-2)}{4-1} = \dfrac{4}{3}$ e a ordenada na origem é $2 = \dfrac{4}{3} \times 4 + b \iff b = -\dfrac{10}{3}$, pelo que, neste intervalo, $f(x) = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{10}{3}$. O zero neste intervalo é $\dfrac{4}{3}x - \dfrac{10}{3} = 0 \iff 4x = 10 \iff x = \dfrac{5}{2}$.

2.2

x	-4		0		1		$\frac{5}{2}$		4
$f(x)$	-2	$-$	0	N.D.	1	$-$	0	$+$	N.D.

3.1 $D_f = [-3, 6]$ e $D'_f = [-2, 2]$.

3.2 -2 , 1 , 3 e 5 .

3.3

x	-3		-2		1		3		5		6
$f(x)$	-2	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	-1

3.4

x	-3		-2		0		2		3		4		6
Monotonia de f	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

A função é crescente em $[-3, -2]$, $[0, 2]$ e $[3, 4]$.

A função é decrescente em $[-2, 0]$, $[2, 3]$ e $[4, 6]$.

3.5 Mínimos relativos: -2 em $x = -3$ e em $x = 0$; 0 em $x = 3$; -1 em $x = 6$.

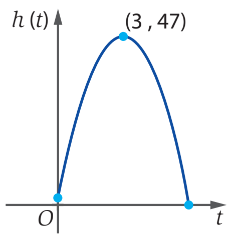
Máximos relativos: 0 em $x = -2$; 2 em $x = 2$; 1 em $x = 4$.

3.6 Mínimo absoluto: -2 . Máximo absoluto: 2 .

PÁG. 133

Tarefa 1

1. Por exemplo, graficamente, pode-se verificar que 3 é a abcissa do vértice da parábola que representa graficamente a função h.



2. A variação da altura nos primeiros 3 segundos é $h(3)-h(0)=47-2=45$ e o quociente entre essa variação e a duração do intervalo de tempo é $\frac{45}{3-0}=15$ m/s. Significa que, nos primeiros 3 segundos, a altura do foguete variou, em média, 15 metros por segundo.

PÁG. 136

Aplicar

4.1

a. $\text{tmv}_{f,\,[-1,\,2]}=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{-4-5}{3}=-3$

b. $\text{tmv}_{f,\,[1,\,3]}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{-3-(-3)}{2}=0$

c. $\text{tmv}_{f,\,[2,\,5]}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5-(-4)}{3}=3$

4.2 $\text{tmv}_{f,\,[4,\,k]}=5 \Leftrightarrow \frac{f(k)-f(4)}{k-4}=5 \Leftrightarrow \frac{k^2-4k-0}{k-4}=5 \Leftrightarrow \frac{k(k-4)}{k-4}=5 \underset{k>4\ \Rightarrow\ k\neq 4}{\Leftrightarrow} k=5$

5. $\text{tmv}_{g,\,[-a,\,a]}>0 \Leftrightarrow \frac{g(a)-g(-a)}{a-(-a)}>0 \Leftrightarrow \frac{g(a)-g(-a)}{2a}>0 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} g(a)-g(-a)>0$

(A) $g(a)-g(-a)=-a-[-(-a)]=-2a<0$ porque $a>0$.

(B) $g(a)-g(-a)=a^2-(-a)^2=0$

(C) $g(a)-g(-a)=a^3-(-a)^3=2a^3>0$ porque $a>0$.

(D) $g(a)-g(-a)=-a^4-\left[-(-a)^4\right]=0$

Opção correta: **(C)**

6.

I. Se f é uma função crescente em $[a\,,\,b]$, com $a\,,\,b\in\mathbb{R}$, então $f(a)<f(b)$, ou seja, $f(b)-f(a)>0$.

Assim, $\text{tmv}_{f,\,[a,\,b]}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$, pois $b-a>0$ porque $a<b$.

A afirmação é verdadeira.

II. A afirmação é falsa. Para o justificar, basta considerar $f(x)=x^2$ e o intervalo $[-1\,,\,1]$.

Tem-se que $\text{tmv}_{f,\,[-1\,,\,1]}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{1-1}{2}=0$ e f não é constante em $[-1\,,\,1]$.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 137

Aplicar

7.1 $\text{tmv}_{g,\,[1\,,\,3]}=m_r$ porque a reta r é secante ao gráfico de g nos pontos A, de abcissa 1, e B, de abcissa 3.

Como a reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa -5, $m_r=\dfrac{4-0}{3-(-5)}=\dfrac{1}{2}$.

$\text{tmv}_{g,\,[3\,,\,4]}=m_s$ porque a reta s é secante ao gráfico de g nos pontos B, de abcissa 3, e C, de abcissa 4.

Como a reta s interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 10, $m_s=\dfrac{4-10}{3-0}=-2$.

7.2 As retas r e s são perpendiculares pois $m_r\times m_s=\dfrac{1}{2}\times(-2)=-1$.

7.3 $\text{tmv}_{g,\,[1\,,\,3]}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{g(3)-g(1)}{3-1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow g(3)-g(1)=1\Leftrightarrow g(1)=g(3)-1$

$\text{tmv}_{g,\,[3\,,\,4]}=-2\Leftrightarrow\dfrac{g(4)-g(3)}{4-3}=-2\Leftrightarrow g(4)-g(3)=-2\Leftrightarrow g(4)=g(3)-2$

$\text{tmv}_{g,\,[1\,,\,4]}=\dfrac{g(4)-g(1)}{4-1}=\dfrac{g(3)-2-(g(3)-1)}{3}=-\dfrac{1}{3}$

8. Como o gráfico da função f é uma reta e os gráficos de f e g intersetam-se nos pontos de abcissas -2 e 4, o valor de $\text{tmv}_{g,\,[-2\,,\,4]}$ é igual ao declive da reta que é o gráfico da função f.

A reta de equação $2x+y=3$ tem declive -2. Logo, $\text{tmv}_{g,\,[-2\,,\,4]}=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}$.

Opção correta: **(C)**

9.1 $\text{tmv}_{a,\,[0\,,\,5]}=\dfrac{a(5)-a(0)}{5-0}=\dfrac{150-0}{5}=30\text{ m/s}$

9.2 $\text{tmv}_{a,\,[0\,,\,t_0]}=6\text{ m/s}\Leftrightarrow\dfrac{a(t_0)-a(0)}{t_0-0}=6\Leftrightarrow\dfrac{t_0^3+t_0^2-0}{t_0}=6\underset{t_0\neq 0}{\Leftrightarrow}t_0^2+t_0=6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_0^2+t_0-6=0\Leftrightarrow t_0=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1}\Leftrightarrow t_0=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_0=\dfrac{-1-5}{2}\vee t_0=\dfrac{-1+5}{2}\Leftrightarrow\underbrace{t_0=-3}_{\text{imp.}}\vee t_0=2$

PÁG. 138
Tarefa 3

1.

	A	B	C	D
1		f(x)=x^2-2		
2	1	-1	Intervalo	tmv
3	1,0001	-0,99979999	[1;2]	3
4	1,001	-0,997999	[1;1,5]	2,5
5	1,01	-0,9799	[1;1,1]	2,1
6	1,1	-0,79	[1;1,01]	2,01
7	1,5	0,25	[1;1,001]	2,001
8	2	2	[1;1,0001]	2,0001

2. Parece tender para 2 .

PÁG. 140
Tarefa 4

1. $f'(2)=9$

2. $f'(-2)=9$

3. O valor da derivada de uma função num ponto é igual ao declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto.

PÁG. 148
Aplicar

14.1 Para $x \neq 1$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{1}{2}x+1-\left(\frac{1}{2}\times 1+1\right)}{x-1}=\frac{\frac{1}{2}x+1-\frac{3}{2}}{x-1}=\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x-1}=$$

$$=\frac{\frac{x-1}{2}}{x-1}=\frac{x-1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

14.2 Para $x \neq 2$,

$$\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\frac{3x^2-2-(3\times 2^2-2)}{x-2}=\frac{3x^2-2-10}{x-2}=\frac{3x^2-12}{x-2}=$$

$$=\frac{3(x^2-4)}{x-2}=\frac{3(x-2)(x+2)}{x-2}=3(x+2)$$

$$g'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(3(x+2))=12$$

14.3 Para $x \neq -3$,

$$\frac{h(x)-h(-3)}{x-(-3)} = \frac{-2x^3+3-\left(-2(-3)^3+3\right)}{x+3} =$$
$$= \frac{-2x^3+3-57}{x+3} = \frac{-2x^3-54}{x+3} =$$
$$= \frac{(x+3)\left(-2x^2+6x-18\right)}{x+3} =$$
$$= -2x^2+6x-18$$

	-2	0	0	-54
-3		6	-18	54
	-2	6	-18	0

Logo, $-2x^3-54=(x+3)\left(-2x^2+6x-18\right)$.

$$h'(-3) = \lim_{x \to -3} \frac{h(x)-h(-3)}{x-(-3)} = \lim_{x \to -3} \left(-2x^2+6x-18\right) = -54$$

14.4 Para $x \neq 1$,

$$\frac{i(x)-i(1)}{x-1} = \frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{1}}{x-1} = \frac{\frac{3}{x}-3}{x-1} = \frac{\frac{3-3x}{x}}{x-1} = \frac{3-3x}{x(x-1)} = \frac{-3(x-1)}{x(x-1)} = \frac{-3}{x}$$

$$i'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{i(x)-i(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{-3}{x}\right) = -3$$

14.5 Para $x \neq -2$,

$$\frac{j(x)-j(-2)}{x-(-2)} = \frac{\frac{x-3}{x+1}-\frac{-2-3}{-2+1}}{x+2} = \frac{\frac{x-3}{x+1}-5}{x+2} = \frac{-4x-8}{(x+1)(x+2)} = \frac{-4(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{-4}{x+1}$$

$$j'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{j(x)-j(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{-4}{x+1} = 4$$

14.6 Para $x \neq 3$,

$$\frac{k(x)-k(3)}{x-3} = \frac{2x^3-7x^2-6x+1-(-26)}{x-3} =$$
$$= \frac{2x^3-7x^2-6x+27}{x-3} =$$
$$= \frac{(x-3)\left(2x^2-x-9\right)}{x-3} = 2x^2-x-9$$

	2	-7	-6	27
3		6	-3	-27
	2	-1	-9	0

Logo, $2x^3-7x^2-6x+27=(x-3)\left(2x^2-x-9\right)$.

$$k'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{k(x)-k(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \left(2x^2-x-9\right) = 6$$

15. $h'(1)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1.

Os pontos $(1, h(1))$ e $(0, -1)$ pertencem a r, pelo que o declive de r é $\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$.

Logo, $h'(1) = 1$.

16.1 $\text{tmv}_{g,[-2,1]} = -1$ (corresponde ao declive da reta de equação $y=-x+1$.)

16.2 $g'(-2) = g'(1) = -1$ (corresponde ao declive da reta de equação $y=-x+1$.)

17.1 O declive da reta r é $\frac{0-4}{-2-0}=2$ e a sua ordenada na origem é 4 . Assim, uma equação da reta r é $y=2x+4 \Leftrightarrow y-2x=4$.

17.2 Como a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 , o ponto de coordenadas $(-1, f(-1))$ pertence à reta r , pelo que $f(-1)=2(-1)+4=2$.

17.3 $f'(-1)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 , logo, $f'(-1)=2$.

PÁG. 149

Aplicar

18.1 $f'(1)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 , ou seja, $\frac{0-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1-0}=\frac{2}{3}$.

18.2

(A) $\underbrace{f'(-1)}_{<0}\times\underbrace{f'(0)}_{>0}<0$

(B) $\underbrace{f'(-1)}_{<0}-\underbrace{f'(0)}_{>0}<0$

(C) $\underbrace{f'(-1)}_{<0}+\underbrace{f'(2)}_{<0}<0$

(D) $\underbrace{f'(-1)}_{<0}\times\underbrace{f'(2)}_{<0}>0$

Opção correta: **(C)**

19. Como a reta é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 2 , que tem coordenadas $(2, 0)$, conclui-se que $g(2)=0$ e, portanto, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$.

Assim, o valor de $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}$ é o declive da reta r , ou seja, $-\frac{2}{3}$.

20. Os pontos $(k, g(k))$ e $(0, 15)$ pertencem a r , pelo que o declive de r é $\frac{g(k)-15}{k-0}=\frac{5-15}{k}=-\frac{10}{k}$. Logo, $g'(k)=-\frac{10}{k}$.

Por outro lado, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x+k)-g(k)}{x}=g'(k)$.

Portanto, $8-2k=-\frac{10}{k} \Leftrightarrow 8-2k+\frac{10}{k}=0 \Leftrightarrow \frac{k(8-2k)+10}{k}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-2k^2+8k+10}{k}=0 \underset{k>0\Rightarrow k\neq 0}{\Leftrightarrow} -2k^2+8k+10=0 \Leftrightarrow -k^2+4k+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times(-1)\times 5}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow k=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{-4-6}{-2}\vee k=\frac{-4+6}{-2} \Leftrightarrow k=5\vee k=-1 \underset{k>0}{\Leftrightarrow} k=5$

PÁG. 150
Tarefa 5

4. À função derivada de f, pois a cada valor de x, do domínio de f, faz corresponder o declive da reta tangente ao gráfico de f nesse ponto, ou seja, a derivada de f nesse ponto.

5. $f'(x)=2x$

PÁG. 155
Aplicar

21.1 $a'(x)=(4)'=0$

21.2 $f'(x)=(2x)'=2$

21.3 $g'(x)=\left(-4x^2\right)'=2\times(-4)x^{2-1}=-8x$

21.4 $h'(x)=\left(2x^3\right)'=3\times 2x^{3-1}=6x^2$

22. $f'(x)=\left(kx^2\right)'=2\times kx^{2-1}=2kx$; $f'(-1)=-2k$.

$f'(-1)=\text{tg}\,(120°)=-\sqrt{3}$

$-2k=-\sqrt{3} \iff k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Opção correta: **(D)**

23. $g(x)=ax^2$; $g(-3)=3 \iff a(-3)^2=3 \iff a=\dfrac{1}{3}$; $g(x)=\dfrac{1}{3}x^2$.

$g'(x)=2\times\dfrac{1}{3}x^{2-1}=\dfrac{2}{3}x$

Opção correta: **(C)**

PÁG. 160
Aplicar

27.1 $a'(x)=(\pi)'=0$

27.2 $b'(x)=(4-7x)'=(4)'-(7x)'=0-7=-7$

27.3 $c'(x)=(3x)'=3$

27.4 $d'(x)=\left(x^2-4\right)'=\left(x^2\right)'-(4)'=2x-0=2x$

27.5 $e'(x)=\left(-3x^2+9x+3\right)'=\left(-3x^2\right)'+(9x)'+(3)'=-6x+9+0=-6x+9$

27.6 $f'(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^3+3x\right)'=\left(\dfrac{1}{2}x^3\right)'+(3x)'=\dfrac{3}{2}x^2+3$

27.7 $g'(x)=\left(3x^3+8x^2-x+1\right)'=\left(3x^3\right)'+\left(8x^2\right)'-(x)'+(1)'=9x^2+16x-1+0=9x^2+16x-1$

27.8 $h'(x)=\left(-3x^4+2x\right)'=\left(-3x^4\right)'+(2x)'=-12x^3+2$

27.9 $i'(x)=\left(x\left(3x^3-2x\right)\right)'=(x)'\times\left(3x^3-2x\right)+x\times\left(3x^3-2x\right)'=$

$=1\times\left(3x^3-2x\right)+x\times\left(\left(3x^3\right)'-(2x)'\right)=3x^3-2x+x\times\left(9x^2-2\right)=$

$=3x^3-2x+9x^3-2x=12x^3-4x$

27.10 $j'(x)=\left(-\dfrac{3}{x}\right)'=-\dfrac{(3)'\times x-3\times(x)'}{x^2}=-\dfrac{0\times x-3\times 1}{x^2}=\dfrac{3}{x^2}$

27.11 $k'(x)=\left(\dfrac{3}{x^2}\right)'=\dfrac{(3)'\times x^2-3\times\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=\dfrac{0\times x^2-3\times 2x}{x^4}=-\dfrac{6}{x^3}$

27.12 $l'(x)=\left(\dfrac{2x}{x-2}\right)'=\dfrac{(2x)'\times(x-2)-2x\times(x-2)'}{(x-2)^2}=\dfrac{2\times(x-2)-2x\times\left((x)'-(2)'\right)}{(x-2)^2}=$

$=\dfrac{2x-4-2x\times(1-0)}{(x-2)^2}=\dfrac{2x-4-2x}{(x-2)^2}=-\dfrac{4}{(x-2)^2}$

27.13 $m'(x)=\left(\dfrac{x-2}{4-3x}\right)'=\dfrac{(x-2)'\times(4-3x)-(x-2)\times(4-3x)'}{(4-3x)^2}=$

$=\dfrac{\left((x)'-(2)'\right)\times(4-3x)-(x-2)\times\left((4)'-(3x)'\right)}{(4-3x)^2}=$

$=\dfrac{(1-0)\times(4-3x)-(x-2)\times(0-3)}{(4-3x)^2}=\dfrac{4-3x+3(x-2)}{(4-3x)^2}=-\dfrac{2}{(4-3x)^2}$

27.14 $n'(x)=\left(\dfrac{x^2-2}{x+3}\right)'=\dfrac{\left(x^2-2\right)'\times(x+3)-\left(x^2-2\right)\times(x+3)'}{(x+3)^2}=$

$=\dfrac{\left(\left(x^2\right)'-(2)'\right)\times(x+3)-\left(x^2-2\right)\times\left((x)'+(3)'\right)}{(x+3)^2}=$

$=\dfrac{(2x-0)\times(x+3)-\left(x^2-2\right)\times(1+0)}{(x+3)^2}=\dfrac{2x^2+6x-\left(x^2-2\right)}{(x+3)^2}=\dfrac{x^2+6x+2}{(x+3)^2}$

27.15 $o'(x)=\left(\left(x^2+3x\right)^2\right)'=2\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x\right)'=2\left(x^2+3x\right)\left(\left(x^2\right)'+(3x)'\right)=$

$=2\left(x^2+3x\right)(2x+3)=4x^3+18x^2+18x$

27.16 $p'(x)=\left(3(3-7x)^4\right)'=$

$=3\times 4(3-7x)^{4-1}(3-7x)'=12(3-7x)^3\left((3)'-(7x)'\right)=$

$=12(3-7x)^3(0-7)=-84(3-7x)^3$

PÁG. 161

Aplicar

28.1 $h(0)=1{,}5$ m

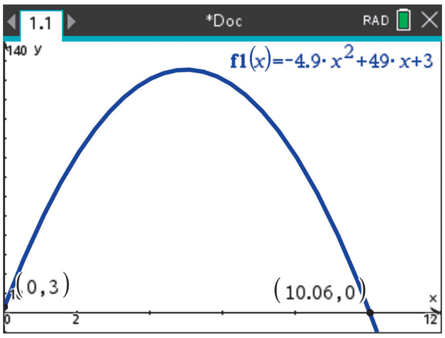
28.2 $h(t)=-5t^2+15t+1{,}5=-5(t-1{,}5)^2+12{,}75$

$12{,}75$ m no instante $t=1{,}5$ s .

28.3 $h'(t)=-10t+15$ e $h'(1{,}5)=0$ m/s .

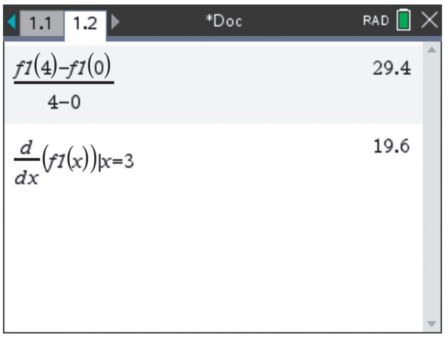
29.1 $h(0)=3$ m

29.2 10,06 s

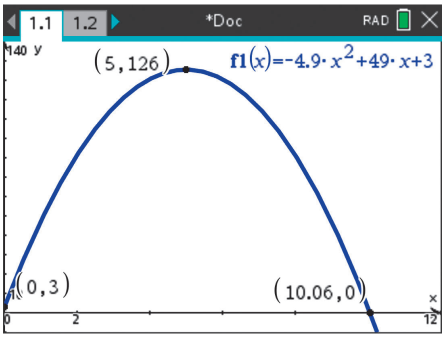


29.3 29,4 m/s

29.4 19,6 m/s



29.5 A altura máxima atingida pelo projétil foi de 126 metros, ao fim de 5 segundos.



30.1 $f'(x)=4x$, $f(3)=2\times 3^2=18$ e $f'(3)=4\times 3=12$.

a. $(f+g)'(3)=f'(3)+g'(3)=12+2=14$

b. $(f\times g)'(3)=f'(3)\times g(3)+f(3)\times g'(3)=12\times(-4)+18\times 2=-12$

c. $\left(\frac{f}{g}\right)'(3)=\frac{f'(3)\times g(3)-f(3)\times g'(3)}{(g(3))^2}=\frac{12\times(-4)-18\times 2}{(-4)^2}=-\frac{21}{4}$

30.2 $h'(x)=((3x-4)g(x))'=(3x-4)'g(x)+(3x-4)g'(x)=3g(x)+(3x-4)g'(x)$

Sendo t a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 3 , tem-se que $m_t=h'(3)=3g(3)+(3\times 3-4)g'(3)=3(-4)+5\times 2=-2$, e, portanto, $t: y=-2x+b$.

Como $h(3)=(3\times 3-4)\,g(3)=5(-4)=-20$, o ponto de coordenadas $(3, -20)$ pertence à reta t , pelo que $-20=-2\times 3+b \Leftrightarrow b=-14$.

Logo, a equação reduzida da reta t é $y=-2x-14$.

PÁG. 168

Aplicar

34. g é diferenciável em $\mathbb{R}$, $g'(x)>0$ em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $g'(0)=0$, pelo que g é crescente em $\mathbb{R}$ e a reta tangente ao gráfico de g em $x=0$ tem declive nulo.

Opção correta: **(A)**

35.1 $D_f=\mathbb{R}$; $f'(x)=(x+3)'=1$

Como $f'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, conclui-se que f é crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos.

35.2 $D_g=\mathbb{R}$; $g'(x)=\left(x^2-8x+15\right)'=2x-8$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
Monotonia de g	↘	Mín.	↗

g é decrescente em $]-\infty, 4]$ e é crescente em $[4, +\infty[$.

g tem mínimo absoluto igual a $g(4)=4^2-8\times 4+15=-1$ em $x=4$.

35.3 $D_h=\mathbb{R}$; $h'(x)=\left(x^3-3x^2+3x+4\right)'=3x^2-6x+3$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Como $h'(x)\geqslant 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, conclui-se que h é crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos.

35.4 $D_i = \mathbb{R}$; $i'(x) = \left(\dfrac{x^4}{2} - 16x\right)' = 2x^3 - 16$

$i'(x) = 0 \iff 2x^3 - 16 = 0 \iff x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$i'(x)$	$-$	0	$+$
Monotonia de i	↘	Mín.	↗

i é decrescente em $]-\infty, 2]$ e é crescente em $[2, +\infty[$.

i tem mínimo absoluto igual a $i(2) = \dfrac{2^4}{2} - 16 \times 2 = -24$ em $x = 2$.

35.5 $D_j = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$j'(x) = \left(\frac{x-2}{x+3}\right)' = \frac{(x-2)'(x+3) - (x-2)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{x+3-(x-2)}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2}$$

Como $j'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, conclui-se que j é crescente em $]-\infty, -3[$ e em $]-3, +\infty[$ e não tem extremos.

35.6 $D_k = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$k'(x) = \left(\frac{x^2-3}{x+2}\right)' = \frac{(x^2-3)'(x+2) - (x^2-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+2) - (x^2-3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

$$k'(x) = 0 \iff \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} = 0 \iff x^2+4x+3 = 0 \wedge (x+2)^2 \neq 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \wedge x + 2 \neq 0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} \wedge x \neq -2 \iff$$

$$\iff x = \frac{-4-2}{2} \vee x = \frac{-4+2}{2} \wedge x \neq -2 \iff x = -3 \vee x = -1 \wedge x \neq -2$$

x	$-\infty$	-3		-2		-1	$+\infty$
x^2+4x+3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$k'(x)$	$+$	0	$-$	N.D.	$-$	0	$+$
Monotonia de k	↗	Máx.	↘	N.D.	↘	Mín.	↗

k é decrescente em $[-3, -2[$ e em $]-2, -1]$, e é crescente em $]-\infty, -3]$ e em $[-1, +\infty[$.

k tem máximo relativo igual a $k(-3) = \dfrac{(-3)^2 - 3}{-3+2} = -6$ em $x = -3$, e tem mínimo relativo igual a $k(-1) = \dfrac{(-1)^2 - 3}{-1+2} = -2$, em $x = -1$.

35.7 $D_l = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$l'(x) = \left(\frac{x^3}{x+1}\right)' = \frac{(x^3)'(x+1) - x^3(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$$

$$l'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2 = 0 \wedge (x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(2x+3) = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 2x+3 = 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{2} \wedge x \neq -1$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		0	$+\infty$
$x^2(2x+3)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$l'(x)$	$-$	0	$+$	N.D.	$+$	0	$+$
Monotonia de l	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	N.D.	$\nearrow$		$\nearrow$

l é decrescente em $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ e é crescente em $\left[-\frac{3}{2}, -1\right[$ e em $]-1, +\infty[$.

l tem mínimo relativo igual a $l\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{-\frac{3}{2}+1} = \frac{27}{4}$, em $x = -\frac{3}{2}$.

35.8 $D_m = \{x \in \mathbb{R} : x^2+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$

$$m'(x) = \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2-x+1)'(x^2+1) - (x^2-x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(2x-1)(x^2+1) - (x^2-x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-x^2-1-2x^3+2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

$$m'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-1 = 0 \wedge \underbrace{(x^2+1)^2 \neq 0}_{\text{Cond. Universal em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x^2+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$m'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de m	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

m é decrescente em $[-1, 1]$ e é crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$.

m tem mínimo relativo igual a $m(1)=\frac{1^2-1+1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$, em $x=1$, e tem máximo relativo igual a $m(-1)=\frac{(-1)^2-(-1)+1}{(-1)^2+1}=\frac{3}{2}$, em $x=-1$.

36.1 $g'(x)=\left((2x+1)^2(x-1)\right)'=\left((2x+1)^2\right)'(x-1)+(2x+1)^2(x-1)'=$

$$=2(2x+1)(2x+1)'(x-1)+(2x+1)^2=2(2x+1)\,2(x-1)+(2x+1)^2=$$

$$=4\left(2x^2-x-1\right)+\left(4x^2+4x+1\right)=12x^2-3=3\left(4x^2-1\right)$$

36.2 $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3\left(4x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow 4x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \vee x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
Monotonia de g	↗	Máx.	↘	Mín.	↗

A função g é decrescente em $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ e é crescente em $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Tem mínimo relativo igual a $g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2\times\frac{1}{2}+1\right)^2\left(\frac{1}{2}-1\right)=-2$, em $x=\frac{1}{2}$, e tem máximo relativo igual a $g\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)^2\left(-\frac{1}{2}-1\right)=0$, em $x=-\frac{1}{2}$.

PÁG. 169

Aplicar

37.1 $\lim\limits_{k\to 0}\frac{h(k-2)-h(-2)}{k}=h'(-2)=-(-2)^3-(-2)^2+10(-2)-8=-24$

37.2 $h'(x)=0 \Leftrightarrow -x^3-x^2+10x-8=0$

Como $h(-4)$ é extremo de h e h é diferenciável em $\mathbb{R}$, pelo teorema de Fermat, $h'(4)=0$.

	-1	-1	10	-8
-4		4	-12	8
	-1	3	-2	0

Logo, $-x^3-x^2+10x-8=(x+4)\left(-x^2+3x-2\right)$.

$-x^3-x^2+10x-8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+4)\left(-x^2+3x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow x+4=0 \ \vee\ -x^2+3x-2=0$

$\Leftrightarrow x=-4 \ \vee\ x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times(-1)\times(-2)}}{2\times(-1)}$

$\Leftrightarrow x=-4 \ \vee\ x=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{-2}$

$\Leftrightarrow x=-4 \ \vee\ x=\frac{-3-1}{-2} \ \vee\ x=\frac{-3+1}{-2}$

$\Leftrightarrow x=-4 \ \vee\ x=2 \ \vee\ x=1$

x	$-\infty$	-4		1		2	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x^2+3x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
Monotonia de h	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

h é decrescente em $[-4\,,\,1]$ e em $[2\,,+\infty[$, e é crescente em $]-\infty\,,-4]$ e em $[1\,,\,2]$.

h tem mínimo relativo em $x=1$ e tem máximo relativo em $x=-4$ e em $x=2$.

38. $N'(x)=\left(t^3-9t^2+15t+35\right)'=3t^2-18t+15$

$N'(x)=0 \Leftrightarrow 3t^2-18t+15=0 \Leftrightarrow t^2-6t+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times 1\times 5}}{2\times 1} \Leftrightarrow t=\dfrac{6\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{6-4}{2} \vee t=\dfrac{6+4}{2} \Leftrightarrow t=1 \vee t=5$

t	0		1		5		6
$N'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
Monotonia de N	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.

N é crescente em $[0\,,\,1]$ e em $[5\,,\,6]$, e é decrescente em $[1\,,\,5]$.

N tem mínimo relativo igual a $N(0)=35$ em $t=0$ e tem mínimo absoluto igual a $N(5)=10$ em $t=5$.

N tem máximo absoluto igual a $N(1)=42$ em $t=1$ e tem máximo relativo igual a $N(6)=17$ em $t=6$.

Durante a primeira hora e durante a sexta hora o número de bactérias aumentou, e diminuiu entre o início da segunda hora e o final da quinta.

Ao fim de uma hora foi atingido o valor máximo de bactérias, $N(1)=42\,000$, e ao fim de cinco horas foi atingido o valor mínimo, $N(5)=10\,000$ bactérias.

39. $I'(t)=\left(\dfrac{24t}{t^2+9}\right)'=\dfrac{(24t)'\left(t^2+9\right)-24t\left(t^2+9\right)'}{\left(t^2+9\right)^2}=$

$=\dfrac{24\left(t^2+9\right)-24t(2t)}{\left(t^2+9\right)^2}=\dfrac{-24t^2+216}{\left(t^2+9\right)^2}$

$I'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-24t^2+216}{\left(t^2+9\right)^2}=0 \Leftrightarrow -24t^2+216=0 \wedge \left(t^2+9\right)^2\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2=9 \wedge \underbrace{t^2+9\neq 0}_{\text{Cond. universal}} \Leftrightarrow \underbrace{t=-3}_{\text{imp.}} \vee t=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=3$

t	0		3	$+\infty$
$I'(t)$	+	+	0	–
Monotonia de I	Mín.	↗	Máx.	↘

O número máximo de infetados ativos foi $I(3)=4000$ ao fim de três semanas.

40.1 $V(x)=x(8-2x)(5-2x)=\left(8x-2x^2\right)(5-2x)=$

$$=40x-16x^2-10x^2+4x^3=4x^3-26x^2+40x$$

$x>0$, pois x é a altura da caixa.

Como o lado menor do cartão mede 5 dm, então x não pode ser superior a metade de 5, dado que $2x<5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$.

Portanto, no contexto do problema, o domínio de V é $\left]0, \frac{5}{2}\right[$.

40.2 $V'(x)=\left(4x^3-26x^2+40x\right)'=12x^2-52x+40$

$V'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-52x+40=0 \Leftrightarrow 3x^2-13x+10=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\times3\times10}}{2\times3} \Leftrightarrow x=\frac{13\pm\sqrt{49}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{13-7}{6} \vee x=\frac{13+7}{6} \Leftrightarrow x=1 \vee \underbrace{x=\frac{10}{3}}_{>\frac{5}{2}}$$

t	0		1		$\frac{5}{2}$
$V'(t)$	N.D.	+	0	–	N.D.
Monotonia de V	N.D.	↗	Máx.	↘	N.D.

O volume máximo da caixa é $V(1)=4\times1^3-26\times1^2+40\times1=18\text{ dm}^3$.

PÁG. 170

Aplicar +

1. As expressões analíticas de cada uma das opções correspondem a funções afins, cujo gráfico é uma reta. A taxa média de variação de uma função afim em qualquer intervalo contido no seu domínio coincide com o declive da reta que é o seu gráfico, pelo que, dado que $\text{tmv}_{f,[-\pi,\pi]}=1$, a opção correta só pode ser a (D).

Opção correta: **(D)**

2. O valor de $\text{tmv}_{g,[-2,2]}$ é igual ao declive da reta s: $\frac{-4-0}{-3-0}=\frac{4}{3}$.

Opção correta: **(C)**

3. $\text{tmv}_{f,\,[-1\,,\,4]} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{f(4) - 3}{5} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow f(4) - 3 = 2 \Leftrightarrow f(4) = 5$

Opção correta: **(B)**

4.1 Como o gráfico de h tem vértice no ponto de coordenadas $(2\,,\,-3)$ e $\text{tmv}_{h,\,[2\,,\,4]} = 3 > 0$, conclui-se que o gráfico de h tem a concavidade voltada para cima. Assim, h é crescente em $[2\,,\,+\infty[$, h tem dois zeros e $h(x) \geqslant -3\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Opção correta: **(B)**

4.2 $\text{tmv}_{h,\,[2\,,\,4]} = 3 \Leftrightarrow \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = 3 \Leftrightarrow \frac{h(4) - (-3)}{2} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(4) + 3 = 6 \Leftrightarrow h(4) = 3$

Como o gráfico de h tem vértice no ponto de coordenadas $(2\,,\,-3)$, conclui-se que $h(0) = h(4) = 3$.

5. $\text{tmv}_{f,\,[3\,,\,6]} = 1 \Leftrightarrow \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = 1 \Leftrightarrow f(6) - f(3) = 3$

$$\begin{cases} f(6) - f(3) = 3 \\ f(3) + f(6) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(6) = 3 + f(3) \\ f(3) + 3 + f(3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(6) = 3 - \frac{1}{2} \\ f(3) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(6) = \frac{5}{2} \\ f(3) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Opção correta: **(A)**

PÁG. 171

Aplicar +

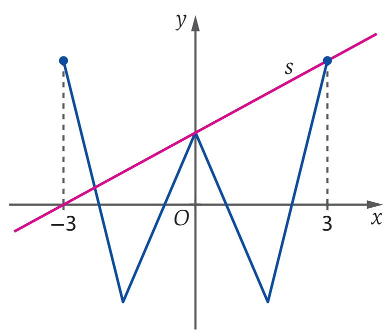
6. $\text{tmv}_{g,\,[a\,,\,b]} < 0 \Leftrightarrow \frac{g(b) - g(a)}{b - a} < 0$

$b - a > 0$, pois $a < b$.

Assim, $g(b) - g(a) < 0$, ou seja, $g(a) > g(b)$, pelo que, necessariamente, g não é crescente em $[a\,,\,b]$.

Opção correta: **(B)**

7. A afirmação I é falsa. Na figura ao lado está representado o gráfico de uma função que satisfaz as condições do enunciado, nomeadamente, o gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy e $\text{tmv}_{[0\,,\,3]} > 0$, dado que a reta secante ao gráfico (a reta s) nos pontos de abcissa 0 e 3 tem declive positivo. Portanto, esta função pode ser a função h e $h(0)$ não é mínimo de h .



A afirmação II é falsa, pois a reta de equação $y - 4x = 0 \Leftrightarrow y = 4x$ tem declive positivo e o declive tem de ser negativo, dado que como $\text{tmv}_{f,\,[0\,,\,3]} > 0$ e o gráfico de h é simétrico em relação a Oy , tem-se $\text{tmv}_{f,\,[-3\,,\,0]} < 0$.

Opção correta: **(A)**

8. $\text{tmv}_{g,\,[1\,,\,3]}=4 \Leftrightarrow \dfrac{g(3)-g(1)}{3-1}=4 \Leftrightarrow g(3)-g(1)=8 \Leftrightarrow g(1)=g(3)-8$

$\text{tmv}_{g,\,[3\,,\,7]}=-6 \Leftrightarrow \dfrac{g(7)-g(3)}{7-3}=-6 \Leftrightarrow g(7)-g(3)=-24 \Leftrightarrow g(7)=g(3)-24$

$\text{tmv}_{g,\,[1\,,\,7]}=\dfrac{g(7)-g(1)}{7-1}=\dfrac{g(3)-24-(g(3)-8)}{6}=-\dfrac{8}{3}$

Opção correta: **(B)**

9.1 A taxa média de variação da altura entre esses dois instantes é 0, pois, como a bola é lançada do solo, a variação da altura entre o instante em que é lançada até ao instante em que toca no solo é 0.

9.2 $h(t)=-3t^2+12t=-3\left(t^2-4t\right)=-3\left(t^2-4t+4-4\right)=-3(t-2)^2+12$, pelo que a bola atinge a altura máxima ao fim de dois segundos.

$\text{tmv}_{h,\,[0,\,2]}=\dfrac{h(2)-h(0)}{2-0}=\dfrac{12-0}{2}=6 \text{ m/s}$

Nos primeiros dois segundos do movimento, a bola subiu com uma taxa média de variação da altura de 6 m/s.

9.3 Por exemplo, $[1\,,\,4]$. $\text{tmv}_{h,\,[1\,,\,4]}=\dfrac{h(4)-h(1)}{1-4}=\dfrac{0-9}{3}=-3$. Dado que o gráfico de h é uma parábola a concavidade voltada para baixo e h tem máximo em $t=2$, a bola está a subir no intervalo $[1\,,\,2]$ e a descer no intervalo $[2\,,\,4]$.

PÁG. 172

Aplicar +

10.1 Por exemplo, $[9\,,\,18]$, dado que a reta s é secante ao gráfico de f nos pontos de abcissa 0, 9 e 18.

10.2 **a.** $-\dfrac{4}{18}=-\dfrac{2}{9}$

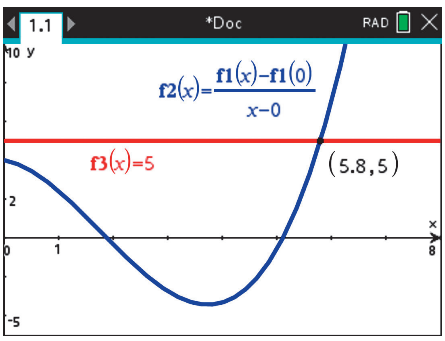
b. $\text{tmv}_{f\,;\,[9\,,\,18]}=m_s=-\dfrac{2}{9}\approx-0{,}22$

Entre as 9 h e as 18 h a altura da maré diminuiu à taxa média de, aproximadamente, $0{,}22$ m/h.

c. $\text{tmv}_{f\,;\,[6\,,\,12]}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}\approx 0{,}67$

Entre as 6 h e as 12 h a altura da maré aumentou à taxa média de, aproximadamente, $0{,}67$ m/h.

11. $\text{tmv}_{f,\,[0\,,\,t]}=5$ (Na imagem, f_1 corresponde à função f.)



$t_0\approx 5{,}8$ segundos

12. $\text{tmv}_{f,\,[a,\,2a]}=a \Leftrightarrow \dfrac{f(2a)-f(a)}{2a-a}=a \Leftrightarrow f(2a)-f(a)=a^2 \Leftrightarrow f(2a)-a^2=f(a)$

$\text{tmv}_{f,\,[2a,\,4a]}=2a \Leftrightarrow \dfrac{f(4a)-f(2a)}{4a-2a}=2a \Leftrightarrow f(4a)-f(2a)=4a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(4a)=f(2a)+4a^2$

$\text{tmv}_{f,\,[a,\,4a]}=4 \Leftrightarrow \dfrac{f(4a)-f(a)}{4a-a}=4 \Leftrightarrow f(4a)-f(a)=12a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(2a)+4a^2-\left(f(2a)-a^2\right)=12a \Leftrightarrow f(2a)+4a^2-f(2a)+a^2=12a$

$\Leftrightarrow 5a^2-12a=0 \Leftrightarrow a(5a-12)=0 \Leftrightarrow a=0 \vee 5a-12=0 \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a=\dfrac{12}{5}$

PÁG. 173

Aplicar +

13. $\text{tmv}_{f,\,[a,\,b]}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=m_s=-\dfrac{1}{m_r}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=3 \Leftrightarrow f\,'(2)=3$, pelo que $m_r=f\,'(2)=3$.

Logo, $\text{tmv}_{f,\,[a,\,b]}=-\dfrac{1}{3}$.

Opção correta: **(D)**

14. O valor da derivada de uma função num ponto é igual ao declive da reta tangente ao gráfico dessa função nesse ponto. Como a reta tem inclinação $120°$, o seu declive é igual a $\text{tg}(120°)=-\sqrt{3}$.

Opção correta: **(A)**

15.1 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{g(x)-g(5)}{x-5}=g'(5)$

Como o valor da derivada de uma função num ponto é igual ao declive da reta tangente ao gráfico dessa função nesse ponto, conclui-se que o valor de $g'(5)$ é igual ao declive da reta r . Como $2y+x=1 \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+1$, conclui-se que $g'(5)=-\dfrac{1}{2}$.

Opção correta: **(B)**

15.2 $\text{tmv}_{g,\,[-5,\,5]}=\dfrac{g(5)-g(-5)}{5-(-5)}$

Como o gráfico de g é simétrico em relação à origem do referencial, tem-se $g(-5)=-g(5)$.

Por outro lado, como a reta r é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 5 , o ponto de coordenadas $(5\,,\,g(5))$ pertence à reta r , pelo que $2g(5)+5=1 \Leftrightarrow g(5)=-2$ e, consequentemente, $g(-5)=2$.

Assim, $\text{tmv}_{g,\,[-5,\,5]}=\dfrac{g(5)-g(-5)}{5-(-5)}=\dfrac{-2-2}{10}=-\dfrac{4}{10}=-\dfrac{2}{5}$.

16.1 Para $x \neq 3$,

$$\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\frac{\frac{2+x}{2-x}-\frac{2+3}{2-3}}{x-3}=\frac{\frac{2+x}{2-x}+5}{x-3}=\frac{\frac{2+x+5(2-x)}{2-x}}{x-3}=\frac{12-4x}{(x-3)\,(2-x)}=\frac{-4\,(x-3)}{(x-3)\,(2-x)}=\frac{-4}{2-x}$$

$$g'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-4}{2-x}=\frac{-4}{2-3}=4$$

16.2 A reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 3 tem equação reduzida da forma $y=mx+b$, com $m=g'(3)=4$.

Como o ponto de coordenadas $(3\,,\,g(3))$ pertence a essa reta e $g(3)=-5$, $-5=4\times 3+b \iff b=-17$.

Assim, a reta tem equação $y=4x-17$, donde $B\,(0\,,\,-17)$.

Como $4x-17=0 \iff x=\frac{17}{4}$; $A\left(\frac{17}{4}\,,\,0\right)$.

Logo, a área do triângulo $[AOB]$ é $\frac{\frac{17}{4}\times 17}{2}=\frac{289}{8}$.

17.1 $-\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x+3)-6}{x}}=-\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x+3)-h(3)}{x}}=-\dfrac{1}{h'(3)}=-\dfrac{1}{3^2+\frac{9}{3^2}}=-\dfrac{1}{10}$

$h'(3)$ representa o declive da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 3 , pelo que $-\frac{1}{h'(3)}=-\frac{1}{10}$ representa o declive de qualquer reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 3 .

17.2 Verdadeira. Como $h'(x)>0$, para todo o $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, qualquer reta tangente ao gráfico de h tem declive positivo.

17.3 O declive da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 3 é dado por $h'(3)=3^2+\frac{9}{3^2}=10$, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y=10x+b$.

Como o ponto de coordenadas $(3\,,\,h(3))$ pertence a essa reta, $6=10\times 3+b \iff b=-24$.

Assim, a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 3 tem equação reduzida $y=10x-24$.

PÁG. 174

Aplicar +

18. Para $t\neq 4$,

$$\frac{N(t)-N(4)}{t-4}=\frac{t^3-9t^2+15t+35-15}{t-4}=\frac{t^3-9t^2+15t+20}{t-4}=$$

$$=\frac{(t-4)\,(t^2-5t-5)}{t-4}=t^2-5t-5$$

$$N'(4)=\lim_{t\to 4}\frac{N(t)-N(4)}{t-4}=\lim_{t\to 4}\left(t^2-5t-5\right)=4^2-5\times 4-5=-9$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -9 & 15 & 20 \\ 4 & & 4 & -20 & -20 \\ \hline & 1 & -5 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

Logo, $t^3-9t^2+15t+20=$
$=(t-4)\left(t^2-5t-5\right)$.

Passadas quatro horas após o início do teste, o número de bactérias estava a diminuir à taxa instantânea de 9000 bactérias por hora.

19.1 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \Leftrightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow (a+5)(2a-1)(2-6a) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a+5=0 \vee 2a-1=0 \vee 2-6a=0 \Leftrightarrow a=-5 \vee a=\frac{1}{2} \vee a=\frac{1}{3}$$

Opção correta: **(D)**

19.2 $y = m(x+1) = mx + m$

$m = f'(1) = (1+5)(2\times 1 - 1)(2 - 6\times 1) = -24$, pelo que $y = -24x - 24$.

O ponto de coordenadas $(1, f(1))$ pertence a essa reta, pelo que $f(1) = -24\times 1 + (-24) = -48$, ou seja, a ordenada do ponto de abcissa 1 do gráfico de f é -48 .

20.1 Como o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo, conclui-se que $k < 0$.

Como $g'(x) = 2kx$, o gráfico de g' é uma reta de declive $2k$, com $2k < 0$, pelo que se excluem-se as opções (A) e (B).

Como $g'(1) = 2k \times 1 = 2k$, exclui-se a opção (D).

Opção correta: **(C)**

20.2 Para $k = 2$, $g(x) = 2x^2$.

Para $x \neq x_0$,

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x^2 - 2x_0^2}{x - x_0} = \frac{2(x^2 - x_0^2)}{x - x_0} = \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2(x + x_0)$$

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (2(x + x_0)) = 2(x_0 + x_0) = 4x_0$$

Assim, $g'(x) = 4x$.

20.3 A reta r , tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 2 , tem equação reduzida da forma $y = mx + b$, com $m = g'(2) = 2k \times 2 = 4k$.

Como a reta r interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 5 , $b = 5$, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = 4kx + 5$.

O ponto de coordenadas $(2, g(2))$ pertence à reta r e como $g(2) = k \times 2^2 = 4k$, tem-se

$4k = 4k \times 2 + 5 \Leftrightarrow k = -\dfrac{5}{4}$.

A equação reduzida da reta r é $y = 4 \times \left(-\dfrac{5}{4}\right)x + 5 \Leftrightarrow y = -5x + 5$.

PÁG. 175

Aplicar +

21. $h'(-3) = -\dfrac{1}{\frac{2}{3}} = -\dfrac{3}{2}$

$h'(x) = 3kx^2$; $h'(-3) = 3k(-3)^2 = 27k$.

$27k = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{18}$

22. Como $f'(x)<0$ em $]-\infty, 0[$ e $f'(x)>0$ em $]0, +\infty[$ $(f'(0)=0)$, conclui-se que f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.

Opção correta: **(D)**

23. A reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa k tem equação reduzida da forma $y=mx+b$, com $m=g'(k)$. Como a reta interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1 , a equação reduzida da reta é $y=g'(k)x+1$.

$g'(x)=2kx$, $g'(k)=2k\times k=2k^2$ e $g(k)=k\times k^2=k^3$.

O ponto de coordenadas $(k, g(k))$ pertence a essa reta, pelo que

$k^3=2k^2\times k+1 \Leftrightarrow k^3=2k^3+1 \Leftrightarrow -k^3=1 \Leftrightarrow k^3=-1 \Leftrightarrow k=\sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow k=-1$.

Logo, $g'(x)=2\times(-1)x=-2x$.

PÁG. 176

Aplicar +

24.1 $h'(x)=3ax^2$, pelo que se excluem as opções (A) e (C).

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$, conclui-se que $a<0$, pelo que, o gráfico de h' é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

Opção correta: **(B)**

24.2 $h'(a)=-24 \Leftrightarrow 3a\times a^2=-24 \Leftrightarrow a^3=-8 \Leftrightarrow a=-2$

24.3 $h(x)=-3x^3$; $h(-2)=-3\times(-2)^3=24$.

$h'(x)=-9x^2$, pelo que o declive da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -2 é $h'(-2)=-9(-2)^2=-36$.

$24=-36\times(-2)+b \Leftrightarrow b=-48$

$y=-36x-48$

25.1 Não. O declive de qualquer reta perpendicular a s é 1 e $g'(x)=-12x^2$, pelo que $g'(x)\leqslant 0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$; portanto, o declive de qualquer reta tangente ao gráfico de g é sempre negativo ou nulo não podendo, portanto, ser 1 .

25.2 $g(x)=-x \Leftrightarrow -4x^3=-x \Leftrightarrow 4x^3-x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(4x^2-1)=0 \Leftrightarrow x\left((2x)^2-1^2\right)=0 \Leftrightarrow x(2x-1)(2x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee 2x-1=0 \vee 2x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{1}{2} \vee x=-\frac{1}{2}$

25.3 Como a reta s interseta o gráfico de g nos pontos de abcissa $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, a reta s é secante ao gráfico de g nesses pontos, pelo que $\text{tmv}_{g,\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}=m_s=-1$.

25.4 $g'(x)=-1 \Leftrightarrow -12x^2=-1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{12} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{12}} \vee x=\frac{1}{\sqrt{12}}$

PÁG. 177

Aplicar +

26.1 $f(x)=2 \Leftrightarrow 2x^3=2 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1$, logo $A(1\,,\,2)$.

$f'(x)=6x^2$

A reta t tem declive $f'(1)=6$ e ordenada na origem $2=6\times 1+b \Leftrightarrow b=-4$.

Assim, uma equação da reta t é $y=6x-4 \Leftrightarrow y-6x+4=0$.

26.2 $f'(x)=6 \Leftrightarrow 6x^2=6 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$

A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 .

$f(-1)=2(-1)^3=-2$

$-2=6\times(-1)+b \Leftrightarrow b=4$

A equação reduzida da reta r é $y=6x+4$.

26.3 A reta perpendicular à reta t tem declive $-\frac{1}{6}$ e ordenada na origem $2=-\frac{1}{6}\times 1+b \Leftrightarrow b=\frac{13}{6}$, pelo que tem equação reduzida $y=-\frac{1}{6}x+\frac{13}{6}$.

26.4 $y-6\times 0+4=0 \Leftrightarrow y=-4$, logo $B(0\,,\,-4)$. Já vimos que $A(1\,,\,2)$.

A área do triângulo $[AOB]$ é $\frac{\overline{OB}\times|x_A|}{2}=\frac{4\times 1}{2}=2$.

26.5 $f'(x)=6x^2$, pelo que $f'(-x)=6\times(-x)^2=6x^2=f'(x)$.

27. $f(3)=\frac{k\times 3^2}{3}=3k$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-3k}{x-3}=3-4k \underset{f(3)=3k}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=3-4k \Leftrightarrow f'(3)=3-4k$

$f'(x)=\frac{2kx}{3}$; $f'(3)=\frac{2k\times 3}{3}=2k$

$2k=3-4k \Leftrightarrow 6k=3 \Leftrightarrow k=\frac{3}{6} \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$

Opção correta: **(C)**

28.1 $f'(x)=(6x)'=6$

28.2 $g'(x)=((7x-8)-(5x+1))'=(7x-8)'-(5x+1)'=7-5=2$

28.3 $h'(x)=((2x-3)\,(3x+4))'=(2x-3)'\,(3x+4)+(2x-3)\,(3x+4)'=$

$=2(3x+4)+(2x-3)\times 3=6x+8+6x-9=12x-1$

28.4 $i'(x)=\left(1-4x^2\right)'=0-2\times 4x=-8x$

28.5 $j'(x)=\left(2x^3-7x^2+2\right)'=3\times 2x^2-2\times 7x=6x^2-14x$

28.6 $k'(x)=\left(\frac{x^4}{4}-7x^3+\frac{5}{6}x^2+x+1\right)'=4\times\frac{x^3}{4}-3\times 7x^2+2\times\frac{5}{6}x+1+0=x^3-21x^2+\frac{5}{3}x+1$

28.7 $l'(x)=\left(x^4-x^2+1\right)'=4x^3-2x+0=4x^3-2x$

28.8 $m'(x)=\left(\frac{3x+4}{5-7x}\right)'=\frac{(3x+4)'\,(5-7x)-(3x+4)\,(5-7x)'}{(5-7x)^2}=$

$=\frac{3\,(5-7x)-(3x+4)\,(-7)}{(5-7x)^2}=\frac{15-21x+21x+28}{(5-7x)^2}=\frac{43}{(5-7x)^2}$

28.9 $n'(x)=\left((5-2x)\times\frac{3}{x}\right)'=(5-2x)'\times\frac{3}{x}+(5-2x)\left(\frac{3}{x}\right)'=$

$=-2\times\frac{3}{x}+(5-2x)\left(\frac{3'x-3x'}{x^2}\right)=-\frac{6}{x}+(5-2x)\left(-\frac{3}{x^2}\right)=$

$=-\frac{6}{x}-\frac{15}{x^2}+\frac{6x}{x^2}=-\frac{15}{x^2}$

28.10 $o'(x)=\left((x+2)^2(1-3x)\right)'=\left((x+2)^2\right)'(1-3x)+(x+2)^2\,(1-3x)'=$

$=2\,(x+2)\,(x+2)'\,(1-3x)+(x+2)^2\,(-3)=2\,(x+2)\,(1-3x)-3\,(x+2)^2=$

$=-6x^2-10x+4-3x^2-12x-12=-9x^2-22x-8$

28.11 $p'(x)=\left(3\left(2x+x^2\right)^2\right)'=2\times 3\,\left(2x+x^2\right)\left(2x+x^2\right)'=$

$=6\left(2x+x^2\right)(2+2x)=6\left(4x+4x^2+2x^2+2x^3\right)=12x^3+36x^2+24x$

28.12 $q'(x)=\left(\frac{x}{x^2+2}\right)'=\frac{(x)'\left(x^2+2\right)-x\left(x^2+2\right)'}{\left(x^2+2\right)^2}=$

$=\frac{x^2+2-x\times 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{2-x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$

28.13 $r'(x)=\left(\frac{x+9}{(x-3)^2}\right)'=\frac{(x+9)'\,(x-3)^2-(x+9)\left((x-3)^2\right)'}{\left((x-3)^2\right)^2}=$

$=\frac{1\times(x-3)^2-(x+9)\times 2\,(x-3)\,(x-3)'}{\left((x-3)^2\right)^2}=\frac{(x-3)^2-(x+9)\times 2\,(x-3)\times 1}{(x-3)^4}=$

$=\frac{(x-3)\,\left((x-3)-2\,(x+9)\right)}{(x-3)\,(x-3)^3}=\frac{x-3-2x-18}{(x-3)^3}=$

$=-\frac{x+21}{(x-3)^3}$

28.14 $s'(x)=\left(\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x}\right)'=\left(\frac{x}{x+1}\right)'-\left(\frac{x+1}{x}\right)'=$

$$=\frac{(x)'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}-\frac{(x+1)'x-(x+1)(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{1\times(x+1)-x\times 1}{(x+1)^2}-\frac{1\times x-(x+1)\times 1}{x^2}=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}-\frac{x-x-1}{x^2}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}$$

PÁG. 178

Aplicar +

29.1 $m_r=\frac{g(4)-g(1)}{4-1}=\frac{-7-2}{3}=-3$ e $m_s=m_r=-3$.

29.2 A reta s tem declive -3 e é tangente ao gráfico de g no ponto A , pelo que:

$$g'(x)=-3 \Leftrightarrow \left(x^3-6x^2+6x+1\right)'=-3 \Leftrightarrow 3x^2-12x+6=-3 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times3}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4-2}{2} \vee x=\frac{4+2}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$$

Como o ponto A tem abcissa superior a 1 , tem-se $A(3, g(3))$ e como $g(3)=3^3-6\times3^2+6\times3+1=-8$, conclui-se que as coordenadas do ponto A são $(3, -8)$.

A outra reta tangente ao gráfico de g , com declive -3 , é tangente no ponto de abcissa 1 . Logo, como r tem declive -3 e interseta o gráfico de g no ponto de abcissa 1 , r é tangente ao gráfico de g .

29.3 As retas têm declive -3 .

A reta s tem ordenada na origem $-8=-3\times3+b \Leftrightarrow b=1$ e equação reduzida $y=-3x+1$.

Como $g(1)=1^3-6\times1^3+6\times1+1=2$, e o ponto de coordenadas $(1, g(1))$, isto é, $(1, 2)$, pertente à reta r , a sua ordenada na origem é $2=-3\times1+b \Leftrightarrow b=5$ e tem equação reduzida $y=-3x+5$.

30.1 Como a reta de equação $y=-\frac{3}{4}x-2$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -3 , tem--se $g'(-3)=-\frac{3}{4}$ e $g(-3)=-\frac{3}{4}\times(-3)-2=\frac{1}{4}$.

Logo, $\left(\frac{g}{f}\right)'(-3)=\frac{g'(-3)\,f(-3)-g(-3)\,f'(-3)}{(f(-3))^2}=\frac{-\frac{3}{4}\times2-\frac{1}{4}\times2}{2^2}=\frac{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{4}=-\frac{1}{2}$.

30.2 A reta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa -3 tem declive $h'(-3)$.

$$h'(x)=\left(x^2f(x)\right)'=\left(x^2\right)'f(x)+x^2f'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$$

$$h'(-3)=2\times(-3)\times f(-3)+(-3)^2f'(-3)=-6\times2+9\times2=6$$

$h(-3)=(-3)^2f(-3)=9\times2=18$ e como o ponto de coordenadas $(3, h(3))$ pertence à reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -3 , $18=6(-3)+b \Leftrightarrow b=36$.

Logo, reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -3 tem equação reduzida $y=6x+36$.

30.3 $(f\times g)\ (-3)=f(-3)\times g(-3)=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, pelo que:

$$\lim_{x\to -3}\frac{(f\times g)(x)-\frac{1}{2}}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(f\times g)(x)-(f\times g)\ (-3)}{x+3}=(f\times g)'(-3)=$$

$$=f'(-3)g(-3)+f(-3)g'(-3)=2\times\frac{1}{4}+2\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$$

31.1 $3x+2y=1 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$, pelo que $f'(2)=-\frac{3}{2}$ e $f(2)=-\frac{3}{2}\times 2+\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$.

$$(f\times f)'(2)=f'(2)f(2)+f(2)f'(2)=-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}+\frac{15}{4}=\frac{15}{2}$$

Opção correta: **(D)**

31.2 $\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=g'(2)$

$$g'(x)=\left(f(x)+\left(\frac{1}{f}\right)(x)\right)'=f'(x)+\left(\left(\frac{1}{f}\right)(x)\right)'=$$

$$=f'(x)+\frac{1'\times f(x)-1\times f'(x)}{(f(x))^2}=f'(x)-\frac{f'(x)}{((f(x))^2}$$

$$g'(2)=f'(2)-\frac{f'(2)}{(f(2))^2}=-\frac{3}{2}-\frac{-\frac{3}{2}}{\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=-\frac{3}{2}+\frac{6}{25}=-\frac{63}{50}$$

32.1 $f(x)=6 \Leftrightarrow 2x^2-4x=6 \Leftrightarrow 2x^2-4x-6=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 1\times(-3)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2-4}{2}\vee x=\frac{2+4}{2} \Leftrightarrow x=-1\vee x=3$$

$f'(x)=(2x^2-4x)'=4x-4$, e o declive da reta é $f'(-1)=4(-1)-4=-8$.

Como o ponto de coordenadas $(-1\ ,\ 6)$ pertence à reta tangente ao gráfico de f no ponto de ordenada 6 e abcissa negativa, neste caso $-1\ ,\ 6=-8(-1)+b \Leftrightarrow b=-2$.

Logo, a equação reduzida da reta pedida é $y=-8x-2$.

32.2 As retas tangentes ao gráfico de g que são perpendiculares à reta de equação $y=\frac{x}{4}$ têm declive $-\frac{1}{\frac{1}{4}}=-4$.

$$g'(x)=\frac{x'(x-1)-x(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$g'(x)=-4 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x-1)^2}=-4 \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} (x-1)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=-\frac{1}{2}\vee x-1=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\vee x=\frac{3}{2}$$

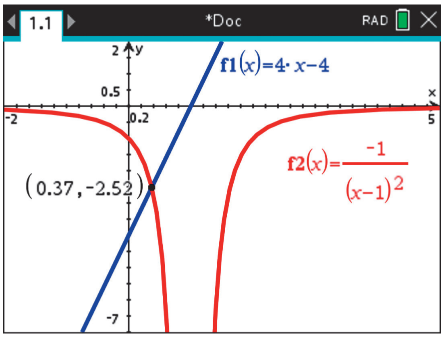
$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}=-1\ ;\ -1=-4\times\frac{1}{2}+b \iff b=1\ ;\ y=-4x+1\ .$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1}=3\ ;\ 3=-4\times\frac{3}{2}+b \iff b=9\ ;\ y=-4x+9\ .$$

PÁG. 179

Aplicar +

32.3 $f'(x)=g'(x)$



$x\approx 0{,}37$

32.4 $f'(x)=-\frac{1}{g'(x)} \iff 4x-4=-\frac{1}{-\frac{1}{(x-1)^2}} \underset{x\neq 0}{\iff} 4x-4=(x-1)^2 \iff$

$$\iff 4x-4=(x-1)^2 \iff x^2-6x+5=0 \iff$$

$$\iff x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times5}}{2\times1} \iff x=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2} \iff$$

$$\iff x=\frac{6-4}{2}\vee x=\frac{6+4}{2} \iff \underbrace{x=1}_{\notin D_g}\vee x=5$$

Logo, como $1\notin D_g$, a abcissa desses dois pontos é 5.

33. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+1)-f(1)}{h}=2 \iff f'(1)=2$

Como f' é polinomial de grau 2, excluem-se as opções (A) e (D).

(B) $\left(x^3\right)'=3x^2\ ;\ 3\times1^2=3\neq2\ .$

(C) $\left(x^3-x\right)'=3x^2-1\ ;\ 3\times1^2-1=2\ .$

Opção correta: **(C)**

34.1 $h'(x)=\left(\frac{2+x}{2-x}\right)'=\frac{(2+x)'(2-x)-(2+x)(2-x)'}{(2-x)^2}=$

$$=\frac{1\times(2-x)-(2+x)\times(-1)}{(2-x)^2}=\frac{2-x+2+x}{(2-x)^2}=\frac{4}{(x-2)^2}$$

34.2 A equação $h'(x)=-4$ é impossível, pelo que se excluem as opções (A) e (C).

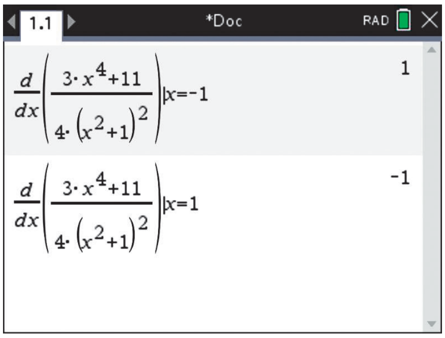
$$h'(x)=4 \Leftrightarrow \frac{4}{(x-2)^2}=4 \underset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} (x-2)^2=1 \Leftrightarrow x-2=-1 \vee x-2=1 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$$

$h(1)=\frac{2+1}{2-1}=3$; $3=4\times 1+b \Leftrightarrow b=-1$.

$h(3)=\frac{2+3}{2-3}=-5$; $-5=4\times 3+b \Leftrightarrow b=-17$.

Opção correta: **(D)**

35.



Como $m_r=f'(-1)=1$ e $m_s=f'(1)=-1$, tem-se $m_r=-\frac{1}{m_s}$, pelo que r e s são perpendiculares.

PÁG. 180

Aplicar +

36. $f(x)=mx+b$, $m<0$, $f'(x)=m$, $m<0$

$g'(x)=2x+1$

$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=m-(2x+1)=-2x+m-1$. Portanto, o gráfico de $(f-g)'$ é uma reta de declive negativo e ordenada na origem igual a $m-1$, com $m<0 \Leftrightarrow m-1<-1$.

Opção correta: **(B)**

37. $f(x)=mx+b$, $m>0$, $b<0$; $f'(x)=m$, $m>0$

$g(x)=c$, $c>0$; $g'(x)=0$

$h(x)=ax^2$, $a<0$; $h'(x)=2ax$, $a<0$

$$p'(x)=\left(f(x)+(g\times h)\ (x)\right)'=f'(x)+g'(x)\ h(x)+g(x)\ h'(x)=$$

$$=m+0\times ax^2+c\times 2ax=2acx+m$$

Assim, p' é uma função afim e o seu gráfico é uma reta de declive igual a $2ac$ e ordenada na origem igual a m . Como $a<0$ e $c>0$ então $2ac<0$, ou seja, o declive da reta que é o gráfico de p' é negativo e, portanto, não pode ser o gráfico da opção (A). O gráfico da opção (C) não é uma reta, pelo que não pode ser o gráfico da função p' . Como $m>0$, a reta que representa o gráfico de p' interseta o eixo Oy num ponto de ordenada positiva e, portanto, o gráfico da opção (D) também não pode ser o gráfico da função p' .

O gráfico correto é o da opção **(B)**.

PÁG. 181

Aplicar +

38. $g(1)=1 \iff a+1+b=1 \iff a+b=0$

$g'(x)=2ax+1$; $g'(1)=-1 \iff 2a\times 1+1=-1 \iff a=-1$.

$-1+b=0 \iff b=1$

39.1 Para $x<-1$, $h(x)=mx+b$, $m<0$, $b<0$ e $h'(x)=m$, $m<0$;

para $x>-1$, $h(x)=a(x-3)^2+k$, $a<0$, $k>0$, dado que o gráfico de h é uma parábola em que o vértice tem abcissa 3 e cuja ordenada designamos por k . Portanto, $h'(x)=2a(x-3)$.

(A) $h'(-2)-h'(0)=m-2a\times(-3)=\underbrace{m}_{<0}+\underbrace{6a}_{<0}<0$

(B) $h'(2)\times h'(-2)=2a\times(-1)\times m=-2\underbrace{am}_{>0}<0$

(C) $h'(2)\times h'(4)+h'(-2)=2a\times(-1)\times 2a\times 1+m=\underbrace{-4a^2}_{<0}+\underbrace{m}_{<0}<0$

(D) $h'(0)-h'(2)\times h'(4)=2a\times(-3)-2a\times(-1)\times 2a\times 1=\underbrace{-6a}_{>0}+\underbrace{4a^2}_{>0}>0$

Opção correta: **(D)**

39.2 $h'(2)+h'(4)=2a\times(-1)+2a\times 1=-2a+2a=0$

PÁG. 182

Aplicar +

40.1 $D_f=\mathbb{R}$

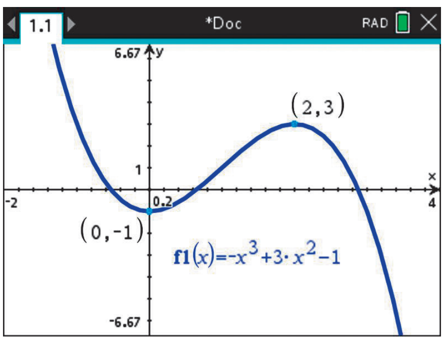
$f'(x)=-3x^2+6x$

$f'(x)=0 \iff -3x^2+6x=0 \iff -3x(x-2)=0 \iff -3x=0 \vee x-2=0 \iff x=0 \vee x=2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Monotonia de f	↘	Mín.	↗	Máx.	↘

f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$; f é crescente em $[0, 2]$;

f tem um mínimo relativo igual a $f(0)=-1$, em $x=0$, e um máximo relativo igual a $f(2)=-2^3+3\times 2^2-1=3$, em $x=2$.



40.2 $D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = 3x^2 - 24x + 36$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow$

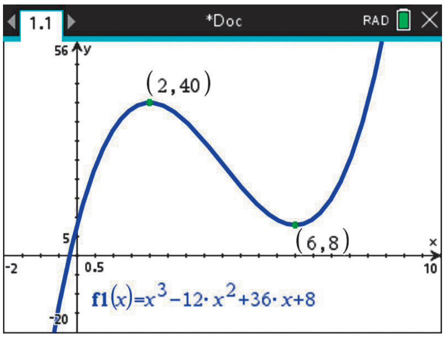
$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8-4}{2} \vee x = \frac{8+4}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6$$

x	$-\infty$	2		6	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de g	↗	Máx.	↘	Mín.	↗

g é crescente em $]-\infty, 2]$ e em $[6, +\infty[$; g é decrescente em $[2, 6]$;

g tem um mínimo relativo igual a $g(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 36 \times 6 + 8 = 8$, em $x = 6$, e um máximo relativo igual a $g(2) = 2^3 - 12 \times 2^2 + 36 \times 2 + 8 = 40$, em $x = 2$.



40.3 $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$h'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$

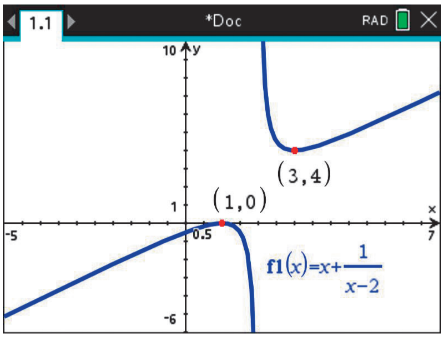
$\Leftrightarrow x - 2 = -1 \vee x - 2 = 1 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3 \wedge x \neq 2$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	N.D.	$-$	0	$+$
Monotonia de h	↗	Máx.	↘	N.D.	↘	Mín.	↗

h é crescente em $]-\infty, 1]$ e em $[3, +\infty[$; h é decrescente em $[1, 2[$ e em $]2, 3]$;

h tem um mínimo relativo igual a $h(1) = 3 + \frac{1}{3-2} = 4$, em $x = 3$, e um máximo relativo igual a $h(1) = 1 + \frac{1}{1-2} = 0$, em $x = 1$.



40.4 $D_i = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$i'(x) = \frac{(-x^2+x+3)'(x-1) - (-x^2+x+3)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(-2x+1)(x-1) - (-x^2+x+3)}{(x-1)^2} = \frac{-2x^2+2x+x-1+x^2-x-3}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x-4}{(x-1)^2}$$

$$i'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x-4}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x-4 = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

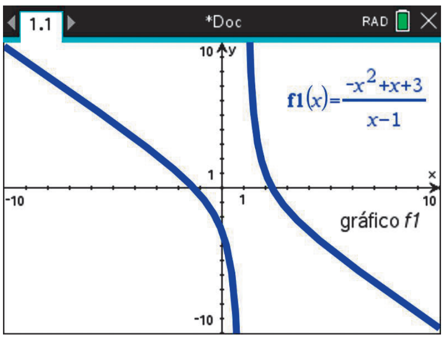
$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times (-4)}}{2 \times (-1)} \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{-2}}_{\text{Condição impossível em } \mathbb{R}} \wedge x \neq 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-x^2+2x-4$	$-$	$-$	$-$
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$
$i'(x)$	$-$	N.D.	$-$
Monotonia de i	↘	N.D.	↘

$i'(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

i é decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$ e não tem extremos.



41. $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \vee (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
Monotonia de f	↘	Mín.	↗		↗

Opção correta: **(B)**

42. $g'(x)=0 \Leftrightarrow x^4-4x^3+4x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-4x+4\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$
Monotonia de g	↗		↗		↗

g não tem extremos.

Alternativamente:

$g'(x)=x^4-4x^3+4x^2=x^2\left(x^2-4x+4\right)=x^2(x-2)^2$

Logo, $g'(x)\geqslant 0$ para todo o $x\in\mathbb{R}$, tendo exatamente dois zeros, 0 e 2, pelo que g é crescente em $\mathbb{R}$ e, portanto, g não tem extremos.

43.1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=3^2-1=8$

43.2 A bissetriz dos quadrantes ímpares tem declive 1, pelo que $f'(x)=1 \Leftrightarrow x^2-1=1 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2} \vee x=\sqrt{2}$. Logo, existem dois pontos do gráfico de f cujas retas tangentes são paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares, as retas tangentes nos pontos de abcissas $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

43.3 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de f	↗	Máx.	↘	Mín.	↗

f é crescente em $]-\infty,-1]$ e em $[1,+\infty[$; f é decrescente em $[-1,1]$;

f tem um mínimo relativo em $x=1$ e um máximo relativo em $x=-1$.

44.1 $g'(x)=\left(x(1-2x)^2\right)'=(x)'(1-2x)^2+x\left((1-2x)^2\right)'=$

$=(1-2x)^2+x\times 2(1-2x)(1-2x)'=(1-2x)^2+2x(1-2x)\times(-2)=$

$=(1-2x)^2-4x(1-2x)=(1-2x)\left((1-2x)-4x\right)=(1-2x)(1-6x)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow (1-2x)(1-6x)=0 \Leftrightarrow 1-2x=0 \vee 1-6x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \vee x=\dfrac{1}{6}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
Monotonia de g	↗	Máx.	↘	Mín.	↗

g é crescente em $\left]-\infty, \frac{1}{6}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$; g é decrescente em $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$;

g tem um mínimo relativo igual a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 2 \times \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, em $x = \frac{1}{2}$, e um máximo relativo igual a $g\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}\left(1 - 2 \times \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{2}{27}$, em $x = \frac{1}{6}$.

44.2 $g'(1) = (1 - 2 \times 1)\,(1 - 6 \times 1) = 5$, pelo que o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é 5 .

$g(1) = 1\,(1 - 2 \times 1)^2 = 1$, pelo que a ordenada na origem é $1 = 5 \times 1 + b \;\Leftrightarrow\; b = -4$.

Logo, a equação reduzida da reta pedida é $y = 5x - 4$.

44.3 O declive da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 2 é $h'(2)$.

$$h'(x) = \left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

Tem-se que $g(2) = 2\,(1 - 2 \times 2)^2 = 2 \times 9 = 18$ e $g'(2) = (1 - 2 \times 2)\,(1 - 6 \times 2) = -3 \times (-11) = 33$.

$$h'(2) = \frac{f'(2)\,g(2) - f(2)\,g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{2 \times 18 - 4 \times 33}{18^2} = -\frac{8}{27}$$

O declive de qualquer reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 2 é $-\dfrac{1}{-\frac{8}{27}} = \dfrac{27}{8}$.

PÁG. 183

Aplicar +

45.1 Verdadeira.

h é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e $h'(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, pelo que h é crescente em $\mathbb{R}^+$.

45.2 O declive da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -3 é $h'(-3) = (-3)^2 + \frac{8}{(-3)} = \frac{19}{3}$, e a ordenada na origem é $2 = \frac{19}{3} \times (-3) + b \;\Leftrightarrow\; b = 21$.

Logo, a equação reduzida da reta pedida é $y = \frac{19}{3}x + 21$.

45.3 $h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + \frac{8}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^3 + 8}{x} = 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x^3 + 8 = 0 \wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2 \wedge x \neq 0$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x^3+8	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	N.D.	$+$
Monotonia de h	↗	Máx.	↘	N.D.	↗

h é crescente em $]-\infty\,,-2]$ e em $]0\,,+\infty[$; h é decrescente em $[-2\,,0[$;

h tem máximo relativo em $x=-2$.

46. f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e se f tem extremos relativos em $x=-2$ e em $x=4$, f' tem zeros nesses pontos, com mudança de sinal.

Opção correta: **(D)**

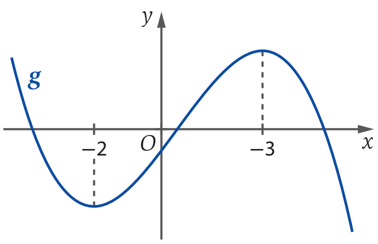
47.1

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Monotonia de g	↘	Mín.	↗	Máx.	↘

g é decrescente em $]-\infty\,,-2]$ e em $[3\,,+\infty[$; g é crescente em $[-2\,,3]$;

g tem mínimo relativo em $x=-2$ e tem máximo relativo em $x=3$.

47.2



47.3 $g'(x)=\left(x^2\left(a-\frac{x}{9}\right)+bx\right)'=(x^2)'\left(a-\frac{x}{9}\right)+x^2\left(a-\frac{x}{9}\right)'+(bx)'=$

$$=2x\left(a-\frac{x}{9}\right)+x^2\times\left(-\frac{1}{9}\right)+b=2ax-\frac{2}{9}x^2-\frac{x^2}{9}+b=-\frac{1}{3}x^2+2ax+b$$

$$g'(-2)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\times(-2)^2+2a\times(-2)+b=0 \Leftrightarrow -4a+b-\frac{4}{3}=0$$

$$g'(3)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\times(3)^2+2a\times 3+b=0 \Leftrightarrow 6a+b-3=0$$

$$\begin{cases}-4a+b-\frac{4}{3}=0\\ 6a+b-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4a+\frac{4}{3}\\ 6a+4a+\frac{4}{3}-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4a+\frac{4}{3}\\ 10a-\frac{5}{3}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4\times\frac{1}{6}+\frac{4}{3}\\ a=\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2\\ a=\frac{1}{6}\end{cases}$$

PÁG. 184
Aplicar +

48. $f \longrightarrow$ (B) porque a função f é uma função cúbica cujo coeficiente do termo de maior grau é positivo e a sua derivada é uma função quadrática representada graficamente por uma parábola com a concavidade voltada para cima.

$g \longrightarrow$ (C) porque a função g é uma função quadrática representada graficamente por uma parábola com a concavidade voltada para cima e a sua derivada é uma função afim representada graficamente por uma reta de declive positivo.

$h \longrightarrow$ (D) porque a função h é uma função afim representada graficamente por uma reta de declive positivo e a sua derivada é uma função constante positiva.

$i \longrightarrow$ (A) porque a função i é uma função quártica cujo coeficiente do termo de maior grau é positivo e a sua derivada é uma função cúbica cujo coeficiente do termo de maior grau é positivo.

49. $g'(x) = f'(x) - (x)' = f'(x) - 1$

O gráfico de f' é uma parábola com a concavidade voltada para cima e vértice no ponto de coordenadas $(-1, -1)$.

O gráfico de g' resulta do gráfico de f' pela translação de vetor $(0, -1)$, pelo que é uma parábola com a concavidade voltada para cima e vértice no ponto de coordenadas $(-1, -2)$.

Opção correta: **(A)**

PÁG. 185
Aplicar +

50.

x	$-\infty$	Zero negativo		0		Zero positivo	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de h	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Opção correta: **(D)**

51. Se f tem um máximo relativo em $x = 2$, então f é crescente à esquerda de $x = 2$ e é decrescente à direita de $x = 2$. Assim, f' é positiva à esquerda de $x = 2$ e é negativa à direita de $x = 2$.

Recorrendo, por exemplo, a uma calculadora gráfica, constatamos que apenas a função definida por $(2 - x)^3$ verifica essas condições.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 186

Aplicar +

52.

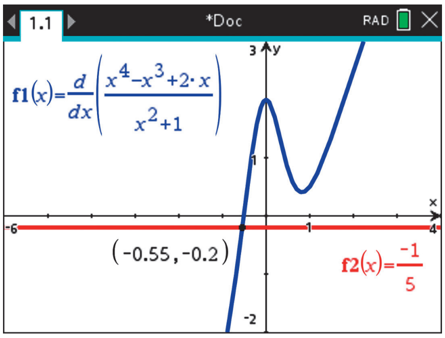
x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
Monotonia de f	↘	Mín.	↗		↗
Monotonia de $-f$	↗	Máx	↘		↘

Tendo em conta a monotonia de $-f$, as opções (A) e (C) são excluídas. A representação gráfica da opção (B) não pode ser parte do gráfico de $-f$ porque $f'(2)=0$, e consequentemente $-f'(2)=0$ e, nesta representação, a derivada da função em $x=2$ é negativa (já que a função é decrescente).

Só na opção (D) pode estar representada parte do gráfico da função $-f$.

Opção correta: **(D)**

53. $g'(x)=-\frac{1}{5}$



$x_A \approx -0{,}55$; $y_A = g(x_A) \approx -0{,}65$.

PÁG. 187

Aplicar +

54.1 $g'(x)=\frac{(ax+5)'(x-a)-(ax+5)(x-a)'}{(x-a)^2}=\frac{a(x-a)-(ax+5)}{(x-a)^2}=$

$$=\frac{ax-a^2-ax-5}{(x-a)^2}=\frac{-a^2-5}{(x-a)^2}=-\frac{a^2+5}{(x-a)^2}$$

$$g'(1)=-9 \Leftrightarrow -\frac{a^2+5}{(1-a)^2}=-9 \Leftrightarrow \frac{a^2+5}{(1-a)^2}=9 \Leftrightarrow a^2+5=9(1-a)^2 \wedge (1-a)^2\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+5=9(1-2a+a^2)\wedge a\neq 1 \Leftrightarrow a^2+5=9-18a+9a^2\wedge a\neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8a^2+18a-4=0\wedge a\neq 1 \Leftrightarrow 4a^2-9a+2=0\wedge a\neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\times 4\times 2}}{2\times 4}\wedge a\neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{9\pm\sqrt{49}}{8}\wedge a\neq 1 \Leftrightarrow a=\frac{9-7}{8}\vee a=\frac{9+7}{8}\wedge a\neq 1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}\vee a=2\wedge a\neq 1$$

Como $a>1$, vem que $a=2$.

54.2 $g'(-7)=-\dfrac{2^2+5}{(-7-2)^2}=-\dfrac{1}{9}$

54.3 $g'(x)=-1 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{(x-2)^2}=-1 \Leftrightarrow (x-2)^2=9 \wedge (x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=-3 \vee x-2=3 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=5 \wedge x \neq 2$

Como o ponto P tem abcissa positiva e o ponto C tem a mesma abcissa que o ponto P, conclui-se que $C(5, 0)$.

$g(5)=\dfrac{2\times 5+5}{5-2}=5$, logo $P(5, 5)$.

Como o ponto B tem a mesma ordenada que o ponto P, conclui-se que $B(0, 5)$.

Como $5=-1\times 5+b \Leftrightarrow b=10$, a reta t tem equação reduzida $y=-x+10$, pelo que $A(0, 10)$ e $D(10, 0)$.

A área do trapézio $[ABCD]$ pode ser determinada pela diferença entre as áreas dos triângulos $[AOD]$ e $[BOC]$: $\dfrac{10\times 10}{2}-\dfrac{5\times 5}{2}=37{,}5$.

54.4 Tem-se que $g'(x)=-\dfrac{a^2+5}{(x-a)^2}$, pelo que para $a=2$, $g'(x)=-\dfrac{2^2+5}{(x-2)^2}=-\dfrac{9}{(x-2)^2}$.

$h'(x)=(4x+g(x))'=(4x)'-g'(x)=4-\dfrac{9}{(x-2)^2}=\dfrac{4(x-2)^2-9}{(x-2)^2}$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{4(x-2)^2-9}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow 4(x-2)^2-9=0 \wedge (x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=\dfrac{9}{4} \wedge x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x-2=-\dfrac{3}{2} \vee x-2=\dfrac{3}{2} \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \vee x=\dfrac{7}{2} \wedge x \neq 2$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2		$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$4(x-2)^2-9$	+	0	–	–	–	0	+
$(x-2)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$h'(x)$	+	0	–	N.D.	–	0	+
Monotonia de h	↗	Máx.	↘	N.D.	↘	Mín.	↗

h é crescente em $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ e em $\left[\dfrac{7}{2}, +\infty\right[$; h é decrescente em $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right[$ e em $\left]2, \dfrac{7}{2}\right]$;

h tem mínimo relativo igual a $h\left(\dfrac{7}{2}\right)=4\times\dfrac{7}{2}+g\left(\dfrac{7}{2}\right)=14+\dfrac{2\times\frac{7}{2}+5}{\frac{7}{2}-2}=22$, em $x=\dfrac{7}{2}$, e máximo relativo igual a $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=4\times\dfrac{1}{2}+g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2+\dfrac{2\times\frac{1}{2}+5}{\frac{1}{2}-2}=-2$, em $x=\dfrac{1}{2}$.

55.1 $d(0)=0^2-19\times 0+100=100$ cm

55.2 $\text{tmv}_{d,\,[0,\,3]}=\dfrac{d(3)-d(0)}{3-0}=\dfrac{52-100}{3}=-16$ cm/s

55.3 A velocidade no instante $t=4$ s é $d'(4)=2\times 4-19=-11$ cm/s, e a distância é $d(4)=4^2-19\times 4+100=40$ cm .

55.4 $d'(t)=2t-19$

$d'(t)=0 \iff 2t-19=0 \iff t=\dfrac{19}{2}$ s

t	0		$\frac{19}{2}$	$+\infty$
$d'(t)$	−	−	0	+
Monotonia de d	Máx.	↘	Mín.	↗

Nesse instante, $t=\dfrac{19}{2}$ s, a distância de P à origem é

$d\left(\dfrac{19}{2}\right)=\left(\dfrac{19}{2}\right)^2-19\times\dfrac{19}{2}+100=9{,}75$ cm, sendo esta a distância mínima à origem.

PÁG. 188

Aplicar +

56.1 $a(3)+150=-4{,}9\times 3^2+90\times 3+150=375{,}9$ m

56.2 $a(t)=-150 \iff -4{,}9t^2+90t=-150 \iff -4{,}9t^2+90t+150=0 \iff$

$$\iff t=\frac{-90\pm\sqrt{90^2-4(-4{,}9)\times 150}}{2(-4{,}9)} \iff t=\frac{-90\pm\sqrt{11040}}{-9{,}8} \iff$$

$$\iff t=\frac{-90-\sqrt{11040}}{-9{,}8} \vee t=\frac{-90+\sqrt{11040}}{-9{,}8}$$

Logo, $t\approx 19{,}9 \vee t\approx -1{,}5$. Como $t\geqslant 0$, conclui-se que $t\approx 19{,}9$.

56.3 $\text{tmv}_{a,\,[0,\,10]}=\dfrac{a(10)-a(0)}{10-0}=\dfrac{410-0}{10}=41$ m/s

Nos primeiros 10 segundos, a altura do projétil aumenta, em média, a uma taxa de 41 m/s, ou seja, a uma velocidade média de 41 m/s .

56.4 $a'(0)=-9{,}8\times 0+90=90$ m/s

No instante em que o projétil foi lançado, a sua altura aumentou a uma taxa (velocidade) de 90 m/s .

56.5 $a'(t)=\left(-4{,}9t^2+90t\right)'=-4{,}9\times 2t+90=-9{,}8t+90$

$a'(t)=0 \iff -9{,}8t+90=0 \iff -9{,}8t=-90 \iff t=\dfrac{-90}{-9{,}8} \iff t=\dfrac{450}{49}$

t	0		$\frac{450}{49}$		$\approx 19{,}9$
$a'(t)$	+	+	0	–	–
Monotonia de a	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.

A altura máxima do projétil em relação à base do vale é $a\left(\frac{450}{49}\right)+150\approx 563{,}3$ m .

Alternativamente:

Como a função a é quadrática e o seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo, a ordenada do seu vértice, caso a abcissa pertença ao domínio da função, é o seu máximo.

$a(t)=0 \Leftrightarrow -4{,}9t^2+90t=0 \Leftrightarrow t(-4{,}9t+90)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee -4{,}9t+90=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=\frac{90}{4{,}9}$

A abcissa do vértice é $\frac{0+\frac{90}{4{,}9}}{2}=\frac{90}{9{,}8}\approx 9{,}2$ s e pertence ao domínio de a , pelo que a altura máxima do projétil em relação à base do vale é, aproximadamente, $a(9{,}2)+150=563{,}3$ m .

57.1 Sendo x o comprimento da parte do fio que será usada para construir a circunferência e r o raio da circunferência, tem-se $x=2\pi r \Leftrightarrow r=\frac{x}{2\pi}$, pelo que a área definida pela circunferência é dada por $\pi r^2=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}$.

O comprimento da parte do fio que será usada para construir o quadrado é $10-x$. Sendo l a medida do lado do quadrado, tem-se $10-x=4l \Leftrightarrow l=\frac{10-x}{4}$, pelo que a área definida pelo quadrado é dada por $l^2=\left(\frac{10-x}{4}\right)^2=\frac{(10-x)^2}{16}$.

Assim, a soma das áreas definidas pela circunferência e pelo quadrado é dada, em função de x por $s(x)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(10-x)^2}{16}$, $0<x<10$.

57.2 $s'(x)=\left(\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(10-x)^2}{16}\right)'=\left(\frac{x^2}{4\pi}\right)'+\left(\frac{(10-x)^2}{16}\right)'=\frac{2x}{4\pi}+\frac{2(10-x)(-1)}{16}=\frac{x}{2\pi}-\frac{10-x}{8}$

$$s'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2\pi}-\frac{10-x}{8}=0 \Leftrightarrow \frac{8x-2\pi(10-x)}{16\pi}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8x-2\pi(10-x)=0 \Leftrightarrow 8x-20\pi+2\pi x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(8+2\pi)=20\pi \Leftrightarrow x=\frac{10\pi}{4+\pi}$$

x	0		$\frac{10\pi}{4+\pi}$		10
$s'(x)$	N.D.	–	0	+	N.D.
Monotonia de s	N.D.	↘	Mín.	↗	N.D.

A soma das áreas é mínima para $x=\frac{10\pi}{4+\pi}$, pelo que o comprimento da circunferência é $x=\frac{10\pi}{4+\pi}\approx 4{,}4$ m e o perímetro do quadrado é $10-x=10-\frac{10\pi}{4+\pi}\approx 5{,}6$ m .

PÁG. 189

Aplicar +

58. Lado da folha: $\sqrt{900}=30$ cm e seja x do lado do quadrado que será cortado nos cantos.

Volume da caixa: $V(x)=x(30-2x)^2$, com $0<x<15$ (x é sempre positivo e inferior a metade do lado da folha).

$$V'(x)=\left(x(30-2x)^2\right)'=x'(30-2x)^2+x\left((30-2x)^2\right)'=$$
$$=(30-2x)^2+2x(30-2x)(30-2x)'=(30-2x)^2+2x(30-2x)\times(-2)=$$
$$=(30-2x)^2-4x(30-2x)=(30-2x)((30-2x)-4x)=(30-2x)(30-6x)$$

$$V'(x)=0 \Leftrightarrow (30-2x)(30-6x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 30-2x=0 \vee 30-6x=0 \Leftrightarrow x=15 \vee x=5$$

x	0		5		15
$V'(x)$	N.D.	+	0	–	N.D.
Monotonia de V	N.D.	↗	Máx.	↘	N.D.

O volume da caixa é máximo se o lado do quadrado for 5 cm e o valor desse volume é $V(5)=2000\ \text{cm}^3$.

59.1 Medida do lado paralelo ao muro: $50-2x$

$A(x)=x(50-2x)$, com $0<x<25$ (x é sempre positivo e inferior a metade do comprimento da rede).

$$A'(x)=(x(50-2x))'=x'(50-2x)+x(50-2x)'=50-2x+x\times(-2)=50-4x$$

$$A'(x)=0 \Leftrightarrow 50-4x=0 \Leftrightarrow x=12{,}5$$

x	0		12,5		25
$A'(x)$	N.D.	+	0	–	N.D.
Monotonia de A	N.D.	↗	Máx.	↘	N.D.

A área vedada é máxima se $x=12{,}5$, pelo que as dimensões do retângulo de modo que a área vedada seja máxima são 12,5 m e $50-2\times 12{,}5=25$ m .

59.2

a. $A(x)=72 \Leftrightarrow x(50-2x)=72 \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} 50-2x=\frac{72}{x}$

$$c(x)=2x+(50-2x)=2x+\frac{72}{x}$$

b. $c'(x)=\left(2x+\frac{72}{x}\right)'=(2x)'+\left(\frac{72}{x}\right)'=$

$$=2+\frac{72'x-72x'}{x^2}=2-\frac{72}{x^2}$$

$c'(x)=0 \Leftrightarrow 2-\frac{72}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2=36 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=6 \text{ m}$

x	0		6	$-\infty$
$c'(x)$	N.D.	–	0	+
Monotonia de c	N.D.	↘	Mín.	↗

O valor mínimo de rede que deve ser usada para fazer a vedação é $c(6)=2\times 6+\frac{72}{6}=24 \text{ m}$.

60.1 $A=100 \Leftrightarrow 2\pi r^2+2\pi rh=100 \Leftrightarrow \pi r^2+\pi rh=50 \Leftrightarrow h=\frac{50-\pi r^2}{\pi r}$

(r é a medida do raio da base do cilindro e h é a sua altura.)

$V=\pi r^2h=\pi r^2\times\frac{50-\pi r^2}{\pi r}=r\left(50-\pi r^2\right)=50r-\pi r^3$; $V(r)=50r-\pi r^3$.

$2\pi r^2<100 \Leftrightarrow r^2<\frac{100}{2\pi} \Leftrightarrow r^2<\frac{50}{\pi} \underset{r>0}{\Leftrightarrow} 0<r<\sqrt{\frac{50}{\pi}}$

$V'(r)=\left(50r-\pi r^3\right)'=50-3\pi r^2$

$V'(r)=0 \Leftrightarrow 50-3\pi r^2=0 \Leftrightarrow r^2=\frac{50}{3\pi} \underset{r>0}{\Leftrightarrow} r=\sqrt{\frac{50}{3\pi}}$

r	0		$\sqrt{\frac{50}{3\pi}}$		$\sqrt{\frac{50}{\pi}}$
$V'(r)$	N.D.	+	0	–	N.D.
Monotonia de V	N.D.	↗	Máx.	↘	N.D.

O raio da base do cilindro de volume máximo é $\sqrt{\frac{50}{3\pi}}\approx 2{,}3$ cm

60.2 $V=200 \Leftrightarrow \pi r^2h=200 \Leftrightarrow h=\frac{200}{\pi r^2}$

(r é a medida do raio da base do cilindro e h é a sua altura.)

$A=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\times\frac{200}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{400}{r}$; $A(r)=2\pi r^2-\frac{400}{r}$, com $r>0$.

$A'(r)=\left(2\pi r^2+\frac{400}{r}\right)'=4\pi r-\frac{400}{r^2}$

$A'(r)=0 \Leftrightarrow 4\pi r-\frac{400}{r^2}=0 \Leftrightarrow \frac{4\pi r^3-400}{r^2}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\pi r^3-400=0 \wedge r^2\neq 0 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}} \wedge r\neq 0$$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}$	$+\infty$
$A'(r)$	N.D.	$-$	0	$+$
Monotonia de A	N.D.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

O raio da base do cilindro que tem menor área total é $\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}} \approx 3{,}2$ cm .

61. $x'(t) = \left(0{,}2t^3 - 4{,}5t^2 + 21{,}6t - 6\right)' = 0{,}6t^2 - 9t + 21{,}6$

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}6t^2 - 9t + 21{,}6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 0{,}6 \times 21{,}6}}{2 \times 0{,}6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{29{,}16}}{1{,}2} \Leftrightarrow t = \frac{9 - 5{,}4}{1{,}2} \vee t = \frac{9 + 5{,}4}{1{,}2} \Leftrightarrow t = 3 \vee t = 12$$

t	0		3		12		15
$x'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
Monotonia de x	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.

Os extremos da função x são $x(0) = -6$, $x(3) = 23{,}7$, $x(12) = -49{,}2$ e $x(15) = -19{,}5$.

$|-6| = 6$, $|-49{,}2| = 49{,}2$ e $|-19{,}5| = 19{,}5$, pelo que, como $49{,}5 > 23{,}7 > 19{,}5 > 6$, a distância máxima do ponto P à origem é $49{,}2$ cm .

PÁG. 190

Aplicar +

62.1 $A(a) = \dfrac{a \times h(a)}{2} = \dfrac{a\left(-\frac{a^2}{2} + \frac{3a}{2} + 3\right)}{2} = -\dfrac{a^3}{4} + \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a}{2}$

62.2 $A'(a) = \left(-\dfrac{a^3}{4} + \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a}{2}\right)' = \left(-\dfrac{a^3}{4}\right)' + \left(\dfrac{3a^2}{4}\right)' + \left(\dfrac{3a}{2}\right)' =$

$$= -\frac{3a^2}{4} + \frac{2 \times 3a}{4} + \frac{3}{2} = -\frac{3a^2}{4} + \frac{3a}{2} + \frac{3}{2}$$

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3a^2}{4} + \frac{3a}{2} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 6a + 6 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} \vee a = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \underbrace{1 - \sqrt{3}}_{<0} \vee a = 1 + \sqrt{3}$$

a	0		$1+\sqrt{3}$		4
$A'(a)$	+	+	0	–	–
Monotonia de A	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.

A área do triângulo é máxima em $x=1+\sqrt{3}$.

63.1 Seja h a medida do comprimento da aresta $[CH]$, com $h>0$.

Como o volume da pirâmide $[ABCDH]$ é 8 cm^3 , vem $\frac{1}{3}\times 2x\times x\times h=8 \Leftrightarrow h=\frac{24}{2x^2} \Leftrightarrow h=\frac{12}{x^2}$.

Assim, a área total da superfície do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ é dada, em função de x , por:

$$S(x)=2\left(2x\times x+2x\times\frac{12}{x^2}+x\times\frac{12}{x^2}\right)=2\left(2x^2+\frac{24}{x}+\frac{12}{x}\right)=2\left(2x^2+\frac{36}{x}\right)=4x^2+\frac{72}{x}$$

63.2 $S'(x)=\left(4x^2+\frac{72}{x}\right)'=\left(4x^2\right)'+\left(\frac{72}{x}\right)'=2\times 4x+\frac{(72)'x-72(x)'}{x^2}=8x-\frac{72}{x^2}$

$$S'(x)=0 \Leftrightarrow 8x-\frac{72}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{8x^3-72}{x^2}=0 \Leftrightarrow 8x^3-72=0\wedge x^2\neq 0 \Leftrightarrow x^3=9\wedge x\neq 0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{9}$$

x	0		$\sqrt[3]{9}$	$+\infty$
$8x^3-72$	N.D.	–	0	+
x^2	N.D.	+	+	+
$S'(x)$	N.D.	–	0	+
Monotonia de S	N.D.	↘	Mín.	↗

O valor mínimo da área total da superfície que o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ pode ter é

$S\left(\sqrt[3]{9}\right)=4\left(\sqrt[3]{9}\right)^2+\frac{72}{\sqrt[3]{9}}\approx 52\text{ cm}^2$.

64.1 O vértice F tem coordenadas da forma $(5-k,\ 3+k,\ k)$, $k\in\mathbb{R}$.

Como a abcissa de F é a , vem $5-k=a \Leftrightarrow k=5-a$ e, assim, as coordenadas de F são $(a,\ 8-a,\ 5-a)$.

O volume do paralelepípedo é dado por $x_F\times y_F\times z_F$, ou seja, em função de a , $V(a)=a(8-a)(5-a)=a^3-13a^2+40a$.

$a>0\wedge 8-a>0\wedge 5-a>0 \Leftrightarrow a>0\wedge a<8\wedge a<5 \Leftrightarrow 0<a<5$, pelo que $D_V=]0,\ 5[$.

64.2 $V'(a)=\left(a^3-13a^2+40a\right)'=3a^2-26a+40$

$$V'(a)=0 \Leftrightarrow 3a^2-26a+40=0 \Leftrightarrow a=\frac{-(-26)\pm\sqrt{(-26)^2-4\times 3\times 40}}{2\times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{26\pm\sqrt{196}}{6} \Leftrightarrow a=\frac{26-14}{6}\vee a=\frac{26+14}{6} \Leftrightarrow a=2\vee a=\underbrace{\frac{20}{3}}_{>5}$$

a	0		2		5
$V'(a)$	N.D.	+	0	–	N.D.
Monotonia de V	N.D.	↗	Máx.	↘	N.D.

V é crescente em $]0, 2]$ e é decrescente em $[2, 5[$;

V tem máximo absoluto igual a 36 , em $a = 2$.

$F(2, 6, 3)$, $A(2, 0, 0)$, $B(2, 6, 0)$, $C(0, 6, 0)$, $D(0, 0, 3)$, $E(2, 0, 3)$, $G(0, 6, 3)$ e $O(0, 0, 0)$.

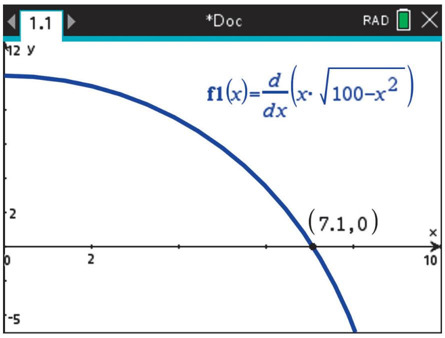
O paralelepípedo tem, no máximo, 36 unidades cúbicas de volume, o que acontece quando a abcissa do vértice F é 2 , sendo as dimensões do paralelepípedo $\overline{BC} = 2$, $\overline{AB} = 6$ e $\overline{BF} = 3$ $(2 \times 6 \times 3 = 36)$.

PÁG. 191

Aplicar +

65. Os retângulos que se podem inscrever numa circunferência com diâmetro $[BC]$ tal que $\overline{BC} = 10$ tem $[BC]$ como diagonal. Essa diagonal divide esses retângulos em dois triângulos retângulos (inscritos em semicircunferências).

Sendo x a medida de um dos lados do triângulo (e, consequentemente, do retângulo), a medida do outro lado é $\sqrt{10^2 - x^2}$. Assim, a área de cada retângulo é $A(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.



A tem máximo em $x \approx 7{,}1$, pois $A'(x) > 0$ em $]0 ; 7{,}1[$ e $A'(x) < 0$ em $]7{,}1 ; 10[$.

Trata-se de um quadrado de lado $\approx 7{,}1$ cm .

66. $\overline{AC}^2 = 5^2 + x^2 \underset{\overline{AC} > 0}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{x^2 + 25}$ e $\overline{BC} = 8 - x$.

Seja t_1 o tempo que a pessoa gasta para ir do ponto A ao ponto C .

$$3t_1(x) = \sqrt{x^2 + 25} \Leftrightarrow t_1(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{3}$$

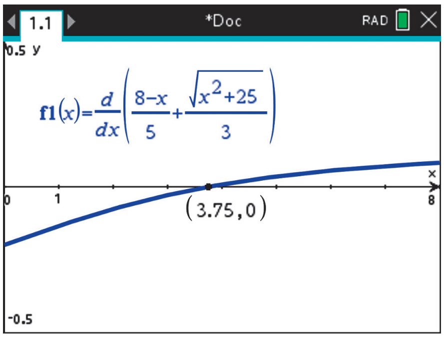
Seja t_2 o tempo que a pessoa gasta para ir do ponto C ao ponto B .

$$5t_2(x) = 8 - x \Leftrightarrow t_2(x) = \frac{8 - x}{5}$$

h é o tempo que a pessoa gasta para ir do ponto A ao ponto B .

$$h(x) = t_1(x) + t_2(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{3} + \frac{8 - x}{5}$$

Como $C \in [PB]$ e $\overline{PB} = 8$, $x \in [0, 8]$.



h tem mínimo em $x = 3{,}75$, pois $h'(x) < 0$ em $[0\,;3{,}75[$ e $h'(x) > 0$ em $]3{,}75\,;8]$.

Portanto, a pessoa deve desembarcar num ponto entre P e B a $3{,}75$ km do ponto P .

PÁG. 195

Autoavaliação

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 1 + 2 = 3$

Opção correta: **(D)**

2. A reta r tem declive igual a $h'(3)$.

$h'(x) = 2x - 1$; $h'(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$.

O ponto de coordenadas $(3\,,\,h(3))$ pertence a r .

$h(3) = 3^2 - 3 = 6$, $6 = 5 \times 3 + b \iff b = -9$

A equação reduzida da reta r é $y = 5x - 9$.

3. A reta r tem declive igual a $\dfrac{-2 - 0}{0 - 1} = 2$; logo, $g'(1) = 2$, pelo que excluímos as opções (B) e (C).

A opção (D) também é excluída, pois se $2x$ definisse a função derivada de g , a função g seria uma função quadrática.

Opção correta: **(A)**

4. $\text{tmv}_{L,\,[10,\,13]} = \dfrac{L(13) - L(10)}{13 - 10} \approx -0{,}10$

Entre o início de 2010 e o início de 2013 o número de leões neste parque nacional, em África, diminuiu à taxa média de, aproximadamente, 10 leões por ano.

5. $h'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que h é crescente em $\mathbb{R}$ (h' tem um único zero em $x = 0$) e não tem extremos.

Opção correta: **(A)**

PÁG. 196

Autoavaliação

6.1 $h'(t) = 1{,}2t^2 - 8{,}4t + 12$, $h'(4) = 1{,}2 \times 4^2 - 8{,}4 \times 4 + 12 = -2{,}4$

Passadas quatro horas desde o início do teste, o avião estava a descer à taxa instantânea de $2{,}4$ quilómetros por hora.

6.2 $h'(t) = 0 \Leftrightarrow 1{,}2t^2 - 8{,}4t + 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 10}}{2 \times 1} \Leftrightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{7-3}{2} \vee t = \frac{7+3}{2} \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 5$$

t	0		2		5		6
$h'(t)$	+	+	0	–	0	+	+
Monotonia de h	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.	↗	Máx.

h é crescente em $[0 , 2]$ e em $[5 , 6]$ e é decrescente em $[2 , 5]$.

Tem mínimo relativo igual a $h(5) = 5$, em $t = 5$, e mínimo absoluto igual a $h(0) = 0$, em $t = 0$.

Tem máximo relativo igual a $h(6) = 7{,}2$, em $t = 6$, e máximo absoluto igual a $h(2) = 10{,}4$, em $t = 2$.

Durante as primeiras duas horas desta parte do teste, o avião esteve a subir até atingir a altitude máxima de $10{,}4$ km . Entre o final da segunda hora e o início da sexta esteve a descer, até aos 5 km de altitude e na última hora esteve a subir.

7. Como o domínio de f não é $\mathbb{R}$, o domínio de f' também não é, pelo que se excluem as opções (A) e (D).

Como a função f é decrescente, nos dois ramos que constituem o seu domínio, a função f' é negativa no seu domínio.

Opção correta: **(C)**

PÁG. 197

Autoavaliação

8. A expressão analítica de f' é da forma $f'(x) = a(x-h)^2 + k$, com $a < 0$, $h > 0$ e $k > 0$.

(A) $\left(-(x+2)^3 + x\right)' = -3(x+2)^2 + 1$

(B) $\left(-(x-2)^3 + x\right)' = -3(x-2)^2 + 1$

(C) $\left(-(x+2)^3 - x\right)' = -3(x+2)^2 - 1$

(D) $\left(-(x-2)^3 - x\right)' = -3(x-2)^2 - 1$

Opção correta: **(B)**

9. $3y+x=6 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+2$, pelo que $g'(3)=-\frac{1}{3}$ e como o ponto de coordenadas $(3\,,\,g(3))$ pertence ao gráfico de g , $g(3)=-\frac{1}{3}\times 3+2=1$.

$h(3)=(2\times 3-4)^2=2^2=4$, $h'(x)=2\,(2x-4)\times 2=8x-16$, pelo que $h'(3)=8\times 3-16=8$.

$(g\times h)'(3)=g'(3)\times h(3)+g(3)\times h'(3)=-\frac{1}{3}\times 4+1\times 8=-\frac{4}{3}+8=\frac{20}{3}$

10. $g(0)=\frac{1}{2}\,(0-2)^2+3=5$; $A\,(0\,,\,5)$

$g(x)=5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,(x-2)^2+3=5 \Leftrightarrow (x-2)^2=4 \Leftrightarrow x-2=-2 \vee x-2=2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=4$

Logo, $B\,(4\,,\,5)$.

$g'(x)=2\times\frac{1}{2}(x-2)=x-2$

O declive da reta r é $g'(0)=0-2=-2$ e a ordenada na origem é 5 .

$r:\ y=-2x+5$

O declive da reta s é $g'(4)=4-2=2$ e como $B\,(4\,,\,5)$ pertence à reta s , a sua ordenada na origem é $5=2\times 4+b \Leftrightarrow b=-3$.

$s:\ y=2x-3$

$$\begin{cases} y=-2x+5 \\ y=2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+5=2x-3 \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2\times 2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$C\,(2\,,\,1)$

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times |y_B-y_C|}{2}=\frac{4\times 4}{2}=8$$

11. $$h'(x)=\frac{(5-x^2)'\,(x-3)-(5-x^2)\,(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{-2x\,(x-3)-(5-x^2)}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{-2x^2+6x-5+x^2}{(x-3)^2}=\frac{-x^2+6x-5}{(x-3)^2}$$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+6x-5}{(x-3)^2}=0 \Leftrightarrow -x^2+6x-5=0 \wedge (x-3)^2\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\,(-1)\,(-5)}}{2\,(-1)} \wedge x-3\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{-2} \wedge x\neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6-4}{-2} \vee x=\frac{-6+4}{-2} \wedge x\neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=5 \vee x=1 \wedge x\neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=5 \vee x=1$$

x	$-\infty$	1		3		5	$+\infty$
$-x^2+6x-5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x-3)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	N.D.	$+$	0	$-$
Monotonia de h	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	N.D.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

h é decrescente em $]-\infty, 1]$ e em $[5, +\infty[$ e é crescente em $[1, 3[$ e em $]3, 5]$.

h tem mínimo relativo igual a $h(1)=\frac{5-1^2}{1-3}=-2$, em $x=1$, e tem máximo relativo igual a $h(5)=\frac{5-5^2}{5-3}=-10$, em $x=5$.

12.1 f é uma função quártica, pelo que é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Assim, como $f(-3)$ é um extremo de f (máximo absoluto), pelo teorema de Fermat, $f'(-3)=0$.

12.2 Como f tem derivada nula em $x=-3$ e em $x=2$, sendo que $f(-3)$ é máximo absoluto de f e é o seu o único extremo, f é decrescente em $[-3, +\infty[$, e conclui-se que $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-3, +\infty[\setminus\{2\}$.

PÁG. 198

Começar a preparar o exame

1.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonia de h	$\nearrow$	Mín.	$\searrow$

h é crescente em $]-\infty, 0]$, é decrescente em $[0, +\infty[$ e tem máximo relativo em $x=0$.

Opção correta: **(D)**

2.1

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Monotonia de f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

f é decrescente em $[2, 5]$, é crescente em $]-\infty, 2]$ e em $[5, +\infty[$, $f(2)$ é mínimo relativo de f e $f(5)$ é máximo relativo de f.

Opção correta: **(B)**

2.2 Como f é crescente em $[2, 5]$, tem-se $f(3)<f(4)$, pelo que, das opções apresentadas, $f(4)$ só não pode ser 3.

Opção correta: **(D)**

PÁG. 199

Começar a preparar o exame

3.

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
$f\,'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de f	↗	Máx.	↘	Mín.	↗

Opção correta: **(A)**

4.1 $g(k)=k\times k^2=k^3$, pelo que $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-k^3}{x-k}=k \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}=k \Leftrightarrow g'(k)=k$.

$g'(x)=2kx$; $g'(k)=2k^2$.

$2k^2=k \Leftrightarrow 2k^2-k=0 \Leftrightarrow k(2k-1)=0 \Leftrightarrow k=0 \vee 2k-1=0 \Leftrightarrow \underbrace{k=0}_{\text{imp.}} \vee k=\dfrac{1}{2}$

Opção correta: **(C)**

4.2 A equação reduzida da reta r é da forma $y=mx+b$, com $m=g'(2)$.

$g'(x)=2kx$; $g'(2)=2k\times 2=4k$, pelo que $m=4k$.

O ponto de coordenadas $(2\,,\,g(2))$ pertence à reta r .

$g(2)=k\times 2^2=4k$

$4k=4k\times 2+b \Leftrightarrow b=-4k$

Conclui-se que m e b são simétricos.

Assim, a equação reduzida da reta r é $y=-bx+b$.

PÁG. 200

Começar a preparar o exame

5. $g'(x)=(2x-1)'f(x)+(2x-1)f\,'(x)=2f(x)+(2x-1)f\,'(x)$

O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é:

$g'(1)=2f(1)+(2\times 1-1)f\,'(1)=2\times 1+1\times 1=3$

O ponto de coordenadas $(1\,,\,g(1))$ pertence à reta e $g(1)=(2\times 1-1)f(1)=1\times 1=1$, pelo que a ordenada na origem é $1=3\times 1+b \Leftrightarrow b=-2$.

$y=3x-2$

Opção correta: **(A)**

6.

(A) $\underbrace{f\,'(0)}_{<0}\times\underbrace{f\,'(6)}_{>0}<0$

(B) $\underbrace{f\,'(-3)}_{>0}\times\underbrace{f\,'(6)}_{>0}>0$

(C) $\underbrace{f\,'(-3)}_{>0}\times\underbrace{f\,'(0)}_{<0}<0$

(D) $\underbrace{f\,'(0)}_{<0}\times\underbrace{f\,'(6)}_{>0}<0$

Opção correta: **(D)**

7. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 9 \Leftrightarrow f'(2) = 9$, que é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 . Como essa reta tem ordenada na origem igual a -15 , a sua equação reduzida é $y = 2x - 15$.

Logo, como o ponto de coordenadas $(2, f(2))$ pertence a esta reta, tem-se:

$f(2) = 2 \times 2 - 15 = 9 \times 2 - 15 = 3$

Opção correta: **(C)**

8. O valor de $\text{tmv}_{g,\,[-2,\,4]}$ é igual ao declive da reta secante ao gráfico de g nos pontos de abcissa -2 e 4 . Como essa reta é perpendicular à reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0 , cujo declive é $g'(0) = \dfrac{3}{2}$, o seu declive é $-\dfrac{1}{\frac{3}{2}} = -\dfrac{2}{3}$.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 201

Começar a preparar o exame

9. $\text{tmv}_{d,\,[1,\,3]} = \dfrac{d(3)-d(1)}{3-1} = \dfrac{1{,}5 - 11{,}5}{2} = -5 \text{ m/s}$

No intervalo de tempo $[1, 3]$, em segundos, a velocidade média do objeto é -5 m/s , ou seja, no intervalo de tempo $[1, 3]$, a distância do objeto ao solo diminui, em média, à velocidade média de 5 m/s .

10. Como a parábola tem a concavidade voltada para cima e o seu vértice é o ponto de coordenadas $(3, 2)$, só as retas tangentes ao gráfico de f em pontos de abcissa menor do que 3 têm declive negativo.

Opção correta: **(A)**

11. O declive da reta r é $f'(0) > 0$, pelo que se excluem as opções (C) e (D).

O ponto de coordenadas $(-5, f'(-5))$ pertence à reta r e sabe-se que $f'(-5) > 0$.

(A) $f'(-5) = -\dfrac{5}{3} + 1 = -\dfrac{2}{3} < 0$

(B) $f'(-5) = -\dfrac{5}{3} + 2 = \dfrac{1}{3} > 0$

Opção correta: **(B)**

12. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1)$

O valor pedido é igual ao declive da reta t : $\dfrac{1-0}{0-(-2)} = \dfrac{1}{2}$

Opção correta: **(C)**

PÁG. 202

Começar a preparar o exame

13. $f'(x)=3x^2+6x-9$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2-4}{2} \vee x=\frac{-2+4}{2} \Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

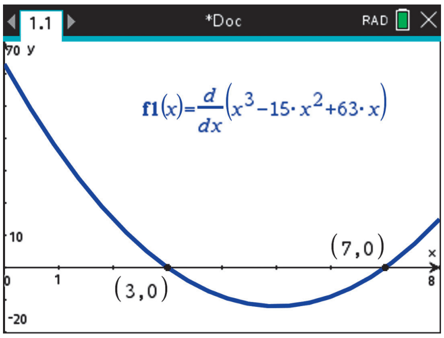
f é decrescente em $[-3, 1]$ e é crescente em $]-\infty, -3]$ e em $[1, +\infty[$.

f tem mínimo relativo igual a $f(1)=-16$ em $x=1$ e tem máximo relativo igual a $f(3)=16$ em $x=-3$.

14. $g'(x)=3x^2\geqslant 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ e g' tem apenas um zero em $x=0$.

Logo, g é crescente em $\mathbb{R}$.

15. $v'(t)=3t^2-30t+63$



$$v'(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-30t+63=0 \Leftrightarrow t^2-10t+21=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\times1\times21}}{2\times1} \Leftrightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{10-4}{2} \vee t=\frac{10+4}{2} \Leftrightarrow t=3 \vee t=7$$

$v'(t)<0$ em $]3, 7[$, pelo que v é decrescente em $[3, 7]$, e $v'(t)>0$ em $[0, 3[\cup]7, 8]$, pelo que v é crescente em $[0, 3]$ e em $[7, 8]$.

Portanto, v tem máximo relativo em $t=3$, que é igual a $v(3)=81$, e tem máximo relativo em $t=8$, que é igual a $v(8)=56$.

Logo, a velocidade máxima atingida foi de 81 centenas de rotações por minuto.

16.1 $g'(x)=\dfrac{\left(3x^2+11x+18\right)'(2x+6)-\left(3x^2+11x+18\right)(2x+6)'}{(2x+6)^2}=$

$$=\frac{(6x+11)(2x+6)-\left(3x^2+11x+18\right)\times 2}{(2x+6)^2}=$$

$$=\frac{12x^2+36x+22x+66-6x^2-22x-36}{(2x+6)^2}=$$

$$=\frac{6x^2+36x+30}{(2(x+3))^2}=\frac{6\left(x^2+6x+5\right)}{4(x+3)^2}=\frac{3x^2+18x+15}{2(x+3)^2}$$

16.2 $2y=-9x+c \Leftrightarrow y=-\dfrac{9}{2}x+\dfrac{c}{2}$

$$g'(x)=-\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{3x^2+18x+15}{2(x+3)^2}=-\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}=-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+5+3(x+3)^2}{(x+3)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+24x+32}{(x+3)^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+24x+32=0 \wedge (x+3)^2\neq 0 \Leftrightarrow x^2+6x+8=0 \wedge x+3\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times 1\times 8}}{2\times 1} \wedge x\neq -3 \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{4}}{2} \wedge x\neq -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6-2}{2} \vee x=\frac{-6+2}{2} \wedge x\neq -3 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=-2 \wedge x\neq -3$$

$g(-4)=-11$ e $g(-2)=4$, logo $A(-2,4)$.

Substituindo as coordenadas de A na equação da reta:

$$4=-\frac{9}{2}\times(-2)+\frac{c}{2} \Leftrightarrow 4=9+\frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{2}=-5 \Leftrightarrow c=-10$$

16.3 $g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2+18x+15}{2(x+3)^2}=0 \Leftrightarrow 3x^2+18x+15=0 \wedge 2(x+3)^2\neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+5=0 \wedge (x+3)^2\neq 0 \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times 1\times 5}}{2\times 1} \wedge x+3\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{2} \wedge x\neq -3 \Leftrightarrow x=\frac{-6-4}{2} \vee x=\frac{-6+4}{2} \wedge x\neq -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-5 \vee x=-1 \wedge x\neq -3$$

x	$-\infty$	-5		-3		-1	$+\infty$
$3x^2+18x+15$	+	0	–	–	–	0	+
$2(x+3)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$g'(x)$	+	0	–	N.D.	–	0	+
Monotonia de g	↗	Máx.	↘	N.D.	↘	Mín.	↗

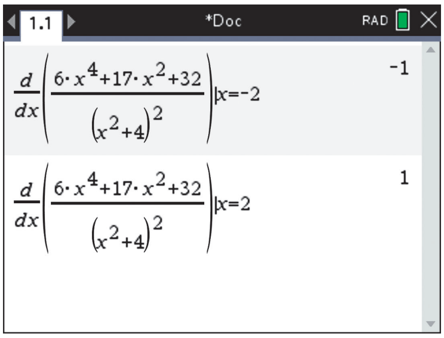
g é decrescente em $[-5,-3[$ e em $]-3,-1]$ e é crescente em $]-\infty,-5]$ e em $[-1,+\infty[$.

g tem mínimo relativo em $x=-1$ e máximo relativo em $x=-5$.

PÁG. 203

Começar a preparar o exame

17. Como $m_r = f'(-2) = -1$ e $m_s = f'(2) = 1$, vem que $m_r = -\dfrac{1}{m_s}$, pelo que r e s são perpendiculares.



18.1 Seja $x = \overline{CF}$.

Como os triângulos $[ADE]$ e $[ABC]$ são semelhantes, tem-se $\dfrac{x}{8} = \dfrac{\overline{AD}}{6} \Leftrightarrow \overline{AD} = \dfrac{3}{4}x$, pelo que $\overline{CD} = 6 - \dfrac{3}{4}x$.

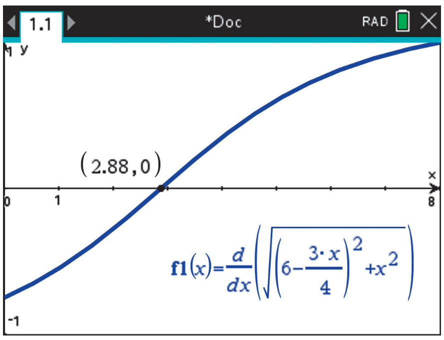
Assim, a área do retângulo é, em função de x, dada por $A(x) = x\left(6 - \dfrac{3}{4}x\right) = 6x - \dfrac{3}{4}x^2$, com $0 < x < 8$.

$A'(x) = 6 - \dfrac{3}{2}x$; $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - \dfrac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

x	0		4		8
$A'(x)$	N.D.	+	0	–	N.D.
Monotonia de A	N.D.	↗	Máx.	↘	N.D.

A área do retângulo é máxima se $x = 4$, pelo que as dimensões do retângulo de área máxima são $\overline{CF} = 4$ e $\overline{CD} = 6 - \dfrac{3}{4} \times 4 = 3$.

18.2 $\overline{CE}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{CE}^2 = x^2 + \left(6 - \dfrac{3}{4}x\right)^2 \underset{\overline{CE}>0}{\Leftrightarrow} \overline{CE} = \sqrt{x^2 + \left(6 - \dfrac{3}{4}x\right)^2}$



c tem mínimo em $x = 2{,}88$, pois $c'(x) < 0$ em $]0\,;2{,}88[$ e $c'(x) > 0$ em $]2{,}88\,;8[$.

Portanto, o valor mínimo de $\overline{CE}$ é $c(2{,}88) = 4{,}8$.

PÁG. 204

Começar a preparar o exame

19. A reta de equação $y=2x$ contém a origem. Como é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, $f'(0)=2$ e $f(0)=2\times 0=0$.

(A) $f'(x)=2x+1$, $f'(0)=2\times 0+1=1\neq 2$.

(B) $f'(x)=2x+2$, $f'(0)=2\times 0+2=2$ e $f(0)=0$.

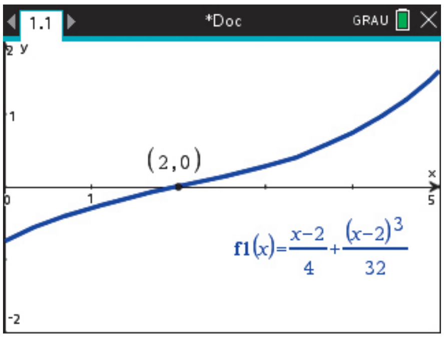
(C) $f'(x)=2x+2$, $f'(0)=2\times 0+2=2$ e $f(0)=1\neq 0$.

(D) $f'(x)=2x+1$, $f'(0)=2\times 0+1=1\neq 2$.

Opção correta: **(B)**

20.1 $a(5)-a(0)\approx 1{,}13$ m

20.2 $a'(x)=\dfrac{2(x-2)}{8}+\dfrac{4(x-2)^3}{128}=\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{(x-2)^3}{32}$



Como $a'(x)<0 \Leftrightarrow x\in[0,2[$ e $a'(x)>0 \Leftrightarrow x\in]2,5]$, a função a é decrescente em $[0,2]$ e é crescente em $[2,5]$, tendo um mínimo absoluto em $x=2$.

Altura mínima: $a(2)=1{,}5$ m ; distância ao poste 1: 2 m.

21.1 $3^2=h^2+r^2 \Leftrightarrow r^2=9-h^2$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi(9-h^2)h=-\frac{1}{3}\pi h^3+3\pi h$; $V(h)=-\frac{1}{3}\pi h^3+3\pi h$, $0<h<3$.

21.2 $V'(h)=-\pi h^2+3\pi$

$V'(h)=0 \Leftrightarrow -\pi h^2+3\pi=0 \underset{h>0}{\Leftrightarrow} h=\sqrt{3}$ cm

h	0		$\sqrt{3}$		3
$V'(h)$	N.D.	+	0	−	N.D.
Monotonia de V	N.D.	↗	Máx.	↘	N.D.

O volume do cone é máximo em $h=\sqrt{3}$, portanto, o cone de volume máximo tem altura, h, igual a $\sqrt{3}$ e raio, r, igual a $\sqrt{9-\sqrt{3}^2}=\sqrt{6}$ cm.

PÁG. 205

Começar a preparar o exame

22. $h'(x) = (-g(x)+4)' = -g'(x)$

Como g é uma função polinomial de grau 4, h é uma função polinomial de grau 3, pelo que se excluem as opções (A) e (D).

Como g é decrescente em $]-\infty, -1]$, g' é negativa em $]-\infty, -1[$ e $-g'$ é positiva em $]-\infty, -1[$.

Opção correta: **(C)**

23.1 $V(x) = \frac{1}{3} \times \overline{PQ} \times \overline{QR} \times z_S = \frac{1}{3} \times 3x \times x \times (8-2x) = 8x^2 - 2x^3$

$x > 0 \wedge 3x > 0 \wedge 8 - 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 4 \Leftrightarrow D_V =]0, 4[$

23.2 $V'(x) = (8x^2 - 2x^3)' = 16x - 6x^2$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 16x - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x(16-6x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 16 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{8}{3}$

x	0		$\frac{8}{3}$		4
$V'(x)$	N.D.	+	0	–	N.D.
Monotonia de V	N.D.	↗	Máx.	↘	N.D.

V é decrescente em $\left[\frac{8}{3}, 4\right[$, é crescente em $\left]0, \frac{8}{3}\right]$ e tem máximo em $x = \frac{8}{3}$, ou seja, o volume da pirâmide é máximo se $x = \frac{8}{3}$ e esse valor é $V\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{512}{27}$.

PÁG. 206

Começar a preparar o exame

24. Em $]-\infty, -2]$, $g'(x) = \frac{-2(x+1) - (-2x-5) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$.

Em $]-2, +\infty[$, $g'(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1) \times 3}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2-4}{-2} \vee x = \frac{-2+4}{-2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-2		-1		3	$+\infty$
$h'(x)$	+		–	0	+	0	–
Monotonia de h	↗	Máx.	↘	Mín.	↗	Máx.	↘

g é decrescente em $[-2, -1]$ e em $[3, +\infty[$; g é crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[-1, 3]$.

g tem mínimo relativo igual a $g(-1)=\frac{2}{9}$, em $x=-1$, tem máximo relativo igual a $g(-2)=1$, em $x=-2$, e tem máximo absoluto igual a $g(3)=\frac{34}{9}$, em $x=3$.

25. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f(-3)$ é um extremo relativo de f, pelo teorema de Fermat, tem-se $f'(-3)=0$. Logo, I $\longrightarrow$ b.

Como $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$, tem-se $f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$. Assim, f é crescente em $\mathbb{R}^+$.

Logo, II $\longrightarrow$ c.

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=g'(-2)=\frac{2-(-2)}{(-2)^2+2}=\frac{2}{3}$. Logo, III $\longrightarrow$ c.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x^2+2}=0 \Leftrightarrow 2-x=0 \wedge x^2+2\neq 0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonia de g	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Logo, IV $\longrightarrow$ a.

Resumindo: I $\longrightarrow$ b; II $\longrightarrow$ c; III $\longrightarrow$ c; IV $\longrightarrow$ a.

PÁG. 207
Teste global

1. $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2} \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}$, pelo que (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.

Opção correta: **(B)**

2. Começamos por escolher uma das filas para colocar os ovos vermelhos. O número de maneiras de o fazer é ${}^2C_1=2$. Para dispor os três ovos vermelhos, como são indistinguíveis, vamos escolher três dos cinco compartimentos dessa fila, o que pode ser feito de ${}^5C_3$ maneiras. Para cada uma destas maneiras, escolhem-se 3 dos 5 compartimentos da outra fila para dispor os três ovos azuis, o que pode ser feito também de ${}^5C_3$ maneiras, pois estes ovos também são indistinguíveis.

Os quatro ovos verdes vão ser dispostos nos quatro compartimentos restantes. Como são indistinguíveis, só há uma maneira de o fazer.

Portanto, o número de maneiras diferentes de dispor os dez ovos na caixa, ficando os ovos vermelhos numa das filas e os ovos azuis na outra é $2\times{}^5C_3\times{}^5C_3$.

Opção correta: **(A)**

3. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, concluímos que o coeficiente do termo de maior grau de g é negativo, pelo que se exclui a opção (A).

A opção (B) exclui-se porque a expressão analítica que apresenta é de uma função cúbica.

A opção (C) exclui-se porque como $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, também $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, pelo que g não pode ser positiva em $]-\infty, 0[$. Como $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, g pode ser negativa em $]0, +\infty[$.

Opção correta: **(D)**

PÁG. 208

Teste global

4.1 O resto da divisão inteira de $f(x)$ por $x-2$ é $f(2) = 2^3 - 5 \times 2^2 - 2 \times 2 + 24 = 8$.

Opção correta: **(B)**

4.2 $f(-2) = (-2)^3 - 5 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 24 = 0$, pelo que -2 é raiz do polinómio $f(x)$.

$f(x) = (x+2)\left(x^2 - 7x + 12\right)$

$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{7-1}{2} \vee x = \dfrac{7+1}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 4$

	1	-5	-2	24
-2		-2	14	-24
	1	-7	12	0

Logo, $f(x) = (x+2)\left(x^2 - 7x + 12\right)$.

Logo, o polinómio $f(x)$ tem três raízes, -2 , 3 e 4 , todas de multiplicidade 1 (o polinómio $f(x)$ tem grau 3).

Portanto, -2 é raiz de multiplicidade 1 de $f(x)$.

4.3 $g(1) = f(1) \Leftrightarrow a - 1 = 18 \Leftrightarrow a = 19$

$(g-f)(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) - f(x) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 19 - x - x^3 + 5x^2 + 2x - 24 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^3 + 5x^2 + x - 5 > 0 \Leftrightarrow$

$\underset{*}{\Leftrightarrow} (x-1)\left(-x^2 + 4x + 5\right) > 0$

$x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(-x^2 + 4x + 5\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee -x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee \Leftrightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-1) \times 5}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{-4-6}{-2} \vee x = \dfrac{-4+6}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5 \vee x = -1$

*Como $g(1) = f(1)$, 1 é raiz do polinómio $(g-f)(x) = -x^3 + 5x^2 + x - 5$.

	-1	5	1	-5
1		-1	4	5
	-1	4	5	0

Logo, $(g-f)(x) = (x-1)\left(-x^2 + 4x + 5\right)$.

x	$-\infty$	-1		1		5	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-x^2+4x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(g-f)(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Logo, $(g-f)(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[\cup]5, +\infty[$.

5. O valor de $\lim\limits_{x \to 3} \frac{h(x)-h(3)}{x-3} = h'(3)$ é igual ao declive da reta r: $\frac{1-2}{0-3} = \frac{1}{3}$.

Opção correta: **(A)**

6. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

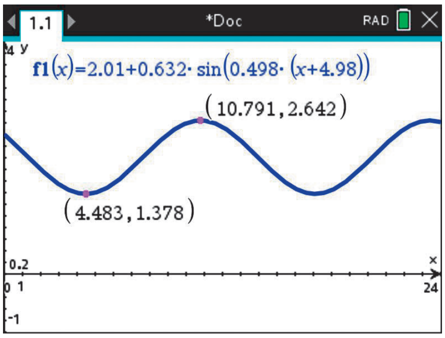
$\Leftrightarrow x-3=0 \vee (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=3 \vee x-1=0 \Leftrightarrow x=3 \vee x=1$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x-3$	–	–	–	0	+
$(x-1)^2$	+	0	+	+	+
$g'(x)$	–	0	–	0	+
Monotonia de g	↘		↘	Mín.	↗

Logo, g tem apenas um extremo, em $x=3$.

Opção correta: **(C)**

7.



Máximo: 2,64 m ; mínimo: 1,38 m ; diferença de t: 6,31 h .

A altura máxima da maré é, aproximadamente, 2,64 metros e a altura mínima é, aproximadamente, 1,38 metros. Entre a maré alta e a maré baixa imediatamente a seguir, decorrem, aproximadamente, 6 h 19 min .

PÁG. 209

Teste global

8. Como a reta que contém a altura da pirâmide é perpendicular à base da pirâmide, concluímos que o vetor diretor da reta é normal ao plano que contém a base da pirâmide.

Como o plano que contém a base da pirâmide contém a origem, concluímos que uma equação desse plano é $6x - 8y + 0z = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$.

Para determinar a medida da altura da pirâmide vamos determinar a distância do vértice V ao plano que contém a base da pirâmide, isto é, do ponto V ao ponto de interseção da reta que contém a altura da pirâmide com o plano, projeção ortogonal do vértice V no plano, designado por V'.

Para tal, podemos escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta e substituir essas coordenadas na equação do plano.

As coordenadas de um ponto genérico da reta são $(7+6k\,,\,-1-8k\,,\,5)$, $k \in \mathbb{R}$ (para cada valor real de k , obtemos um ponto da reta).

Substituindo na equação do plano, tem-se

$3(7+6k)-4(-1-8k)=0 \Leftrightarrow 21+18k+4+32k=0 \Leftrightarrow 25+50k=0 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$

Portanto, $V'\left(7+6\left(-\frac{1}{2}\right),\,-1-8\left(-\frac{1}{2}\right),\,5\right)$, ou seja, $V'(4\,,\,3\,,\,5)$.

A distância do vértice V ao plano é, então, dada por:

$\overline{VV'}=\sqrt{(4+2)^2+(3-11)^2+(5-5)^2}=10$

9. Como o comprimento de cada segmento de reta, com exceção do primeiro, é igual a $\frac{2}{3}$ do comprimento do anterior, a sucessão dos comprimentos dos segmentos de reta da linha poligonal é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$. Designando por (u_n) essa sucessão, tem-se que $u_3=4$, pelo que, como $u_3=u_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$, conclui-se que $u_1=\frac{4}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$.

O comprimento total da linha poligonal é:

$$S_{25}=\frac{4}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{25}}{1-\frac{2}{3}}=9\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{25}}{\frac{1}{3}}=27\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{25}\right)\approx 27 \text{ cm}$$

10. O número de maneiras de arrumar as quatro bolas na caixa, de modo que pelo menos uma bola não fique no compartimento numerado com o seu número, é igual ao número de maneiras de as arrumar ordenadamente e sem restrições, excluindo a arrumação em que cada uma das bolas fica no compartimento correspondente ao seu número, ou seja, é igual a ${}^9A_4-1=3024-1=3023$.

PÁG. 210
Teste global

11. O gráfico **I** não pode ser, pois se $g(x)\longrightarrow 1$ quando $x\longrightarrow\pm\infty$, então a reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de g .

O gráfico **II** não pode ser, dado que $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=-\infty$, pelo que $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=+\infty$.

O gráfico **III** não pode ser, dado que $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=-\infty$.

12. $g'(x)=\frac{3x^2}{2}$; $g'(2)=\frac{3\times 2^2}{2}=6$; $g(2)=\frac{2^3}{2}=4$; $f'(2)=\frac{1}{2}$; como $(2\,,\,f(2))$ pertence à reta representada na figura, $f(2)=\frac{2}{2}+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{f'(2)g(2)-f(2)\,g'(2)}{(g(2))^2}=\frac{\frac{1}{2}\times 4-\frac{5}{2}\times 6}{4^2}=-\frac{13}{16}$$

PÁG. 211

Teste global

13.1 $c'(x)=3x^2-24x+21$

$c'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-24x+21=0 \Leftrightarrow x^2-8x+7=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times7}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{8-6}{2} \vee x=\frac{8+6}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=7$$

c	0		1		7		12
$c'(x)$	N.D.	+	0	–	0	+	+
Monotonia de c	N.D.	↗	Máx.	↘	Mín.	↗	Máx.

c é crescente em $]0,1]$ e em $[7,12]$; c é decrescente em $[1,7]$; c tem máximo relativo igual a $c(1)=1010$, em $x=1$, e tem máximo absoluto igual a $c(12)=1252$, em $x=12$; c tem mínimo absoluto igual a $c(7)=902$, em $x=7$.

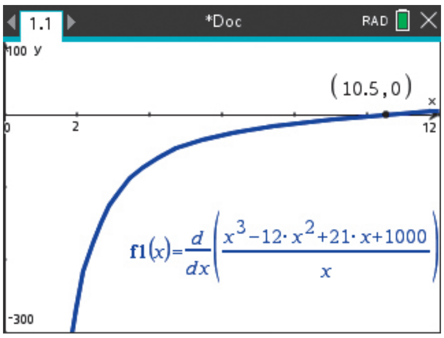
Quando o número de peças produzidas varia de 0 para 100, o custo de produção aumenta, atingindo um máximo de 1 milhão e 10 mil euros.

O custo de produção também aumenta quando o número de peças produzidas varia de 700 para 1200, atingindo o valor máximo de 1 milhão e 252 mil euros.

Quando o número de peças produzidas varia de 100 para 700, o custo de produção diminui, atingindo um mínimo de 902 mil euros.

13.2 $c_m(12)=\frac{c(12)}{12}=\frac{1252}{12}\approx 104,333$ milhares de euros, ou seja, $104\,333,33$ euros.

13.3 $c'_m(x)<0$ em $]0;10,5[$ e $c'_m(x)>0$ em $]10,5;12]$, pelo que c_m tem um mínimo absoluto em $x=10,5$, enquanto a função c tem um mínimo absoluto em $x=7$.



14. $f'(x)=4-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4-\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \wedge x\neq0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \vee x=\frac{1}{2} \wedge x\neq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	N.D.	$-$	0	$+$
Monotonia de f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	N.D.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

f é decrescente em $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$ e em $\left]0, \frac{1}{2}\right]$; f é crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$;

f tem mínimo relativo igual a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$, em $x = \frac{1}{2}$, e tem máximo relativo igual a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$, em $x = -\frac{1}{2}$.