Números complexos

PÁG. 14

Diagnóstico

1.1 $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{sen}\beta=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}$.

1.2 $x^2=8^2+15^2 \Leftrightarrow x^2=289 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{289} \Leftrightarrow x=17$

$\operatorname{sen}\alpha=\frac{8}{17}$, $\cos\alpha=\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$, $\operatorname{sen}\beta=\frac{15}{17}$, $\cos\beta=\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{15}{8}$.

1.3 $x^2=6{,}5^2-3{,}3^2 \Leftrightarrow x^2=31{,}36 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{31{,}36} \Leftrightarrow x=5{,}6$

$\operatorname{sen}\alpha=\cos\beta=\frac{5{,}6}{6{,}5}=\frac{56}{65}$, $\cos\alpha=\operatorname{sen}\beta=\frac{3{,}3}{6{,}5}=\frac{33}{65}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5{,}6}{3{,}3}=\frac{56}{33}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3{,}3}{5{,}6}=\frac{33}{56}$.

1.4 $x^2=4^2-3^2 \Leftrightarrow x^2=7 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{7}$

$\operatorname{sen}\alpha=\cos\beta=\frac{3}{4}$, $\cos\alpha=\operatorname{sen}\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

2.1 $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{3}\right)-2\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=$

$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}+2\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}$

Cálculo auxiliar:

$-\frac{3\pi}{4}+2\pi=\frac{5\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{3}-2\times2\pi=-\frac{\pi}{3}$

2.2 $\cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(-\frac{13\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{14\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Cálculo auxiliar:

$-\frac{25\pi}{4}+3\times2\pi=-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}+2\times2\pi=\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$; $\frac{14\pi}{3}-2\times2\pi=\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$

2.3 $\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right)\times\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\times\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

Cálculo auxiliar:

$\frac{23\pi}{6}-2\times2\pi=-\frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{3}-2\pi=\frac{\pi}{3}$

2.4 $\frac{\cos\left(\frac{11\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{8\pi}{3}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{6}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{0-\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)}=$

$=\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{4}$

Cálculo auxiliar:

$\frac{11\pi}{2}-2\times2\pi=\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{10\pi}{3}+2\times2\pi=\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}-2\pi=\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{6}-2\pi=-\frac{\pi}{6}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

3. $\operatorname{tg}\left(\frac{17\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{17\pi}{6}-2\pi\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, pelo que se excluem as opções (A) e (D).

A opção (B) exclui-se porque $-\frac{\pi}{6}\notin[0\ ,\ 2\pi]$.

Opção correta: **(C)**

4.1 $(x+5)^2=x^2+2\times5\times x+5^2=x^2+10x+25$

4.2 $(x-10)^2=x^2-2\times10\times x+10^2=x^2-20x+100$

4.3 $(2x-1)^2=(2x)^2-2\times1\times2x+1^2=4x^2-4x+1$

4.4 $(x-7)(x+7)=x^2-7^2=x^2-49$

4.5 $\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2\times3\times\frac{1}{2}x+3^2=\frac{1}{4}x^2-3x+9$

4.6 $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=x^2-\sqrt{5}^2=x^2-5$

4.7 $(2-3x)^2=2^2-2\times3x\times2+(3x)^2=9x^2-12x+4$

4.8 $(-5+2x)^2=(-5)^2-2\times2x\times5+(2x)^2=4x^2-20x+25$

4.9 $(-1-3x)^2=(-1)^2+2\times3x\times1+(3x)^2=9x^2+6x+1$

4.10 $(3x-4)^2-(3x+4)^2=(3x-4-(3x+4))(3x-4+3x+4)=-8\times6x=-48x$

4.11 $(4-3x)(4+3x)-(x-2)^2=4^2-(3x)^2-\left(x^2-2\times2\times x+2^2\right)=$

$=16-9x^2-x^2+4x-4=-10x^2+4x+12$

4.12 $(x-4)^2-(x-4)(x+4)=x^2-2\times4\times x+4^2-\left(x^2-4^2\right)=$

$=x^2-8x+16-x^2+16=-8x+32$

PÁG. 15

Diagnóstico

5.1 $x^2+3x=x(x+3)$

5.2 $-x+3x^2=x(-1+3x)$

5.3 $2(x-2)-(x-1)(x-2)=(x-2)(2-(x-1))=(x-2)(3-x)$

5.4 $2(x-3)^2-(x-3)=(x-3)(2(x-3)-1)=(x-3)(2x-7)$

5.5 $4x^2+8x+4=(2x+2)^2$

5.6 $x^2-6x+9=(x-3)^2$

5.7 $x^2-3x+\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$

5.8 $16x^2-4x+\frac{1}{4}=\left(4x-\frac{1}{2}\right)^2$

5.9 $x^2-9=(x-3)(x+3)$

5.10 $4x^2-\frac{1}{9}=\left(2x-\frac{1}{3}\right)\left(2x+\frac{1}{3}\right)$

5.11 $x^2-\frac{1}{25}=\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)$

5.12 $-x^2+36=(6-x)(6+x)$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

5.13 $2x^2-10=2\left(x^2-5\right)=2\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$

5.14 $x^3-x^2-6x=x\left(x^2-x-6\right)=x(x-3)(x+2)$

Cálculo auxiliar:

$$x^2-x-6=0 \iff x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1} \iff x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2} \iff$$

$$\iff x=\frac{1-5}{2}\vee x=\frac{1+5}{2} \iff x=-2\vee x=3$$

5.15 Como o termo independente é -6, os divisores inteiros de -6 $(-6,\ 6,\ -3,\ 3,\ -2,\ 2,\ -1$ e $1)$ são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio $x^3-6x^2+11x-6$.

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)\left(x^2-5x+6\right)$$

$$x^2-5x+6=0 \iff x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times6}}{2\times1} \iff x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2} \iff$$

$$\iff x=\frac{5-1}{2}\vee x=\frac{5+1}{2} \iff x=2\vee x=3$$

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$$

5.16 Como o termo independente é 4, os divisores inteiros de 4 $(-4,\ 4,\ -2,\ 2,\ -1$ e $1)$ são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio $3x^3-5x^2-4x+4$.

	3	−5	−4	4
−1		−3	8	−4
	3	−8	4	0

$$3x^3-5x^2-4x+4=(x+1)\left(3x^2-8x+4\right)$$

$$3x^2-8x+4=0 \iff x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times3\times4}}{2\times3} \iff x=\frac{8\pm\sqrt{16}}{6} \iff$$

$$\iff x=\frac{8-4}{6}\vee x=\frac{8+4}{6} \iff x=\frac{2}{3}\vee x=2$$

$$3x^3-5x^2-4x+4=3(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)$$

5.17 $x^4-2x^3+4x^2-8x=x\left(x^3-2x^2+4x-8\right)$

Como o termo independente é -8, os divisores inteiros de -8 $(-8,\ 8,\ -4,\ 4,\ -2,\ 2,\ -1$ e $1)$ são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio x^3-2x^2+4x-8.

	1	−2	4	−8
2		2	0	8
	1	0	4	0

$$x^4-2x^3+4x^2-8x=x\left(x^3-2x^2+4x-8\right)=x(x-2)\left(x^2+4\right)$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

5.18 Como o termo independente é 4, os divisores inteiros de 4 $(-4,\ 4,\ -2,\ 2,\ -1$ e $1)$ são os «candidatos» a raízes inteiras do polinómio $2x^4-5x^3-3x^2+8x+4$.

	2	−5	−3	8	4
2		4	−2	−10	−4
	2	−1	−5	−2	0
−1		−2	3	2	
	2	−3	−2	0	

$$2x^4-5x^3-3x^2+8x+4=(x-2)(x+1)(2x^2-3x-2)$$

$$2x^2-3x-2=0 \iff x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-2)}}{2\times2} \iff x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4} \iff$$

$$\iff x=\frac{3-5}{4}\vee x=\frac{3+5}{4} \iff x=-\frac{1}{2}\vee x=2$$

$$2x^4-5x^3-3x^2+8x+4=2(x-2)(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)^2$$

6.1 Trata-se da interseção do semiplano aberto inferior à reta de equação $y=-1$ com a circunferência de centro $(1,\ -1)$ e raio 1 e o seu interior.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 1\wedge y<-1$.

6.2 Trata-se da interseção do semiplano aberto inferior à reta de equação $y=-x+2$ com o exterior da circunferência de centro $(2,\ -1)$ e raio 2.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $(x-2)^2+(y+1)^2>4\wedge y<-x+2$.

6.3 Trata-se da interseção do semiplano aberto à direita da reta de equação $x=-3$ com o semiplano fechado superior à reta de equação $y=0$ e o semiplano fechado superior à reta de equação $y=x$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $x>-3\wedge y\geqslant 0\wedge y\geqslant x$.

6.4 $(x\leqslant 0\wedge 0\leqslant y\leqslant 1\wedge y\leqslant -x)\vee(x\geqslant 0\wedge y\leqslant 0\wedge y\geqslant -x)$

PÁG. 19

Aplicar

2.1 Parte real: 4; Parte imaginária: 5.

2.2 Parte real: 4; Parte imaginária: -5.

2.2 Parte real: -4; Parte imaginária: 5.

2.4 Parte real: -4; Parte imaginária: -5.

3.1 $\mathrm{Re}(z)=4$ e $\mathrm{Im}(z)=-\frac{3}{2}$.

3.2 $\mathrm{Re}(z)\neq 0$ e $\mathrm{Im}(z)\neq 0$.

4. Sim, o zero.

5. Reais: 2 e -2; imaginários puros: $-2i$ e $3i$.

PÁG. 20

6.1 $a^2-1=0 \iff a^2=1 \iff a=-1\vee a=1$

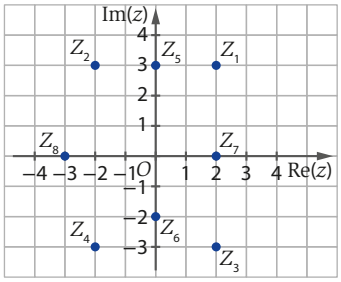
6.2 $\mathrm{Re}(z)=0\wedge \mathrm{Im}(z)\neq 0 \iff 3a+2=0\wedge a^2-1\neq 0 \iff a=-\frac{2}{3}\wedge a\neq\pm 1 \iff a=-\frac{2}{3}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 22

Tarefa 1

1.

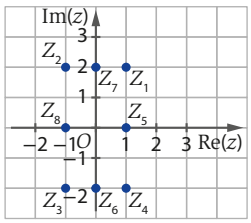


3. $w_1 = 1 + 2i$, $w_2 = 2i$, $w_3 = -1 + i$, $w_4 = -2 - 2i$, $w_5 = -i$, $w_6 = 2 - i$, $w_7 = 2$.

PÁG. 23

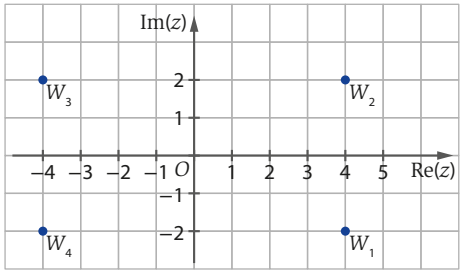
Aplicar

7.



8. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 2i$, $z_3 = 1 + 4i$, $z_4 = -4 + 3i$, $z_5 = -4 - 2i$, $z_6 = -2 - i$, $z_7 = 1 - i$, $z_8 = -3i$.

9. $w_2 = 4 + 2i$, $w_3 = -4 + 2i$, $w_4 = -4 - 2i$.



PÁG. 24

Tarefa 2

3. Paralelogramo

4. $\overrightarrow{OZ_3} = \overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}$

5. $\overrightarrow{OZ_1}$ tem coordenadas (a , b) ; $\overrightarrow{OZ_2}$ tem coordenadas (c , d) ; $\overrightarrow{OZ_3}$ tem coordenadas $(a + c , b + d)$.

6. $(a + c) + (b + d)i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 26

Aplicar

12.1 $(3+2i)+(5+4i)=(3+5)+(2+4)i=8+6i$

12.2 $(7-3i)+(-2+6i)=(7-2)+(-3+6)i=5+3i$

12.3 $(-4+8i)+(9-5i)=(-4+9)+(8-5)i=5+3i$

12.4 $(2-i)+(-7+4i)=(2-7)+(-1+4)i=-5+3i$

12.5 $(10+i)+(-3-2i)=(10-3)+(1-2)i=7-i$

12.6 $(-5-7i)+(5-4i)=(-5+5)+(-7-4)i=-11i$

13.1 $(2+3i)(1+4i)=2\times 1+2\times 4i+3i\times 1+3i\times 4i=2+8i+3i+12i^2=2+11i-12=-10+11i$

13.2 $(5-2i)(3+i)=5\times 3+5\times i-2i\times 3-2i\times i=15+5i-6i-2i^2=15-i+2=17-i$

13.3 $(4+i)(4-i)=4\times 4-i\times i=16-i^2=16+1=17$

13.4 $(-3+2i)(-1+5i)=-3\times(-1)-3\times 5i+2i\times(-1)+2i\times 5i=$

$=3-15i-2i+10i^2=3-17i-10=-7-17i$

13.5 $(6+i)(2+3i)=6\times 2+6\times 3i+i\times 2+i\times 3i=12+18i+2i+3i^2=$

$=12+20i-3=9+20i$

13.6 $(3-2i)(3-2i)=(3-2i)^2=3^2-2\times 2i\times 3+(2i)^2=9-12i-4=5-12i$

14.1 $z+w=i+1=1+i$, $z\times w=i\times 1=i$

14.2 $z+w=2+i-i=2$

$z\times w=(2+i)\times(-i)=2\times(-i)+i\times(-i)=-2i-i^2=-2i+1=1-2i$

14.3 $z+w=(-2-i)+(1+2i)=-1+i$

$z\times w=(-2-i)\times(1+2i)=-2\times 1-2\times 2i-i\times 1-i\times 2i=$

$=-2-4i-i-2i^2=-2-5i+2=-5i$

14.4 $z+w=\left(\sqrt{2}+\frac{i}{2}\right)+i=\sqrt{2}+\left(\frac{1}{2}+1\right)i=\sqrt{2}+\frac{3}{2}i$

$z\times w=\left(\sqrt{2}+\frac{i}{2}\right)\times i=\sqrt{2}\times i+\frac{i}{2}\times i=\sqrt{2}i+\frac{1}{2}i^2=\sqrt{2}i-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\sqrt{2}i$

14.5 $z+w=-\frac{1}{2}-2i$, $z\times w=-\frac{1}{2}\times(-2i)=i$

14.6 $z+w=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i\right)+(-1-i)=\left(\frac{2}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-1\right)i=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$

$z\times w=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i\right)\times(-1-i)=\frac{2}{3}\times(-1)+\frac{2}{3}\times(-i)+\frac{1}{3}i\times(-1)+\frac{1}{3}i\times(-i)=$

$=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i-\frac{1}{3}i-\frac{1}{3}i^2=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i-\frac{1}{3}i=-\frac{1}{3}-i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

15. $z+w=(1-bi)+(a+2i)=(1+a)+(-b+2)i$

$z+w$ é um imaginário puro se $1+a=0 \wedge -b+2\neq 0 \iff a=-1 \wedge b\neq 2$.

$z\times w=(1-bi)\times(a+2i)=1\times a+1\times 2i-bi\times a-bi\times 2i=$

$=a+2i-abi-2bi^2=a+2i-abi+2b=a+2b+(2-ab)i$

$z\times w$ é um número real se $2-ab=0 \iff ab=2$.

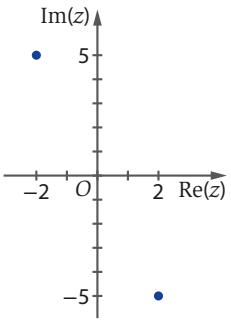
Como $a=-1$, $-b=2 \iff b=-2$ $(b\neq 2)$.

Logo, $a=-1$ e $b=-2$.

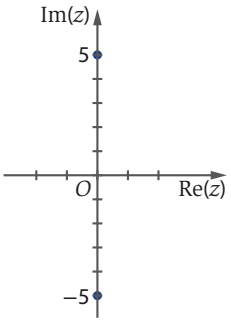
PÁG. 28

Aplicar

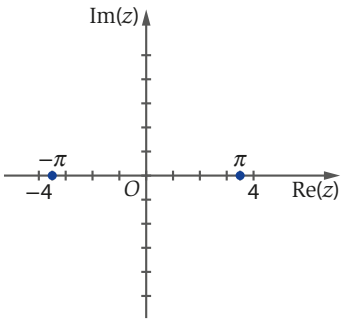
18.1 $-(2-5i)=-2+5i$



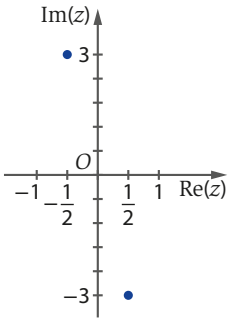
18.2 $-(5i)=-5i$



18.3 $-(-\pi)=\pi$



18.4 $-\left(-\frac{1}{2}+3i\right)=\frac{1}{2}-3i$



19.1 $(3+2i)-(5+4i)=(3-5)+(2-4)i=-2-2i$

19.2 $(-4+8i)-(9-5i)=(-4-9)+(8+5)i=-13+13i$

19.3 $(10+i)-(-3-2i)=(10+3)+(1+2)i=13+3i$

19.4 $(7-3i)-(-2+6i)=(7+2)+(-3-6)i=9-9i$

19.5 $(2-i)-(-7+4i)=(2+7)+(-1-4)i=9-5i$

19.6 $(-5-7i)-(5-4i)=(-5-5)+(-7+4)i=-10-3i$

20.1 $(-1+3i)+(-3+2i)-(-1-i)=(-1-3+1)+(3+2+1)i=-3+6i$

20.2 $(-1+3i)\times(-3+2i)+(-1-i)=-1\times(-3)-1\times 2i+3i\times(-3)+3i\times 2i+(-1-i)=$

$=3-2i-9i+6i^2+(-1-i)=3-11i-6+(-1-i)=-4-12i$

20.3 $(-3+2i)\times((-1+3i)-(-1-i))=(-3+2i)\times((-1+1)+(3+1)i)=(-3+2i)\times 4i=$

$=-3\times 4i+2i\times 4i=-12i+8i^2=-8-12i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

20.4 $(-1-i)\times((-1+3i)+2(-3+2i))=(-1-i)\times((-1-6)+(3+4)i)=(-1-i)\times(-7+7i)=$
$=-1\times(-7)-1\times 7i-i\times(-7)-i\times 7i=7-7i+7i-7i^2=7+7=14$

21. Seja $z_3=a+bi$, com a, $b\in\mathbb{R}$.
$z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow (1+4+a)+(2-5+b)i=0 \Leftrightarrow 5+a=0\wedge -3+b=0 \Leftrightarrow a=-5\wedge b=3$

Assim, $z_3=-5+3i$.

22. $z\times(-z)=(a+bi)\times(-a-bi)=b^2-a^2-2abi$
Como o afixo de z pertence ao 2.º quadrante do plano de Argand-Gauss, a e b têm sinais contrários, pelo que $\text{Im}(z\times(-z))=-2abi>0$.

PÁG. 31
Aplicar

24. $z=-4+3i$

24.1 $\text{Re}(z)=\text{Re}(-4+3i)=-4$

24.2 $\text{Im}(z)=\text{Im}(-4+3i)=3$

24.3 $\overline{z}=\overline{-4+3i}=-4-3i$

24.4 $|z|=|-4+3i|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

25. P_1 é o afixo do número complexo w;

P_4 é o afixo do número complexo $\overline{w}$ (o afixo de $\overline{w}$ é a imagem pela reflexão de eixo real do afixo de w);

P_3 é o afixo do número complexo $-w$ (o afixo de $-w$ é o simétrico do afixo de w relativamente à origem);

P_2 é o afixo do número complexo $-\overline{w}$ (o afixo de $\overline{w}$ é a imagem pela reflexão de eixo real do afixo de w e o afixo de $-\overline{w}$ é o simétrico do afixo de $\overline{w}$ relativamente à origem).

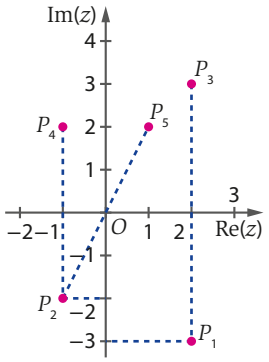
26. P_1 é o afixo de $z_1=2-3i$;

P_2 é o afixo de $z_2=-1-2i$;

P_3 é o afixo de $\overline{z_1}=2+3i$;

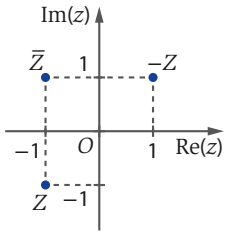
P_4 é o afixo de $\overline{z_2}=-1+2i$;

P_5 é o afixo de $-z_2=1+2i$.

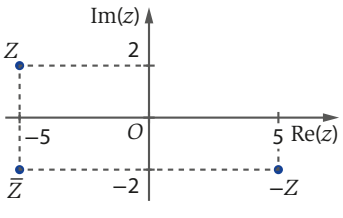


PÁG. 32
Aplicar

27.1 $z=-1-i$ $\quad\overline{z}=-1+i$ $\quad -z=1+i$

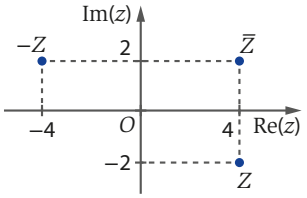


27.2 $z=-5+2i$ $\quad\overline{z}=-5-2i$ $\quad -z=5-2i$

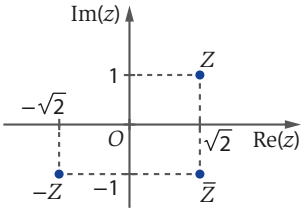


M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

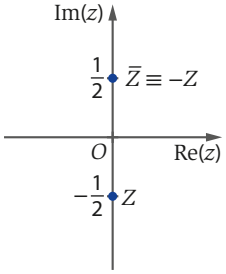
27.3 $z = 4 - 2i \quad \overline{z} = 4 + 2i \quad -z = -4 + 2i$



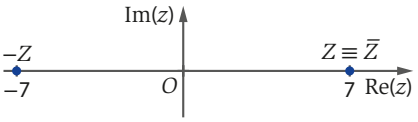
27.4 $z = \sqrt{2} + i \quad \overline{z} = \sqrt{2} - i \quad -z = -\sqrt{2} - i$



27.5 $z = -\frac{1}{2}i \quad \overline{z} = \frac{1}{2}i \quad -z = \frac{1}{2}i$



27.6 $z = 7 \quad \overline{z} = 7 \quad -z = -7$



28.1 $z - \overline{w} = 3 - 4i - \overline{2 - i} = 3 - 4i - (2 + i) = 1 - 5i$

28.2 $\overline{z} + w = \overline{3 - 4i} + 2 - i = 3 + 4i + 2 - i = 5 + 3i$

28.3 $w - \overline{z} \times w = 2 - i - \overline{3 - 4i} \times (2 - i) = 2 - i - (3 + 4i) \times (2 - i) =$

$= 2 - i - (6 - 3i + 8i + 4) = 2 - i - (10 + 5i) = -8 - 6i$

29.1 $z_1 - 3z_2 = 2 - 3i - 3(-5i) = 2 - 3i + 15i = 2 + 12i$

29.2 $\overline{z_1} - iz_4 = \overline{2 - 3i} - i(-2i - 1) = 2 + 3i + 2i^2 + i = 2 + 3i - 2 + i = 4i$

29.3 $-2z_3 + iz_1 - z_2 \times \overline{z_4} = -2(-3 + i) + i(2 - 3i) - (-5i) \times \overline{-2i - 1} =$

$= 6 - 2i + 2i - 3i^2 + 5i(-1 + 2i) = 6 + 3 - 5i + 10i^2 =$

$= 9 - 5i - 10 = -1 - 5i$

29.4 $z_1 \times z_3 - \overline{z_2 \times z_4} = (2 - 3i) \times (-3 + i) - \overline{(-5i) \times (-2i - 1)} =$

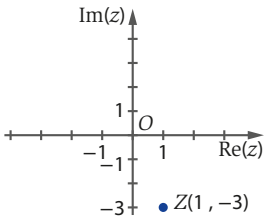
$= -6 + 2i + 9i - 3i^2 - \overline{10i^2 + 5i} = -6 + 11i + 3 - \overline{(-10 + 5i)} =$

$= -3 + 11i - (-10 - 5i) = 7 + 16i$

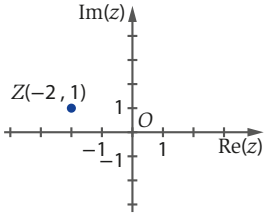
30.1 $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a$ é um número real.

30.2 $z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi$ é um número imaginário puro.

31.1 $|z| = |1 - 3i| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

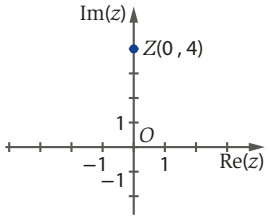


31.2 $|z| = |-2 + i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

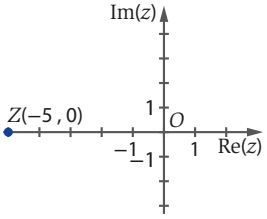


M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

31.3 $|z| = |4i| = \sqrt{4^2} = 4$

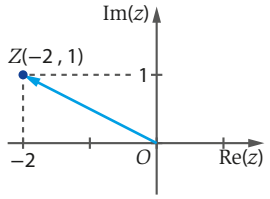


31.4 $|z| = |-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$



32.1 $\text{Re}(z) = \text{Re}(-2+i) = -2$ e $\text{Im}(-2+i) = 1$.

32.2



32.3 $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

33. $|z_1 \times \overline{z_1} - z_2| = \left|(-3-i) \times \overline{(-3-i)} - (2-6i)\right| =$

$= |(-3-i) \times (-3+i) - (2-6i)| = |9 - i^2 - (2-6i)| =$

$= |9 - (-1) - (2-6i)| = |8+6i| = \sqrt{8^2+6^2} = 10$

34. $|z_1 - \overline{z_2}| = 5 \iff |k - i - \overline{-1-3i}| = 5 \iff |k - i - (-1+3i)| = 5 \iff$

$\iff |k - i + 1 - 3i| = 5 \iff |k+1-4i| = 5$

$\iff \sqrt{(k+1)^2 + (-4)^2} = 5 \implies (k+1)^2 + 16 = 25$

$\iff (k+1)^2 = 9 \iff k+1 = 3 \vee k+1 = -3$

$\iff k = 2 \vee k = -4$

Verificação:

Se $k = 2$, $\sqrt{(2+1)^2 + 16} = 5 \iff 5 = 5$ proposição verdadeira;

se $k = -4$, $\sqrt{(-4+1)^2 + 16} = 5 \iff 5 = 5$ proposição verdadeira.

Resposta: $k = -4 \vee k = 2$

35. Utilizando as coordenadas dos afixos de z_1 e de z_2 , respetivamente $P_1(1 , -1)$ e $P_2(3 , 2)$, podemos definir um vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ de coordenadas $(3-1 , 2+1)$, ou seja, $(2 , 3)$.

Existem dois vetores perpendiculares a $\overrightarrow{P_1P_2}$ e com a mesma norma: $(-3 , 2)$ e $(3 , -2)$.

$P_3 = P_2 + (-3 , 2) = (3 , 2) + (-3 , 2) = (0 , 4)$

$P_4 = P_1 + (-3 , 2) = (1 , -1) + (-3 , 2) = (-2 , 1)$

$z_3 = 4i$ e $z_4 = -2 + i$.

Ou

$P_3 = P_2 + (3 , -2) = (3 , 2) + (3 , -2) = (6 , 0)$

$P_4 = P_1 + (3 , -2) = (1 , -1) + (3 , -2) = (4 , -3)$

$z_3 = 6$ e $z_4 = 4 - 3i$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 35

Aplicar

40.1 $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

40.2 $\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{1+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

40.3 $\frac{1}{\sqrt{3}-2i}=\frac{\sqrt{3}+2i}{(\sqrt{3}-2i)(\sqrt{3}+2i)}=\frac{\sqrt{3}+2i}{(\sqrt{3})^2-(2i)^2}=\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{2}{7}i$

41.1 $z_1\times z_2=(2-4i)\times(-3-i)=-6-2i+12i+4i^2=-10+10i$

41.2 $z_1\times z_3=(2-4i)\times(-3i)=-6i+12i^2=-12-6i$

41.3 $z_2\times z_3=(-3-i)\times(-3i)=9i+3i^2=-3+9i$

41.4 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-4i}{-3-i}=\frac{(2-4i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)}=\frac{-6+2i+12i-4i^2}{(-3)^2-i^2}=$

$=\frac{-2+14i}{10}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$

41.5 $\frac{z_1}{z_3}=\frac{2-4i}{-3i}=\frac{(2-4i)(3i)}{(-3i)(3i)}=\frac{6i-12i^2}{-9i^2}=\frac{12+6i}{9}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i$

41.6 $\frac{z_3}{z_1}=\frac{-3i}{2-4i}=\frac{-3i(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}=\frac{-6i-12i^2}{2^2-(4i)^2}=$

$=\frac{12-6i}{20}=\frac{3}{5}-\frac{3}{10}i$

PÁG. 36

Aplicar

42.1 $z_1+z_2=-1+3i+3-i=2+2i$

42.2 $z_1-z_2=-1+3i-(3-i)=-1+3i-3+i=-4+4i$

42.3 $z_1\times z_2=(-1+3i)\times(3-i)=-3+i+9i-3i^2=10i$

42.4 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{-1+3i}{3-i}=\frac{(-1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{-3-i+9i+3i^2}{3^2-i^2}=$

$=\frac{-6+8i}{10}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

42.5 $\frac{z_1\overline{z_2}}{\overline{z_1}z_2}=\frac{(-1+3i)\times\overline{3-i}}{\overline{-1+3i}\times(3-i)}=\frac{(-1+3i)(3+i)}{(-1-3i)(3-i)}=$

$=\frac{-3-i+9i+3i^2}{-3+i-9i+3i^2}=\frac{-6+8i}{-6-8i}=\frac{(-6+8i)^2}{(-6-8i)(-6+8i)}=$

$=\frac{(-6)^2+2\times8i\times(-6)+(8i)^2}{(-6)^2-(8i)^2}=\frac{-28-96i}{100}=-\frac{7}{25}-\frac{24}{25}i$

42.6 $-z_1\left(\overline{z_1+z_2}\right)=-(-1+3i)\left(\overline{2+2i}\right)=(1-3i)(2-2i)=$

$=2-2i-6i+6i^2=-4-8i$

43.1 $\frac{z_1\times z_2}{z_3}=\frac{(3-3i)\times(-2-i)}{4i}=\frac{-6-3i+6i+3i^2}{4i}=\frac{-9+3i}{4i}=$

$=\frac{(-9+3i)\times(-4i)}{4i\times(-4i)}=\frac{36i-12i^2}{-16i^2}=\frac{12+36i}{16}=\frac{3}{4}+\frac{9}{4}i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

43.2 $\frac{z_1 \times z_3}{z_2} = \frac{(3-3i)\times 4i}{-2-i} = \frac{12i-12i^2}{-2-i} = \frac{12+12i}{-2-i} =$

$= \frac{(12+12i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-24+12i-24i+12i^2}{(-2)^2-i^2} = -\frac{36}{5} - \frac{12}{5}i$

43.3 $\frac{z_1}{z_2 \times z_3} = \frac{3-3i}{(-2-i)4i} = \frac{3-3i}{-8i-4i^2} = \frac{3-3i}{4-8i} =$

$= \frac{(3-3i)(4+8i)}{(4-8i)(4+8i)} = \frac{12+24i-12i-24i^2}{4^2-(8i)^2} =$

$= \frac{36+12i}{80} = \frac{9}{20} + \frac{3}{20}i$

43.4 $\frac{z_1 \times \overline{z_1}}{z_2+z_3} = \frac{(3-3i)\times \overline{3-3i}}{-2-i+4i} = \frac{(3-3i)(3+3i)}{-2+3i} =$

$= \frac{3^2-(3i)^2}{-2+3i} = \frac{18(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-36-54i}{(-2)^2-(3i)^2} =$

$= -\frac{36}{13} - \frac{54}{13}i$

43.5 $\frac{z_1+z_2}{z_2 \times z_3} = \frac{3-3i-2-i}{(-2-i)4i} = \frac{1-4i}{-8i-4i^2} = \frac{1-4i}{4-8i} =$

$= \frac{(1-4i)(4+8i)}{(4-8i)(4+8i)} = \frac{4+8i-16i-32i^2}{4^2-(8i)^2} =$

$= \frac{36-8i}{80} = \frac{9}{20} - \frac{1}{10}i$

43.6 $\frac{z_1 \times \overline{z_2}}{z_2 \times z_3} = \frac{(3-3i)\times \overline{-2-i}}{(-2-i)4i} = \frac{(3-3i)(-2+i)}{-8i-4i^2} =$

$= \frac{(-6+3i+6i-3i^2)}{4-8i} = \frac{(-3+9i)(4+8i)}{(4-8i)(4+8i)} =$

$= \frac{-12-24i+36i+72i^2}{4^2-(8i)^2} = \frac{-84+12i}{80} = -\frac{21}{20} + \frac{3}{20}i$

44. $z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(1-i)(1+i)} =$

$= \frac{1+2i+i^2-(1-2i+i^2)}{1^2-i^2} = \frac{2i+2i}{2} = 2i$

45. $-\frac{\overline{w}}{2z+i} = -\frac{\overline{4-3i}}{2(-1-i)+i} = -\frac{4+3i}{-2-2i+i} = -\frac{4+3i}{-2-i} =$

$= -\frac{(4+3i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = -\frac{-8+4i-6i+3i^2}{4+1} = -\frac{-11-2i}{5} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$

46. $iz = 1-i \Leftrightarrow z = \frac{1-i}{i} \Leftrightarrow z = \frac{(1-i)(-i)}{i(-i)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{-i+i^2}{1} \Leftrightarrow z = -1-i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

47. Seja $z=a+bi$, a , $b\in\mathbb{R}$.

$$i-3z=\bar{z} \Leftrightarrow i-3(a+bi)=\overline{a+bi} \Leftrightarrow i-3a-3bi=a-bi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3a+(1-3b)i=a-bi \Leftrightarrow -3a=a\wedge 1-3b=-b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4a=0\wedge -2b=-1 \Leftrightarrow a=0\wedge b=\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{1}{2}i$$

48. $z=a+bi$, $a\neq 0\wedge b\neq 0$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=$$
$$=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{a}{a^2+b^2}\neq 0\wedge\frac{b}{a^2+b^2}\neq 0$$

Logo, o inverso de z não é real nem imaginário puro.

49.1 $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{a+i}-\frac{1}{a-i}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{a-i-(a+i)}{(a+i)(a-i)}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-2i}{a^2+1}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{-2}{a^2+1}\right)^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{a^2+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+1=4 \Leftrightarrow a^2=3 \Leftrightarrow a=\sqrt{3}\vee a=-\sqrt{3}$$

49.2 $\left|\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{a+i}+\frac{1}{a-i}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{a-i+a+i}{(a+i)(a-i)}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2a}{a^2+1}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2|a|}{a^2+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

Se $a>0$,

$$\frac{2|a|}{a^2+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2+1=4a \Leftrightarrow a^2-4a+1=0 \Leftrightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a=2+\sqrt{3}\vee a=2-\sqrt{3}$$

Se $a<0$,

$$\frac{2|a|}{a^2+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2+1=-4a \Leftrightarrow a^2+4a+1=0 \Leftrightarrow a=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a=-2+\sqrt{3}\vee a=-2-\sqrt{3}$$

50. **1.° Processo:**

$$z=\frac{k-i}{1+2i}=\frac{(k-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=$$
$$=\frac{k-2ki-i+2i^2}{1+4}=\frac{k-2}{5}-\frac{2k+1}{5}i$$

$$|z|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{k-2}{5}-\frac{2k+1}{5}i\right|=1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{k-2}{5}\right)^2+\left(-\frac{2k+1}{5}\right)^2}=1$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$$\left(\sqrt{\left(\frac{k-2}{5}\right)^2+\left(-\frac{2k+1}{5}\right)^2}\right)^2=1^2 \Leftrightarrow \left(\frac{k-2}{5}\right)^2+\left(-\frac{2k+1}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2-4k+4+4k^2+4k+1}{25}=1 \Leftrightarrow 5k^2+5=25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2=4 \Leftrightarrow k=2 \vee k=-2$$

2.° Processo:

$$|z|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{k-i}{1+2i}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|k-i|}{|1+2i|}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{1+4}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{k^2+1}=\sqrt{5}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$$\left(\sqrt{k^2+1}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow k^2+1=5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2=4 \Leftrightarrow k=2 \vee k=-2$$

51. $z=\frac{1-ai}{1+ai}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

51.1 $z=\frac{1-ai}{1+ai}=\frac{(1-ai)^2}{(1+ai)(1-ai)}=$

$$=\frac{1-2ai+a^2i^2}{1+a^2}=\frac{1-a^2-2ai}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}-\frac{2a}{1+a^2}i$$

z não pode ser um número real porque $\text{Im}(z)\neq 0 \Leftrightarrow -\frac{2a}{1+a^2}\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$.

51.2 z é um número imaginário puro se

$$\text{Re}(z)=0 \wedge \text{Im}(z)\neq 0 \Leftrightarrow \frac{1-a^2}{1+a^2}=0 \wedge -\frac{2a}{1+a^2}\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-a^2=0 \wedge 1+a^2\neq 0 \wedge a\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=a^2 \Leftrightarrow a=1 \vee a=-1$$

PÁG. 38

Aplicar

54.1 $i^{99}=i^{96+3}=i^{4\times 24}\times i^3=1\times(-i)=-i$

54.2 $i^{42}=i^{40+2}=i^{4\times 10}\times i^2=1\times(-1)=-1$

54.3 $i^{220}=i^{4\times 55}=1$

54.4 $i^{221}=i^{220+1}=i^{4\times 55}\times i^1=1\times i=i$

54.5 $i^{223}=i^{220+3}=i^{4\times 55}\times i^3=1\times(-i)=-i$

54.6 $i^{43}=i^{40+3}=i^{4\times 10}\times i^3=1\times(-i)=-i$

55.1 $(4+i)^2=4^2+2\times i\times 4+i^2=16+8i-1=15+8i$

55.2 $(i+1)^2-(i-1)^2=i^2+2i+1-\left(i^2-2i+1\right)=-1+2i+1+1+2i-1=4i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

56. $z^4=(3+i)^4=(3+i)^2(3+i)^2=$

$=(9+6i+i^2)(9+6i+i^2)=(8+6i)^2=$

$=64+96i+36i^2=28+96i$

Por outro processo (binómio de Newton)

$z^4=(3+i)^4=$

$={}^4C_0\times 3^4\times i^0+{}^4C_1\times 3^3\times i^1+{}^4C_2\times 3^2\times i^2+{}^4C_3\times 3^1\times i^3+{}^4C_4\times 3^0\times i^4=$

$=1\times 81\times 1+4\times 27\times i+6\times 9\times(-1)+4\times 3\times(-i)+1\times 1\times 1=$

$=81+108i-54-12i+1=28+96i$

$z^5=(3+i)^5=(3+i)^4(3+i)=$

$=(28+96i)(3+i)=84+28i+288i+96i^2=$

$=84+316i-96=-12+316i$

PÁG. 41

Tarefa 4

1.1 $z^3-4z^2+z+6=0$

A equação está na forma canónica, vamos fatorizar o polinómio do 1.° membro. Para isso, temos de procurar uma raiz real. Se houver uma raiz inteira, esta será um divisor inteiro do termo independente (6).

Como $(-1)^3-4(-1)^2+(-1)+6=0$, concluímos que -1 é uma raiz do polinómio.

Podemos verificar, de igual modo, que 2 e 3 também são raízes reais.

C.S. $=\{-1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$

1.2 $z^3-6z^2+12z-8=0$

A equação está na forma canónica, vamos fatorizar o polinómio do 1.° membro. Para isso, temos de procurar uma raiz real. Se houver uma raiz inteira, esta será um divisor inteiro do termo independente (-8).

Como $2^3-6\times 2^2+12\times 2-8=0$, concluímos que 2 é uma raiz do polinómio.

	1	−6	12	−8
2		2	−8	8
	1	−4	4	0

$z^3-6z^2+12z-8=0 \iff (z-2)(z^2-4z+4)=0 \iff$

$\iff z-2=0\vee z^2-4z+4=0 \iff z=2\vee(z-2)^2=0 \iff$

$\iff z=2\vee z-2=0 \iff z=2$, 2 é uma raiz tripla.

C.S. $=\{2\}$

1.3 $(z-2)(z^2+4)=0 \iff z-2=0\vee z^2+4=0 \iff$

$\iff z=2\vee z^2=-4 \iff z=2\vee z=\pm\sqrt{-4} \iff$

$\iff z=2\vee z=\pm\sqrt{4}\times\sqrt{-1} \iff z=2\vee z=2i\vee z=-2i$

C.S. $=\{2\ ,\ -2i\ ,\ 2i\}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

1.4 $z^3-2z^2+z-2=0$

A equação está na forma canónica, vamos fatorizar o polinómio do 1.º membro. Para isso, temos de procurar uma raiz real. Se houver uma raiz inteira, esta será um divisor inteiro do termo independente (-2).

Como $2^3-2\times 2^2+2-2=0$, concluímos que 2 é uma raiz do polinómio.

	1	−2	1	−2
2		2	0	2
	1	0	1	0

$$z^3-2z^2+z-2=0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z-2=0 \vee z^2+1=0 \Leftrightarrow z=2 \vee z^2=-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z=2 \vee z=\pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow z=2 \vee z=i \vee z=-i$$

C.S. $=\{2, -i, i\}$

1.5 $z^3-4z^2+5z-2=0$

A equação está na forma canónica, vamos fatorizar o polinómio do 1.º membro. Para isso, temos de procurar uma raiz real. Se houver uma raiz inteira, esta será um divisor inteiro do termo independente (-2).

Como $1^3-4\times 1^2+5-2=0$, concluímos que 1 é uma raiz do polinómio.

	1	−4	5	−2
1		1	−3	2
	1	−3	2	0

$$z^3-4z^2+5z-2=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2-3z+2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z-1=0 \vee z^2-3z+2=0 \Leftrightarrow z=1 \vee z=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z=1 \vee z=2 \vee z=1 \Leftrightarrow z=1 \vee z=2$$

C.S. $=\{1, 2\}$

1.6 $2z^3+10z=0 \Leftrightarrow 2z(z^2+5)=0 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow 2z=0 \vee z^2+5=0 \Leftrightarrow z=0 \vee z^2=-5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\pm\sqrt{-5} \Leftrightarrow z=0 \vee z=\sqrt{5}i \vee z=-\sqrt{5}i$$

C.S. $=\{0, -\sqrt{5}i, \sqrt{5}i\}$

1.7 $z^3=1 \Leftrightarrow z^3-1=0$

Agora que a equação está na forma canónica, vamos fatorizar o polinómio do 1.º membro. Para isso, temos de procurar uma raiz real. Se houver uma raiz inteira, esta será um divisor inteiro do termo independente (1).

Como $1^3-1=0$, concluímos que 1 é uma raiz do polinómio.

	1	0	0	−1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$$z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z-1=0 \vee z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=1 \vee z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

$$\Leftrightarrow z=1 \vee z=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow z=1 \vee z=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z=1 \vee z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

C.S. $=\left\{1\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

1.8 $z^3+z=-10 \Leftrightarrow z^3+z+10=0$

Agora que a equação está na forma canónica, vamos fatorizar o polinómio do 1.º membro. Para isso, temos de procurar uma raiz real. Se houver uma raiz inteira, esta será um divisor inteiro do termo independente (10).

Como $(-2)^3+(-2)+10=0$, concluímos que -2 é uma raiz do polinómio.

	1	0	1	10
-2		-2	4	-10
	1	-2	5	0

$$z^3+z+10=0 \Leftrightarrow (z+2)(z^2-2z+5)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z+2=0 \vee z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow z=-2 \vee z=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z=-2 \vee z=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow z=-2 \vee z=\frac{2\pm 4i}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z=-2 \vee z=1+2i \vee z=1-2i$$

C.S. $=\{-2\ ,\ 1-2i\ ,\ 1+2i\}$

2. Uma equação do 3.º grau (de coeficientes reais) pode ter uma, duas ou três soluções em $\mathbb{C}$ sendo, pelo menos, uma real e as outras duas, quando não reais, números complexos conjugados.

PÁG. 41

Aplicar

57. $A(z)=0$, pois tem duas soluções reais, sendo uma delas dupla, e $C(z)=0$, pois tem três soluções reais.

58.1 $z^2+9=0 \Leftrightarrow z^2=-9 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-9} \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{9}\times\sqrt{-1} \Leftrightarrow z=\pm 3i$$

C.S. $=\{-3i\ ,\ 3i\}$

58.2 $16z^2-25=0 \Leftrightarrow z^2=\frac{25}{16} \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{\frac{25}{16}} \Leftrightarrow z=\frac{5}{4} \vee z=-\frac{5}{4}$$

C.S. $=\left\{-\frac{5}{4}\ ,\ \frac{5}{4}\right\}$

58.3 $z^2-2z+2=0 \Leftrightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} \Leftrightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{4}\times\sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow z=\frac{2\pm 2i}{2} \Leftrightarrow z=1+i \vee z=1-i$$

C.S. $=\{1-i\ ,\ 1+i\}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

58.4 $z^2-4z+6=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{4\pm\sqrt{16-24}}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{4\pm\sqrt{8}\times\sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{4\pm 2\sqrt{2}\,i}{2} \Leftrightarrow z=2+\sqrt{2}\,i \vee z=2-\sqrt{2}\,i$

C.S. $=\left\{2-\sqrt{2}\,i\,,\,2+\sqrt{2}\,i\right\}$

58.5 $z^2+3z+3=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-12}}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}\times\sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}\,i}{2} \Leftrightarrow z=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \vee z=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

C.S. $=\left\{-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\,,\,-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

58.6 $4z^2-4z+5=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{4\pm\sqrt{16-80}}{8} \Leftrightarrow z=\dfrac{4\pm\sqrt{64}\times\sqrt{-1}}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{4\pm 8i}{8} \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{2}-i \vee z=\dfrac{1}{2}+i$

C.S. $=\left\{\dfrac{1}{2}-i\,,\,\dfrac{1}{2}+i\right\}$

59.1 $4z^3+25z=0 \Leftrightarrow z\left(4z^2+25\right)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee 4z^2+25=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z^2=-\dfrac{25}{4} \Leftrightarrow z=0 \vee z=\pm\sqrt{-\dfrac{25}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\pm\sqrt{\dfrac{25}{4}}\times\sqrt{-1} \Leftrightarrow z=0 \vee z=\dfrac{5}{2}i \vee z=-\dfrac{5}{2}i$

C.S. $=\left\{0\,,\,-\dfrac{5}{2}i\,,\,\dfrac{5}{2}i\right\}$

59.2 $z^3+3z^2-z=3 \Leftrightarrow z^3+3z^2-z-3=0$

Agora que a equação está na forma canónica, vamos fatorizar o polinómio do 1.° membro. Para isso, temos de procurar uma raiz real. Se houver uma raiz inteira, esta será um divisor inteiro do termo independente (-3).

Como $1^3+3\times 1^2-1-3=0$, concluímos que 1 é uma raiz do polinómio.

	1	3	−1	−3
1		1	4	3
	1	4	3	0

$z^3+3z^2-z-3=0 \Leftrightarrow (z-1)\left(z^2+4z+3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-1=0 \vee z^2+4z+3=0 \Leftrightarrow z=1 \vee z=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=1 \vee z=\dfrac{-4\pm 2}{2} \Leftrightarrow z=1 \vee z=-1 \vee z=-3$

C.S. $=\{-3\,,\,-1\,,\,1\}$

59.3 $z^3+4z=4z^2+16 \Leftrightarrow z^3-4z^2+4z-16=0$

Agora que a equação está na forma canónica, vamos fatorizar o polinómio do 1.° membro. Para isso, temos de procurar uma raiz real. Se houver uma raiz inteira, esta será um divisor inteiro do termo independente (-16).

Como $4^3-4\times 4^2+4\times 4-16=0$, concluímos que 4 é uma raiz do polinómio.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

	1	−4	4	−16
4		4	0	16
	1	0	4	0

$z^3-4z^2+4z-16=0 \Leftrightarrow (z-4)(z^2+4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-4=0 \vee z^2+4=0 \Leftrightarrow z=4 \vee z^2=-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=4 \vee z=\pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow z=4 \vee z=2i \vee z=-2i$

C.S. $=\{4\ ,\ -2i\ ,\ 2i\}$

59.4 $9z^3+9z^2-z-1=0$

A equação está na forma canónica, vamos fatorizar o polinómio do 1.º membro. Para isso, temos de procurar uma raiz real. Se houver uma raiz inteira, esta será um divisor inteiro do termo independente (-1).

Como $9\times(-1)^3+9\times(-1)^2-(-1)-1=0$, concluímos que -1 é uma raiz do polinómio.

	9	9	−1	−1
−1		−9	0	1
	9	0	−1	0

$9z^3+9z^2-z-1=0 \Leftrightarrow (z+1)(9z^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z+1=0 \vee 9z^2-1=0 \Leftrightarrow z=-1 \vee z^2=\frac{1}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-1 \vee z=\frac{1}{3} \vee z=-\frac{1}{3}$

C.S. $=\left\{-1\ ,\ -\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{3}\right\}$

59.5 $9z^3-9z^2+z-1=0$

A equação está na forma canónica, vamos fatorizar o polinómio do 1.º membro. Para isso, temos de procurar uma raiz real. Se houver uma raiz inteira, esta será um divisor inteiro do termo independente (-1).

Como $9\times1^3-9\times1^2+1-1=0$, concluímos que 1 é uma raiz do polinómio.

	9	−9	1	−1
1		9	0	1
	9	0	1	0

$9z^3-9z^2+z-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(9z^2+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-1=0 \vee 9z^2+1=0 \Leftrightarrow z=1 \vee z^2=-\frac{1}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=1 \vee z=\pm\sqrt{-\frac{1}{9}} \Leftrightarrow z=1 \vee z=\frac{1}{3}i \vee z=-\frac{1}{3}i$

C.S. $=\left\{1\ ,\ -\frac{1}{3}i\ ,\ \frac{1}{3}i\right\}$

59.6 $z^3+24=z^2+4z \Leftrightarrow z^3-z^2-4z+24=0$

Agora que a equação está na forma canónica, vamos fatorizar o polinómio do 1.º membro. Para isso, temos de procurar uma raiz real. Se houver uma raiz inteira, esta será um divisor inteiro do termo independente (24).

Como $(-3)^3-(-3)^2-4(-3)+24=0$, concluímos que -3 é uma raiz do polinómio.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

	1	−1	−4	24
−3		−3	12	−24
	1	−4	8	0

$z^3 - z^2 - 4z + 24 = 0 \Leftrightarrow (z+3)(z^2 - 4z + 8) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z + 3 = 0 \vee z^2 - 4z + 8 = 0 \Leftrightarrow z = -3 \vee z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -3 \vee z = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow z = -3 \vee z = \frac{4 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -3 \vee z = 2 + 2i \vee z = 2 - 2i$

C.S. $= \{-3 , 2 - 2i , 2 + 2i\}$

PÁG. 48

Aplicar

63.1 $z_1 = i$

Trata-se de um número imaginário puro. Assim, $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$.

63.2 $z_2 = -3$

Trata-se de um número real. Assim, $z_2 = 3e^{i(\pi)}$.

63.3 $z_3 = -4i$

Trata-se de um número imaginário puro. Assim, $z_3 = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$.

63.4 $z_4 = -2 - 2i$

$|z_4| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

O afixo de z_4 está no 3.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta_4 = \frac{-2}{-2} = 1$, θ_4 pode ser $-\frac{3\pi}{4}$.

Assim, $z_4 = 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$.

63.5 $z_5 = -1 + i$

$|z_5| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

O afixo de z_5 está no 2.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta_5 = \frac{1}{-1} = -1$, θ_5 pode ser $\frac{3\pi}{4}$.

Assim, $z_5 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$.

63.6 $z_6 = 1 - \sqrt{3}\,i$

$|z_6| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

O afixo de z_6 está no 4.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta_6 = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$, θ_6 pode ser $-\frac{\pi}{3}$.

Assim, $z_6 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

64. $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$; $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

65.1 $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - 2i$

65.2 $z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$

65.3 $z_3 = 4e^{i\pi} = 4\left(\cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi)\right) = 4(-1 - i \times 0) = -4$

65.4 $z_4 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\left(0 - i(-1)\right) = -2i$

65.5 $z_5 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\,i$

65.6 $z_6 = \sqrt{3}e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

66.1 $z_1 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$; $\text{Arg}(z_1) = -\frac{\pi}{5}$.

66.2 $z_2 = e^{i(-\pi)}$

$-\pi \notin]-\pi\,,\,\pi]$; $-\pi + 2\pi = \pi$.

$\text{Arg}(z_2) = \pi$

66.3 $z_3 = 2e^{i\frac{9\pi}{4}}$

$\frac{9\pi}{4} > 2\pi$; $\frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4}$.

$\text{Arg}(z_3) = \frac{\pi}{4}$

66.4 $z_4 = \frac{3}{2}e^{i\frac{19\pi}{3}}$

$\frac{19\pi}{3} > 6\pi$; $\frac{19\pi}{3} - 6\pi = \frac{\pi}{3}$.

$\text{Arg}(z_4) = \frac{\pi}{3}$

66.5 $z_5 = \sqrt{3} - i$

$|z_5| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$

O afixo de z_5 está no 4.º quadrante, portanto, como $\text{tg}\,\theta_5 = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, θ_5 pode ser $-\frac{\pi}{6}$.

66.6 $z_6 = -2 - 2i$

$|z_6| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

O afixo de z_6 está no 3.º quadrante, portanto, como $\text{tg}\,\theta_6 = \frac{-2}{-2} = 1$, θ_6 pode ser $-\frac{3\pi}{4}$.

66.7 $z_7 = 4$; $\text{Arg}(z_7) = 0$.

66.8 $z_8 = \frac{\pi}{2}e^{i2\pi} = \frac{\pi}{2}e^{i0} = \frac{\pi}{2}$; $\text{Arg}(z_8) = 0$.

67.1 $z_1 = -1$; $\text{Arg}(z_1) = \pi$.

67.2 $z_2 = 3i$; $\text{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{2}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

67.3 $z_3 = -1 + i$

$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

O afixo de z_3 está no 2.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta_3 = \frac{1}{-1} = -1$, θ_3 pode ser $\frac{3\pi}{4}$.

67.4 $z_4 = -\sqrt{3} + 3i$

$|z_4| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

O afixo de z_4 está no 2.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta_4 = \frac{3}{-\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$, θ_4 pode ser $\frac{2\pi}{3}$.

68. $z_1 = 3 + 3i$

$|z_1| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

O afixo de z_1 está no 1.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{3}{3} = 1$, θ_1 pode ser $\frac{\pi}{4}$.

Assim, $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$z_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}\,i$

$|z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{6}$

O afixo de z_2 está no 2.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -1$, θ_2 pode ser $\frac{3\pi}{4}$.

Assim, $z_2 = \sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$z_3 = -2\sqrt{3} - 2i$

$|z_1| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$

O afixo de z_3 está no 3.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta_3 = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, θ_3 pode ser $-\frac{5\pi}{6}$.

Assim, $z_3 = 4e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$.

$z_4 = 1 - \sqrt{3}\,i$

$|z_4| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

O afixo de z_4 está no 4.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta_4 = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$, θ_4 pode ser $-\frac{\pi}{3}$.

Assim, $z_4 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

69. $z = 1 - 2i$

$|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

O afixo de z está no 4.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta = \frac{-2}{1} = -2$, θ pode ser, em radianos, arredondado as centésimas, $-1{,}11$ rad.

Assim, $z = \sqrt{5}e^{i(-1{,}11)}$.

70. $|z_1| = |z_2|$ e $\frac{9\pi}{5} - \left(-\frac{\pi}{5}\right) = 2\pi$.

71. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow k^2 = 5 \wedge -\frac{11\pi}{4} = \frac{n\pi}{8} + 2\lambda\pi,\ \lambda \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{5} \wedge -\frac{n\pi}{8} = \frac{11\pi}{4} + 2\lambda\pi,\ \lambda \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{5} \wedge n = -22 - 16\lambda,\ \lambda \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Para que $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ tem de ser inferior ou igual a -2.

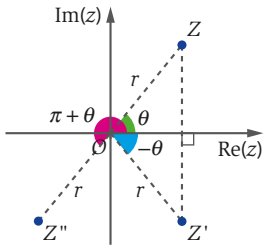
Para $\lambda = -2$, obtém-se $n = 10$.

Assim, em geral tem-se $n = 10 + 16\lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$.

PÁG. 49

Tarefa 6

1.



Na figura, Z' é o afixo de $\overline{z}$, e Z'' é o afixo de $-z$.

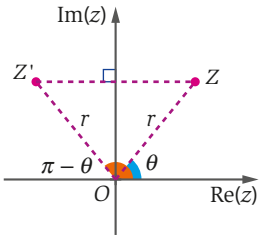
$\overline{z} = re^{i(-\theta)}$ e $-z = re^{i(\pi+\theta)}$ ou $-z = re^{i(\theta-\pi)}$.

2. O afixo de $\overline{z}$ é a reflexão de eixo real do afixo de z.

O afixo de $-z$ é o simétrico do afixo de z relativamente à origem.

PÁG. 50

Tarefa 7



$-\overline{z} = -\left(re^{i(-\theta)}\right) = re^{i(\pi+(-\theta))} = re^{i(\pi-\theta)}$

$\overline{-z} = \overline{-re^{i\theta}} = re^{i(-(\theta-\pi))} = re^{i(\pi-\theta)}$

PÁG. 51

Aplicar

73. $\overline{z_1} = 3e^{i\frac{\pi}{9}}$; $-z_1 = 3e^{i\frac{8\pi}{9}}$; $\overline{z_2} = 2e^{i\frac{3\pi}{7}}$; $-z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{7}}$.

74.1 Vamos começar por escrever $1 - i$ na forma trigonométrica.

$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Como o afixo de $1 - i$ está no 4.º quadrante e $\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{1} = -1$, θ pode ser $-\frac{\pi}{4}$.

Assim, $1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

$\overline{1 - i} = \overline{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$-\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

74.2 Vamos começar por escrever $-2+2\sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica.

$|-2+2\sqrt{3}\,i|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

Como o afixo de $-2+2\sqrt{3}\,i$ está no 2.° quadrante e $\operatorname{tg}\theta=\frac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3}$, θ pode ser $\frac{2\pi}{3}$.

Assim, $-2+2\sqrt{3}\,i=4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.

$\overline{-2+2\sqrt{3}\,i}=\overline{4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}=4e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

$-4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)}=4e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}=4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

74.3 $-10=10e^{i\pi}$

$\overline{-10}=\overline{10e^{i\pi}}=10e^{i(-\pi)}=10e^{i\pi}$

$-10e^{i\pi}=10e^{i(\pi+\pi)}=10e^{i(2\pi)}=10e^{i\,0}$

74.4 $5i=5e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\overline{5i}=\overline{5e^{i\frac{\pi}{2}}}=5e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$-5e^{i\frac{\pi}{2}}=5e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)}=5e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=5e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

74.5 Vamos começar por escrever $\sqrt{3}+i$ na forma trigonométrica.

$|\sqrt{3}+i|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$

Como o afixo de $\sqrt{3}+i$ está no 1.° quadrante e $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, θ pode ser $\frac{\pi}{6}$.

Assim, $\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$\overline{\sqrt{3}+i}=\overline{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$-2e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)}=2e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}=2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$

74.6 Vamos começar por escrever $-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i$ na forma trigonométrica.

$|-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i|=\sqrt{(-3\sqrt{2})^2+(-3\sqrt{2})^2}=6$

Como o afixo de $-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i$ está no 3.° quadrante e $\operatorname{tg}\theta=\frac{-3\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}}=1$, θ pode ser $-\frac{3\pi}{4}$.

Assim, $-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i=6e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$.

$\overline{-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i}=\overline{6e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}=6e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$-6e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}=6e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}+\pi\right)}=6e^{i\frac{\pi}{4}}$

PÁG. 51

Tarefa 8

2. Homotetia de centro na origem e razão 3 e rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{6}$; homotetia de razão $2\sqrt{2}$ e rotação de amplitude $-\frac{\pi}{4}$.

3. Homotetia de centro na origem e razão $\frac{1}{3}$ seguida de rotação de centro na origem e amplitude $-\frac{\pi}{6}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 53

Aplicar

78. Vamos começar por escrever z_2 na forma trigonométrica.

$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{2}{-2} = -1$ e θ_2 pertence ao 2.º quadrante, pelo que θ_2 pode ser $\frac{3\pi}{4}$; portanto, $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

78.1 $z_1 \times z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2 \times 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$

78.2 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{2}{2\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}$

78.3 $-\frac{1}{z_2} = \frac{-1}{z_2} = \frac{1e^{i\pi}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$

78.4 $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

78.5 $z_1 \times \overline{z_2} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times \overline{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = 2 \times 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}$

78.6 $\frac{z_1 \times \overline{z_1}}{z_2} = \frac{2^2}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{4e^{i0}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{4}{2\sqrt{2}}e^{i\left(0-\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

79.1 $z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i$

79.2 $|z| = 2$ e $\operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$.

79.3 $-z = -2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}+\pi\right)} = 2e^{i\left(\frac{8\pi}{3}\right)}2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

79.4 $z - 1 = 1 - \sqrt{3}i - 1 = -\sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$\frac{3\overline{z}}{z-1} = \frac{3 \times 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}}{\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{6}{\sqrt{3}}e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

80.1 $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{6}e^{i\pi} =$

$= \sqrt{6}(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) = \sqrt{6}(-1 + i \times 0) = -\sqrt{6}$

80.2 $\frac{2}{3}e^{i\frac{7\pi}{4}} \times 3e^{i\frac{9\pi}{4}} = \frac{2}{3} \times 3e^{i\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{9\pi}{4}\right)} = 2e^{i4\pi} = 2e^{i0} = 2$

81.1 $\frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

81.2 $\frac{1}{\frac{2}{3}e^{i\frac{7\pi}{4}}} = \frac{3}{2}e^{i\left(-\frac{7\pi}{4}\right)} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

PÁG. 54

Aplicar

82.1 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)} = 3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

82.2 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

82.3 $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}}{\overline{\frac{1}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}} = \frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{\frac{1}{3}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{3}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

82.4 $z_1^2 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \sqrt{2}^2 e^{i\left(2\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

82.5 $z_2^3 = \left(\frac{1}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 e^{i\left(3\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{27}e^{i2\pi} = \frac{1}{27}e^{i0}$

82.6 $z_1^3 \times z_2^2 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}^3 e^{i\times 3\times\frac{\pi}{4}}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 e^{i\times 2\times\frac{2\pi}{3}} =$

$= \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \times \frac{1}{9}e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{9}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{9}e^{i\frac{25\pi}{12}} = \frac{2\sqrt{2}}{9}e^{i\frac{\pi}{12}}$

83.1 $z_1 \times z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \times \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = 1e^{i\frac{5\pi}{6}}$

83.2 $z_1 \times \overline{z_2} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \overline{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 2 \times \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$

83.3 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

83.4 $\frac{-z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)}}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

83.5 $\frac{-z_1 \times \overline{z_1 \times z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)} \times e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}}{\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = \frac{2}{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)} = 4e^{i\pi}$

83.6 $\frac{\overline{z_2}(z_2 \times \overline{z_1})}{\overline{-z_1}} = \frac{\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)}{2e^{i\left(-\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)\right)}} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\pi\right)} = \frac{1}{4}e^{i\pi}$

84. Vamos começar por escrever $1-\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica.

$|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$ e θ pertence ao 4.º quadrante, pelo que θ pode ser $-\frac{\pi}{3}$; portanto, $1-\sqrt{3}i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

$z = \frac{3ie^{i\frac{\pi}{5}}}{1-\sqrt{3}i} = \frac{3e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{5}}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{3}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3}{2}e^{i\frac{31\pi}{30}}$

85. $w_1 \times w_2 = 3e^{i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{3}e^{i\alpha} = 3 \times \frac{1}{3}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)} = 1e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)}$

$w_1 \times w_2$ é um número real se $\frac{4\pi}{3}+\alpha = 0+k\pi$, $k\in\mathbb{Z} \iff \alpha = -\frac{4\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

86.1 $w = 3\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+3\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)i = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)i\right) = 3e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$w = 3\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+3\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)i = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)i\right) = 3\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

86.2

a. Por exemplo, $w_1 = 3e^{i\pi}$ e $w_2 = 1e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b. Por exemplo, $w_1 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e $w_2 = 1e^{i(-\pi)}$.

86.3 Seja $z = re^{i\theta}$, com $r \in \mathbb{R}^+$.

$z \times w = re^{i\theta} \times 3e^{i\frac{5\pi}{3}} = 3re^{i\left(\theta+\frac{5\pi}{3}\right)}$

Para que $z \times w$ seja um imaginário puro, tem de ser $\theta + \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{7\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

87. $w = r(\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta) = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = re^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$\frac{1}{w} = \frac{1}{re^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}} = \frac{1}{r}e^{i\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)} = \frac{1}{r}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$

88. Seja $z = re^{i\theta}$, com $r \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

$-z\overline{z} = -re^{i\theta} \times re^{i(-\theta)} = re^{i(\theta+\pi)} \times re^{i(-\theta)} = r^2e^{i(\theta+\pi-\theta)} = r^2e^{i\pi}$

Portanto, $\operatorname{Arg}(-z\overline{z}) = \pi$.

PÁG. 55

Tarefa 9

1. $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^2 = (\sqrt{2})^2\left(e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^2 = 2e^{i\frac{10\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

2. $\left(4e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^3 = 4^3\left(e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^3 = 64e^{i\frac{21\pi}{6}} = 64e^{i\frac{7\pi}{2}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

3. $\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{10} = e^{i\frac{10\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

PÁG. 57

Aplicar

91.1 $\left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 e^{i\left(\frac{\pi}{6}\times 2\right)} = 3e^{i\frac{2\pi}{6}} = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

$3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

91.2 $\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^3 = 2^3e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\times 3\right)} = 8e^{i\frac{9\pi}{4}} = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$

$8e^{i\frac{\pi}{4}} = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

91.3 $\left(1e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{101} = 1^{101}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\times 101\right)} = 1e^{i\left(-\frac{101\pi}{2}\right)} = 1e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{100\pi}{2}\right)} = 1e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-50\pi\right)} = 1e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$1e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1(0 + i(-1)) = -i$

91.4 $\left(\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{15}\right)}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}e^{i\left(-\frac{2\pi}{15}\times 10\right)} = \frac{1}{1024}e^{i\left(-\frac{20\pi}{15}\right)} = \frac{1}{1024}e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$

$\frac{1}{1024}e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{1}{1024}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{1024}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2048} + \frac{\sqrt{3}}{2048}i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

91.5 Para fazermos este cálculo, vamos começar por escrever $2-2i$ na forma trigonométrica.

$|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

Sendo θ um argumento de $2-2i$, tem-se que $\operatorname{tg}\theta=\frac{-2}{2}=-1$ e $\theta\in 4.^{\circ}\,Q$, pelo que θ pode ser $-\frac{\pi}{4}$.

Logo, $(2-2i)^6=\left(2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^6=(2\sqrt{2})^6\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\times 6\right)}=2^9e^{i\left(-\frac{6\pi}{4}\right)}=512e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}=512e^{i\frac{\pi}{2}}$

$512e^{i\frac{\pi}{2}}=512\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)=512\,(0+i\times 1)=512i$

91.6 Para fazermos este cálculo, vamos começar por escrever $1+i$ na forma trigonométrica.

$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Sendo θ um argumento de $1+i$, tem-se que $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{1}=1$ e $\theta\in 1.^{\circ}\,Q$, pelo que θ pode ser $\frac{\pi}{4}$.

Logo, $(1+i)^7=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^7=(\sqrt{2})^7\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}\times 7\right)}=8\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}=8\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$8\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=8\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=8-8i$

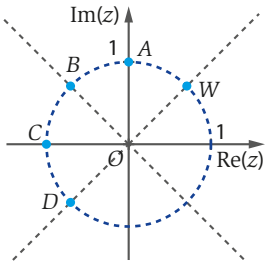
92.1 $w^2=\left(1e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2=1^2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\times 2\right)}=1e^{i\frac{\pi}{2}}$;

$w^3=\left(1e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3=1^3e^{i\left(\frac{\pi}{4}\times 3\right)}=1e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

$w^4=\left(1e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4=1^4e^{i\left(\frac{\pi}{4}\times 4\right)}=1e^{i\pi}$;

$w^5=\left(1e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5=1^5e^{i\left(\frac{\pi}{4}\times 5\right)}=1e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

92.2



Circunferência de centro na origem e raio 1.

92.3 $\left|e^{i\theta}\right|=1$

93. $\frac{z^4}{i}=\frac{\left(1e^{i\theta}\right)^4}{1e^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{1^4e^{i\theta\times 4}}{1e^{i\frac{\pi}{2}}}=1e^{i\left(4\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$

$4\theta-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\iff\theta=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\iff\theta=k\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$

94.1 $z^4=\left(\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{16}}\right)^4=(\sqrt{3})^4\,e^{i\left(\frac{7\pi}{16}\times 4\right)}=9e^{i\frac{7\pi}{4}}=$

$=9\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)=9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{9\sqrt{2}}{2}-\frac{9\sqrt{2}}{2}i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

94.2 $z^n = \left(\sqrt{3}\, e^{i\frac{7\pi}{16}}\right)^n = (\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{7\pi}{16}\times n\right)}$

$\frac{7\pi}{16}n = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \iff n = \frac{8}{7} + \frac{16}{7}k$, $k \in \mathbb{Z}$

se $k = 0$, $n = \frac{8}{7} \notin \mathbb{N}$;

se $k = 1$, $n = \frac{8}{7} + \frac{16}{7} = \frac{24}{7} \notin \mathbb{N}$;

se $k = 2$, $n = \frac{8}{7} + \frac{32}{7} = \frac{40}{7} \notin \mathbb{N}$;

se $k = 3$, $n = \frac{8}{7} + \frac{48}{7} = \frac{56}{7} = 8 \in \mathbb{N}$.

95. $z_1 = 3 + 3i$, $|z_1| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{3}{3} = 1$, $\theta_1 \in 1.^\circ\,Q$, θ_1 pode ser $\frac{\pi}{4}$.

$z_1 = 3\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1^4 = \left(3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = (3\sqrt{2})^4 e^{i\frac{\pi}{4}\times 4} = 324e^{i\pi}$

$z_2 = a + \frac{3\sqrt{6}}{2}i$, $a < 0$

$|z_2| = 3\sqrt{2} \iff \sqrt{a^2 + \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$a^2 + \frac{9\times 6}{4} = (3\sqrt{2})^2 \iff a^2 = 9\times 2 - \frac{9\times 3}{2} \iff a^2 = \frac{9}{2}$

Como $a < 0$, concluímos que $a = -\sqrt{\frac{9}{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$\text{tg}\,\theta_2 = \frac{\frac{3\sqrt{6}}{2}}{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{3}$, $\theta_2 \in 2.^\circ\,Q$, θ_2 pode ser $\frac{2\pi}{3}$.

$z_2 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_2^4 = \left(3\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 = (3\sqrt{2})^4 e^{i\frac{2\pi}{3}\times 4} = 324e^{i\frac{8\pi}{3}} = 324e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_3 = 3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{4\pi}{5}\right)}$, $z_3^4 = \left(3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{4\pi}{5}\right)}\right)^4 = (3\sqrt{2})^4 e^{i\left(-\frac{4\pi}{5}\times 4\right)} = (3\sqrt{2})^4 e^{i\left(-\frac{16\pi}{5}\right)} = 324e^{i\frac{4\pi}{5}}$

$z_4 = a - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$, $a > 0$

$|z_4| = 3\sqrt{2} \iff \sqrt{a^2 + \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$a^2 + \frac{9\times 2}{4} = (3\sqrt{2})^2 \iff a^2 = 9\times 2 - \frac{9}{2} \iff a^2 = \frac{27}{2}$

Como $a > 0$, concluímos que $a = \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

$\text{tg}\,\theta_4 = \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\theta_4 \in 4.^\circ\,Q$, θ_4 pode ser $-\frac{\pi}{6}$.

$z_4 = 3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$, $z_4^4 = \left(3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^4 = (3\sqrt{2})^4 e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\times 4\right)} = 324e^{i\left(-\frac{4\pi}{6}\right)} = 324e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = 324e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Circunferência de centro na origem e raio 324 .

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 58

Tarefa 10

1.1 $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$.

1.2

$A \curvearrowright 1e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad A' \curvearrowright 1e^{i\pi}$ $\quad A'' \curvearrowright 1e^{i\frac{3\pi}{2}}$ $\quad A''' \curvearrowright 1e^{i0}$

$B \curvearrowright 1e^{i\frac{7\pi}{6}}$ $\quad B' \curvearrowright 1e^{i\frac{5\pi}{3}}$ $\quad B'' \curvearrowright 1e^{i\frac{\pi}{6}}$ $\quad B''' \curvearrowright 1e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$C \curvearrowright 1e^{i\frac{11\pi}{6}}$ $\quad C' \curvearrowright 1e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad C'' \curvearrowright 1e^{i\frac{5\pi}{6}}$ $\quad C''' \curvearrowright 1e^{i\frac{4\pi}{3}}$

1.3 No triângulo $[ABC]$, são todas iguais a $1e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

No triângulo $[A'B'C']$, são todas iguais a $1e^{i\pi}$.

No triângulo $[A''B''C'']$, são todas iguais a $1e^{i\frac{\pi}{2}}$.

No triângulo $[A'''B'''C''']$, são todas iguais a $1e^{i0}$.

2.1 São todas iguais a $1e^{i\pi} = -1$.

2.2 São todas iguais a $1e^{i0} = 1$.

3. Dodecágono. 12.

PÁG. 63

Aplicar

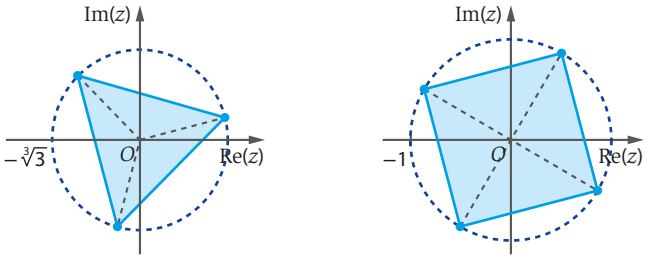
98.1 $\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{3e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[3]{3}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0, 1, 2\}$

$k=0$: $\sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$; $\quad k=1$: $\sqrt[3]{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $\quad k=2$: $\sqrt[3]{3}e^{i\frac{17\pi}{4}}$

$\sqrt[4]{z_2} = \sqrt[4]{e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \sqrt[4]{1}e^{i\left(\frac{4\pi}{12}+\frac{2k\pi}{4}\right)} = 1e^{i\frac{2\pi+3k\pi}{6}}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$k=0$: $1e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\quad k=1$: $1e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $\quad k=2$: $1e^{i\frac{4\pi}{3}}$; $\quad k=3$: $1e^{i\frac{11\pi}{6}}$

98.2



99. $z = \left(2e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^3 = 2^3 e^{i\frac{3\pi}{5}} = 8e^{i\frac{3\pi}{5}}$

Todas as raízes têm o mesmo módulo e os seus argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{3}$; logo, as outras raízes são: $2e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{13\pi}{15}}$ e $2e^{i\left(\frac{13\pi}{15}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{23\pi}{15}}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

100. O polígono é um pentágono, logo $n=5$.

Todas as raízes têm o mesmo módulo, 2, e os seus argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{5}$, logo as outras raízes são: $2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{5}\right)}=2e^{i\frac{11\pi}{15}}$, $2e^{i\left(\frac{11\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}\right)}=2e^{i\frac{17\pi}{15}}$, $2e^{i\left(\frac{17\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}\right)}=2e^{i\frac{23\pi}{15}}$ e $2e^{i\left(\frac{23\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}\right)}=2e^{i\frac{29\pi}{15}}$.

101.1 $re^{i\left(\alpha+\frac{k2\pi}{n}\right)}$, $k\in\{1\,,\,\ldots\,,\,n-1\}$

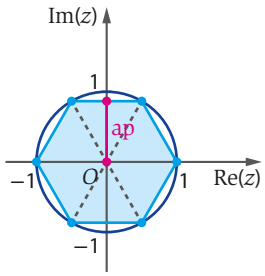
101.2 O menor expoente é n.

102.1 $z^6=2 \iff z^6=2e^{i0} \iff z=\sqrt[6]{2e^{i0}} \iff z=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{2k\pi}{6}}$, $k\in\{0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\}$

$k=0:\ \sqrt[6]{2}e^{i0}$, $k=1:\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$, $k=2:\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $k=3:\ \sqrt[6]{2}e^{i\pi}$, $k=4:\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $k=5:\ \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Os afixos destes números pertencem a uma circunferência de raio $\sqrt[6]{2}$ e obtêm-se, uns dos outros, sucessivamente por rotações de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{3}$.
Por conseguinte, são vértices de um hexágono regular.

102.2



O hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros.

Pelo teorema de Pitágoras calculamos a medida do apótema do hexágono.

$$\left(\sqrt[6]{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt[6]{2}}{2}\right)^2+ap^2 \iff \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}=ap^2 \iff ap=\frac{\sqrt{3}\sqrt[6]{2}}{2}$$

$$A=\frac{6\times\sqrt[6]{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}\sqrt[6]{2}}{2}=\frac{3\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}$$

103.1 $|z|=\left|-3\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{3}{2}\right|=\sqrt{\left(-3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}=3$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{3}{2}}{-3\frac{\sqrt{3}}{2}} \iff \alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3} \underset{\alpha\in 2.^{\circ}\,Q}{\iff} \alpha=\frac{5\pi}{6}$$

$z=3e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Os afixos dos vértices de um hexágono regular pertencem a uma circunferência de raio 3 e obtêm-se, uns dos outros, sucessivamente, por rotações de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{3}$.

$$3e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}=3e^{i\frac{7\pi}{6}}=3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=3\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)=-3\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

$D\left(-3\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,-\frac{3}{2}\right)$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Poderemos obter os restantes vértices pelo mesmo processo ou, neste caso, podemos observar que o ponto D também pode ser obtido por ser simétrico do ponto C relativamente ao eixo real.

Os pontos B e E pertencem ao eixo imaginário e têm módulo 3.

$B(0, 3)$ e $E(0, -3)$

O ponto A é simétrico de C relativamente ao eixo imaginário, $A\left(3\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

O ponto F é simétrico de D relativamente ao eixo imaginário, $F\left(3\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

103.2 $z^6 = \left(3e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^6 \Leftrightarrow z^6 = 3^6 e^{i6\times\frac{5\pi}{6}} \Leftrightarrow z^6 = 729e^{i\pi} \Leftrightarrow z^6 = -729$

PÁG. 64

Aplicar

104.1 $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

C.S. $= \left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

104.2 $z^3 + z^2 = 2 \Leftrightarrow z^3 + z^2 - 2 = 0$

Sabemos que 1 é uma das soluções, pelo que vamos usar a regra de Ruffini para decompor o polinómio.

	1	1	0	−2
1		1	2	2
	1	2	2	0

$z^3 + z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z - 1 = 0 \vee z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \wedge z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 1 \wedge z = \frac{-2 \pm 2i}{2} \Leftrightarrow z = 1 \vee z = -1 + i \vee z = -1 - i$

C.S. $= = \{-1 - i, -1 + i, 1\}$

104.3 $2z^2 - 6z + 29 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\times 2\times 29}}{2\times 2} \Leftrightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{-196}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{6 \pm 14i}{4} \Leftrightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i \vee z = \frac{3}{2} - \frac{7}{2}i$

C.S. $= \left\{\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i, \frac{3}{2} - \frac{7}{2}i\right\}$

104.4 $z^3 + 2z^2 + 5z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 2z + 5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{-2 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = -1 + 2i \vee z = -1 - 2i$

C.S. $= \{0, -1 + 2i, -1 - 2i\}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

104.5 $z^4 - 2z^2 - 15 = 0$

Vamos fazer uma mudança de variável. Seja $y = z^2$.

$$y^2 - 2y - 15 = 0 \iff y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \iff y = 5 \vee y = -3$$

Desfazendo a mudança de variável, vem:

$$z^2 = 5 \vee z^2 = -3 \iff z = \pm\sqrt{5} \vee z = \pm\sqrt{-3} \iff z = \pm\sqrt{5} \vee z = \pm\sqrt{3}i$$

C.S. $= \{\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{3}i\}$

104.6 $iz^3 - z^2 - 2 = 0$

Sabemos que i é uma das soluções, pelo que vamos usar a regra de Ruffini para decompor o polinómio.

	i	-1	0	-2
i		-1	$-2i$	2
	i	-2	$-2i$	0

$$iz^3 - z^2 - 2 = 0 \iff (z - i)(iz^2 - 2z - 2i) = 0 \iff$$

$$\iff z = i \vee z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times i \times (-2i)}}{2i} \iff z = i \vee z = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2i} \iff$$

$$\iff z = i \vee z = \frac{2 \pm 2i}{2i} \iff z = i \vee z = \frac{1 + i}{i} \vee z = \frac{1 - i}{i} \iff$$

$$\iff z = i \vee z = \frac{(1 + i)(-i)}{i(-i)} \vee z = \frac{(1 - i)(-i)}{i(-i)} \iff z = i \vee z = 1 - i \vee z = -1 - i$$

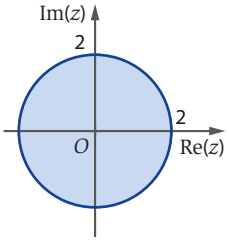
C.S. $= \{i, 1 - i, -1 - i\}$

PÁG. 65

Aplicar

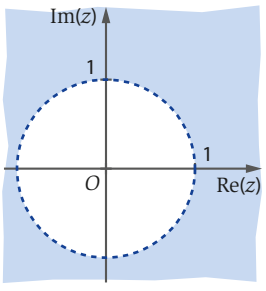
107.1 $|z| \leqslant 2$

Esta condição define um círculo com centro na origem e raio 2.



107.2 $|z| > 1$

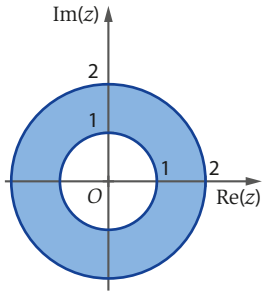
Esta condição define o exterior da circunferência com centro na origem e raio 1.



M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

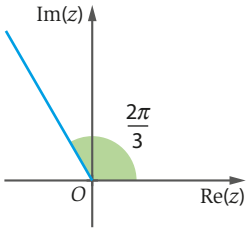
107.3 $1 \leqslant |z| \leqslant 2$

Esta condição define o conjunto de pontos que pertencem simultaneamente ao círculo de centro na origem e raio 2 e ao exterior da circunferência de centro na origem e raio 1 incluindo a fronteira.



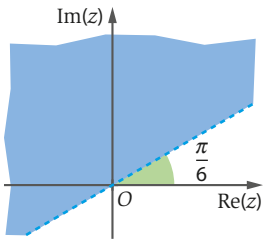
107.4 $\text{Arg}(z) = \frac{2\pi}{3}$

Esta condição define a semirreta com origem na origem do referencial e que faz um ângulo de medida $\frac{2\pi}{3}$ com o semieixo real positivo.



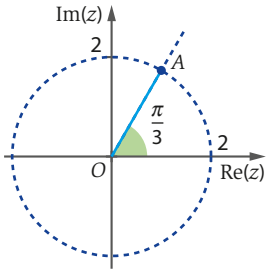
107.5 $\frac{\pi}{6} < \text{Arg}(z) \leqslant \pi \vee -\pi < \text{Arg}(z) < -\frac{5\pi}{6}$

Esta condição é uma disjunção, pelo que corresponde à reunião de dois conjuntos: o ângulo de vértice na origem do referencial cujo lado origem é a semirreta que faz um ângulo de medida $\frac{\pi}{6}$ (excluindo esta semirreta) com o semieixo real positivo e lado extremidade é a semirreta de origem na origem do referencial e que faz um ângulo de medida π com o semieixo real positivo, e o ângulo de vértice na origem do referencial cujos lados origem e extremidade são as semirretas de origem na origem do referencial e que fazem um ângulo de medida $-\pi$ e $-\frac{5\pi}{6}$, respetivamente, com o semieixo real positivo, excluindo as semirretas.



107.6 $|z| \leqslant 2 \wedge \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$

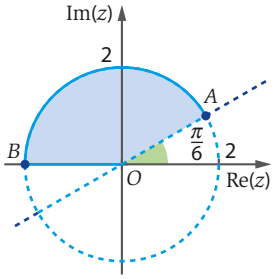
Esta condição é uma conjunção, pelo que corresponde à interseção de dois conjuntos: um círculo com centro na origem e raio 2 e a semirreta com origem na origem do referencial e que faz um ângulo de medida $\frac{\pi}{3}$ com o semieixo real positivo, obtendo desta forma o segmento de reta $[OA]$.



M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

107.7 $|z| \leqslant 2 \wedge \frac{\pi}{6} < \text{Arg}(z) \leqslant \pi$

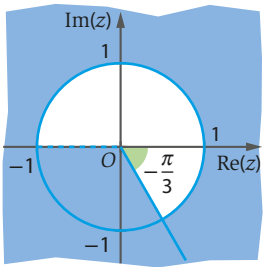
Esta condição é uma conjunção, pelo que corresponde à interseção de dois conjuntos: um círculo com centro na origem e raio 2 e o ângulo de vértice na origem do referencial cujo lado origem é a semirreta que faz um ângulo de medida $\frac{\pi}{6}$ (excluindo esta semirreta) com o semieixo real positivo e cujo lado extremidade é a semirreta de origem na origem do referencial e que faz um ângulo de medida π com o semieixo real positivo. Obtendo-se o setor circular AOB, do qual excluímos o segmento de reta $[OA]$.



107.8 $|z| \geqslant 1 \vee \text{Arg}(z) \leqslant -\frac{\pi}{3}$

Esta condição é uma disjunção, pelo que corresponde à reunião de dois conjuntos: o exterior da circunferência e a circunferência de centro na origem do referencial e raio 1 e o ângulo de vértice na origem do referencial cujo lado origem é a semirreta que faz um ângulo de medida $-\pi$ (excluindo esta semirreta) com o semieixo real positivo e cujo lado extremidade é a semirreta de origem na origem do referencial e que faz um ângulo de medida $-\frac{\pi}{3}$ com o semieixo real positivo.

Nota: o argumento de z pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$.



108.1 $|z_2 - z_1| = |1 + 2i - (2 + i)| = |-1 + i| =$

$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

108.2 $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$|z_2 - z_1| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right| =$

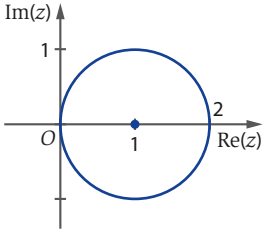
$= \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{2\sqrt{6}}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{8 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})}}{2}$

PÁG. 67

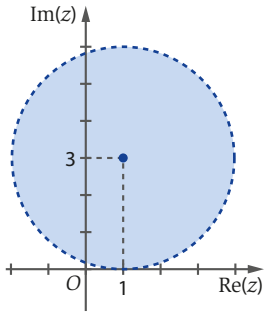
Aplicar

110.1 Esta condição define o conjunto de pontos que pertencem à circunferência de centro no ponto de coordenadas $(1, 0)$ e raio 1.



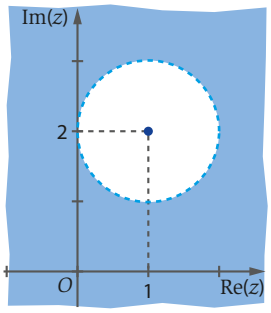
M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

110.2 Esta condição define o conjunto de pontos que pertencem ao interior da circunferência de centro no ponto de coordenadas $(1\ ,\ 3)$ e raio 3.



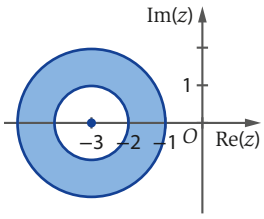
110.3 Esta condição define o conjunto de pontos que pertencem ao exterior da circunferência de centro no ponto de coordenadas $(1\ ,\ 2)$ e raio 1.

$|z-1-2i|>1 \iff |z-(1+2i)|>1$



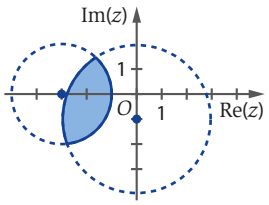
110.4 Esta condição define o conjunto de pontos que pertencem à coroa circular definida pelas circunferências concêntricas de centro $(-3\ ,\ 0)$ e raios 1 e 2.

$1 \leqslant |z+3| \leqslant 2 \iff |z-(-3)| \geqslant 1 \wedge |z-(-3)| \leqslant 2$

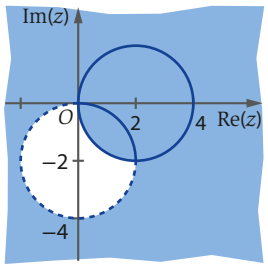


110.5 $|z-(-3)| \leqslant 2 \wedge |z-(-i)| \leqslant 3$

Esta condição define o conjunto de pontos da interseção entre dois círculos: o círculo de centro $(-3\ ,\ 0)$ e raio 2 e outro círculo de centro $(0\ ,\ -1)$ e raio 3. Este conjunto de pontos está representado a sombreado na figura.



110.6 Esta condição define o conjunto de pontos da interseção entre o círculo de centro $(2\ ,\ 0)$ e raio 2 e o exterior da circunferência de centro no ponto de coordenadas $(0\ ,\ -2)$ e raio 2.



M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

111. A condição que define o círculo de centro em A que passa em C (raio $\overline{AC}=2$) é $|z+1|\leqslant 2$.

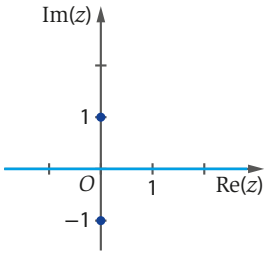
A condição que define o círculo de centro em B que passa em D (raio $\overline{BD}=2$) é $|z-i|\leqslant 2$.

O domínio plano representado a sombreado incluindo a fronteira é definido pela condição $|z+1|\leqslant 2 \wedge |z-i|\leqslant 2$.

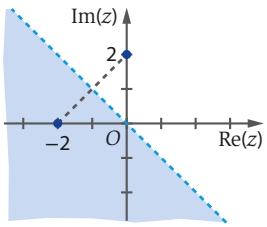
PÁG. 73

Aplicar

116.1 Esta condição representa a mediatriz do segmento de reta com extremos nos afixos de i e $-i$. Neste caso coincide com o eixo real.

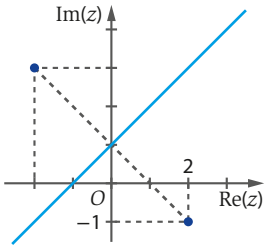


116.2 Esta condição representa o conjunto de pontos mais próximos da imagem geométrica de -2 do que da imagem geométrica de $2i$, é um semiplano aberto.



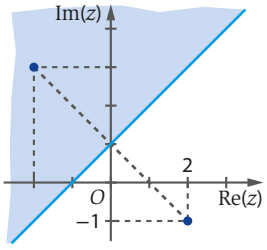
116.3 $|z-(2-i)|=|z+2-3i| \iff |z-(2-i)|=|z-(-2+3i)|$

Esta condição representa a mediatriz do segmento de reta com extremos nos afixos de $2-i$ e $-2+3i$.



116.4 $|z-(2-i)|\geqslant|z+2-3i| \iff |z-(2-i)|\geqslant|z-(-2+3i)|$

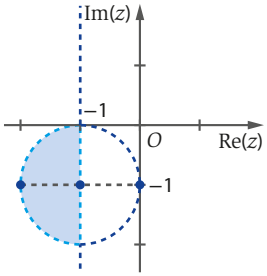
Esta condição representa o conjunto de pontos mais próximos ou à mesma distância da imagem geométrica de $-2+3i$ do que da imagem geométrica de $2-i$, é um semiplano fechado.



M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

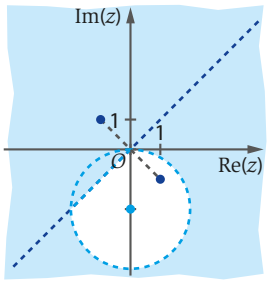
116.5 $|z+i|>|z+2+i| \wedge |z+1+i|<1 \iff |z-(-i)|>|z-(-2-i)| \wedge |z-(1-i)|<1$

Esta condição representa o conjunto de pontos mais próximos da imagem geométrica de $-2-i$ do que da imagem geométrica de $-i$ e que estão no interior da circunferência de centro no afixo de $1-i$ e raio 1. Este conjunto de pontos está representado a sombreado na figura.



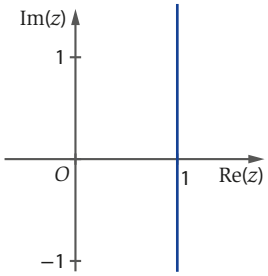
116.6 $|z+2i|>2 \vee |z+1-i|<|z-1+i| \iff |z-(-2i)|>2 \vee |z-(-1+i)|<|z-(1-i)|$

Esta disjunção de condições representa a união do conjunto de pontos mais próximos da imagem geométrica de $-1+i$ do que da imagem geométrica de $1-i$ com o conjunto de pontos que estão no exterior da circunferência de centro no afixo de $-2i$ e raio 2.

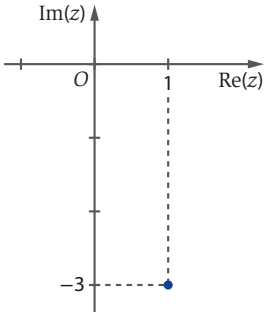


117. $|z-(2-3i)|=|z-(-4+2i)| \iff |z-2+3i|=|z+4-2i|$

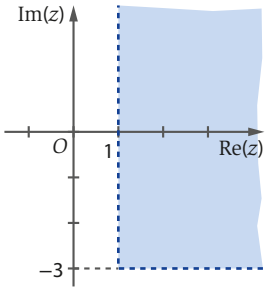
118.1



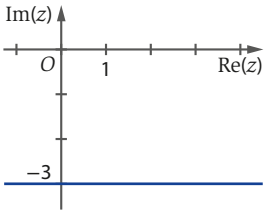
118.4



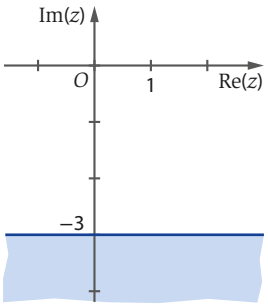
118.7



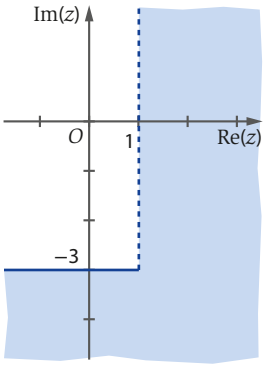
118.2



118.5

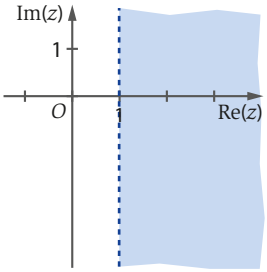


118.8

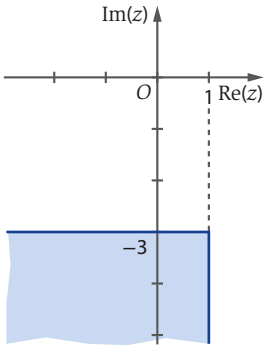


M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

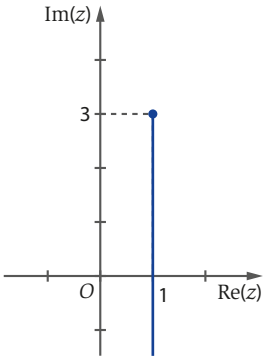
118.3



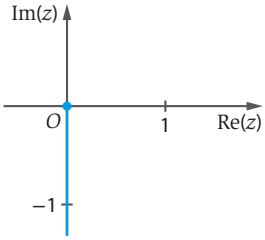
118.6



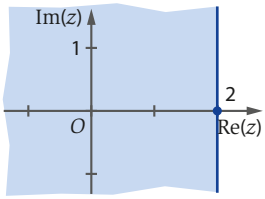
118.9



119.1

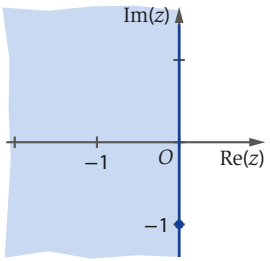


119.2

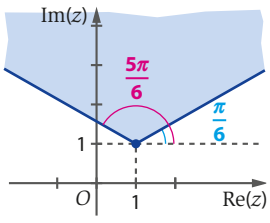


119.3 $-\pi < \operatorname{Arg}(z+i) \leqslant -\frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arg}(z+i) \leqslant \pi \iff$

$\iff -\pi < \operatorname{Arg}(z-(-i)) \leqslant -\frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arg}(z-(-i)) \leqslant \pi$

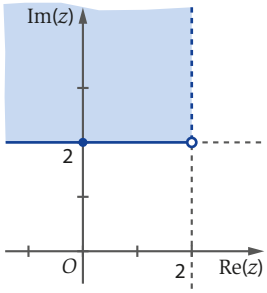


119.4 $\frac{\pi}{6} \leqslant \operatorname{Arg}(z-1-i) \leqslant \frac{5\pi}{6} \iff \operatorname{Arg}(z-(1+i)) \geqslant \frac{\pi}{6} \wedge \operatorname{Arg}(z-(1+i)) \leqslant \frac{5\pi}{6}$

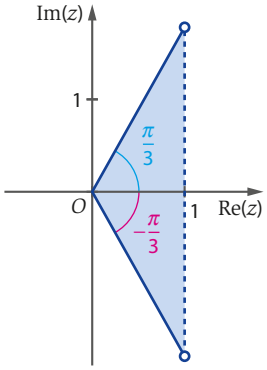


M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

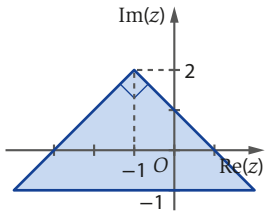
119.5



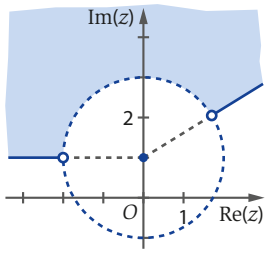
119.6



119.7 $-\frac{3\pi}{4} \leqslant \operatorname{Arg}(z+1-2i) \leqslant -\frac{\pi}{4} \wedge \operatorname{Im}(z) \geqslant 1 \iff -\frac{3\pi}{4} \leqslant \operatorname{Arg}(z-(-1+2i)) \leqslant -\frac{\pi}{4} \wedge \operatorname{Im}(z) \geqslant 1$



119.8



PÁG. 74

Aplicar

120.1 $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$

120.2 $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{6} \vee \operatorname{Arg}(z) = -\frac{5\pi}{6}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

120.3 $\text{Arg}(z-(-1+i))=\frac{3\pi}{4} \iff \text{Arg}(z+1-i)=\frac{3\pi}{4}$

120.4 $\text{Arg}(z+2i)\geqslant\frac{\pi}{4}\wedge\text{Arg}(z+2i)\leqslant\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \iff \frac{\pi}{4}\leqslant\text{Arg}(z+2i)\leqslant\frac{3\pi}{4}$

121. $\text{Arg}(z-i)\leqslant-\frac{\pi}{4}\wedge\text{Arg}(z-i)\geqslant-\frac{3\pi}{4}\wedge\text{Im}(z)\geqslant-1 \iff$

$\iff -\frac{3\pi}{4}\leqslant\text{Arg}(z-i)\leqslant-\frac{\pi}{4}\wedge\text{Im}(z)\geqslant-1$

122.1 $|z-i|>2\wedge\text{Im}(z)>1$

122.2 $|z|<2\wedge\frac{\pi}{6}<\text{Arg}(z)<\frac{2\pi}{3}$

123.1 Seja θ um argumento de z.

$\text{Arg}(i)=\frac{\pi}{2}$

Os argumentos de iz são $\theta+\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

$\theta+\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{2} \iff \theta=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Para $k=0$, vem $\theta=0$.

Logo, $\text{Arg}(iz)=\frac{\pi}{2} \iff \text{Arg}(z)=0$, condição que define o semieixo real positivo.

123.2 Seja θ um argumento de z.

$\text{Arg}(\overline{z})=-\theta$

$\text{Arg}(i^2)=\text{Arg}(-1)=\pi$

Os argumentos de $i^2\,\overline{z}$ são $\pi-\theta+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

$\pi-\theta+2k\pi=\pi \iff \theta=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Para $k=0$, vem $\theta=0$.

Logo, $\text{Arg}(i^2\,\overline{z})=\pi \iff \text{Arg}(z)=0$, condição que define o semieixo real positivo.

123.3 Seja $z=re^{i\theta}$, $\text{Arg}(z)=\theta$ e $\overline{z}=re^{i(-\theta)}$.

$\overline{z}^4=\left(re^{i(-\theta)}\right)^4=r^4e^{i(-4\theta)}$

$2\overline{z}^4=2r^4e^{i(-4\theta)}$

Como $\text{Arg}(2\overline{z}^4)=\pi$, então $-4\theta=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z} \iff \theta=-\frac{\pi}{4}-\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Assim, dando valores a k:

$k=0$, $\theta=-\frac{\pi}{4}$; $k=1$, $\theta=-\frac{3\pi}{4}$; $k=-1$, $\theta=\frac{\pi}{4}$; $k=-2$, $\theta=\frac{3\pi}{4}$

Este conjunto de pontos é a bissetriz dos quadrantes ímpares reunida com a bissetriz dos quadrantes pares.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

123.4 Seja θ um argumento de z.

$\text{Arg}(-1)=\pi$

Os argumentos de $-z$ são $\theta+\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

$\theta+\pi+2k\pi=\frac{\pi}{3} \iff \theta=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Para $k=0$, vem $\theta=-\frac{2\pi}{3}$.

Logo, $\text{Arg}\left(i^2\,\overline{z}\right)=\pi \iff \text{Arg}(z)=-\frac{2\pi}{3}$, condição que define uma semirreta com origem na origem do referencial e que forma com o semieixo positivo dos reais um ângulo orientado de amplitude $-\frac{2\pi}{3}$.

123.5 Seja $z=x+yi$, x, $y\in\mathbb{R}$.

$\text{Re}(z)=\text{Im}(z) \iff x=y$

Condição que define a bissetriz dos quadrantes ímpares.

123.6 Seja $z=x+yi$, x, $y\in\mathbb{R}$.

$\overline{z}=x-yi \iff 2\overline{z}=2x-2yi$

$\text{Re}(2\overline{z})=\frac{\text{Im}(\overline{z})}{2} \iff 2x=\frac{-y}{2} \iff y=-4x$

Condição define a reta de equação $y=-4x$.

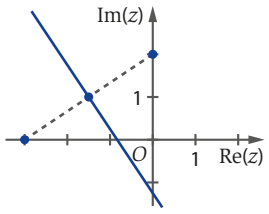
123.7 A condição define a mediatriz do segmento de reta com extremos nos pontos de coordenadas $(0,2)$ e $(-3,0)$.

123.8 Seja $z=x+yi$, x, $y\in\mathbb{R}$ e $\overline{z}=x-yi$.

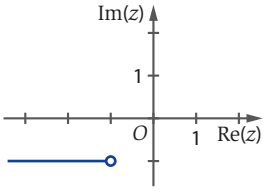
$$\begin{aligned}
2\overline{z}-2(z+2i)=i(z\overline{z}-2) &\iff 2(x-yi)-2(x+yi+2i)=i\left((x+yi)(x-yi)-2\right) \iff\\
&\iff 2x-2yi-2x-2yi-4i=i\left(x^2+y^2-2\right) \iff\\
&\iff (-4y-4)\,i=i\left(x^2+y^2-2\right) \iff\\
&\iff -4y-4=x^2+y^2-2 \iff\\
&\iff x^2+y^2+4y+4=2 \iff\\
&\iff x^2+(x-2)^2=2
\end{aligned}$$

Condição que define uma circunferência de centro no ponto de coordenadas $(0,2)$ e raio $\sqrt{2}$.

124.1



124.2

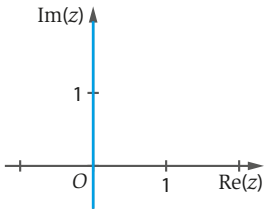


M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

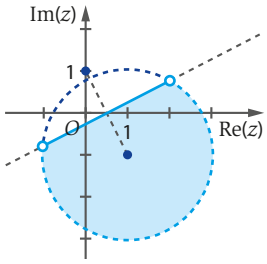
124.3 Seja $z = x + yi$, x , $y \in \mathbb{R}$ e $\overline{z} = x - yi$.

$$\frac{\text{Re}(\overline{z})}{3} = \text{Im}(z\overline{z}) \Leftrightarrow \frac{\text{Re}(x - yi)}{3} = \text{Im}\left((x + yi)(x - yi)\right) \Leftrightarrow$$

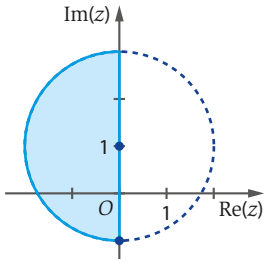
$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = \text{Im}\left(x^2 + y^2\right) \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



124.4 $|z - i| \geqslant |z - 1 + i| \wedge |z - 1 + i| < 2 \Leftrightarrow |z - i| \geqslant |z - (1 - i)| \wedge |z - (1 - i)| < 2$



124.5



PÁG. 75

Aplicar +

1.1 $\text{Re}(z) = 2$

Opção correta: **(A)**

1.2 $\text{Im}(z) = -3$

Opção correta: **(B)**

2. Opção correta: **(C)**

3.1 $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \vee a = 2$

3.2 $a^2 + 2a - 8 = 0 \wedge a^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)}}{2} \wedge a^2 \neq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{-2 - 6}{2} \vee a = \dfrac{-2 + 6}{2} \wedge (a \neq -2 \wedge a \neq -2) \Leftrightarrow a = -4 \vee a = 2 \wedge (a \neq -2 \wedge a \neq -2) \Leftrightarrow a = -4$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

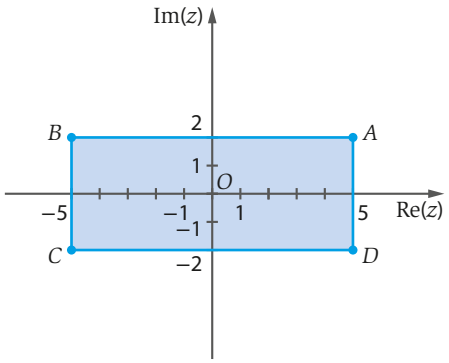
4. $3b^2 = -2b \Leftrightarrow 3b^2 + 2b = 0 \Leftrightarrow b(3b+2) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee 3b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = -\frac{2}{3}$

Como $b \neq 0$, concluímos que $b = -\frac{2}{3}$.

Opção correta: **(A)**

5. Opção correta: **(A)**

6. $A(5, y_A)$, $y_A > 0$; $C(x_C, -5)$, $x_C < 0$



$A(5, 2)$; $C(-5, -2)$; $D(5, -2)$; $B(-5, 2)$

$5 + 2i$; $-5 - 2i$; $5 - 2i$; $-5 + 2i$

$A_{[ABCD]} = (5+5) \times (2+2) = 40$

7.1 $z_1 + z_2 = -1 + 2i + 1 - 4i = -2i$

7.2 $z_1 \times z_2 = (-1 + 2i) \times (1 - 4i) = -1 + 4i + 2i - 8i^2 = 7 + 6i$

7.3 $z_1 \times (z_2 + z_3) = (-1 + 2i) \times (1 - 4i + 8 - 3i) = (-1 + 2i) \times (9 - 7i) =$
$= -9 + 7i + 18i - 14i^2 = 5 + 25i$

7.4 $z_2 \times z_3 + z_1 = (1 - 4i) \times (8 - 3i) + (-1 + 2i) = 8 - 3i - 32i + 12i^2 - 1 + 2i = -5 - 33i$

8. $(z_1)^2 \times z_3 + z_2 = (1 - 3i)^2 \times (-2i) + (-5 + 4i) = (1 - 6i + 9i^2) \times (-2i) + (-5 + 4i) =$
$= (-8 - 6i) \times (-2i) + (-5 + 4i) = 16i + 12i^2 - 5 + 4i = -17 + 20i$

9. $z_1 + z_2 + 2i = 3x(i - 1) + x^3 - 2x^2 - xi + 2i =$
$= 3xi - 3x + x^3 - 2x^2 - xi + 2i = x^3 - 2x^2 - 3x + (2x + 2)i$

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \wedge 2x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x^2 - 2x - 3 = 0) \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2}\right) \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}\right) \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \frac{2-4}{2} \vee x = \frac{2+4}{2}\right) \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -1 \vee x = 3) \wedge x \neq -1 \underset{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}{\Leftrightarrow} x = 3$

Concluímos que $x = 3$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 76

Aplicar +

10.1 Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$.

$zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$

$\text{Re}(zw) = ac - bd$ e $\text{Re}(z) \times \text{Re}(w) = ac$

$\text{Re}(zw) = \text{Re}(z) \times \text{Re}(w) \iff ac - bd = ac \iff bd = 0 \iff b = 0 \vee d = 0 \iff$
$\iff \text{Im}(z) = 0 \vee \text{Im}(w) = 0 \iff z \in \mathbb{R} \vee w \in \mathbb{R}$

10.2 $\text{Re}(z) = a$, $\text{Im}(z) = b$, $\text{Re}(w) = -2b$, $\text{Im}(w) = 3$.

$\text{Re}(z) \times \text{Re}(w) = a(-2b) = -2ab$, $\text{Im}(z) \times \text{Im}(w) = b \times 3 = 3b$.

$zw = (a + bi)(-2b + 3i) = -2ab + 3ai - 2b^2 i + 3bi^2 = -2ab - 3b + (3a - 2b^2)i$

$\text{Re}(zw) = -2ab - 3b$, $\text{Im}(zw) = 3a - 2b^2$.

$\text{Re}(zw) = 6 + \text{Re}(z) \times \text{Re}(w) \iff -2ab - 3b = 6 + (-2ab) \iff -3b = 6 \iff b = -2$

$\text{Im}(zw) = \text{Im}(z) \times \text{Im}(w) \iff 3a - 2b^2 = 3b \iff 3a = 2b^2 + 3b$

Como $b = -2$, $3a = 2(-2)^2 + 3(-2) \iff a = \frac{2}{3}$.

11.1 $z_1 - z_2 = -4 + 3i - (-2 + 5i) = -2 - 2i$

11.2 $z_1 \times (z_2 - z_3) = (-4 + 3i) \times (-2 + 5i - 7 - 2i) = (-4 + 3i) \times (-9 + 3i) =$
$= 36 - 12i - 27i + 9i^2 = 27 - 39i$

11.3 $(z_1 - z_2) \times (z_2 - z_3) = (-2 - 2i) \times (-9 + 3i) =$
$= 18 - 6i + 18i - 6i^2 = 24 + 12i$

12. $z + 2z_1 \times z_2 = 3z + z_2 \iff z + 2i \times (9 - 8i) = 3z + (9 - 8i) \iff 2z = 2i \times (9 - 8i) - (9 - 8i) \iff$
$\iff 2z = (9 - 8i) \times (2i - 1) \iff 2z = 18i - 9 - 16i^2 + 8i \iff$
$\iff 2z = 7 + 26i \iff z = \frac{7}{2} + 13i$

13.1 A soma dos quatro números complexos cujos afixos são os vértices do quadrado é zero, pelo que o número complexo cujo afixo é o ponto B é o simétrico de $1 - 3i$, ou seja, é $-1 + 3i$.

13.2 $\frac{w}{2 - i} - z_1 - z_2 - z_3 = 0 \iff \frac{w}{2 - i} - (z_1 + z_2 + z_3) = 0 \iff \frac{w}{2 - i} - (1 - 3i) = 0 \iff$
$\iff w = (1 - 3i) \times (2 - i) \iff w = 2 - i - 6i + 3i^2 \iff w = -1 - 7i$

14. $z = (y + xi)i = yi + xi^2 = -x + yi$

14.1 $-z = -(-x + yi) = x - yi$

Opção correta: **(B)**

14.2 $z = -3 + 2i$, $-z^2 = -(-3 + 2i)^2 = -(9 - 12i - 4) = -5 + 12i$

Opção correta: **(C)**

15. $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

Opção correta: **(D)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

16. $\overline{(2+5i)(-5-2i)} = \overline{-10-4i-25i-10i^2} = \overline{-29i} = 29i$

Opção correta: **(A)**

17. Seja $z = x + yi$.

$2\bar{z} = iz + 3 \iff 2(x - yi) = i(x + yi) + 3 \iff 2x - 2yi = xi + yi^2 + 3 \iff$

$\iff 2x - 2yi = xi - y + 3 \iff 2x + y - 3 + (-x - 2y)i = 0 \iff$

$\iff 2x + y - 3 = 0 \wedge -x - 2y = 0 \iff 2(-2y) + y - 3 = 0 \wedge x = -2y \iff y = -1 \wedge x = 2$

Então, $z = 2 - i$.

Opção correta: **(C)**

PÁG. 77

Aplicar +

18.1 Sejam $z_1 = x + yi$, $z_2 = \overline{z_1} = x - yi$ e $z_3 = -z_2 = -x + yi$.

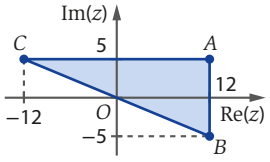
$|z_1| = 13 \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 13$; $\text{Im}(z_3) = 5 \iff y = 5$

$x^2 + 5^2 = 13^2 \iff x^2 = 144 \iff x = \pm 12$

Como $\text{Re}(z_3) < 0$, $-x < 0 \iff x > 0$, e, portanto, $x = 12$.

$z_1 = 12 + 5i$, $z_2 = 12 - 5i$, $z_3 = -12 + 5i$.

$A(12, 5)$; $B(12, -5)$; $C(-12, 5)$



$A_{[ABC]} = \dfrac{(12+12)\times(5+5)}{2} = 120$

18.2 $\dfrac{-z_1 \times z_2}{|z_3|} - \overline{z_3} = \dfrac{-(12+5i)\times(12-5i)}{13} - \overline{(-12+5i)} =$

$= \dfrac{-(144 - 25i^2)}{13} - (-12 - 5i) = \dfrac{-(144+25)}{13} + 12 + 5i = -13 + 12 + 5i = -1 + 5i$

19.1 Seja $z = x + yi$.

$\overline{\bar{z} + w} = \overline{x - yi + 1 - 3i} = \overline{x + 1 + (-3 - y)i} = x + 1 + (3 + y)i = x + yi + 1 + 3i = z + 1 + 3i$

Opção correta: **(B)**

19.2 $\text{Im}(\bar{z}) = 2\,\text{Re}(z) \iff -y = 2x \iff y = -2x$

$|z - w| = 1 \iff |x - 2xi - 1 + 3i| = 1 \iff |x - 1 + (3 - 2x)i| = 1 \iff \sqrt{(x-1)^2 + (3-2x)^2} = 1$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem:

$(x-1)^2 + (3-2x)^2 = 1 \iff x^2 - 2x + 1 + 9 - 12x + 4x^2 = 1 \iff$

$\iff 5x^2 - 14x + 9 = 0 \iff x = \dfrac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4\times5\times9}}{2\times5} \iff x = \dfrac{14 \pm \sqrt{16}}{10} \iff$

$\iff x = \dfrac{14-4}{10} \vee x = \dfrac{14+4}{10} \iff x = 1 \vee x = \dfrac{9}{5}$

Se $x = 1$, $y = -2$ e $z = 1 - 2i$; se $x = \dfrac{9}{5}$, $y = -\dfrac{18}{5}$ e $z = \dfrac{9}{5} - \dfrac{18}{5}i$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

20. Seja $z = x + yi$, não nulo.

$\text{Im}(z) - \text{Re}(z) = 0 \iff y - x = 0 \iff y = x$, logo $z = x + xi$, com $x > 0$.

$\overline{iz^2 - 2i} = \overline{i(x+xi)^2 - 2i} = \overline{i(x^2 - x^2 + 2x^2 i) - 2i} = \overline{-2x^2 - 2i} = -2x^2 + 2i$

$\text{Re}(-2x^2 + 2i) = -2x^2 < 0$ e $\text{Im}(-2x^2 + 2i) = 2 > 0$; logo, a imagem geométrica de $\overline{iz^2 - 2i}$ pertence ao 2.º quadrante.

Opção correta: **(B)**

21. Seja $w = x + yi$, $x > 0$, $y < 0$. A imagem geométrica de w pertence ao 4.º quadrante.

21.1 $z + \text{Re}(w) = 3i + x = x + 3i$, $x > 0$

A imagem geométrica de $z + \text{Re}(w)$ pertence ao 1.º quadrante.

21.2 $z - w = 3i - x - yi = -x + (3 - y)i$, $x > 0$, $y < 0$

$x > 0 \implies -x < 0$

Como $|\text{Im}(w)| < |\text{Im}(z)| \iff |y| < 3 \iff y > -3 \wedge y < 3$,

$-3 < y < 0 \iff 0 < -y < 3 \iff 3 < 3 - y < 6$.

A imagem geométrica de $z - w$ pertence ao 2.º quadrante.

21.3 $z + w = 3i + x + yi = x + (3 + y)i$, $x > 0$, $y < 0$

Como $|\text{Im}(w)| < |\text{Im}(z)| \iff |y| < 3$, $y > -3 \wedge y < 3$,

$-3 < y < 0 \iff 0 < 3 + y < 3$.

A imagem geométrica de $z + w$ pertence ao 1.º quadrante.

21.4 $\overline{z} + w = -3i + x + yi = x + (-3 + y)i$, $x > 0$, $y < 0$

Como $|\text{Im}(w)| < |\text{Im}(z)| \iff |y| < 3 \iff y > -3 \wedge y < 3$,

$-3 < y < 0 \iff -6 < -3 + y < -3$.

A imagem geométrica de $\overline{z} + w$ pertence ao 4.º quadrante.

22. Seja $w = x + yi$.

$(w + \overline{w})^2 - (w - \overline{w})^2 = (x + yi + x - yi)^2 - (x + yi - x + yi)^2 =$

$= (2x)^2 - (2yi)^2 = 4x^2 - 4y^2 i^2 = 4x^2 + 4y^2 \in \mathbb{R}^+$

23. Seja $z = a + bi$, a, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\overline{z} = a - bi$, $-z = -a - bi$, $-\overline{z} = -a + bi$.

$A = |(a + a) \times (b + b)| = |2a \times 2b| = 4|ab|$

24.1 $\frac{w}{z} = \frac{4 - i}{1 + 2i} = \frac{(4 - i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{4 - 8i - i + 2i^2}{1^2 - (2i)^2} = \frac{2 - 9i}{1 + 4} = \frac{2}{5} - \frac{9}{5}i$

24.2 $\frac{2w - i}{i} = \frac{2(4 - i) - i}{i} = \frac{8 - 3i}{i} = \frac{(8 - 3i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-8i + 3i^2}{-i^2} = \frac{-3 - 8i}{1} = -3 - 8i$

24.3 $\frac{w - \overline{z}}{z - \overline{w}} = \frac{4 - i - 1 + 2i}{1 + 2i - 4 - i} = \frac{3 + i}{-3 + i} = \frac{(3 + i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} =$

$= \frac{-9 - 3i - 3i - i^2}{(-3)^2 - (-i)^2} = \frac{-8 - 6i}{9 + 1} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

24.4 $\dfrac{w\times z+3}{w-2i}=\dfrac{(4-i)\times(1+2i)+3}{4-i-2i}=\dfrac{4+8i-i-2i^2+3}{4-3i}=\dfrac{9+7i}{4-3i}=\dfrac{(9+7i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=$

$=\dfrac{36+27i+28i+21i^2}{4^2-(3i)^2}=\dfrac{15+55i}{16+9}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{11}{5}i$

25. $\dfrac{3+3i}{2-i}-i=\dfrac{3+3i-i(2-i)}{2-i}=\dfrac{3+3i-2i+i^2}{2-i}=\dfrac{2+i}{2-i}$

$\dfrac{1}{\frac{2+i}{2-i}}=\dfrac{2-i}{2+i}=\dfrac{(2-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{4-2i-2i+i^2}{2^2-i^2}=\dfrac{3-4i}{4+1}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$

26. Seja $z=x+yi$, $x<0$, $y>0$, $y=-x$.

$\overline{z}=\dfrac{1}{z}\iff x-yi=\dfrac{1}{x+yi}\iff x+xi=\dfrac{1}{x-xi}\iff$

$\iff x+xi=\dfrac{x+xi}{(x-xi)(x+xi)}\iff x+xi=\dfrac{x+xi}{x^2-(xi)^2}\iff x+xi=\dfrac{x+xi}{x^2+x^2}\iff$

$\iff x+xi=\dfrac{x+xi}{2x^2}\iff x+xi=\dfrac{x}{2x^2}+\dfrac{x}{2x^2}i\iff x+xi=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x}i\iff$

$\iff x=\dfrac{1}{2x}\wedge x=\dfrac{1}{2x}\iff 2x^2=1\iff x^2=\dfrac{1}{2}\underset{x<0}{\iff}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y=-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

PÁG. 78

Aplicar +

27. Seja $z=x+yi$, $x<0$, $y>0$, $y=-x$.

27.1 $-z\times\overline{z}=-(x+yi)\times(x-yi)=-\left(x^2-xyi+xyi-y^2i^2\right)=-\left(x^2+y^2\right)=-2x^2\in\mathbb{R}^-$

Opção correta: **(C)**

27.2 $\dfrac{-z}{\overline{z}}=\dfrac{-(x+yi)}{x-yi}=\dfrac{-(x-xi)}{x+xi}=\dfrac{-(x-xi)(x-xi)}{(x+xi)(x-xi)}=\dfrac{-\left(x^2-2x^2i+x^2i^2\right)}{x^2-(xi)^2}=$

$=\dfrac{-(-2x^2i)}{x^2+x^2}=\dfrac{2x^2i}{2x^2}=i$

Opção correta: **(B)**

28.1 $\dfrac{i\overline{z_1}}{z_2}+(z_2-i)^3=\dfrac{i(1-4i)}{-1+2i}+(-1+2i-i)^3=\dfrac{4+i}{-1+2i}+(-1+i)^3=$

$=\dfrac{(4+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}+(-1+i)(-1+i)^2=\dfrac{-4-8i-i-2i^2}{(-1)^2-(-2i)^2}+(-1+i)\left(1-2i+i^2\right)=$

$=\dfrac{-2-9i}{1+4}+(-1+i)(-2i)=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{9}{5}i+2i-2i^2=-\dfrac{2}{5}+2-\dfrac{9}{5}i+2i=\dfrac{8}{5}+\dfrac{1}{5}i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

28.2 Seja $z = x + yi$.

$$z \times z_2 - \overline{z \times z_1} = -\frac{1}{3} - 3i \iff (x+yi) \times (-1+2i) - \overline{(x+yi) \times (1+4i)} = -\frac{1}{3} - 3i \iff$$

$$\iff -x + 2xi - yi + 2yi^2 - \overline{x + 4xi + yi + 4yi^2} = -\frac{1}{3} - 3i \iff$$

$$\iff -x - 2y + (2x - y)i - \overline{x - 4y + (4x + y)i} = -\frac{1}{3} - 3i \iff$$

$$\iff -x + 2y + (2x - y)i - \left(x - 4y + (-4x - y)i\right) = -\frac{1}{3} - 3i \iff$$

$$\iff -x - 2y - x + 4y + (2x - y + 4x + y)i = -\frac{1}{3} - 3i \iff$$

$$\iff -2x + 2y + 6xi = -\frac{1}{3} - 3i \iff -2x + 2y = -\frac{1}{3} \wedge 6x = -3 \iff$$

$$\iff -2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2y = -\frac{1}{3} \wedge x = -\frac{1}{2} \iff y = -\frac{2}{3} \wedge x = -\frac{1}{2}$$

$z = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$

29.1 $iz = i\left(3ab^2 - 2bi\right) = 2b + 3ab^2 i$

$3ab^2 = 2b \iff 3ab^2 - 2b = 0 \iff b(3ab - 2) = 0 \iff b = 0 \vee 3ab - 2 = 0 \iff b = 0 \vee b = \frac{2}{3a}$

Como $b \neq 0$, concluímos que $b = \frac{2}{3a}$.

Opção correta: **(D)**

29.2 $w = \frac{\bar{z}}{2 - bi} = \frac{3ab^2 + 2bi}{2 - bi} = \frac{(3ab^2 + 2bi)(2 + bi)}{(2 - bi)(2 + bi)} =$

$$= \frac{6ab^2 + 3ab^3 i + 4bi + 2b^2 i^2}{2^2 - (bi)^2} = \frac{6ab^2 - 2b^2 + 3ab^3 i + 4bi}{4 + b^2} =$$

$$= \frac{(6ab^2 - 2b^2) + (3ab^3 + 4b)i}{4 + b^2} = \frac{6ab^2 - 2b^2}{4 + b^2} + \frac{3ab^3 + 4b}{4 + b^2} i$$

$$\frac{6ab^2 - 2b^2}{4 + b^2} = 0 \wedge \frac{3ab^3 + 4b}{4 + b^2} \neq 0 \iff 6ab^2 - 2b^2 = 0 \wedge 4 + b^2 \neq 0 \wedge 3ab^3 + 4b \neq 0 \iff$$

$$\iff (6a - 2)b^2 = 0 \wedge b^2 \neq -4 \wedge (3ab^2 + 4)b \neq 0 \iff$$

$$\iff (6a - 2 = 0 \vee b^2 = 0) \wedge 3ab^2 + 4 \neq 0 \wedge b \neq 0 \iff$$

$$\iff \left(a = \frac{1}{3} \vee b = 0\right) \wedge ab^2 \neq -\frac{4}{3} \wedge b \neq 0$$

$$\iff a = \frac{1}{3}$$

30. $\frac{1 - \bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1 - (a - \sqrt{2}i)}{a - \sqrt{2}i} = \frac{1 - a + \sqrt{2}i}{a - \sqrt{2}i} = \frac{(1 - a + \sqrt{2}i)(a + \sqrt{2}i)}{(a - \sqrt{2}i)(a + \sqrt{2}i)} =$

$$= \frac{a + \sqrt{2}i - a^2 - \sqrt{2}ai + \sqrt{2}ai + (\sqrt{2}i)^2}{a^2 - (\sqrt{2}i)^2} = \frac{-a^2 + a - 2 + \sqrt{2}i}{a^2 + 2}$$

$\text{Im}\left(\frac{1 - \bar{z}}{\bar{z}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{a^2 + 2} \neq 0$, pelo que $\frac{1 - \bar{z}}{\bar{z}}$ não é real.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

31. $w=\dfrac{k+2i}{1+i}=\dfrac{(k+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=$

$=\dfrac{k-ki+2i-2i^2}{1^2-i^2}=\dfrac{k+2+(2-k)i}{2}=\dfrac{k+2}{2}+\dfrac{2-k}{2}i$

31.1 $|w|=\sqrt{10} \iff \sqrt{\left(\dfrac{k+2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2-k}{2}\right)^2}=\sqrt{10}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$\left(\dfrac{k+2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2-k}{2}\right)^2=10 \iff \dfrac{k^2+4k+4+4-4k+k^2}{4}=10 \iff 2k^2+8=40 \iff$

$\iff k^2=16 \iff k=-4 \vee k=4$

31.2 $w=\dfrac{k+2}{2}+\dfrac{2-k}{2}i$

Se $k=14$, $w=8-6i$.

$(z+w)(2-4i)=w \iff 2z-4zi+2w-4wi=w \iff z(2-4i)=w(-1+4i) \iff$

$\iff z=\dfrac{-1+4i}{2-4i}w \iff z=\dfrac{(-1+4i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}w \iff z=\dfrac{-2-4i+8i+16i^2}{2^2-(4i)^2}w \iff$

$\iff z=\dfrac{-18+4i}{4+16}w \iff z=\left(-\dfrac{18}{20}+\dfrac{4}{20}i\right)(8-6i) \iff$

$\iff z=-\dfrac{18}{20}\times 8-\dfrac{18}{20}\times 6i+\dfrac{4}{20}i\times 8+\dfrac{4}{20}i(-6i) \iff z=-6+7i$

C.S. $=\{-6+7i\}$

32. $i^{41}=i^{4\times 10+1}=i^1=i$

Opção correta: **(C)**

33. $i^{4n+2}=i^{4n}\times i^2=i^2=-1$

Opção correta: **(B)**

PÁG. 79

Aplicar +

34. $z=-1+\dfrac{2i^{11}+3i^{24}}{i^{13}}=-1+\dfrac{2i^{4\times 2+3}+3i^{4\times 6}}{i^{4\times 3+1}}=-1+\dfrac{2i^3+3\times 1}{i^1}=$

$=-1+\dfrac{2(-i)+3}{i}=-1+\dfrac{(3-2i)(-i)}{i(-i)}=-1+\dfrac{-3i-2}{1}=-1-2-3i=-3-3i$

cujo afixo tem coordenadas $(-3, -3)$, ou seja, pertence à bissetriz do terceiro quadrante.

35.

(A) $-i^{5\times 3-2}=-i^{13}=-i^{4\times 3+1}=-i^1=-i\neq i$

(B) $-i^{5\times 4-2}=-i^{18}=-i^{4\times 4+2}=-i^2=1\neq i$

(C) $-i^{5\times 5-2}=-i^{23}=-i^{4\times 5+3}=-i^3=-(-i)=i$

Opção correta: **(C)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

36. $z = i + i^{26} = i + i^{4\times 6+2} = i + i^2 = i - 1$

36.1 O afixo de z tem coordenadas $(-1\ ,\ 1)$, ou seja, pertence ao 2.º quadrante.

Opção correta: **(A)**

36.2 $w = -iz^3 = -i(-1+i)^3 = -i(-1+i)(1-2i-1) = (i+1)(-2i) = 2-2i$

$\mathrm{Re}(w) = 2$ e $\mathrm{Im}(w) = -2$.

37.

(A) $i^6 = i^{4+2} = i^2 = -1$ e $i^{14} = i^{4\times 3+2} = i^2 = -1$.

(B) $-\overline{i} = -(-i) = i$

(C) $\frac{i}{\overline{i}} = \frac{i}{-i} = -1 \neq 1$

Opção correta: **(C)**

38.1 $i^{191} = i^{4\times 47+3} = i^3 = -i$

$\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = -1$.

38.2 $-i(3+2i)^2 = -i(9+12i-4) = -5i+12 = 12-5i$

$\mathrm{Re}(z) = 12$ e $\mathrm{Im}(z) = -5$.

38.3 $\frac{3+5i}{1+7i} = \frac{(3+5i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)} = \frac{3-21i+5i+35}{1^2-(7i)^2} = \frac{38-16i}{50} = \frac{19}{25} - \frac{8}{25}i$

$\mathrm{Re}(z) = \frac{19}{25}$ e $\mathrm{Im}(z) = -\frac{8}{25}$.

38.4 $(1-\sqrt{2}\,i)^3 = (1-\sqrt{2}\,i)(1-2\sqrt{2}\,i-2) = (1-\sqrt{2}\,i)(-1-2\sqrt{2}\,i) =$

$= -1-2\sqrt{2}\,i+\sqrt{2}\,i-4 = -5-\sqrt{2}\,i$

$\mathrm{Re}(z) = -5$ e $\mathrm{Im}(z) = -\sqrt{2}$.

39. $x^2+4=0 \iff x^2=-4 \iff x=\pm\sqrt{-4} \iff x=-2i \vee x=2i$

Opção correta: **(C)**

40.1 $z^3+100z=0 \iff z(z^2+100)=0 \iff z=0 \vee z^2+100=0 \iff$

$\iff z=0 \vee z^2=-100 \iff z=0 \vee z=\pm\sqrt{-100} \iff z=0 \vee z=-10i \vee z=10i$

C.S. $=\{0\ ,\ -10i\ ,\ 10i\}$

40.2 $z^3=8 \iff z^3-8=0$

2 é uma raiz do polinómio. Vamos recorrer à regra de Ruffini para dividir o polinómio por $z-2$.

	1	0	0	−8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$z^3-8 = (z-2)(z^2+2z+4)$

$z^2+2z+4=0 \iff z=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 4}}{2} \iff z=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2} \iff$

$\iff z=\frac{-2-2\sqrt{3}\,i}{2} \vee z=\frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{2} \iff z=-1-\sqrt{3}\,i \vee z=-1+\sqrt{3}\,i$

C.S. $=\{2\ ,\ -1-\sqrt{3}\,i\ ,\ -1+\sqrt{3}\,i\}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

40.3 $z^2+2iz=2 \Leftrightarrow z^2+2iz-2=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-2i\pm\sqrt{(2i)^2-4(-2)}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-2i\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{-2i-2}{2}\vee z=\dfrac{-2i+2}{2} \Leftrightarrow z=-1-i\vee z=1-i$

C.S. $=\{-1-i\,,\,-1+i\}$

40.4 $z^4+z^2-12=0 \Leftrightarrow z^2=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-12)}}{2} \Leftrightarrow z^2=\dfrac{-1\pm\sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2=\dfrac{-1-7}{2}\vee z^2=\dfrac{-1+7}{2} \Leftrightarrow z^2=-4\vee z^2=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-4}\vee z=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow z=-2i\vee z=2i\vee z=-\sqrt{3}\vee z=\sqrt{3}$

C.S. $=\{-\sqrt{3}\,,\,\sqrt{3}\,,\,-2i\,,\,2i\}$

41.1 Uma equação do 3.° grau (de coeficientes reais) pode ter uma, duas ou três soluções em $\mathbb{C}$, sendo, pelo menos, uma real e as outras duas, quando não reais, números complexos conjugados.

Opção correta: **(C)**

41.2 $z^3-2z^2-11z+52=0$

	1	−2	−11	52
−4		−4	24	−52
	1	−6	13	0

$z^3-2z^2-11z+52=(z+4)(z^2-6z+13)$

$z^2-6z+13=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\times13}}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{6\pm\sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{6-4i}{2}\vee z=\dfrac{6+4i}{2} \Leftrightarrow z=3-2i\vee z=3+2i$

C.S. $=\{-4\,,\,3-2i\,,\,3+2i\}$

PÁG. 80

Aplicar +

42.1 $(1+i)^4-a(1+i)=b+5(1+i)^2 \Leftrightarrow (1+2i-1)(1+2i-1)-a-ai=b+5(1+2i-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2i)(2i)-a-ai=b+5(2i) \Leftrightarrow -4-a-ai=b+10i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4-a-b+(-a-10)i=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4-a-b=0\wedge -a-10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4-(-10)-b=0\wedge a=-10 \Leftrightarrow a=-10\wedge b=6$

42.2 $z^4-(-10)z=6+5z^2 \Leftrightarrow z^4-5z^2+10z-6=0$

1 é uma raiz do polinómio. Vamos recorrer à regra de Ruffini para dividir o polinómio por $z-1$.

	1	0	−5	10	−6
1		1	1	−4	6
	1	1	−4	6	0

$z^4-5z^2+10z-6=(z-1)(z^3+z^2-4z+6)$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

-3 é uma raiz do polinómio z^3+z^2-4z+6. Vamos recorrer à regra de Ruffini para dividir o polinómio por $z+3$.

	1	1	−4	6
−3		−3	6	−6
	1	−2	2	0

$z^4-5z^2+10z-6=(z-1)(z+3)(z^2-2z+2)$

Como $1+i$ é solução da equação, outra solução é $1-i$.

43. $\begin{cases} z+w=4 \\ zw=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=4-z \\ z(4-z)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=4-z \\ -z^2+4z-5=0 \end{cases}$

Cálculo auxiliar:

$-z^2+4z-5=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-1)(-5)}}{2(-1)} \Leftrightarrow z=\dfrac{-4\pm\sqrt{-4}}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-4-2i}{-2} \vee z=\dfrac{-4+2i}{-2} \Leftrightarrow z=2+i \vee z=2-i$

$\begin{cases} w=4-(2+i) \\ z=2+i \end{cases} \vee \begin{cases} w=4-(2-i) \\ z=2-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=2-i \\ z=2+i \end{cases} \vee \begin{cases} w=2+i \\ z=2-i \end{cases}$

44. $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-\frac{\sqrt{6}}{2}}{-\frac{\sqrt{6}}{2}}=1$ e θ pertence ao 3.º quadrante, pelo que θ pode ser $-\dfrac{3\pi}{4}$.

Opção correta: **(B)**

45.1 $i+\dfrac{3i+1-\sqrt{3}}{i}=i+\dfrac{(3i+1-\sqrt{3})(-i)}{i(-i)}=i+\dfrac{3-i+\sqrt{3}i}{1}=i+3-i+\sqrt{3}i=3+\sqrt{3}i$

$|3+\sqrt{3}i|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

O afixo de $3+\sqrt{3}i$ está no 1.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, θ pode ser $\dfrac{\pi}{6}$.

Assim, $3+\sqrt{3}i=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

45.2 $|\sqrt{2}-\sqrt{6}i|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

O afixo de $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$ está no 4.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta=-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{3}$, θ pode ser $-\dfrac{\pi}{3}$.

Assim, $\sqrt{2}-\sqrt{6}i=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

45.3 $\dfrac{i-2}{3+i}=\dfrac{(i-2)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{3i-i^2-6+2i}{3^2-i^2}=\dfrac{-5+5i}{10}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

$\left|-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

O afixo de $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ está no 2.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-1$, θ pode ser $\dfrac{3\pi}{4}$.

Assim, $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

46.

(A) $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(B) $3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(C) $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + i \times 1 = i$

(D) $e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1 + i \times 0 = -1$

Opção correta: **(D)**

47. Opção correta: **(C)**

48. $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$

(A) $2e^{i\frac{6\pi}{5}} = 2e^{i\left(-\frac{4\pi}{5}\right)}$

(B) $2e^{i\frac{11\pi}{5}} = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$

Opção correta: **(B)**

49.1 $z_2 = 2\,\text{sen}\left(\frac{9\pi}{14}\right) - 2i\,\text{sen}\left(\frac{8\pi}{7}\right) = 2\left(\text{sen}\left(\frac{9\pi}{14}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right) =$

$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{14}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right) =$

$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{7}} = z_1$

49.2 $z_1 = z_3 \iff 2 = k^2 \wedge \frac{\pi}{7} = \frac{5n\pi}{14} + 2\lambda\pi\,,\ \lambda \in \mathbb{Z} \wedge\ n \in \mathbb{N} \iff$

$\iff k = \pm\sqrt{2} \wedge \frac{5n\pi}{14} = \frac{\pi}{7} - 2\lambda\pi\,,\ \lambda \in \mathbb{Z} \wedge\ n \in \mathbb{N} \iff$

$\iff k = \pm\sqrt{2} \wedge n = \frac{2}{5} - \frac{28}{5}\lambda\,,\ \lambda \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

Para que $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ tem de ser inferior ou igual a -1. Para $\lambda = -1$, obtém-se $n = 6$.

50.1 $z - w = 4i \iff z = 4i + 8 - 4i \iff z = 8$

C.S. $= \{8e^{i0}\}$

50.2 Seja $z = x + yi$.

$\overline{z} + 3z = \overline{w} \iff x - yi + 3(x + yi) = 8 + 4i \iff x - yi + 3x + 3yi - 8 - 4i = 0 \iff$

$\iff 4x - 8 + (2y - 4)i = 0 \iff 4x - 8 = 0 \wedge 2y - 4 = 0 \iff x = 2 \wedge y = 2$

$z = 2 + 2i$

$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

O afixo de z está no 1.º quadrante, portanto, como $\text{tg}\,\theta = \frac{2}{2} = 1$, θ pode ser $\frac{\pi}{4}$.

Assim, $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

C.S. $= \left\{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right\}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

50.3 $z^2+zw=32i \iff z^2+z(8-4i)=32i \iff z^2+8z-4zi-32i=0 \iff z^2+8z-(4zi+32i)=0 \iff$

$\iff z(z+8)-4i(z+8)=0 \iff (z+8)(z-4i)=0 \iff z+8=0 \vee z-4i=0 \iff$

$\iff z=-8 \vee z=4i \iff z=8e^{i\pi} \vee z=4e^{i\frac{\pi}{2}}$

C.S. $=\left\{8e^{i\pi}, 4e^{i\frac{\pi}{2}}\right\}$

PÁG.81

Aplicar +

51.1 $\overline{z}=\overline{2e^{i\frac{5\pi}{12}}}=2e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}=2e^{i\frac{19\pi}{12}}$

Opção correta: **(C)**

51.2 $-z=-2e^{i\frac{5\pi}{12}}=2e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\pi\right)}2e^{i\frac{17\pi}{12}}$

Opção correta: **(D)**

52. $w=-\left(\frac{1}{i}\right)^{25}+(1-2i)^2=-(-i)^{25}+1-4i+(2i)^2=$

$=i^{4\times 6+1}+1-4i-4=i-3-4i=-3-3i$

$|-3-3i|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta=1 \wedge \theta \in 3.^{\circ}\,Q\,,\ \theta=\frac{5\pi}{4}$

$w=3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$\overline{w}=\overline{3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}=3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}=3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

53.1 $zw=2e^{i\frac{\pi}{3}}\times 3e^{i\frac{\pi}{4}}=6e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=6e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Opção correta: **(B)**

53.2 $\frac{1}{z}=\frac{e^{i0}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}=\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Opção correta: **(D)**

53.3 $\frac{z}{w}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

Opção correta: **(B)**

54.1 $w_1=\frac{1}{i}=-i=1e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$w_2=-\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)-i\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\text{sen}\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}=1e^{i\frac{\pi}{4}}$

54.2 $\frac{w_1w_2}{\overline{w_1w_2}}=\frac{1e^{i\frac{3\pi}{2}}\times 1e^{i\frac{\pi}{4}}}{\overline{1e^{i\frac{3\pi}{2}}\times 1e^{i\frac{\pi}{4}}}}=\frac{1e^{i\frac{7\pi}{4}}}{\overline{1e^{i\frac{7\pi}{4}}}}=\frac{1e^{i\frac{7\pi}{4}}}{1e^{i\left(-\frac{7\pi}{4}\right)}}=1e^{i\frac{7\pi}{2}}=1e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

54.3 $\dfrac{w_1 w_3}{w_2} = \dfrac{1e^{i\frac{3\pi}{2}} \times 3e^{i\alpha}}{1e^{i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{3e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}}{1e^{i\frac{\pi}{4}}} = 3e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha-\frac{\pi}{4}\right)} = 3e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)}$

Para ser um número imaginário puro,

$\dfrac{5\pi}{4}+\alpha = \dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff \alpha = -\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff$

$\iff \alpha = -\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$\alpha\in\left]0\ ,\ \pi\right[$

Para $k=1$, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

55.1 $|z\times w|\leqslant 10 \iff \left|pi\times 2e^{i\frac{t\pi}{5}}\right|\leqslant 10 \iff$

$\iff \left|pe^{i\frac{\pi}{2}}\times 2e^{i\frac{t\pi}{5}}\right|\leqslant 10\ ,\ p\in\mathbb{R}^+$

$\iff \left|2pe^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{t\pi}{5}\right)}\right|\leqslant 10 \iff 2p\leqslant 10 \iff p\leqslant 5$

Logo, $0<p\leqslant 5$.

55.2

a. O afixo de $z\times w$ pertence ao 3.º quadrante se

$\pi+2k\pi<\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{t\pi}{5}<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff \dfrac{\pi}{2}+2k\pi<\dfrac{t\pi}{5}<\pi+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff$

$\iff \dfrac{5}{2}+10k<t<5+10k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

b. O afixo de $\dfrac{z}{w}=\dfrac{pi}{2e^{i\frac{t\pi}{5}}}=\dfrac{pe^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{t\pi}{5}}}=\dfrac{p}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t\pi}{5}\right)}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se

$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{t\pi}{5}=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ e $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{w}\right)<0$ significa que só queremos a bissetriz do terceiro quadrante, pelo que

$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{t\pi}{5}=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff -\dfrac{t\pi}{5}=\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff$

$\iff -\dfrac{t\pi}{5}=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff t=-\dfrac{15}{4}+10k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

PÁG.82

Aplicar +

56.1 $(1-i)^3=(1-i)^2(1-i)=(1-2i-1)(1-i)=$

$=-2i(1-i)=-2i+2i^2=-2-2i$

$\left|(1-i)^3\right|=|-2-2i|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-2}{-2}=1\wedge\theta\in 3.^\circ\,Q\ ,\ \theta=-\dfrac{3\pi}{4}$

Módulo: $\sqrt{2}$; argumento: $-\dfrac{3\pi}{4}$.

56.2 $\left|1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{1}\wedge\theta\in 4.^\circ\,Q\ ,\ \theta=-\dfrac{\pi}{3}$

$\left(1-i\sqrt{3}\right)^5=\left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^5=32e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}$

Módulo: 32 ; argumento: $-\dfrac{5\pi}{3}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

56.3 $\dfrac{i(1-i)^2}{1+i\sqrt{3}}=\dfrac{i\left(1-2i+i^2\right)}{1+i\sqrt{3}}=\dfrac{i(-2i)}{1+i\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{2}{1+i\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(1-i\sqrt{3}\right)}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=$

$=\dfrac{2-2\sqrt{3}\,i}{1+3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

$\text{tg}\,\theta=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \iff \text{tg}\,\theta=-\sqrt{3}\wedge\theta\in 4.^{\circ}\,\text{Q}\,,\ \theta=-\dfrac{\pi}{3}$

Módulo: 1 ; argumento: $-\dfrac{\pi}{3}$.

57. $|1+\sqrt{3}\,i|=2$

$\text{tg}\,\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\wedge\theta\in 1.^{\circ}\,\text{Q}\,,\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$

$|-1+i|=\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\alpha=-1\wedge\alpha\in 2.^{\circ}\,\text{Q}\,,\ \alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

$\dfrac{i\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^4}{(-1+i)^9}=\dfrac{i\times\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^9}=\dfrac{i\times 16e^{i\frac{4\pi}{3}}}{16\sqrt{2}e^{i\frac{27\pi}{4}}}=$

$=\dfrac{i\times 16\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\dfrac{4\pi}{3}\right)}{16\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\dfrac{i\times 16\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{16\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)}=$

$=\dfrac{8\sqrt{3}-8i}{16\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)}=\dfrac{8\sqrt{3}-8i}{-16+16i}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}-i}{-2+2i}=\dfrac{(\sqrt{3}-i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}=$

$=\dfrac{-2\sqrt{3}+2i-2\sqrt{3}\,i+2i^2}{8}=\dfrac{-2\sqrt{3}-2}{8}+\dfrac{2-2\sqrt{3}}{8}i=$

$=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}i$

58.1 $z_1=\dfrac{4+2i}{1-i}+2i^{2026}=\dfrac{(4+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}+2i^{4\times 506+2}=$

$=\dfrac{4+2i+4i-2}{1+1}+2i^2=1+3i-2=-1+3i$

$z_2=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$

$z_1-z_2=-1+3i-2i=-1+i$

$|-1+i|=\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta=-1\wedge\theta\in 2.^{\circ}\,\text{Q}\,,\ \theta=\dfrac{3\pi}{4}$

$z_1-z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

58.2 $\dfrac{z_1 - z_2}{(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)^5} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{(\cos(-\alpha) + i\,\text{sen}(-\alpha))^5} =$

$$= \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\left(1e^{i(-\alpha)}\right)^5} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{1e^{i(-5\alpha)}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+5\alpha\right)}$$

Para pertencer à bissetriz do 1.° quadrante,

$$\frac{3\pi}{4} + 5\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff 5\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff 5\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff \alpha = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ \ \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Para $k = 0$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{10}$; para $k = 1$, $\alpha = \dfrac{3\pi}{10}$.

$-\dfrac{\pi}{10}$ e $\dfrac{3\pi}{10}$.

58.3 Seja $z = x + yi$, x, $y \in \mathbb{R}$.

$\overline{z} = x - yi$

$$z^2 - z_2\overline{z} = 0 \iff (x+yi)^2 - 2i(x - yi) = 0 \iff$$

$$\iff x^2 + 2xyi + (yi)^2 - 2xi + 2yi^2 = 0 \iff (x^2 - y^2 - 2y) + (2xy - 2x)\,i = 0$$

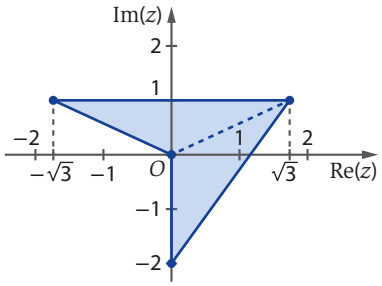
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2y = 0 \\ 2xy - 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 - 2y = 0 \\ 2x(y-1) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -y^2 - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 1 - 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -y(y+2) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 3 \\ y = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

C.S. $= \{0\ ,\ -2i\ ,\ \sqrt{3} + i\ ,\ -\sqrt{3} + i\}$



$$A = \frac{2\sqrt{3} \times 1}{2} + \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

59.1 $\dfrac{1}{z} + \overline{z} = \dfrac{1}{e^{i\alpha}} + \overline{e^{i\alpha}} = e^{i(-\alpha)} + e^{i(-\alpha)} = 2e^{i(-\alpha)}$

59.2 $\left|-1 + \sqrt{3}\,i\right| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\text{tg}\,\theta = -\sqrt{3} \wedge \theta \in 2.^\circ\,\text{Q}\ ,\ \theta = \dfrac{2\pi}{3}$

$$w = \left(\frac{1}{z} + \overline{z}\right)(-1 + \sqrt{3}\,i) = 2e^{i(-\alpha)} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 4e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

$w^n = \left(4e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}\right)^n = 4^n e^{i\frac{7n\pi}{12}}$ será um número real se $\frac{7n\pi}{12} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{12k\pi}{7\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $n = \frac{12k}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 7$, obtemos o número natural 12.

O menor número natural é 12.

60. $w = re^{i\theta}$

$w^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta))$

$\overline{w}^n = \left(re^{i(-\theta)}\right)^n = r^n e^{i(-n\theta)} = r^n(\cos(-n\theta) + i\,\text{sen}(-n\theta)) =$

$= r^n(\cos(n\theta) - i\,\text{sen}(n\theta))$

$$\frac{w^n + \overline{w}^n}{w^n - \overline{w}^n} = \frac{r^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)) + r^n(\cos(n\theta) - i\,\text{sen}(n\theta))}{r^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)) - r^n(\cos(n\theta) - i\,\text{sen}(n\theta))} =$$

$$= \frac{r^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta) + \cos(n\theta) - i\,\text{sen}(n\theta))}{r^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta) - \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta))} =$$

$$= \frac{2\cos(n\theta)}{2i\,\text{sen}(n\theta)} = -\frac{\cos(n\theta)}{\text{sen}(n\theta)}i = -\frac{1}{\text{tg}(n\theta)}i$$ é um número imaginário puro.

61.1

a. $z^2 \neq z \Leftrightarrow z^2 - z \neq 0 \Leftrightarrow z(z-1) \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0 \wedge z \neq 1$

$z^3 \neq z^2 \Leftrightarrow z^3 - z^2 \neq 0 \Leftrightarrow z^2(z-1) \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0 \wedge z \neq 1$

Para que os pontos A e B sejam distintos, $z \neq 0$ e $z \neq 1$.

b. $z = a + bi$, $z^2 = (a+bi)^2$ e $z^3 = (a+bi)^3$.

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B se os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ forem perpendiculares.

Podemos representar $\overrightarrow{BA}$ por $z - z^2 = (a+bi) - (a+bi)^2$ e $\overrightarrow{BC}$ por $z^3 - z^2 = (a+bi)^3 - (a+bi)^2$.

O argumento do quociente entre os números complexos que representam estes vetores deve ser $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, o quociente tem de ser um imaginário puro.

$$\frac{z - z^2}{z^3 - z^2} = \frac{(a+bi) - (a+bi)^2}{(a+bi)^3 - (a+bi)^2} = \frac{(a+bi)(1 - (a+bi))}{(a+bi)^2((a+bi) - 1)} = \frac{(1 - (a+bi))}{(a+bi)((a+bi) - 1)} =$$

$$= \frac{-1}{a+bi} = \frac{-1(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} =$$

$$= \frac{-a+bi}{a^2+b^2} = \frac{-a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Para ser um número imaginário puro,

$$\frac{-a}{a^2+b^2} = 0 \wedge \frac{b}{a^2+b^2} \neq 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0$$

Assim, $z = bi$ com $b \neq 0$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

61.2 $A(1\ ,\ 1)$

$z+i=a+bi+i=a+(b+1)i$

$B(a\ ,\ b+1)$

$2(z+i)=2a+2bi+2i=2a+2(b+1)i$

$C(2a\ ,\ 2(b+1))$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(a-1\ ,\ b)$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(a\ ,\ b+1)$

Os três pontos são colineares se os vetores forem colineares.

$$\frac{a-1}{a}=\frac{b}{b+1} \iff (a-1)(b+1)=ab \iff$$
$$\iff ab-b-a-1=ab \iff b=a-1$$

$$|z|=\sqrt{5} \iff \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5} \iff a^2+b^2=5 \iff$$
$$\iff a^2+(a-1)^2=5 \iff a^2+a^2-2a+1=5 \iff$$
$$\iff 2a^2-2a-4=0 \iff a^2-a-2=0 \iff$$
$$\iff a=\frac{1\pm 3}{2} \iff a=2 \vee a=-1$$

Para $a=2$, vem $b=1$.

Para $a=-1$, vem $b=-2$.

$z=2+i$ e $z=-1-i$

62. As raízes quartas de z são: $2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ e $2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}=2e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 83

Aplicar +

63. $\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3=e^{i\frac{\pi}{2}}$; $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=e^{i\pi}$; $\left(e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^3=e^{i\frac{7\pi}{2}}=e^{i\frac{3\pi}{2}}$; $\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^3=e^{i\frac{5\pi}{2}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

Opção correta: **(C)**

64. O triângulo tem de ser equilátero e com centro na origem do referencial.

Opção correta: **(A)**

65. Vamos escrever o número complexo $1+\sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica.

$|1+\sqrt{3}\,i|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\text{tg}\,\theta=\sqrt{3} \wedge \theta \in 1.^\circ\,Q\ ,\ \theta=\frac{\pi}{3}$

Assim, $(1+\sqrt{3}\,i)^2=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Vamos calcular as raízes cúbicas: $\sqrt[3]{4e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\sqrt[3]{4}e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}}=\sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{2\pi+6k\pi}{9}\right)}$, $k\in\{0\ ,\ 1\ ,\ 2\}$

$k=0$, $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{2\pi}{9}}$; $k=1$, $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{8\pi}{9}}$; $k=2$, $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{14\pi}{9}}$

As raízes cúbicas são: $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{2\pi}{9}}$, $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{8\pi}{9}}$ e $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{14\pi}{9}}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

66. $\frac{z^4}{4}-\sqrt{2}(1+i)z=0 \Leftrightarrow z\left(\frac{z^3}{4}-\sqrt{2}(1+i)\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee \frac{z^3}{4}-\sqrt{2}(1+i)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee z^3=4\sqrt{2}(1+i)$ **(1)**

Vamos escrever $4\sqrt{2}(1+i)$ na forma trigonométrica.

$|1+i|=\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta=1 \wedge \theta \in 1.^\circ\,\text{Q}\,,\ \theta=\frac{\pi}{4}$

$4\sqrt{2}(1+i)=4\sqrt{2}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=8e^{i\frac{\pi}{4}}$

De **(1)** vem:

$z=0 \vee z^3=8e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow z=0 \vee z=\sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{4}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=2e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}},\ k\in\{0\,,\,1\,,\,2\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=2e^{i\frac{\pi+8k\pi}{12}},\ k\in\{0\,,\,1\,,\,2\}$

$k=0\,,\ 2e^{i\frac{\pi}{12}}\,;\ k=1\,,\ 2e^{i\frac{3\pi}{4}}\,;\ k=2\,,\ 2e^{i\frac{17\pi}{12}}$

$\text{C.S.}=\left\{0\,,\ 2e^{i\frac{\pi}{12}}\,,\ 2e^{i\frac{3\pi}{4}}\,,\ 2e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\}$

67. Se w_1 é uma raiz quadrada de w, então $w_1^2=w \Leftrightarrow (1+ki)^2=-8+6i \Leftrightarrow$

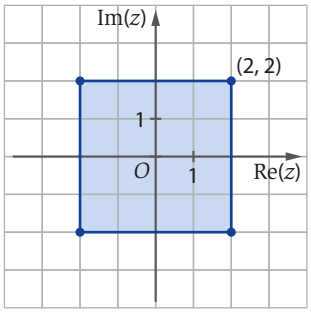
$\Leftrightarrow 1+2ki-k^2=-8+6i \Leftrightarrow \begin{cases}1-k^2=-8\\2k=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k^2=9\\k=3\end{cases} \Leftrightarrow k=3$

$w_1=1+3i$

A outra raiz quadrada de w é diametralmente oposta a w_1, ou seja, é simétrica de w_1, $-1-3i$.

68.1 $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)=$

$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+2i$



O ponto tem coordenadas $(2\,,\,2)$.

68.2 Os argumentos das raízes quartas de um número complexo formam uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

Os números complexos que definem os outros três vértices do quadrado são:

$2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)=$

$=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2+2i$

$2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)=$

$=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2-2i$

$2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)=$

$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2-2i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

68.3 Seja A o afixo de $2+2i$. Então, $A(2, 2)$.

Seja B o afixo de $-2+2i$. Então, $B(-2, 2)$.

A medida do lado é $\overline{AB}=4$.

$h^2=4^2+4^2 \iff h^2=2\times 4^2 \iff h=\pm 4\sqrt{2} \iff h=4\sqrt{2}$

A medida da diagonal de um quadrado de lado 4 é $4\sqrt{2}$.

68.4 Sabe-se que os módulos de qualquer raiz de índice n de um certo número complexo são iguais, neste caso, r e os argumentos das raízes quartas formam uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

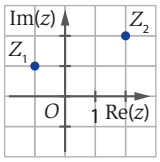
Os números complexos que definem os outros três vértices do quadrado são:

$re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$, $re^{i(\theta+\pi)}$ e $re^{i\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)}$.

PÁG. 84

Aplicar +

69.1



69.2 $|z_1|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta=-1$, $\theta=\frac{3\pi}{4}$

$z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$|z_2|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta=\frac{2}{2}=1 \wedge \theta\in 1.^\circ\,\text{Q}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$

$z_2=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

69.3 $\frac{z_1+z_2}{\overline{z_1}}=\frac{-1+i+2+2i}{\overline{-1+i}}=\frac{1+3i}{-1-i}=$

$=\frac{(1+3i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=\frac{-1+i-3i+3i^2}{(-1)^2+1^2}=\frac{-4-2i}{2}=-2-i$

69.4 $\sqrt[4]{z_2^{\,3}}=\sqrt[4]{\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3}=$

$=\sqrt[4]{8\sqrt{8}e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\sqrt[4]{8\sqrt{8}}\,e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}}=$

$=2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{3\pi+8k\pi}{16}}$, $k\in\{0, 1, 2, 3\}$

$k=0$, $2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{3\pi}{16}}$; $k=1$, $2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{11\pi}{16}}$; $k=2$, $2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{19\pi}{16}}$; $k=3$, $2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{27\pi}{16}}$

As raízes são: $2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{3\pi}{16}}$, $2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{11\pi}{16}}$, $2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{19\pi}{16}}$ e $2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{27\pi}{16}}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

70.1 $z_1 = 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

70.2 $z_1^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = 2^3 e^{i\frac{3\pi}{6}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$

70.3 $z_3 = i^2 z_1 = -1 \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 1e^{i\pi} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)} =$

$= 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$

$|z_3| = |z_1|$

$\text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{6}$

$\text{Arg}(z_3) = -\frac{5\pi}{6}$

$\text{Arg}(z_3) = \text{Arg}(z_1) - \pi$

70.4 $z_2 = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\left(z_2 \times (z_1)^4\right)^n = \left(8e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4\right)^n = \left(8e^{i\frac{\pi}{2}} \times 16e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n = \left(8e^{i\frac{\pi}{2}} \times 16e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n =$

$= \left(128e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^n = \left(128e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^n = 128^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}$

Para cada valor de n, os módulos dos números complexos são diferentes, pelo que as coordenadas dos afixos desses números complexos não são iguais nem simétricas.

70.5 Seja $z = re^{i\theta}$.

$\frac{-\overline{z}}{z^4} = \frac{-1 \times \overline{re^{i\theta}}}{\left(re^{i\theta}\right)^4} = \frac{1e^{i\pi} \times re^{i(-\theta)}}{r^4 e^{i(4\theta)}} = \frac{re^{i(\pi-\theta)}}{r^4 e^{i(4\theta)}} = \frac{1}{r^3} e^{i(\pi-5\theta)}$

$\frac{-\overline{z}}{z^4} = z_2 \iff \frac{1}{r^3} e^{i(\pi-5\theta)} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \iff$

$\iff \frac{1}{r^3} = 8 \wedge \pi - 5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff$

$\iff r^3 = \frac{1}{8} \wedge 5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff$

$\iff r = \frac{1}{2} \wedge \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 0$, $z = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{10}}$; $k = 1$, $z = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$; $k = 2$, $z = \frac{1}{2}e^{i\frac{9\pi}{10}}$; $k = 3$, $z = \frac{1}{2}e^{i\frac{13\pi}{10}}$; $k = 4$, $z = \frac{1}{2}e^{i\frac{17\pi}{10}}$

$\text{C.S.} = \left\{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{9\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{13\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{17\pi}{10}}\right\}$

71.1 $z_1 = \frac{1+i^{17}}{1-i} - \frac{1-i^5}{1+i} = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$

$= \frac{1+2i+i^2}{1+1} - \frac{1-2i+i^2}{1+1} = i + i = 2i$

71.2 $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1e^{i\frac{\pi}{12}}$

$z_3 = z_1 \times z_2 = 2i \times 1e^{i\frac{\pi}{12}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times 1e^{i\frac{\pi}{12}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$z_3^3 = \left(2e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^3 = 2^3 e^{i\frac{7\pi}{4}} = 8\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,i$

$k = 4\sqrt{2}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

72.1 $\sqrt[6]{8i^{27}} = \sqrt[6]{8i^3} = \sqrt[6]{-8i} = \sqrt[6]{8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \sqrt[6]{8}e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}} =$

$= \sqrt[6]{8}e^{i\frac{-\pi+4k\pi}{12}}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$k=0$, $\sqrt[6]{8}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$; $k=1$, $\sqrt[6]{8}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$; $k=2$, $\sqrt[6]{8}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$; $k=3$, $\sqrt[6]{8}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$

$z_1 = \sqrt[6]{8}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ e $z_2 = \sqrt[6]{8}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$

72.2 $z_3 = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha = 1e^{i\alpha}$

$$\frac{z_1 \times z_2}{(z_3)^3} = \frac{\sqrt[6]{8}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \times \sqrt[6]{8}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}}{\left(1e^{i\alpha}\right)^3} = \frac{\sqrt[6]{8^2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{11\pi}{12}\right)}}{1e^{i3\alpha}} = \frac{2e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}}{1e^{i3\alpha}} = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{6}-3\alpha\right)}$$

$$\frac{z_1 \times z_2}{(z_3)^3} = -2 \Leftrightarrow 2e^{i\left(\frac{7\pi}{6}-3\alpha\right)} = 2e^{i\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{6} - 3\alpha = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Sabemos que $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Para $k=4$, $\alpha = \frac{25\pi}{18}$.

PÁG. 85

Aplicar +

73.1 Comecemos por escrever $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right)^5$ na forma trigonométrica.

$$\left|\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = 2$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1,\ \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right)^5 = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^5 = 32e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}$$

$$i^{83} = i^{4\times 20+3} = i^3 = -i$$

$$\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right)^5 w = 2\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) - 2i^{83}\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right) \Leftrightarrow 32e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}\right)} \times w = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)}{32e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}} \Leftrightarrow w = \frac{2e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}}{32e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{1}{16}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{5\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{16}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{1}{16}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right) \Leftrightarrow w = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

73.2 $\sqrt[3]{w}=\sqrt[3]{\frac{1}{16}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}}=$

$=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{16}}e^{i\frac{5\pi+6k\pi}{9}}$, $k\in\{0\,,\,1\,,\,2\}$

$k=0$, $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}e^{i\frac{5\pi}{9}}$; $k=1$, $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}e^{i\frac{11\pi}{9}}$; $k=2$, $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}e^{i\frac{17\pi}{9}}$

As raízes cúbicas de w são: $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}e^{i\frac{5\pi}{9}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}e^{i\frac{11\pi}{9}}$ e $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}e^{i\frac{17\pi}{9}}$.

73.3 Seja $z=re^{i\theta}$.

$z^3-\bar{z}w=0 \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^3=\overline{re^{i\theta}}\times\frac{1}{16}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^3e^{i3\theta}=re^{i(-\theta)}\times\frac{1}{16}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow r^3e^{i3\theta}=\frac{r}{16}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}-\theta\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^3=\frac{r}{16}\wedge 3\theta=\frac{5\pi}{3}-\theta+2k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16r^3-r=0\wedge 4\theta=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r\left(16r^2-1\right)=0\wedge\theta=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\,,\,k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(r=0\vee r^2=\frac{1}{16}\right)\wedge\theta=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\,,\,k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(r=0\vee r=\frac{1}{4}\right)\wedge\theta=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\,,\,k\in\mathbb{Z}$

Para $r=0$, vem $z=0$.

Para $r=\frac{1}{4}$, θ toma os valores $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$ e $\frac{23\pi}{12}$.

C.S. $=\left\{0\,,\,\frac{1}{4}e^{i\frac{5\pi}{12}}\,,\,\frac{1}{4}e^{i\frac{11\pi}{12}}\,,\,\frac{1}{4}e^{i\frac{17\pi}{12}}\,,\,\frac{1}{4}e^{i\frac{23\pi}{12}}\right\}$

74.1 Para $\theta=\frac{\pi}{4}$,

$w=\frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1+1}=i$

$\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=1$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\wedge\alpha\in 3.^{\circ}\,\mathrm{Q}\,,\,\alpha=\frac{7\pi}{6}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=1e^{i\frac{7\pi}{6}}$

w e $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ são raízes cúbicas do mesmo número complexo pois $w^3=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^3$.

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^3=\left(1e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^3=1e^{i\frac{21\pi}{6}}=1e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$

$w^3=i^3=-i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

74.2 Para $\theta=\frac{\pi}{6}$,

$$w=\frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}i}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}i}=$$

$$=\frac{(3+\sqrt{3}\,i)(3+\sqrt{3}\,i)}{(3-\sqrt{3}\,i)(3+\sqrt{3}\,i)}=\frac{9+6\sqrt{3}+3i^2}{9+3}=\frac{6+6\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|w|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\wedge\alpha\in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q}\,,\ \alpha=\frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{Arg}(w)=\frac{\pi}{3}$$

75. A condição que define a bissetriz do primeiro quadrante é $\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{4}$.

A condição que define a bissetriz do terceiro quadrante é $\operatorname{Arg}(z)=\frac{3\pi}{4}$.

Como pretendemos a condição que define ambas, $\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{4}\vee\operatorname{Arg}(z)=\frac{3\pi}{4}$.

Opção correta: **(A)**

76.1 Vamos escrever $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ na forma trigonométrica.

$$\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\wedge\alpha\in 3.^{\circ}\,\mathrm{Q}\,,\ \alpha=\frac{4\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$w^2\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(3e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2\times 1e^{i\frac{4\pi}{3}}=9e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 1e^{i\frac{4\pi}{3}}=9e^{i2\pi}=9e^{i0}=9$$

76.2 Sabe-se que o módulo das restantes raízes será igual a 3 e que os argumentos das seis raízes correspondentes a valores de k consecutivos formam uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

As três raízes consecutivas a w são: $3e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=3e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $3e^{i\left(2\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=3e^{i\pi}$ e $3e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=3e^{i\frac{4\pi}{3}}=3e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

$|z|\leqslant 3$ define o círculo de centro na origem e raio igual ao módulo das raízes.

Como queremos o setor circular,

$$|z|\leqslant 3\wedge\left(\frac{2\pi}{3}\leqslant\operatorname{Arg}(z)\leqslant\pi\vee\operatorname{Arg}(z)\leqslant-\frac{2\pi}{3}\right)$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 86

Aplicar +

77.1 $|1+i|=\sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}\theta=1 \wedge \theta \in 1.^{\circ}\,Q$, $\theta=\frac{\pi}{4}$, logo, $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$w=\frac{(1+i)^4}{2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}=\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4}{2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}=$$

$$=\frac{4e^{i\pi}}{2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$|w|=\frac{2\sqrt{3}}{3}<2$, logo, a imagem geométrica do número complexo w situa-se no interior da circunferência.

$\operatorname{Arg}(w)=-\frac{3\pi}{4}$

A condição que define a bissetriz do terceiro quadrante é $\operatorname{Arg}(z)=-\frac{3\pi}{4}$.

Assim, a imagem geométrica do número complexo w pertence à bissetriz do terceiro quadrante, ou seja, à reta r.

Podemos, ainda, mostrar que a imagem geométrica do número complexo w pertence à reta r, de outro modo:

Podemos definir a reta r por $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z)$.

$$w=\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}i$$

$\operatorname{Re}(w)=\operatorname{Im}(w)=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

77.2 Comecemos por descobrir qual o número complexo que tem por afixo o ponto A.

$\sqrt[3]{8i}=\sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{2}}}=2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}=2e^{i\frac{\pi+4k\pi}{6}}$, $k\in\{0\,,\,1\,,\,2\}$

Para $k=0$, $2e^{i\frac{\pi}{6}}$; para $k=1$, $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

O ponto A é o afixo de $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

A região sombreada vai ser definida por:

$|z|\leqslant 2 \wedge \left(\operatorname{Arg}(z)\leqslant -\frac{3\pi}{4} \vee 0\leqslant \operatorname{Arg}(z)\leqslant \frac{\pi}{4} \vee \frac{5\pi}{6}\leqslant \operatorname{Arg}(z)\leqslant \pi\right)$

78. $|z-3+i|=4 \iff |z-(3-i)|=4$

Opção correta: **(C)**

79.

A condição $|z+i|\leqslant 2 \iff |z-(-i)|\leqslant 2$ representa o círculo de centro no afixo de $-i$ e raio 2.

A condição $|z-2+3i|>\sqrt{13} \iff |z-(2-3i)|>\sqrt{13}$ representa o exterior da circunferência centrada no afixo de $2-3i$ e raio $\sqrt{13}$.

Opção correta: **(D)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 87

Aplicar +

80. $A(-1, 1)$ e $B(-1, 0)$, raio $= \overline{AB} = 1$.

A condição que define a circunferência de centro em A que passa em B é:

$|z-(-1+i)|=1 \iff |z+1-i|=1$

Opção correta: **(B)**

81. Uma condição que representa a bissetriz do segundo quadrante é $\text{Arg}(z)=\frac{3\pi}{4}$ e uma condição que representa a bissetriz do quarto quadrante é $\text{Arg}(z)=-\frac{\pi}{4}$.

Uma condição que pode definir o domínio plano representado é $-\frac{\pi}{4} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{3\pi}{4}$.

Opção correta: **(C)**

82. A condição $|z-i| \leqslant 1$ define, no plano de Argand-Gauss, um círculo de centro no afixo de i e raio 1.

Opção correta: **(D)**

PÁG.88

Aplicar +

83. Opção correta: **(D)**

84.1 $|z_2| = |-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2} = 2$

$$z+z_1|z_2|=0 \iff z+e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 2=0 \iff$$

$$\iff z=-2e^{i\frac{2\pi}{3}} \iff z=2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)} \iff$$

$$\iff z=2e^{i\frac{5\pi}{3}} \iff z=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right) \iff$$

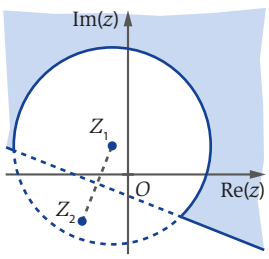
$$\iff z=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \iff z=1-\sqrt{3}\,i$$

84.2 $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

A condição $|z-z_1| \leqslant |z-z_2|$ representa o semiplano fechado definido pela mediatriz do segmento de reta $[z_1 z_2]$ e que contém o afixo de z_1.

A condição $|z-z_1| \geqslant 2$ define o exterior e a circunferência de centro no afixo de z_1 e raio 2.

A região definida pela condição $|z-z_1| \leqslant |z-z_2| \wedge |z-z_1| \geqslant 2$ é representada pela conjunção de ambas as condições:



M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

85.1 Vamos escrever $-1-i$ na forma trigonométrica.

$|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta=\frac{-1}{-1}=1 \wedge \theta \in 3.^{\circ}\,Q\,,\ \theta=\frac{5\pi}{4}$

$-1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$$\frac{z_1\times z_2+1}{z_3}=\frac{(-1-i)\times\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{12}}+1}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\times\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{12}}+1}{-\sqrt{2}\,i}=\frac{\sqrt{6}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)}+1}{-\sqrt{2}\,i}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}+1}{-\sqrt{2}\,i}=\frac{\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)+1}{-\sqrt{2}\,i}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1}{-\sqrt{2}\,i}=\frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{18}}{2}i+1}{-\sqrt{2}\,i}=$$

$$=\frac{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{18}}{2}i+1\right)\times\sqrt{2}\,i}{-\sqrt{2}\,i\times\sqrt{2}\,i}=\frac{3-\sqrt{3}\,i+\sqrt{2}\,i}{2}=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}i$$

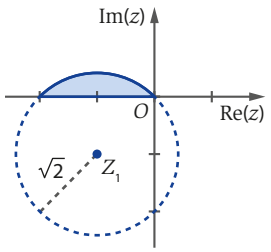
85.2 A condição $|z-z_1|\leqslant\sqrt{2}$ define, no plano de Argand-Gauss, um círculo de centro no afixo de $-1-i$ e raio $\sqrt{2}$.

$z_3=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-\sqrt{2}\,i$

$\text{Im}(z)\geqslant\text{Re}(z_3) \iff \text{Im}(z)\geqslant 0$ esta condição representa o conjunto dos números complexos $(x\,,\,y)$, em que x é um qualquer número real e y é um número real maior ou igual a zero.

A representação geométrica deste conjunto de números complexos é um semiplano fechado.

A conjunção das duas condições $|z-z_1|\leqslant\sqrt{2}\wedge\text{Im}(z)\geqslant\text{Re}(z_3)$ é representada por:



M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

86.1 A é o afixo de $z_1 = e^{i\pi} = -1$, então $A(-1, 0)$.

B é o afixo de $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$, então $B(0, 2)$.

raio $= \overline{AB} = \sqrt{(0+1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$

A condição que define a circunferência é $|z-(-1)| = \sqrt{5} \iff |z+1| = \sqrt{5}$.

Vamos verificar se o afixo de $1+i$ pertence à circunferência.

$|1+i+1| = \sqrt{5} \iff |2+i| = \sqrt{5} \iff$

$\iff \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \iff \sqrt{5} = \sqrt{5}$ proposição verdadeira

O afixo do número complexo $1+i$ pertence à circunferência.

86.2 $|z+1| \leqslant \sqrt{5} \wedge \operatorname{Re}(z) \geqslant 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \geqslant 0$

86.3 $iz_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\pi} = -2$

$|-2+1| = \sqrt{5} \iff |-1| = \sqrt{5} \iff 1 = \sqrt{5}$ proposição falsa

C não pertence à circunferência.

87.1 $|w|z^3 - w = 0 \iff z^3 = \dfrac{w}{|w|} \iff z^3 = \dfrac{2e^{i\frac{7\pi}{4}}}{2} \iff$

$\iff z^3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} \iff z = \sqrt[3]{e^{i\frac{7\pi}{4}}} \iff$

$\iff z = e^{i\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}} \iff z = e^{i\frac{7\pi+8k\pi}{12}}, k \in \{0, 1, 2\}$

Para $k=0$, $z_0 = e^{i\frac{7\pi}{12}}$; $k=1$, $z_1 = e^{i\frac{15\pi}{12}} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$; $k=2$, $z_2 = e^{i\frac{23\pi}{12}}$.

C.S. $= \left\{e^{i\frac{7\pi}{12}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{23\pi}{12}}\right\}$

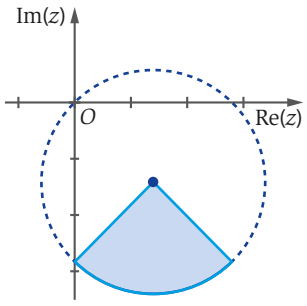
87.2 Comecemos por representar w na forma algébrica.

$w = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) =$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

No plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição

$\left|z - (\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)\right| \leqslant 2 \wedge -\frac{3\pi}{4} \leqslant \operatorname{Arg}\left(z - (\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)\right) \leqslant -\frac{\pi}{4}$ é:



M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 89

Aplicar +

88. $A=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)<0\wedge\operatorname{Re}\left(iz-\frac{1}{2}\right)\geqslant 1\right\}$

Seja $z=x+yi$.

$$\operatorname{Re}\left(iz-\frac{1}{2}\right)\geqslant 1 \iff \operatorname{Re}\left(i(x+yi)-\frac{1}{2}\right)\geqslant 1 \iff$$

$$\iff \operatorname{Re}\left(xi-y-\frac{1}{2}\right)\geqslant 1 \iff -y-\frac{1}{2}\geqslant 1 \iff$$

$$\iff -y\geqslant\frac{3}{2} \iff y\leqslant-\frac{3}{2} \iff \operatorname{Im}(z)\leqslant-\frac{3}{2}$$

Assim, $A=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)<0\wedge\operatorname{Im}(z)\leqslant-\frac{3}{2}\right\}=$

$$=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)\leqslant-\frac{3}{2}\right\}$$

A é o conjunto dos números complexos $(x\ ,\ y)$, em que x é um qualquer número real e y é um número real menor ou igual a $-\frac{3}{2}$.

A representação geométrica deste conjunto de números complexos é um semiplano fechado.

89. $\left|\frac{z-1-i}{z+1+i}\right|=1 \iff \frac{|z-1-i|}{|z+1+i|}=1 \iff |z-(1+i)|=|z-(-1-i)|$

Seja A o afixo de $1+i$ e seja B o afixo de $-1-i$.

O conjunto de pontos que verificam a condição é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

90.1 $w=\frac{2}{\sqrt{3}-i}+i^{43}=\frac{2(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}+i^{4\times 10+3}=$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+i)}{3+1}+i^3=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-i=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\wedge\theta\in 4.^{\circ}\,Q\ ,\ \theta=-\frac{\pi}{6}$$

$$w=1e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$w^{12}=\left(1e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^{12}=e^{i(-2\pi)}=e^{i0}=1$$ é um número real.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

90.2 $z^2+\bar{z}e^{i\frac{\pi}{3}}=0 \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^2=-\overline{re^{i\theta}}\times e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2e^{i2\theta}=e^{i\pi}\times re^{i(-\theta)}\times e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow r^2e^{i2\theta}=re^{i\left(\pi-\theta+\frac{\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2e^{i2\theta}=re^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\theta\right)} \Leftrightarrow r^2=r\wedge 2\theta=\frac{4\pi}{3}-\theta+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r(r-1)=0\wedge 3\theta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (r=0\vee r=1)\wedge\theta=\frac{4\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Para $r=0$, vem $z=0$.

Para $r=1$, θ toma os valores $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{10\pi}{9}$ e $\frac{16\pi}{9}$.

C.S. $=\left\{0\ ,\ e^{i\frac{4\pi}{9}}\ ,\ e^{i\frac{10\pi}{9}}\ ,\ e^{i\frac{16\pi}{9}}\right\}$

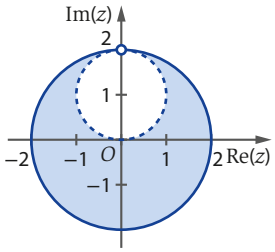
90.3 A circunferência de centro no afixo de $2i$ e que passa na origem tem raio igual a 2 e fica definida pela condição $|z-2i|=2$.

O ponto $(0\ ,\ 2)$, centro da circunferência, o ponto $(2\ ,\ 0)$ e a origem do referencial formam um triângulo retângulo isósceles. Cada um dos ângulos agudos mede $\frac{\pi}{4}$ rad .

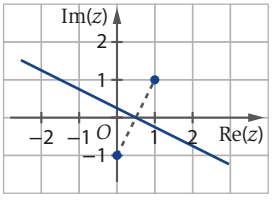
A condição que define a região sombreada é:

$|z-2i|\leqslant 2\wedge\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{Arg}(z-2i)\leqslant -\frac{\pi}{4}\vee\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{Arg}(z-2i)\leqslant\frac{3\pi}{4}\right)$

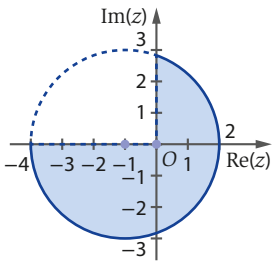
91.1



91.2 $|z-1-i|=|z+i| \Leftrightarrow |z-(1+i)|=|z-(-i)|$

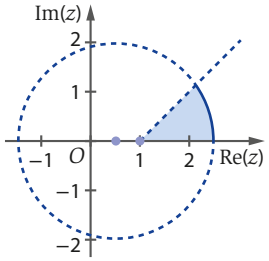


91.3 $-\pi<\operatorname{Arg}(z)<\frac{\pi}{2}\wedge|z+1|\leqslant 3 \Leftrightarrow -\pi<\operatorname{Arg}(z)<\frac{\pi}{2}\wedge|z-(-1)|\leqslant 3$

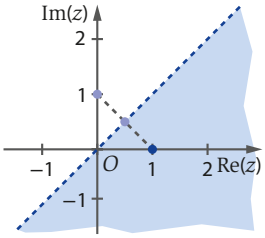


M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

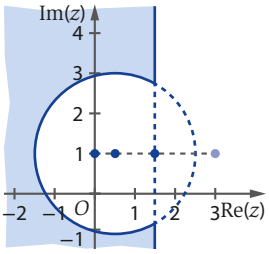
91.4



91.5



91.6 $|z-3-i| \geqslant |z-i| \wedge \left|z-\frac{1}{2}-i\right| \geqslant 2 \iff |z-(3+i)| \geqslant |z-i| \wedge \left|z-\left(\frac{1}{2}+i\right)\right| \geqslant 2$



91.7 $-\frac{\pi}{3} \leqslant \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) < \frac{\pi}{3} \wedge |z+1-i| \leqslant 2 \iff -\frac{\pi}{3} \leqslant \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) < \frac{\pi}{3} \wedge |z-(-1+i)| \leqslant 2$

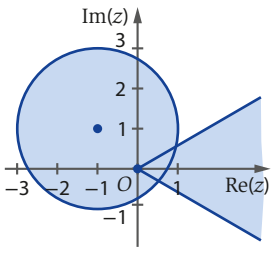
Seja $z = re^{i\theta}$, $\operatorname{Arg}(z) = \theta$.

$$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{re^{i\theta}}{\overline{re^{i\theta}}} = \frac{re^{i\theta}}{re^{i(-\theta)}} = e^{i(2\theta)}$$

$$\operatorname{Arg}\left(e^{i(2\theta)}\right) = 2\theta$$

$$-\frac{\pi}{3} \leqslant \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) < \frac{\pi}{3} \iff -\frac{\pi}{3} \leqslant 2\theta < \frac{\pi}{3} \iff -\frac{\pi}{6} \leqslant \theta < \frac{\pi}{6} \iff$$

$$\iff -\frac{\pi}{6} \leqslant \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{6}$$



M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

92.1 $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

$z_2 = -4 + 5i^{17} = -4 + 5i$

A condição que define a mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é:

$|z-(-i)| = |z-(-4+5i)| \iff |z+i| = |z+4-5i|$

A condição que define a bissetriz dos quadrantes pares é $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z)$.

Seja $z_3 = a + bi$, com a, $b \in \mathbb{R}$.

$\text{Re}(z_3) = a$ e $\text{Im}(z_3) = b$.

O afixo de z_3 pertence à bissetriz dos quadrantes pares, pelo que $b = -a$. Logo, $z_3 = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}$.

O afixo de z_3 pertence à mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

$|a-ai+i| = |a-ai+4-5i| \iff |a+(1-a)i| = |a+4-(a+5)i| \iff$

$\iff \sqrt{a^2+(1-a)^2} = \sqrt{(a+4)^2+(-(a+5))^2}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$a^2+(1-a)^2 = (a+4)^2+(-(a+5))^2 \iff a^2+1-2a+a^2 = a^2+8a+16+a^2+10a+25 \iff$

$\iff 1-2a = 18a+41 \iff -20a = 40 \iff a = -2$

Vamos escrever $z_3 = -2+2i$ na forma trigonométrica.

$|z_3| = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta_3 = \frac{2}{-2} = -1$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{4}$, $z_3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

92.2 Sabemos que $|z_3| = 2\sqrt{2}$. Então, $\overline{OP} = 2\sqrt{2}$.

$\overline{OP} \times \overline{PQ} = 12 \iff 2\sqrt{2} \times \overline{PQ} = 12 \iff$

$\iff \overline{PQ} = \frac{12}{2\sqrt{2}} \iff \overline{PQ} = 3\sqrt{2}$

O ponto R é o transformado do ponto P pela rotação de centro na origem do referencial e amplitude $\frac{\pi}{2}$, composta com a homotetia de centro na origem e razão $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$.

Assim sendo, vamos multiplicar z_3 pelo número complexo $\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$:

$2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \times \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} =$

$= 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right) =$

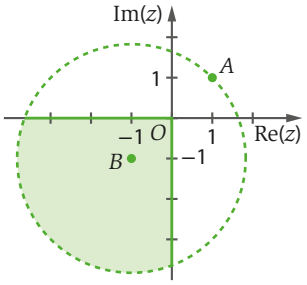
$= 3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -3-3i$

O ponto R é o afixo do número complexo $-3-3i$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 90

Aplicar +



93.1 $\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z) < \frac{3\pi}{4}$

93.2 $A(-1\ ,\ -1)$, $B(1\ ,\ 1)$

raio $= |1 + i - (-1 - i)| = |2 + 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$|z - (-1 - i)| < 2\sqrt{2} \wedge \text{Re}(z) \leqslant 0 \wedge \text{Im}(z) \leqslant 0 \iff$

$\iff |z + 1 + i| < 2\sqrt{2} \wedge \text{Re}(z) \leqslant 0 \wedge \text{Im}(z) \leqslant 0$

93.3 Cada uma das circunferências tem raio 1 .

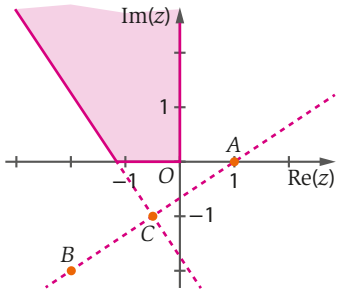
$|z - (1 + i)| \geqslant 1 \wedge |z - (-1 + i)| \geqslant 1 \wedge |z - (-1 - i)| \geqslant 1 \wedge |z - (1 - i)| \geqslant 1 \iff$

$\iff |z - 1 - i| \geqslant 1 \wedge |z + 1 - i| \geqslant 1 \wedge |z + 1 + i| \geqslant 1 \wedge |z - 1 + i| \geqslant 1$

93.4 $-1 \leqslant \text{Im}(z) \leqslant 1 \wedge \text{Re}(z) \geqslant -1 \wedge |z + 1| \geqslant 1$

93.5 $|z - (-2 - 2i)| \geqslant |z - 1| \wedge \text{Re}(z) \leqslant 0 \wedge \text{Im}(z) \geqslant 0 \iff$

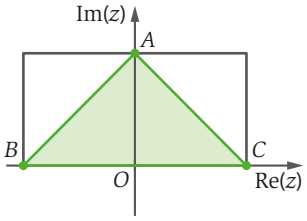
$\iff |z + 2 + 2i| \geqslant |z - 1| \wedge \text{Re}(z) \leqslant 0 \wedge \text{Im}(z) \geqslant 0$



93.6 $a = 2i$, $|a| = |2i| = 2$

$|a| = |b| = 2$

$b = -2$ e $c = 2$



A amplitude do ângulo CAO é $\frac{\pi}{4}$.

$\text{Im}(z) \geqslant 0 \wedge -\frac{3\pi}{4} \leqslant \text{Arg}(z - 2i) \leqslant -\frac{\pi}{4}$

Ou

$\text{Im}(z) \geqslant 0 \wedge |Z| \leqslant |z - (2 + 2i)| \wedge |Z| \leqslant |z - (-2 + 2i)|$

93.7 O polígono regular tem doze vértices e está centrado na origem do referencial.

Um dos vértices está sobre o semieixo real, logo o seu argumento é 0 .

Qualquer ângulo ao centro entre dois vértices consecutivos tem amplitude $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

$\frac{\pi}{6} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{\pi}{3} \vee \frac{2\pi}{3} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{5\pi}{6} \vee -\frac{5\pi}{6} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant -\frac{2\pi}{3} \vee -\frac{\pi}{3} \text{Arg}(z) \leqslant -\frac{\pi}{6}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG.96

Autoavaliação

1. $i^{8n-1}=i^{4n\times 2-1}=\left(i^{4n}\right)^2\times i^{-1}=1^2\times\frac{1}{i}=\frac{1(-i)}{i(-i)}=\frac{-i}{1}=-i$

Opção correta: **(A)**

2. $2z_1=i\overline{z_2}+1 \iff 2(2+ai)=i(a-bi)+1 \iff 4+2ai=ai+b+1 \iff$

$\iff 4+2ai=1+b+ai \iff 4=1+b\wedge 2a=a \iff b=3\wedge a=0$

Logo, $a+b=0+3=3$.

Opção correta: **(C)**

3. $\frac{11i^6-i^{43}+(1+2i)^2(3-i)}{2e^{i\frac{5\pi}{2}}}=\frac{11i^{4+2}-i^{4\times 10+3}+(1+4i-4)(3-i)}{2\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right)}=$

$=\frac{11i^2-i^3+(-3+4i)(3-i)}{2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-11+i+(-9+3i+12i+4)}{2(0+i\times 1)}=$

$=\frac{-11+i-5+15i}{2i}=\frac{-16+16i}{2i}=\frac{(-16+16i)(-2i)}{2i(-2i)}=\frac{32i+32}{4}=8+8i$

4. $-\left(-\frac{\pi}{7}+\pi\right)=-\frac{6\pi}{7}$ e $-\frac{6\pi}{7}+2\pi=\frac{8\pi}{7}$

Opção correta: **(D)**

5. $|z_1|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

O afixo de z_1 está no 1.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$, θ_1 pode ser $\frac{\pi}{3}$.

Assim, $z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$z_1^{\,7}=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^7=2^7e^{i\frac{\pi}{3}\times 7}=128e^{i\frac{7\pi}{3}}=128e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_1^{\,7}\times(-z_2)=128e^{i\frac{\pi}{3}}\times 2e^{i(3\theta+\pi)}=128\times 2e^{i\frac{\pi}{3}+i(3\theta+\pi)}=526e^{i\left(3\theta+\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=526e^{i\left(3\theta+\frac{4\pi}{3}\right)}$

$3\theta+\frac{4\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff 3\theta=-\frac{11\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff \theta=-\frac{11\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $\theta=-\frac{11\pi}{18}$ e $-\frac{11\pi}{18}+2\pi=\frac{25\pi}{18}$.

6.1 $z_1=\operatorname{sen}\alpha+i\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{sen}\alpha(1+i\operatorname{tg}\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\left(1+i\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)=$

$=\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)=\operatorname{tg}\alpha e^{i\alpha}$

6.2 $(z_1)^n=\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^n=\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)^n e^{i\frac{5\pi n}{12}}$

$\frac{5n\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff n=\frac{12}{5\pi}\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z} \iff$

$\iff n=\frac{9}{5}+\frac{12k}{5},\ k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $n=\frac{9}{5}\notin\mathbb{N}$; se $k=1$, $n=\frac{21}{5}\notin\mathbb{N}$; se $k=3$, $n=9\in\mathbb{N}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

7.1 $w=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i+i-1}{1^2-i^2}=\dfrac{2i}{2}=i=1e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\sqrt[3]{w}=\sqrt[3]{1}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)}$, $k\in\{0\ ,\ 1\ ,\ 2\}$

Se $k=0$, $\sqrt[3]{1}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\times 0\pi}{3}\right)}=1e^{i\frac{\pi}{6}}$; se $k=1$, $\sqrt[3]{1}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\times 1\pi}{3}\right)}=1e^{i\frac{5\pi}{6}}$; se $k=2$, $\sqrt[3]{1}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\times 2\pi}{3}\right)}=1e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

7.2 Triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1.

O lado do triângulo mede

$$\left|1e^{i\frac{\pi}{6}}-1e^{i\frac{5\pi}{6}}\right|=\left|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)-\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|=\sqrt{3}$$

Logo, o perímetro do triângulo é $3\sqrt{3}$.

8. Seja $z=re^{i\theta}$, $r\geqslant 0$.

$$\frac{z^3}{4i}=\bar{z}\iff\frac{\left(re^{i\theta}\right)^3}{4e^{i\frac{\pi}{2}}}=re^{i(-\theta)}\iff\frac{r^3e^{i3\theta}}{4e^{i\frac{\pi}{2}}}=re^{i(-\theta)}\iff\frac{r^3}{4}e^{i\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)}=re^{i(-\theta)}\iff$$

$$\iff\frac{r^3}{4}=r\wedge e^{i\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i(-\theta)}\iff r^3=4r\wedge 3\theta-\frac{\pi}{2}=-\theta+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\iff$$

$$\iff r^3-4r=0\wedge 3\theta+\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\iff r\left(r^2-4\right)=0\wedge 4\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\iff$$

$$\underset{r\geqslant 0}{\iff}(r=0\vee r=2)\wedge\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Se $r=0$, $z=0$.

Se $k=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ e $z=2e^{i\frac{\pi}{8}}$; se $k=1$, $\theta=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5\pi}{8}$ e $z=2e^{i\frac{5\pi}{8}}$;

se $k=2$, $\theta=\dfrac{\pi}{8}+\pi=\dfrac{9\pi}{8}$ e $z=2e^{i\frac{9\pi}{8}}$; se $k=3$, $\theta=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{3\pi}{2}=\dfrac{13\pi}{8}$ e $z=2e^{i\frac{13\pi}{8}}$.

PÁG.97

Autoavaliação

9.1 D é o afixo do número complexo $z_D=3e^{i\left(\frac{4\pi}{9}+2\times\frac{2\pi}{8}\right)}=3e^{i\left(\frac{8\pi}{18}+\frac{9\pi}{18}\right)}=3e^{i\frac{17\pi}{18}}$.

H é o afixo do número complexo $z_H=3e^{i\left(\frac{4\pi}{9}-2\times\frac{2\pi}{8}\right)}=3e^{i\left(\frac{8\pi}{18}-\frac{9\pi}{18}\right)}=3e^{i\left(-\frac{\pi}{18}\right)}$.

z_D e z_H são simétricos, como podemos ver:

$z_D=-z_H=-3e^{i\left(-\frac{\pi}{18}\right)}=3e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{18}\right)}=3e^{i\left(\frac{17\pi}{18}\right)}$

Vamos escrever $-\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ na forma trigonométrica.

$\left|-\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\wedge\theta\in 3.^{\circ}\,\text{Q}\ ,\quad\theta=\dfrac{7\pi}{6}$

$-\sqrt{6}-i\sqrt{2}=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$$\frac{z_D-z_H}{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}=\frac{2\times 3e^{i\left(\frac{17\pi}{18}\right)}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{17\pi}{18}-\frac{7\pi}{6}\right)}=\frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{2\pi}{9}\right)}$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

9.2 $|z_B| = 3$

$z^3 - 7z^2 + 17z = 15 \iff z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0$

	1	−7	17	−15
3		3	−12	15
	1	−4	5	0

$(z-3)(z^2 - 4z + 5) = 0 \iff z - 3 = 0 \vee z^2 - 4z + 5 = 0 \iff$

$\iff z = 3 \vee z = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \iff$

$\iff z = 3 \vee z = \dfrac{4 + 2i}{2} \vee z = \dfrac{4 - 2i}{2} \iff$

$\iff z = 3 \vee z = 2 + i \vee z = 2 - i$

C.S. $= \{3 , 2 + i , 2 - i\}$

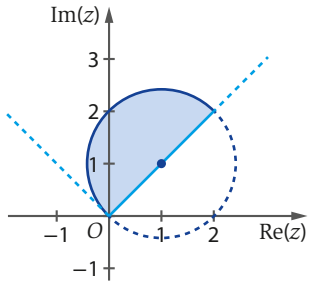
10. $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geqslant 0 \wedge |z + 2i| = |z - 2|\}$

$|z + 2i| = |z - 2| \iff |z - (-2i)| = |z - 2|$ é uma condição que define a mediatriz do segmento de reta formada pelos afixos dos números complexos $-2i$ e 2.

Opção correta: **(D)**

11. A condição $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \dfrac{3\pi}{4} \wedge |z - 1 - i| \leqslant \sqrt{2} \iff$

$\iff \dfrac{\pi}{4} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \dfrac{3\pi}{4} \wedge |z - (1 + i)| \leqslant \sqrt{2}$ pode ser representada no plano complexo



A região obtida é um semicírculo de raio $\sqrt{2}$, pelo que o seu perímetro é:

$\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}(\pi + 2)$

Opção correta: **(B)**

12. Para que z, $z - 2$ e $iz - 1$ tenham imagens sobre a mesma circunferência de centro na origem do referencial, os seus módulos têm de ser iguais.

Seja $z = x + yi$.

$z - 2 = x + yi - 2 = (x - 2) + yi$ e $iz - 1 = i(x + yi) - 1 = ix - y - 1 = (-y - 1) + xi$.

Como $|z| = |z - 2| \iff |x + yi| = |(x - 2) + yi| \iff$

$\iff \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$x^2+y^2=(x-2)^2+y^2 \iff x^2=x^2-4x+4 \iff$

$\iff 0=-4x+4 \iff x=1$

Como $|z|=|iz-1| \iff |x+yi|=|(-y-1)+xi| \iff$

$\iff \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-y-1)^2+x^2}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$x^2+y^2=(-y-1)^2+x^2 \iff y^2=y^2+2y+1 \iff y=-\frac{1}{2}$

Então, $z=1-\frac{1}{2}i$.

Como $|z|=\left|1-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, a condição que define a circunferência é $|z|=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

PÁG.98

Preparar o exame

1. $z_1=\overline{z_2} \iff (3k+2)+pi=(3p-4)-(2-5k)i \iff$

$\iff 3k+2=3p-4 \wedge p=-2+5k \iff$

$\iff 3k+2=3(-2+5k)-4 \wedge p=-2+5k \iff$

$\iff 3k+2=-6+15k-4 \wedge p=-2+5k \iff k=1 \wedge p=3$

Opção correta: **(C)**

2.1 Sejam $w_1=x$, $x<0$ e $w_4=a+bi$, a, $b>0$.

$(w_1+w_4)\times i^3=(x+a+bi)\times(-i)=(x+a)(-i)+b=b+(-x-a)i$

$(w_1+w_4)\times i^3$ tem parte real positiva e igual à parte imaginária de w_4.

Excluímos a opção (A), pois w_2 é o afixo de um número real negativo.

Excluímos a opção (D), pois w_6 é o afixo de um número imaginário puro negativo.

Excluímos a opção (C), pois w_5 é o afixo de um número imaginário cuja parte real é maior do que a parte imaginária de w_4.

Opção correta: **(B)**

2.2 $i^{4n+1}+i^{8n+2}+i^{12n+3}=i^1+i^2+i^3=i+(-1)+(-i)=-1$

Opção correta: **(A)**

3.1 $w_1=\frac{2-i^{39}}{1+3i}+(1-i)^3-\frac{4}{i^{201}}=\frac{2-i^3}{1+3i}+(1-i)(1-i)^2-\frac{4}{i^1}=$

$=\frac{2+i}{1+3i}+(1-i)(1-2i-1)-\frac{4(-i)}{i(-i)}=\frac{(2+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}+(1-i)(-2i)+4i=$

$=\frac{2-6i+i+3}{1^2-(3i)^2}-2i-2+4i=\frac{5-5i}{10}-2+2i=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-2+2i=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

3.2 Vamos escrever w_1 na forma trigonométrica.

$|w_1| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

O afixo de w_1 está no 2.º quadrante, portanto, como $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = -1$, θ_1 pode ser $\frac{3\pi}{4}$.

Assim, $w_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Seja $w_2 = re^{i\alpha}$, com $r > 0$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

$\frac{w_1}{(w_2)^4} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}}{r^4 e^{i4\alpha}} = \frac{3\sqrt{2}}{2r^4} e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - 4\alpha\right)}$

$\frac{3\pi}{4} - 4\alpha = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff -4\alpha = \pi - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff \alpha = -\frac{\pi}{16} - \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = -1$, $\alpha = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{16} \notin \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Se $k = -2$, $\alpha = -\frac{\pi}{16} + \pi = \frac{15\pi}{16} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Se $k = -3$, $\alpha = -\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} = \frac{23\pi}{16} \notin \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Logo, $\alpha = \frac{15\pi}{16}$.

4. $z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Vamos escrever z na forma trigonométrica.

$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Sendo θ um argumento de z, tem-se que $\text{tg}\,\theta = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$ e $\theta \in 2.^\circ\,Q$, pelo que θ pode ser $-\frac{\pi}{4}$.

Assim, $z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

$\frac{z^3}{\bar{z}i} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\times 3\right)}}{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \left(1e^{i\frac{\pi}{2}}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{1}{2} e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2} e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)} =$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(0 + i \times 1) = \frac{1}{2}i$

5. Seja w um número complexo tal que $z^4 = w$ e $\left(ri - r\sqrt{3}\right)^4 = w$.

$ri - r\sqrt{3} = r\left(i - \sqrt{3}\right) = r\left(-\sqrt{3} + i\right)$

Vamos escrever $-\sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica.

$\left|-\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$

O afixo de $-\sqrt{3} + i$ está no 2.º quadrante, portanto, como $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, θ pode ser $\frac{5\pi}{6}$.

Assim, $-\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

$\left(ri - r\sqrt{3}\right)^4 = r^4\left(-\sqrt{3} + i\right)^4 = r^4 \times \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^4 = r^4 \times 2^4 e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\times 4\right)} = 16r^4 e^{i\frac{10\pi}{3}}$

$z^4 = \left(-\frac{4e^{i\alpha}}{i}\right)^4 = \left(\frac{4e^{i\alpha}}{1e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^4 = \left(4e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}\right)^4 = 4^4 e^{i\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\times 4\right)} = 256e^{i(4\alpha - 2\pi)}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

$16r^4 e^{i\frac{10\pi}{3}} = 256e^{i(4\alpha-2\pi)} \Leftrightarrow 16r^4 = 256 \wedge \frac{10\pi}{3} = 4\alpha - 2\pi + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^4 = \frac{256}{16} \wedge 4\alpha = \frac{10\pi}{3} + 2\pi - 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^4 = 16 \wedge 4\alpha = \frac{16\pi}{3} - 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\underset{r>0}{\Leftrightarrow} r = 2 \wedge \alpha = \frac{4\pi}{3} - \frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $\alpha = \frac{4\pi}{3} \notin \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Se $k=1$, $\alpha = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Se $k=2$, $\alpha = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3} \notin \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Logo, $r=2$ e $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

PÁG.99

Preparar o exame

6. Sejam $w_1 = r_1 e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e $w_2 = r_2 e^{i\theta}$.

$w_1 \times w_2 = r_1 e^{i\frac{3\pi}{4}} \times r_2 e^{i\theta} = r_1 \times r_2 e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)}$

$\frac{3\pi}{4} + \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$\alpha = 2\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$

Opção correta: **(D)**

7. Vamos começar por escrever $1+i$ na forma trigonométrica.

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Sendo θ um argumento de $1+i$, tem-se que $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1$ e $\theta \in 1.^\circ\,Q$, pelo que θ pode ser $\frac{\pi}{4}$.

Assim, $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$\frac{iz_1}{\overline{z_2}} = 1+i \Leftrightarrow \frac{1e^{i\frac{\pi}{2}}\left(3e^{i\frac{3\pi}{8}}\right)}{\overline{z_2}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \frac{3e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)}}{\overline{z_2}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{3e^{i\frac{7\pi}{8}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{8}}$

$z_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{8}\right)}$ e $z_2^5 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^5 e^{i\left(-\frac{5\pi}{8}\times 5\right)} = \frac{243\sqrt{2}}{8}e^{i\left(-\frac{25\pi}{8}\right)}$

O argumento positivo mínimo de z_2^5 é $-\frac{25\pi}{8} + 4\pi = \frac{7\pi}{8}$.

8. $\left(z^2 + \frac{1}{\overline{z}^2}\right)(\sqrt{3}+2i) = 3\sqrt{3} - i \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{\overline{z}^2} = \frac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i}$

$\frac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i} = \frac{(3\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-2i)}{(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-2i)} = \frac{9-6\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-2}{(\sqrt{3})^2-(2i)^2} = \frac{7-7\sqrt{3}i}{7} = 1-\sqrt{3}i$

Vamos escrever $1-\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica.

$|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

O afixo de $1-\sqrt{3}i$ está no 4.º quadrante, portanto, como $\text{tg}\theta=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$, θ pode ser $-\frac{\pi}{3}$.

Assim, $1-\sqrt{3}i=2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

Seja $z=re^{i\alpha}$.

$$z^2+\frac{1}{\overline{z}^2}=\frac{z^2\times\overline{z}^2+1}{\overline{z}^2}=\frac{(z\times\overline{z})^2+1}{\overline{z}^2}=\frac{\left(|z|^2\right)^2+1}{\overline{z}^2}=\frac{|z|^4+1}{\overline{z}^2}=\frac{r^4+1}{r^2e^{i(-2\alpha)}}$$

$$\frac{r^4+1}{r^2e^{i(-2\alpha)}}=2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\iff r^2e^{i(-2\alpha)}\times 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=r^4+1\iff 2r^2e^{i\left(-2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}=\left(r^4+1\right)e^{i0}\iff$$

$$\iff 2r^2=r^4+1\wedge -2\alpha-\frac{\pi}{3}=0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\iff$$

$$\iff r^4-2r^2+1=0\wedge -2\alpha=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\iff$$

$$\iff (r-1)^2=0\wedge\alpha=-\frac{\pi}{6}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\underset{r>0}{\iff} r=1\wedge\alpha=-\frac{\pi}{6}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como se pretende a solução cujo afixo pertence ao segundo quadrante, $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ e

$z=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

9.1 $z_1=\frac{6i}{1-i}+\frac{i^{35}}{2}+\frac{3-4i}{2i}=\frac{6i(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{i^3}{2}+\frac{(3-4i)(-2i)}{2i(-2i)}=$

$=\frac{6i-6}{1^2-i^2}-\frac{i}{2}+\frac{-6i-8}{4}=\frac{6i-6}{2}-\frac{i}{2}+\frac{-3i-4}{2}=\frac{-6-4+6i-i-3i}{2}=-5+i$

9.2 $\frac{(-5+i+6)^2}{ai}+(-5+i)=b(-5-i)\iff\frac{(1+i)^2}{ai}-5+i=-5b-bi\iff$

$\iff\frac{1+2i-1}{ai}-5+i=-5b-bi\iff\frac{2i(-ai)}{ai(-ai)}-5+i=-5b-bi\iff$

$\iff\frac{2a}{a^2}-5+i=-5b-bi\iff\frac{2}{a}-5+i=-5b-bi\iff$

$\iff\frac{2}{a}-5=-5b\wedge 1=-b\iff b=-1\wedge\frac{2}{a}-5=-5(-1)\iff a=\frac{1}{5}\wedge b=-1$

9.3 $\frac{z_1}{2-3i}=\frac{-5+i}{2-3i}=\frac{(-5+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{-10-15i+2i-3}{2^2-(3i)^2}=\frac{-13-13i}{13}=-1-i$

Vamos escrever $-1-i$ na forma trigonométrica.

$|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Sendo θ um argumento de $-1-i$, tem-se que $\text{tg}\theta=\frac{-1}{-1}=1$ e $\theta\in$ 3.º Q, pelo que θ pode ser $\frac{5\pi}{4}$.

Assim, $-1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

$$\frac{(z_2)^n\times z_1}{2-3i}=r^ne^{i\frac{5n\pi}{12}}\times\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}r^ne^{i\left(\frac{5n\pi}{12}+\frac{5\pi}{4}\right)}$$

$\frac{5n\pi}{12}+\frac{5\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\iff\frac{5n\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\iff n=-\frac{12}{5}+\frac{24k}{5},\ k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $n=-\frac{12}{5}\notin\mathbb{N}$; se $k=1$, $n=\frac{12}{5}\notin\mathbb{N}$; se $k=2$, $n=\frac{36}{5}\notin\mathbb{N}$;

se $k=3$, $n=12\in\mathbb{N}$; se $k=4$, $n=\frac{84}{5}\notin\mathbb{N}$.

Logo, $n=12$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

10.1 $z=\dfrac{2i}{(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)^2}=\dfrac{2i}{\left(e^{i\alpha}\right)^2}=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i2\alpha}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}$

$z^3=-8i \iff \left(2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}\right)^3=-8i \iff 2^3e^{i\left(\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\times 3\right)}=-8i \iff$

$\iff 8e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-6\alpha\right)}=8e^{i\frac{3\pi}{2}} \iff 8=8\wedge\dfrac{3\pi}{2}-6\alpha=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff$

$\iff \alpha=-\dfrac{k\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $\alpha=0\notin\left]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right[$; se $k=1$, $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}\notin\left]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right[$;

se $k=2$, $\alpha=-\dfrac{2\pi}{3}\in\left]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right[$; se $k=3$, $\alpha=-\pi\notin\left]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Logo, $z=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}=2e^{i\frac{11\pi}{6}}=2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

10.2 Vamos escrever $1+\sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica.

$|1+\sqrt{3}\,i|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

O afixo de $1+\sqrt{3}\,i$ está no 1.º quadrante, portanto, como $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$, θ pode ser $\dfrac{\pi}{3}$.

Assim, $1+\sqrt{3}\,i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$\left(\dfrac{2z}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^4\times i^{105}=\left(\dfrac{2\times 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^4\times i^{26\times 4+1}=\left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^4\times i^1=$

$=2^4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\times 4\right)}\times 1e^{i\frac{\pi}{2}}=16e^{i\left(-2\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=16e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}=16e^{i\frac{\pi}{2}}=16(0+1\times i)=16i$

PÁG.100

Preparar o exame

11. Vamos começar por escrever z_2 na forma trigonométrica.

$|z_2|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

Sendo θ_2 um argumento de z_2, tem-se que $\operatorname{tg}\theta_2=\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$ e $\theta_2\in 3.^\circ\,Q$, pelo que θ_2 pode ser $\dfrac{4\pi}{3}$.

Assim, $z_2=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$w=\dfrac{z_1+i^{23}}{z_2^n}=\dfrac{-5i+i^3}{\left(2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^n}=\dfrac{-5i-i}{2^ne^{i\left(\frac{4\pi}{3}\times n\right)}}=\dfrac{-6i}{2^ne^{i\left(\frac{4\pi}{3}\times n\right)}}=\dfrac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^ne^{i\left(\frac{4\pi}{3}\times n\right)}}=\dfrac{6}{2^n}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{4n\pi}{3}\right)}$

w é um imaginário puro se

$\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{4n\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff \dfrac{9\pi}{6}-\dfrac{8n\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{6}+\dfrac{6k\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff$

$\iff 9\pi-8n\pi=3\pi+6k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff 9\pi-3\pi-8n\pi=6k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff$

$\iff 6\pi-8n\pi=6k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff 2\pi(3-4n)=6k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff$

$\iff \dfrac{2\pi(3-4n)}{6\pi}=k\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff k=\dfrac{3-4n}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Se $n=1$, $k=\dfrac{3-4\times 1}{3}=-\dfrac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$; se $n=2$, $k=\dfrac{3-4\times 2}{3}=-\dfrac{5}{3}\notin\mathbb{Z}$; se $n=3$, $k=\dfrac{3-4\times 3}{3}=-3\in\mathbb{Z}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

12. $z_1 = e^{i\frac{13\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right) - \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) =$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) =$

$= -2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - 2i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = -2e^{i\frac{\pi}{12}}$

$z_2 = 2i^{110} - \sqrt{12}i^{33} = 2i^{27\times 4+2} - 2\sqrt{3}i^{8\times 4+1} = 2i^2 - 2\sqrt{3}i^1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$

Vamos escrever z_2 na forma trigonométrica.

$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$

Sendo θ_2 um argumento de z_2, tem-se que $\text{tg}\,\theta_2 = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$ e $\theta_2 \in 3.^\circ\,\text{Q}$, pelo que θ_2 pode ser $\frac{4\pi}{3}$.

Assim, $z_2 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Seja $z_3 = re^{i\alpha}$, $r > 0$.

$z = \frac{z_1 \times \overline{z_2}}{z_3} = \frac{-2e^{i\frac{\pi}{12}} \times 4e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}}{re^{i\alpha}} = \frac{-8}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{12} - \frac{4\pi}{3} - \alpha\right)} = -\frac{8}{r}e^{i\left(-\frac{15\pi}{12} - \alpha\right)} = \frac{8}{r}e^{i\left(-\frac{15\pi}{12} - \alpha + \pi\right)} = \frac{8}{r}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$

$|z| = \sqrt{2} \iff \frac{8}{r} = \sqrt{2} \iff r = \frac{8}{\sqrt{2}} \iff r = 4\sqrt{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0 \iff -\frac{\pi}{4} - \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff \alpha = -\frac{3\pi}{4} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4} - \alpha\right) > 0 \iff 0 + 2k\pi < -\frac{\pi}{4} - \alpha < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff -\frac{\pi}{4} - 2k\pi > \alpha > -\frac{5\pi}{4} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Um argumento de z_3 pode ser $-\frac{3\pi}{4}$.

Logo, $z_3 = 4\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -4 - 4i$.

13. O ponto C é o afixo de $-z$.

O ponto E obtém-se do ponto C por uma rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{3}$.

Logo, é o afixo de $-ze^{i\frac{\pi}{3}}$.

$-ze^{i\frac{\pi}{3}} = -z\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = -z\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = z\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Opção correta: **(B)**

14.1 $z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{4}{i^1} = \frac{2+2i}{1^2 - i^2} + \frac{4(-i)}{i(-i)} = \frac{2+2i}{2} - \frac{4i}{1} = 1 - 3i$

Seja $z_3 = x + yi$, x, $y \in \mathbb{R}$.

$z_1 \times z_3 = (1-3i) \times (x+yi) = x + yi - 3xi + 3y = x + 3y + (-3x + y)i$

$x + 3y < 0 \wedge -3x + y < 0 \wedge -3x + y = x + 3y \iff x + 3y < 0 \wedge -3x + y < 0 \wedge -2x = y$

$|z_3| = \sqrt{5} \iff \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem

$x^2 + y^2 = 5 \iff x^2 + (-2x)^2 = 5 \iff 5x^2 = 5 \iff x^2 = 1 \iff x = -1 \vee x = 1$

Para $x = -1$, vem $y = -2(-1) = 2$.

$-1 + 3 \times 2 = 5 > 0 \wedge -3(-1) + 2 = 5 > 0$

Para $x = 1$, vem $y = -2 \times 1 = -2$.

$1 + 3(-2) = -5 < 0 \wedge -3 \times 1 + (-2) = -5 < 0$

Logo, $z_3 = 1 - 2i$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

14.2 $(k+i)^2 = 3-4i \Leftrightarrow k^2+2ki+i^2 = 3-4i \Leftrightarrow k^2+2ki-1 = 3-4i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-1+2ki = 3-4i \Leftrightarrow k^2-1 = 3 \wedge 2k = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 = 4 \wedge k = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow (k=-2 \vee k=2) \wedge k=-2 \Leftrightarrow k=-2$

Opção correta: **(D)**

14.3 $z^2 \times \overline{z_1} = iz(\overline{z} \times z_2 - 2) \Leftrightarrow z^2 \times \overline{z_1} - iz(\overline{z} \times z_2 - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z(z \times \overline{z_1} - i(\overline{z} \times z_2 - 2)) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z \times \overline{z_1} - i(\overline{z} \times z_2 - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z \times \overline{z_1} = i(\overline{z} \times z_2 - 2)$

Seja $z = x + yi$.

$z \times \overline{z_1} = i(\overline{z} \times z_2 - 2) \Leftrightarrow (x+yi)(1+3i) = i((x-yi)(3-4i)-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+3xi+yi-3y = i(3x-4xi-3yi-4y-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3y+(3x+y)i = i(3x-4y-2-4xi-3yi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3y+(3x+y)i = 3xi-4yi-2i+4x+3y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3y+(3x+y)i = 4x+3y+(3x-4y-2)i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3y = 4x+3y \wedge 3x+y = 3x-4y-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+6y = 0 \wedge 5y = -2 \Leftrightarrow x+2y = 0 \wedge y = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2\left(-\frac{2}{5}\right) = 0 \wedge y = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \wedge y = -\frac{2}{5}$

Logo, $z = 0 \vee z = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

C.S. $= \left\{0, \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right\}$

14.4 Seja $w_1 = a+bi$.

$\overline{-z_2 \times w_1} = \overline{-(3-4i) \times (a+bi)} = \overline{(-3+4i) \times (a+bi)} =$

$= \overline{-3a-3bi+4ai-4b} = \overline{-3a-4b+(4a-3b)i} = -3a-4b+(-4a+3b)i$

$\text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow -3a-4b = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}b$

$\text{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow --4a+3b > 0 \Leftrightarrow a < \frac{3}{4}b$

$-\frac{4}{3}b < \frac{3}{4}b \Leftrightarrow -\frac{4}{3}b - \frac{3}{4}b < 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\right)b < 0 \Leftrightarrow b > 0$ e $a < 0$

Opção correta: **(B)**

PÁG.101

Preparar o exame

14.5 $z_1 \times \overline{w_2} = (1-3i) \times (4-ki) = 4-ki-12i-3k = 4-3k+(-12-k)i$

$4-3k = 0 \wedge -12-k \neq 0 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3} \wedge k \neq 12$

Opção correta: **(C)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

15.1 Vamos começar por escrever z_1 na forma trigonométrica.

$|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

Sendo θ_1 um argumento de z_1, tem-se que $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta_1 \in 2.^\circ\,Q$, pelo que θ_1 pode ser $\frac{5\pi}{6}$.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

$$w = \frac{iz_1}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}\,2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{25\pi}{12}\right)}$$

$$z = w^6 = \left(2e^{i\left(\frac{25\pi}{12}\right)}\right)^6 = 2^6 e^{i\left(\frac{25\pi}{12}\times 6\right)} = 64e^{i\left(\frac{25\pi}{2}\right)} = 64e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 64i$$

Logo, $iz = i(64i) = -64$.

15.2 $z^3 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}\,i}\right)^6 \Leftrightarrow z^3 = \left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^6 \Leftrightarrow z^3 = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^3 = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^6 \Leftrightarrow z^3 = (\sqrt{2})^6 e^{i\left(\frac{\pi}{3}\times 6\right)} \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i0} \Leftrightarrow z^3 = 8$

2 é uma raiz do polinómio.

Vamos recorrer à regra de Ruffini para dividir o polinómio por $z-2$.

	1	0	0	−8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$z^3 - 8 = (z-2)(z^2+2z+4)$

$z^2+2z+4=0 \Leftrightarrow z = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{-2-2\sqrt{3}\,i}{2} \vee z = \frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{2} \Leftrightarrow z = -1-\sqrt{3}\,i \vee z = -1+\sqrt{3}\,i$

Como a imagem geométrica, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante, concluímos que $z = -1-\sqrt{3}\,i$.

Ou

$z = \sqrt[3]{8e^{i0}} \Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{2k\pi}{3}},\ k \in \{0, 1, 2\}$

Para $k=0$, $z = 2e^{i0}$;

para $k=1$, $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

para $k=2$, $z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1-\sqrt{3}\,i$.

Como a imagem geométrica, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante, concluímos que $z = -1-\sqrt{3}\,i$.

16.1 $\frac{i^{23}\times w^2}{\overline{w}} = \frac{i^{5\times 4+3}\times w^2\times w}{\overline{w}\times w} = \frac{i^3\times w^3}{\overline{w}\times w} = \frac{-i\times w^3}{\overline{w}\times w} =$

$= \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}\times\left(re^{i\theta}\right)^3}{re^{i(-\theta)}\times re^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}\times r^3 e^{i3\theta}}{r^2 e^{i(-\theta+\theta)}} = \frac{r^3 e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+3\theta\right)}}{r^2 e^{i0}} = re^{i\left(\frac{3\pi}{2}+3\theta\right)}$

Opção correta: **(D)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

16.2

a. Vamos começar por escrever $1-i$ na forma trigonométrica.

$|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Sendo θ um argumento de $1-i$, tem-se que $\operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{1}=-1$ e $\theta\in 4.^{\circ}\,Q$, pelo que θ pode ser $-\frac{\pi}{4}$.

Assim, $1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Seja $w=re^{i\theta}$, $r>0$, $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

$$\begin{aligned}(1-i)z^2-4\sqrt{2}\,\overline{z}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=0 &\iff \left(\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)\left(re^{i\theta}\right)^2-4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(re^{i(-\theta)}\right)=0 \iff\\ &\iff \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}r^2e^{i2\theta}-4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}re^{i(-\theta)}=0 \iff \sqrt{2}r^2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2\theta\right)}=4\sqrt{2}\,re^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} \iff\\ &\iff \sqrt{2}r^2=4\sqrt{2}\,r\wedge -\frac{\pi}{4}+2\theta=\frac{\pi}{4}-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff\\ &\iff \sqrt{2}r^2-4\sqrt{2}\,r=0\wedge 2\theta+\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff\\ &\iff r\left(\sqrt{2}\,r-4\sqrt{2}\right)=0\wedge 3\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff\\ &\iff \left(r=0\vee\sqrt{2}\,r-4\sqrt{2}=0\right)\wedge\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \iff\\ &\underset{r\neq 0}{\iff} r=4\wedge\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Se $k=0$, $\theta=\frac{\pi}{6}\notin\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$; se $k=1$, $\theta=\frac{5\pi}{6}\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$; se $k=2$, $\theta=\frac{3\pi}{2}\notin\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

$w=4e^{i\frac{5\pi}{6}}=4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-2\sqrt{3}+2i$

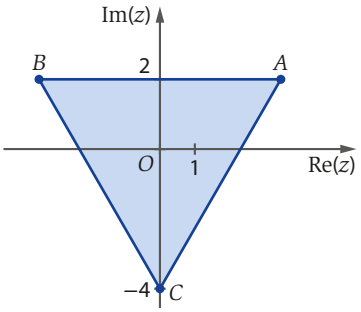
b. De **a.**, sabemos que as soluções são $4e^{i\frac{\pi}{6}}$, $4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ e $4e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

$4e^{i\frac{\pi}{6}}=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}+2i$

$4e^{i\frac{5\pi}{6}}=4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-2\sqrt{3}+2i$

$4e^{i\frac{3\pi}{2}}=4\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=4(0-i)=-4i$

Os afixos das três soluções são os vértices do triângulo representado na figura.



A área do triângulo é $\frac{(2\sqrt{3}+2\sqrt{3})(2+4)}{2}=12\sqrt{3}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

17. Sejam z_0, z_1, z_2 e z_3 as raízes quartas consecutivas de um certo número complexo z.

z_0 e z_2 são simétricas, tal como z_1 e z_3.

Logo, a soma de três das raízes dará uma delas.

Pelo que, $z=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^4=4e^{i\frac{5\pi}{3}}=$

$$=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$$

$$=2-2\sqrt{3}$$

PÁG.102

Preparar o exame

18. Seja $w=re^{i\theta}$, $r>0$, $\theta\in\mathbb{R}$ tal que $w^n=\overline{w}^n=z$.

$w^n=\overline{w}^n \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^n=\left(re^{i(-\theta)}\right)^n \Leftrightarrow r^ne^{in\theta}=r^ne^{i(-n\theta)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\theta=-n\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2n\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow n\theta=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Um argumento de z é da forma $n\theta=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, pelo que z é um número real.

Ou

$w^n=\overline{w}^n=z$, pois w e $\overline{w}$ são raízes de índice n do mesmo número complexo.

Seja $z=a+bi$, $a, b\in\mathbb{R}$.

Como $\overline{w}^n=z \Leftrightarrow \overline{w^n}=z \Leftrightarrow \overline{z}=z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-bi=a+bi \Leftrightarrow a=a\wedge -b=b \Leftrightarrow b=0$

z é um número real.

19.1 O octógono está centrado na origem e é regular logo, cada ângulo ao centro formado por dois vértices consecutivos tem $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$ rad.

C é o transformado de A pela rotação de centro na origem do referencial e amplitude $\frac{\pi}{2}$.

Para isso, basta que multipliquemos w por i.

$i^5w=iw$

Opção correta: **(C)**

19.2 $w=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

a. $w^8=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^8=16e^{i\frac{10\pi}{3}}=$

$$=16e^{i\frac{4\pi}{3}}=16\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)=$$

$$=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-8-8\sqrt{3}\,i$$

Opção correta: **(B)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

b. Comecemos por escrever $-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i$ na forma trigonométrica.

$$|-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i|=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$$

$$\text{tg}\,\theta=\frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{3}\wedge\theta\in 2.^{\circ}\,\text{Q}\,,\ \theta=\frac{2\pi}{3}$$

$$-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i=2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\frac{(-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i)z_1}{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\times z_1}{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\Leftrightarrow 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}\right)}\times z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}\Leftrightarrow z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\Leftrightarrow z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\Leftrightarrow z_1=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

20.1 $(z_2)^3=\left(re^{i\alpha}\right)^3=r^3e^{i3\alpha}$

Como $(z_2)^3$ é um número real negativo, $3\alpha=\pi+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi+2k\pi}{3}\,,\ k\in\mathbb{Z}$.

Como a sua imagem geométrica pertence à circunferência de raio 8 centrada na origem, $r^3=8\Leftrightarrow r=2$.

Se $k=0\,,\ \alpha=\frac{\pi}{3}\in]0\,,\pi[$.

$$z_2=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{1}{2}+i\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}\,i$$

20.2 Seja $z_2=x+yi$.

Como a imagem geométrica de z_2 tem coordenadas simétricas, $z_2=x-xi$.

$$|z_2(1-i)|=1\Leftrightarrow|(x-xi)(1-i)|=1\Leftrightarrow|x-xi-xi-x|=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|-2xi|=1\Leftrightarrow\sqrt{(-2x)^2}=1\Leftrightarrow\sqrt{4x^2}=1$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem

$$4x^2=1\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\vee x=\frac{1}{2}$$

Se $x=-\frac{1}{2}\,,\ y=\frac{1}{2}$ e $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\in 2.^{\circ}\,\text{Q}.$;

se $x=\frac{1}{2}\,,\ y=-\frac{1}{2}$ e $z_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\in 4.^{\circ}\,\text{Q}.$.

Como $z_2=re^{i\alpha}$, com $\alpha\in]0\,,\pi[$, concluímos que $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

$$(z_2)^3-\frac{1}{2}\left(\overline{z_1}+e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3-\frac{1}{2}\left((2+3i)+\left(e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\left((2+3i)+(0+i\times(-1))\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}i\right)-\frac{1}{2}\left((2+3i)+(-i)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(2+2i)=\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}-1-i=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Vamos escrever $-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i$ na forma trigonométrica.

$$\left|-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{18}{16}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Sendo θ um argumento de $-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i$, tem-se que $\operatorname{tg}\theta=\frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}}=1$ e $\theta\in 3.^{\circ}\,Q$, pelo que θ pode ser $\frac{\pi}{4}$.

Assim, $-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i=\frac{3\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

PÁG.103

Preparar o exame

21. $z_1=2i^{19}=2i^{4\times 4+3}=2i^3=2(-i)=-2i$

$$z_2=\frac{-3+i}{1+i}=\frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-3+3i+i+1}{1^2-i^2}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$$

Os números complexos z cujos afixos são equidistantes dos afixos de z_1 e de z_2 são os que verificam a condição:

$$|z-z_1|=|z-z_2| \iff |z-(-2i)|=|z-(-1+2i)| \iff |z+2i|=|z+1-2i|$$

$$w=-\sqrt{2}\,ke^{i\frac{3\pi}{4}}=-\sqrt{2}\,k\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\,k\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=k-ki$$

$$|w+2i|=|w+1-2i| \iff |k-ki+2i|=|k-ki+1-2i| \iff$$

$$\iff |k+(2-k)i|=|1+k+(-2-k)i| \iff \sqrt{k^2+(2-k)^2}=\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$$k^2+(2-k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2 \iff k^2+4-4k+k^2=1+2k+k^2+4+4k+k^2 \iff$$

$$\iff -4k=1+2k+4k \iff -10k=1 \iff k=-\frac{1}{10}$$

22. $(z+\bar{z})^2-(z-\bar{z})^2=16 \iff ((z+\bar{z})+(z-\bar{z}))\,((z+\bar{z})-(z-\bar{z}))=16 \iff$

$$\iff (z+\bar{z}+z-\bar{z})(z+\bar{z}-z+\bar{z})=16 \iff (z+z)(\bar{z}+\bar{z})=16 \iff$$

$$\iff (2z)(2\bar{z})=16 \iff 4|z|^2=16 \iff |z|^2=4$$

Opção correta: **(B)**

23. Para que z, $\frac{1}{z}$ e $z-1$ tenham imagens sobre a mesma circunferência de centro na origem do referencial, os seus módulos têm de ser iguais.

Seja $z=x+yi$.

$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$ e $z-1=x+yi-1=(x-1)+yi$.

Como $|z|=|z-1| \iff |x+yi|=|(x-1)+yi| \iff$

$$\iff \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$$x^2+y^2=(x-1)^2+y^2 \iff x^2=x^2-2x+1 \iff x=\frac{1}{2}$$

Como $|z|=\left|\frac{1}{z}\right| \iff \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$$x^2+y^2=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2 \iff x^2+y^2=\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \iff x^2+y^2=1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1 \iff y^2=\frac{3}{4} \iff y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ou} \quad z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

PÁG.104

Preparar o exame

24. $\operatorname{Re}(z)\times\operatorname{Im}(z)=1 \iff \operatorname{Im}(z)=\frac{1}{\operatorname{Re}(z)}$

O conjunto de afixos que verificam a condição são os afixos de números complexos cujas partes real e imaginária são inversamente proporcionais, ou seja, o conjunto de pontos é uma hipérbole.

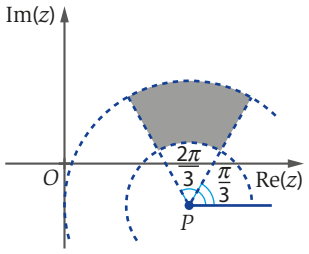
Além disso, estes afixos pertencem ao 1.° e 3.° quadrantes, pois os números complexos correspondentes têm as partes real e imaginária, ambas positivas, ou ambas negativas.

Opção correta: **(D)**

25. $\frac{3}{2}\leqslant|z-3+i|\leqslant 3\wedge\frac{\pi}{3}\leqslant\operatorname{Arg}(z-3+i)\leqslant\frac{2\pi}{3} \iff \frac{3}{2}\leqslant|z-(3-i)|\leqslant 3\wedge\frac{\pi}{3}\leqslant\operatorname{Arg}(z-(3-i))\leqslant\frac{2\pi}{3}$

Seja P o ponto que representa geometricamente o número complexo $3-i$.

A condição dada representa o conjunto de pontos do plano complexo que estão a uma distância do ponto P compreendida entre $\frac{3}{2}$ e 3 e definem com a semirreta paralela ao eixo real com origem no ponto P e que se prolonga no sentido positivo do eixo, um ângulo compreendido entre $\frac{\pi}{3}$ rad e $\frac{2\pi}{3}$ rad.



Opção correta: **(A)**

PÁG.105

Preparar o exame

26.1 O ponto B obtém-se do ponto A por uma rotação de centro na origem do referencial e amplitude $\frac{\pi}{2}$. É, portanto, o afixo de $(1+3i)\times i=-3+i$.

26.2 A circunferência de centro na origem que contém os pontos A e B tem raio $|1+3i|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

Vamos definir por uma condição a reta r: $|z-(1+3i)|=|z-(-3+i)| \iff |z-1-3i|=|z+3-i|$

A condição que define a região a sombreado da figura (incluindo a fronteira) é:

$|z|\leqslant\sqrt{10}\wedge|z-1-3i|\leqslant|z+3-i|$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

27. Vejamos qual dos números complexos tem a sua imagem geométrica na região definida pela condição $\text{Re}(-3-3i)=-3\ ,\ -3\notin\ ]-2\ ,\ 5]$, pelo que não pode ser a opção **(A)**.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$$

$|1+i-i|>|1+i-1+2i| \iff 1>|3i| \iff 1>3$ proposição falsa, pelo que não pode ser a opção **(B)**.

$|3-3i-i|>|3-3i-1+2i| \iff |3-4i|>|2-i| \iff$

$\iff \sqrt{9+16}>\sqrt{4+1} \iff 5>\sqrt{5}$ proposição verdadeira

$\text{Re}(3-3i)=3$ e $3\in\ ]-2\ ,\ 5]$.

Verifica ambas as condições.

Opção correta: **(C)**

28. Seja $z=x+yi$, $\text{Re}(z)=x$ e $\text{Im}(z)=y$.

$\text{Im}(z)+\text{Re}(z)=1 \iff y+x=1 \iff y=-x+1$ não é a equação da bissetriz dos quadrantes pares.

$\text{Im}(z)-\text{Re}(z)=0 \iff y-x=0 \iff y=x$ não é a equação da bissetriz dos quadrantes pares.

$\text{Arg}(z)=-\frac{\pi}{4}$ define a bissetriz do quarto quadrante.

$|z-i|=|z+1| \iff |z-i|=|z-(-1)|$ define a mediatriz do segmento de reta dos afixos dos números complexos i e -1 , que representa a bissetriz dos quadrantes pares.

Opção correta: **(B)**

29. A afirmação I é verdadeira, pois $\text{Arg}(z)=-\frac{3\pi}{4}$ define a bissetriz do terceiro quadrante.

$|z-i|=|z-1| \wedge \text{Re}(z)\leqslant 0$ define a mediatriz do segmento de reta dos afixos dos números complexos i e 1 , que representa a bissetriz dos quadrantes ímpares, mas que tem a parte real menor ou igual a zero, ou seja, a bissetriz do terceiro quadrante.

Opção correta: **(D)**

30. $z^2=\bar{z}^2 \iff (x+yi)^2=(x-yi)^2 \iff$

$\iff x^2+2xyi-y^2=x^2-2xyi-y^2 \iff 4xyi=0 \iff$

$\iff x=0 \vee y=0$

Ou

$z^2=\bar{z}^2 \iff \left(re^{i\theta}\right)^2=\left(re^{i(-\theta)}\right)^2 \iff$

$\iff r^2e^{i2\theta}=r^2e^{i(-2\theta)} \iff r^2=r^2 \wedge 2\theta=-2\theta+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff$

$\iff 4\theta=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff \theta=k\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$\theta\in\left\{0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}\right\}$

Opção correta: **(A)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA