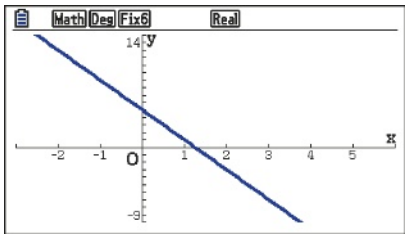
Funções I

PÁG. 15

Diagnóstico

1.1 $f(1) = -4 \times 1 + 5 = 1$

1.2 $f(x) = 6 \iff -4x + 5 = 6 \iff x = \dfrac{6-5}{-4} \iff x = -\dfrac{1}{4}$



1.3 $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = \mathbb{R}$;

Zeros: $f(x) = 0 \iff -4x + 5 = 0 \iff x = \dfrac{5}{4}$;

Sinal: f é positiva em $\left]-\infty, \dfrac{5}{4}\right[$ e negativa em $\left]\dfrac{5}{4}, +\infty\right[$;

Monotonia: f é decrescente;

Extremos: f não tem extremos.

2.1 $g(x) = 2x^2 - 4x + 3 = 2\left(x^2 - 2x\right) + 3 = 2\left((x-1)^2 - 1\right) + 3 =$

$= 2(x-1)^2 - 2 + 3 = 2(x-1)^2 + 1$

Logo, $V(1\,,\,1)$.

2.2 $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -8 < 0$

3.1 $h(x) = -5x^2 + 10x - 1{,}8 = -5\left(x^2 - 2x\right) - 1{,}8 = -5\left((x-1)^2 - 1\right) - 1{,}8 =$

$= -5(x-1)^2 + 5 - 1{,}8 = -5(x-1)^2 + 3{,}2$

Logo, a altura máxima atingida pelo golfinho foi $3{,}2$ metros.

3.2 $h(x) > 0 \iff -5x^2 + 10x - 1{,}8 > 0 \iff -x^2 + 2x - 0{,}36 > 0$

Cálculo auxiliar:

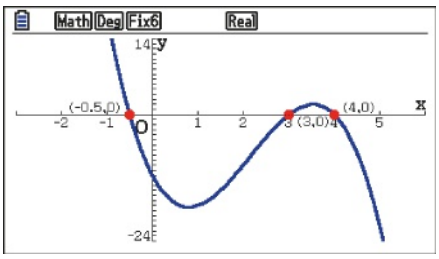
$$-x^2 + 2x - 0{,}36 = 0 \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times (-0{,}36)}}{2 \times (-1)} \iff$$

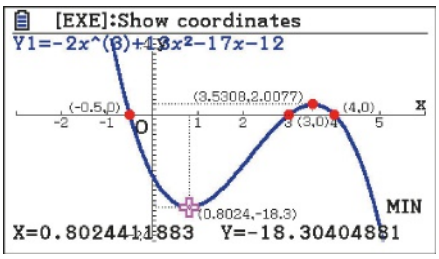
$$\iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{2{,}56}}{-2} \iff x = \frac{-2-1{,}6}{-2} \vee x = \frac{-2+1{,}6}{-2} \iff x = 1{,}8 \vee x = 0{,}2$$

O golfinho esteve acima da superfície da água durante $1{,}8 - 0{,}2 = 1{,}6$ segundos.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

4.





A função f tem os zeros $-\frac{1}{2}$, 3 e 4.

A interseção do gráfico de f com o eixo Oy é o ponto de coordenadas $(0, f(0))$, ou seja, $(0, -12)$.

A função f é positiva em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ e em $]3, 4[$, e é negativa em $\left]-\frac{1}{2}, 3\right[$ e em $]4, +\infty[$.

A função f tem um mínimo relativo igual a $-18{,}304$ em $x \approx 0{,}802$ e tem um máximo relativo igual a $2{,}008$ em $x \approx 3{,}531$.

A função f é decrescente em $]-\infty ; 0{,}802]$ e em $[3{,}531 ; +\infty[$, e é crescente em $[0{,}802 ; 3{,}531]$ (valores arredondados às milésimas).

Comportamento no infinito:

Quando $x \longrightarrow -\infty$, $f(x) \longrightarrow +\infty$, e quando $x \longrightarrow +\infty$, $f(x) \longrightarrow -\infty$.

5.1 A reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de f e a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x \longrightarrow \pm\infty$.

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ e $D'_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

5.2 $g(x) = -5 - \frac{2}{3x-1} = -5 - \frac{2}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} = -5 - \frac{\frac{2}{3}}{x-\frac{1}{3}}$

A reta de equação $x = \frac{1}{3}$ é assíntota vertical ao gráfico de g e a reta de equação $y = -5$ é assíntota horizontal ao gráfico de g, quando $x \longrightarrow \pm\infty$.

$D_g = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ e $D'_g = \mathbb{R}\setminus\{-5\}$.

5.3 $h(x) = \frac{3-8x}{x+7} = -8 + \frac{59}{x+7}$

A reta de equação $x = -7$ é assíntota vertical ao gráfico de h e a reta de equação $y = -8$ é assíntota horizontal ao gráfico de h, quando $x \longrightarrow \pm\infty$.

$D_h = \mathbb{R}\setminus\{-7\}$ e $D'_h = \mathbb{R}\setminus\{-8\}$.

PÁG. 18

Aplicar

1.1 $\sqrt{100} = 10$, porque $10^2 = 100$.

1.2 $\sqrt{81} = 9$, porque $9^2 = 81$.

1.3 $\sqrt{10\,000} = 100$, porque $100^2 = 10\,000$.

1.4 $\sqrt{0} = 0$, porque $0^2 = 0$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

1.5 $\sqrt{0,16}=0,4$, porque $0,4^2=0,16$.

1.6 $\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$, porque $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

1.7 $\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$, porque $3^2=9$.

1.8 $\sqrt{2^4}=\sqrt{16}=4$, porque $4^2=16$.

1.9 $\sqrt{0,01}=0,1$, porque $0,1^2=0,01$.

1.10 $\left(\sqrt{9}\right)^2=3^2=9$ ($\sqrt{9}=3$, porque $3^2=9$).

1.11 $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}$, $\sqrt{25}=5$, porque $5^2=25$.

1.12 $\sqrt{(-12)^2}=\sqrt{144}$, $\sqrt{144}=12$, porque $12^2=144$.

2.1 $A=25 \implies x=\sqrt{25}=5$

2.2 $A=0,81 \implies x=\sqrt{0,81}=0,9$

2.3 $A=49 \implies x=\sqrt{49}=7$

2.4 $A=\frac{25}{36} \implies x=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$

3. Como os vértices do quadrado menor são os pontos médios dos lados do quadrado maior, a área do quadrado menor é metade da área do quadrado maior, ou seja, a área do quadrado maior é $2\times 50=100\ \text{cm}^2$. Assim, o lado do quadrado maior mede $\sqrt{100}=10$ cm .

4.1 $\sqrt[3]{1}=1$, porque $1^3=1$.

4.2 $\sqrt[3]{-27}=-3$, porque $(-3)^3=-27$.

4.3 $\sqrt[3]{8}=2$, porque $2^3=8$.

4.4 $\sqrt[3]{(-20)^3}=-20$, porque, para todo o a real, $\sqrt[3]{a^3}=a$.

4.5 $\sqrt[3]{25^3}=25$, porque, para todo o a real, $\sqrt[3]{a^3}=a$.

4.6 $\sqrt[3]{-32^3}=\sqrt[3]{(-32)^3}=-32$, porque, para todo o a real, $\sqrt[3]{a^3}=a$.

4.7 $\sqrt[3]{(-1)^{12}}=\sqrt[3]{1}=1$, porque $1^3=1$.

4.8 $\sqrt[3]{-1^{12}}=\sqrt[3]{-1}=-1$, porque $(-1)^3=-1$.

5. $V=125\ \text{dm}^3 \implies a=\sqrt[3]{125}=5\ \text{dm} \implies A_{total}=6\times 5^2=150\ \text{dm}^2$

6. $V=4,5\times 16\times 24=1728\ \text{cm}^3 \implies a=\sqrt[3]{1728}=12\ \text{cm}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 19

Tarefa 1

1. $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$, porque $2^2=4$ e $(-2)^2=4$.

2. $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$, porque $0^2=0$.

3. $x^2=-4$ impossível, porque para todo o a real, $a^2 \geqslant 0$.

4. $x^3=8 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$, porque $2^3=8$.

5. $x^3=-8 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-8}=-2$, porque $(-2)^3=-8$.

6. $x^4=10\,000 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{10\,000} \Leftrightarrow x=-10 \vee x=10$, porque $10^4=10\,000$ e $(-10)^4=10\,000$.

7. $x^5=-100\,000 \Leftrightarrow x=\sqrt[5]{-100\,000}=-10$, porque $(-100\,000)^5=-10$.

PÁG. 20

Aplicar

7.1 $x^2=81 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{81} \Leftrightarrow x=-9 \vee x=9$, porque $9^2=81$ e $(-9)^2=81$.

7.2 $x^3=64 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{64}=4$, porque $4^3=64$.

7.3 $x^5=-243 \Leftrightarrow x=\sqrt[5]{-243}=-3$, porque $(-3)^5=-243$.

7.4 $x^8=0 \Leftrightarrow x=0$, porque $0^8=0$.

7.5 $x^4-625=0 \Leftrightarrow x^4=625 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{625} \Leftrightarrow x=-5 \vee x=5$, porque $5^4=625$ e $(-5)^4=625$.

7.6 $x^6+8=0 \Leftrightarrow x^6=-8$ impossível, porque qualquer potência de expoente par é positiva ou nula.

PÁG. 21

Aplicar

8.1 $3^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{3}$

8.2 $3^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{3^3}$

8.3 $9^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{9}$

8.4 $2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}$

8.5 $5^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^{-3}}$

8.6 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}}$

8.7 $9^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{9^{-1}}$

8.8 $7^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{7^{-4}}$

9.1 $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$

9.2 $\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$

9.3 $\sqrt[7]{4}=4^{\frac{1}{7}}$

9.4 $\sqrt[4]{2^2}=2^{\frac{2}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$

9.5 $\sqrt[6]{9}=9^{\frac{1}{6}}$

9.6 $\sqrt[6]{3^3}=3^{\frac{3}{6}}=3^{\frac{1}{2}}$

9.7 $\sqrt[9]{125}=125^{\frac{1}{9}}$

9.8 $\sqrt[3]{7^2}=7^{\frac{2}{3}}$

9.9 $\sqrt[4]{5^3}=5^{\frac{3}{4}}$

9.10 $\sqrt[9]{6^3}=6^{\frac{3}{9}}=6^{\frac{1}{3}}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

10.1 $\sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

10.2 $\sqrt[6]{3^3} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

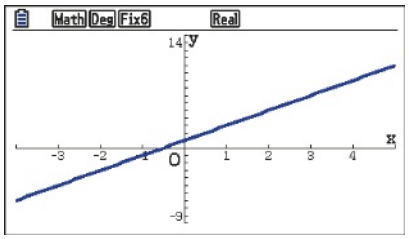
10.3 $\sqrt[9]{125} = \sqrt[9]{5^3} = 5^{\frac{3}{9}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

10.4 $\sqrt[9]{6^3} = 6^{\frac{3}{9}} = 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$

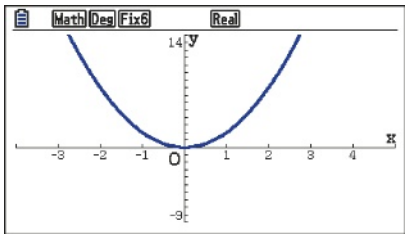
PÁG. 22

Tarefa 2

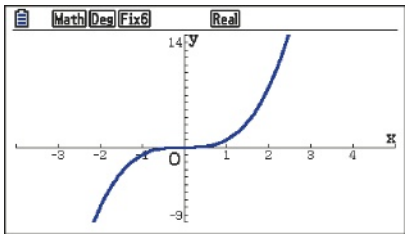
1. É invertível, porque qualquer reta horizontal interseta o seu gráfico, no máximo, num ponto.



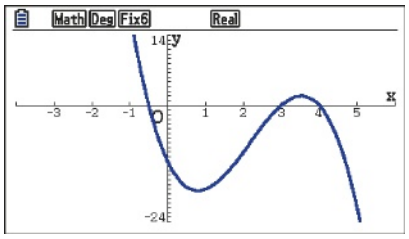
2. Não é invertível, porque existem retas horizontais que intersetam o seu gráfico em mais do que um ponto.



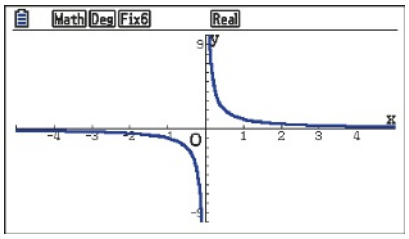
3. É invertível, porque qualquer reta horizontal interseta o seu gráfico, no máximo, num ponto.



4. Não é invertível, porque existem retas horizontais que intersetam o seu gráfico em mais do que um ponto.



5. É invertível, porque qualquer reta horizontal interseta o seu gráfico, no máximo, num ponto.



M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 23
Tarefa 3

Qualquer função desta família é invertível, pois qualquer reta horizontal interseta o seu gráfico, no máximo, num ponto.

PÁG. 24
Tarefa 4

1. $D_f = \mathbb{R}$. Sejam $x_1 , x_2 \in \mathbb{R}$, tais que $f(x_1) = f(x_2)$.

$f(x_1) = f(x_2) \implies 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \implies x_1 = x_2$

Logo, f é invertível.

2. $D_g = \mathbb{R}$. Sejam x_1 , $x_2 \in \mathbb{R}$, tais que $g(x_1) = g(x_2)$.

$g(x_1) = g(x_2) \implies {x_1}^3 = {x_2}^3$

Como 3 é ímpar, $x_1 = x_2$.

Logo, g é invertível.

3. $D_h = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sejam $x_1 , x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, tais que $h(x_1) = h(x_2)$.

$h(x_1) = h(x_2) \implies \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \implies x_1 = x_2$

Logo, h é invertível.

PÁG. 24
Tarefa 5

2. O simétrico de um ponto do gráfico de uma função invertível em relação à reta de equação $y = x$ pertence ao gráfico da sua inversa. Se o primeiro ponto tiver coordenadas (a , b) , o segundo tem coordenadas (b , a) .

O gráfico de uma função invertível e o da sua inversa são simétricos relativamente à reta de equação $y = x$.

PÁG. 27
Tarefa 6

1. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ e $D'_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

2. f é uma função racional com uma expressão analítica do tipo $a + \frac{b}{x - c}$, pelo que é invertível, dado que qualquer reta horizontal interseta o gráfico de f , no máximo, num ponto.

3. $2 + \frac{1}{x - 3} = y \iff \frac{1}{x - 3} = y - 2 \iff x - 3 = \frac{1}{y - 2} \iff x = 3 + \frac{1}{y - 2}$

$f^{-1}(x) = 3 + \frac{1}{x - 2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ e $D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

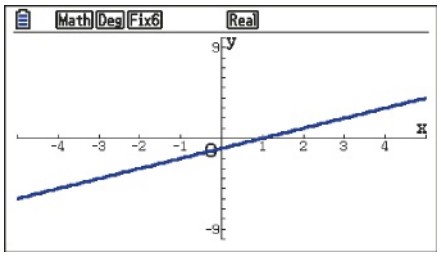
4. $D_f = D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ e $D'_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

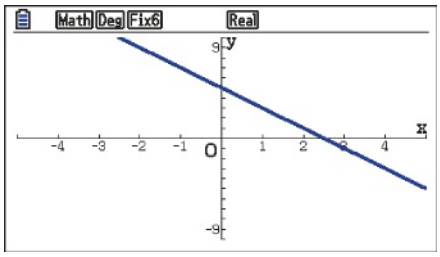
M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 28

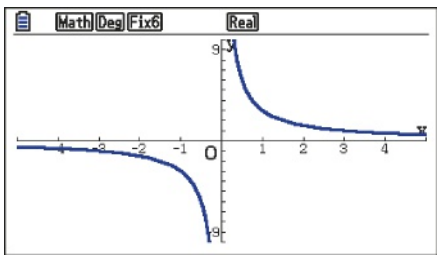
Aplicar

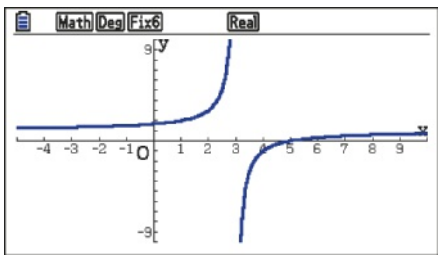
12. As funções f e g são afins não constantes, pelo que são invertíveis, dado que qualquer reta horizontal interseta cada um dos seus gráficos, no máximo, num ponto, neste caso, num único ponto.



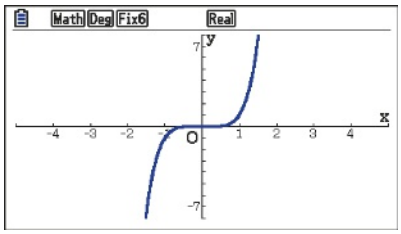


As funções i e j são funções racionais, com expressões analíticas da forma $a+\frac{b}{x-c}$, pelo que são invertíveis, dado que qualquer reta horizontal interseta cada um dos seus gráficos, no máximo, num ponto.

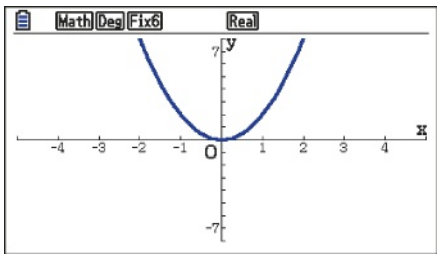


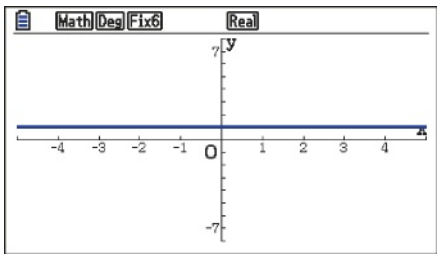


A função l é invertível, pois a sua expressão analítica é uma potência de expoente ímpar, pelo que qualquer reta horizontal interseta o seu gráfico, no máximo, num ponto, neste caso, num único ponto.



A função h não é invertível, pois, por exemplo, $h(1)=h(-1)=2$ e a função k não é invertível, pois, por exemplo, $k(1)=k(-1)=1$.





Pelo teste da reta horizontal, f, g, i, j e l são invertíveis, h e k não são.

12.1 $x-1=y \iff x=y+1$

$f^{-1}(x)=x+1$; $D_{f^{-1}}=D'_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

12.2 $5-2x=y \iff x=\frac{y-5}{-2}$

$g^{-1}(x)=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x$; $D_{g^{-1}}=D'_{g^{-1}}=\mathbb{R}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

12.4 $\frac{3}{x}=y \iff x=\frac{3}{y}$

$i^{-1}(x)=\frac{3}{x}$; $D_{i^{-1}}=D'_{i^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

12.5 $1-\frac{2}{x-3}=y \iff \frac{2}{x-3}=1-y \iff x-3=\frac{2}{1-y} \iff x=3-\frac{2}{y-1}$

$j^{-1}(x)=3-\frac{2}{x-1}$, $D_{j^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ e $D'_{j^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

12.7 $x^5=y \iff x=\sqrt[5]{y}$

$l^{-1}(x)=\sqrt[5]{x}$; $D_{l^{-1}}=D'_{l^{-1}}=\mathbb{R}$

PÁG. 29

Aplicar

14. O gráfico de uma função invertível e o gráfico da sua função inversa são simétricos relativamente à reta de equação $y=x$.

Opção correta: **(B)**

15. O ponto de coordenadas $(6\,,\,2)$ pertence o gráfico de f : $f(6)=2$

Como $f+g$ é invertível e $(f+g)^{-1}(2)=6$, então

$(f+g)(6)=2 \iff f(6)+g(6)=2 \iff 2+g(6)=2 \iff g(6)=0$, pelo que o gráfico de g interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 6 . Como g é invertível, não pode existir outro objeto cuja imagem por meio da função g seja 0 , pelo que o gráfico de g interseta o eixo Ox exatamente uma vez.

PÁG. 32

Aplicar

17.1 $(g\circ f)\left(\frac{3}{2}\right)=g\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)=g\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2+1\right)=g\left(\frac{13}{4}\right)=\frac{13}{4}-2=\frac{5}{4}$

$(f\circ g)\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right)=f\left(\frac{3}{2}-2\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{5}{4}$

17.2 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+1)=x^2+1-2=x^2-1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-2)=(x-2)^2+1=x^2-4x+5$

Como $(g\circ f)(x)\neq(f\circ g)(x)$, f e g não são permutáveis.

PÁG. 33

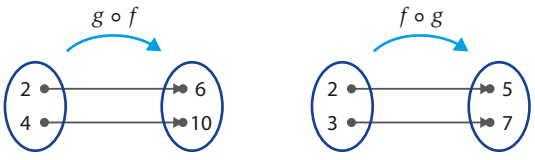
Aplicar

18.1 $D_f=\{2\,,\,4\,,\,6\}$, $D'_f=\{3\,,\,5\,,\,7\}$, $D_g=\{2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\}$ e $D'_g=\{4\,,\,6\,,\,8\,,\,10\}$.

18.2 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=6$; $(g\circ f)(6)=g(f(6))=g(7)$ não é possível calcular, pois $7\notin D_g$;

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(6)=7$.

18.3



M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

18.4 $D_{f\circ g}=\{x\in\{2,3,4,5\}:g(x)\in\{2,4,6\}\}=\{2,3\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\{2,4,6\}:f(x)\in\{2,3,4,5\}\}=\{2,4\}$

19. $(g\circ f)(x)=2 \Leftrightarrow g(f(x))=2 \Leftrightarrow f(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-x}{x^2+2}\geqslant 0 \underset{x^2+2>0}{\Leftrightarrow} 2-x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 2 \Leftrightarrow x\in]-\infty,2]$

Opção correta: **(C)**

20.1 Falso; $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(2)=1$

20.2 $D_{g\circ f}=\{x\in]-2,+\infty[:f(x)\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\}=]-2,0[$

PÁG. 39

Diagnóstico

1.1 $(-2)^5=-32$

1.2 $(-3)^2=9$

1.3 $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

1.4 $(-1)^{88}=1$

1.5 $-3^2=-9$

1.6 $\left(-\dfrac{1}{10}\right)^3=-\dfrac{1}{1000}$

1.7 $(-1)^{11}=-1$

1.8 $(-33)^1=-33$

1.9 $(-0,1)^2=0,01$

2.1 $(-0,9)^0=1$

2.2 $6^{-2}=\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$

2.3 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}=5^3=125$

2.4 $(-2)^{-3}=\dfrac{1}{(-2)^3}=-\dfrac{1}{8}$

2.5 $-3^{-2}=-\dfrac{1}{3^2}=-\dfrac{1}{9}$

2.6 $\left(-\dfrac{1}{10}\right)^{-3}=(-10)^3=-1000$

2.7 $(-0,5)^{-4}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-4}=(-2)^4=16$

2.8 $(-10)^{-5}=\dfrac{1}{(-10)^5}=-\dfrac{1}{100\,000}$

2.9 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$

3.1 $\dfrac{1}{2}=2^{-1}$

3.2 $\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2^2}=2^{-2}$

3.3 $\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2^3}=2^{-3}$

3.4 $4^{-3}=(2^2)^{-3}=2^{-6}$

4.1 $(-3)^4\times(-3)^3=(-3)^{4+3}=(-3)^7$

4.2 $(-5)^3\times 4^3=(-5\times 4)^3=(-20)^3$

4.3 $\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3\right)^2=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{3\times 2}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^6=\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$

4.4 $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5:\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{5-2}=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

4.5 $(-16)^4 : 8^4 = (-16 \div 8)^4 = (-2)^4 = 2^4$

4.6 $2^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(2 \times \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\right)^2 = 2^2$

4.7 $\left(-\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{5+2} = \left(-\frac{3}{4}\right)^7$

4.8 $(-2)^5 \times 3^5 = (-2 \times 3)^5 = (-6)^5$

4.9 $3^2 \times 9 = 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2} = 3^4$ ou $3^2 \times 9 = 3^2 \times 3^2 = (3 \times 3)^2 = 9^2 = (3^2)^2 = 3^{2\times 2} = 3^4$

4.10 $(-2)^{4^2} = (-2)^{16} = 2^{16}$

4.11 $\left((-2)^4\right)^2 = (-2)^{4\times 2} = (-2)^8 = 2^8$

4.12 $\frac{5^3}{3^3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$

4.13 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{11} : \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

4.14 $\frac{(-6)^4}{3^4} \times (-4)^4 = \left(\frac{-6}{3} \times (-4)\right)^4 = 8^4 = (2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12}$

4.15 $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^4\right)^5 \times \frac{2}{3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{4\times 5} \times \frac{2}{3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{20} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{20} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{20+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{21}$

PÁG. 40

Diagnóstico

5.1 $4^5 \times 4^{-3} = 4^{5-3} = 4^2 = (2^2)^2 = 2^4$

5.2 $6^{-5} : 2^{-5} = (6:2)^{-5} = 3^{-5}$

5.3 $(-3)^4 \times 3^3 = 3^4 \times 3^3 = 3^{4+3} = 3^7$

5.4 $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 : \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{5+2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^7$

5.5 $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right) \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^{1+3} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$

Ou

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$

5.6 $(-2)^4 \times 2^{-7} = 2^4 \times 2^{-7} = 2^{4-7} = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

5.7 $\frac{(-5)^2 \times 3^2}{15^3} = \frac{(-5\times 3)^2}{15^3} = \frac{(-15)^2}{15^3} = \frac{15^2}{15^3} = 15^{2-3} = 15^{-1}$

5.8 $\frac{2^6 : 2^{-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{2^{6+3}}{2^{-4}} = 2^{9+4} = 2^{13}$

5.9 $\frac{(-5)^3 \times 4^3}{20^6} = \frac{(-5\times 4)^3}{20^6} = \frac{(-20)^3}{(-20)^6} = (-20)^{3-6} = (-20)^{-3}$

5.10 $(-16)^4 \times 2^5 = 16^4 \times 2^5 = (2^4)^4 \times 2^5 = 2^{4\times 4} \times 2^5 = 2^{16} \times 2^5 = 2^{16+5} = 2^{21}$

5.11 $(-2)^5 \times 4^3 = (-2)^5 \times (2^2)^3 = (-2)^5 \times 2^{2\times 3} = (-2)^5 \times 2^6 = (-2)^5 \times (-2)^6 = (-2)^{5+6} = (-2)^{11}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

5.12 $(3^2)^{-1}\times 3^4 = 3^{-2}\times 3^4 = 3^{-2+4} = 3^2$

5.13 $(-2^3)^2\times 8^{-1} = (-8)^2\times 8^{-1} = 8^2\times 8^{-1} = 8^{2-1} = 8 = 2^3$

5.14 $(-3)^7 : (-3)^3\times 2^4 = (-3)^{7-3}\times 2^4 = (-3)^4\times 2^4 = (-3\times 2)^4 = (-6)^4 = 6^4$

5.15 $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3\times(-2)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6} = (-2)^6 = 2^6$

5.16 $2^{-2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

5.17 $\frac{3^2\times 9}{3^{-4}} = \frac{3^2\times 3^2}{3^{-4}} = 3^{2+2+4} = 3^8$

5.18 $\frac{3^{-2}\times 3^5}{3^6} = 3^{-2+5-6} = 3^{-3}$

6.1 $5^2+5 = 25+5 = 30$

6.2 $4^3-4^2 = 64-16 = 48$

6.3 $3^2-4^2 = 9-16 = -7$

6.4 $3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 9+\frac{1}{4} = \frac{37}{4}$

6.5 $\frac{5^2-3^2}{2^4} = \frac{25-9}{16} = \frac{16}{16} = 1$

6.6 $(-2)^3\times(-2)^5-2^8 = (-2)^{3+5}-2^8 = (-2)^8-2^8 = 2^8-2^8 = 0$

6.7 $3^{12}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10}-2^{-1} = 3^{12}\times 3^{-10}-2^{-1} = 3^{12-10}-2^{-1} = 3^2-2^{-1} = 9-\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$

6.8 $2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2-\frac{1}{4}-\frac{9}{4} = -\frac{1}{2}$

6.9 $\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2 = \frac{9}{4}+9 = \frac{45}{4}$

6.10 $\frac{1}{4}+(-2)^{-10}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\times 4^3 = \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times(2^2)^3 = \frac{1}{4}+2^{-10}\times 2^{2\times 3} =$

$= \frac{1}{4}+2^{-10}\times 2^6 = \frac{1}{4}+2^{-10+6} = \frac{1}{4}+2^{-4} = \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

PÁG. 41

Diagnóstico

7.1 $f(x)=0 \iff x\in\{-4,0,4\}$ e $g(x)=0 \iff x\in[-2,-1]\cup\{2,4\}$

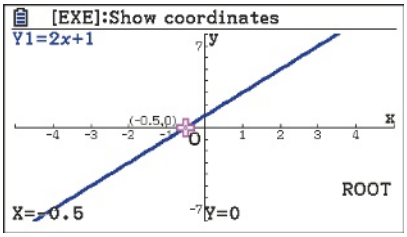
7.2

x	-6		-4		0		4		5
$f(x)$	-2	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	N.D.

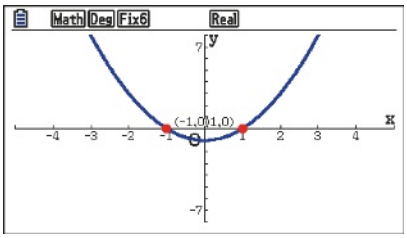
x	-3		-2		-1		2		4		5
$g(x)$	N.D.	$-$	0	0	0	$+$	0	$-$	0	$+$	2

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

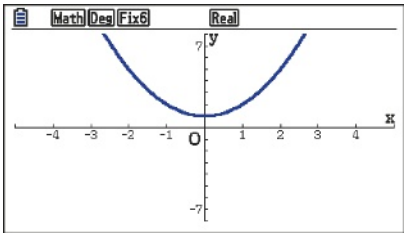
8.1 $f(x)=0 \iff 2x+1=0 \iff x=-\frac{1}{2}$



8.2 $g(x)=0 \iff x^2-1=0 \iff x^2=1 \iff x=-1 \vee x=1$



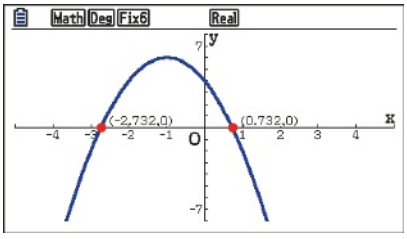
8.3 $h(x)=0 \iff x^2+1=0 \iff x^2=-1$ impossível



8.4 $i(x)=0 \iff -2x^2-4x+4=0 \iff x^2+2x-2=0 \iff$

$$\iff x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times(-2)}}{2} \iff x=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2} \iff$$

$$\iff x=\frac{-2-2\sqrt{3}}{2} \vee x=\frac{-2+2\sqrt{3}}{2} \iff x=-1-\sqrt{3} \vee x=-1+\sqrt{3}$$



9. f é negativa em $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ e positiva em $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$;

g é positiva em $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ e negativa em $]-1,1[$;

h é positiva em $\mathbb{R}$;

i é negativa em $]-\infty,-1-\sqrt{3}[\cup]-1+\sqrt{3},+\infty[$ e positiva em $]-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}[$.

10.1 Não.

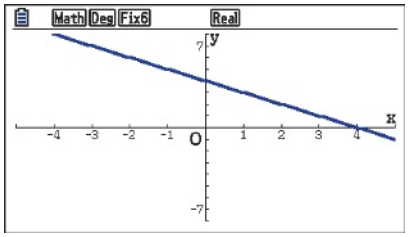
M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

10.2

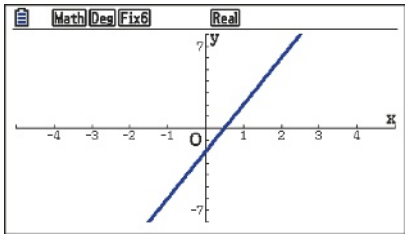
x	-3		-2		0		2		3		4		6
Monotonia de f	-2	↗	0	↘	-2	↗	2	↘	0	↗	1	↘	-1

f é crescente em $[-3, -2]$, $[0, 2]$ e $[3, 4]$; f é decrescente em $[-2, 0]$, $[2, 3]$ e $[4, 6]$.

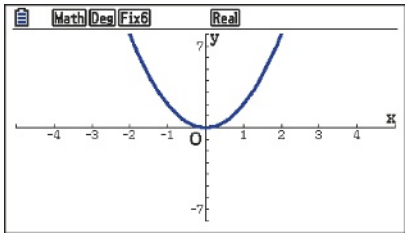
11.1 f é decrescente em $\mathbb{R}$.



11.2 g é crescente em $\mathbb{R}$.



11.3 h é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.



PÁG. 42

Tarefa 7

1. $10 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 810$

2. $10 \times 3^5 = 2430$; $10 \times 3^6 = 7290$; 6 horas

3. 10×3^t, $t \geqslant 0$

PÁG. 44

Tarefa 8

3. Para $a > 1$, $D_f = \mathbb{R}$, $D'_f = \mathbb{R}^+$, f é crescente em $\mathbb{R}$.

$f(x) \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow -\infty$ e $f(x) \longrightarrow +\infty$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

Para $0 < a < 1$, $D_f = \mathbb{R}$, $D'_f = \mathbb{R}^+$, f é decrescente em $\mathbb{R}$.

$f(x) \longrightarrow +\infty$ quando $x \longrightarrow -\infty$ e $f(x) \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

4.1 Para $a=2$, o gráfico de f não interseta o eixo Ox e interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

4.2 Para $a=\frac{1}{2}$, o gráfico de f não interseta o eixo Ox e interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

PÁG. 45

Aplicar

21.2

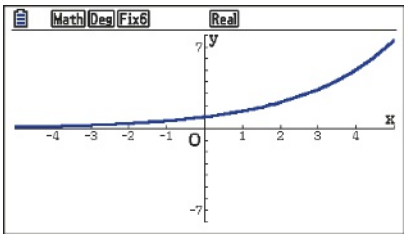
a. $f(x)=2^{10} \Leftrightarrow 2^x=2^{10} \Leftrightarrow x=10$

b. $f(x)=8 \Leftrightarrow 2^x=2^3 \Leftrightarrow x=3$

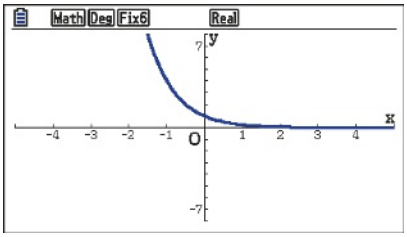
c. $f(x)=\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 2^x=2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

21.3 $(0, 1)$

23.1 $D'_f=\mathbb{R}^+$; f é crescente em $\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; o gráfico de f não interseta o eixo Ox e interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.



23.2 $D'_g=\mathbb{R}^+$; g é decrescente em $\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$; o gráfico de g não interseta o eixo Ox e interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.



PÁG. 46

Aplicar

24.1 $0<2-3a<1 \Leftrightarrow a\in\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$

24.2 $h(x)=7^x$

a. $h(x)=\frac{1}{49} \Leftrightarrow 7^x=\frac{1}{49} \Leftrightarrow 7^x=7^{-2} \Leftrightarrow x=-2$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

25.1 $\dfrac{4^{-2}\times 2^2}{2^5}=\dfrac{2^{-4}\times 2^2}{2^5}=2^{-4+2-5}=2^{-7}$

25.2 $3^{-2}\times 12\times 3^3=3^{-2}\times 3\times 2^2\times 3^3=3^{-2+1+3}\times 2^2=3^2\times 2^2=(3\times 2)^2=6^2$

25.3 $49\sqrt{7}=7^2\times 7^{\frac{1}{2}}=7^{2+\frac{1}{2}}=7^{\frac{5}{2}}$

25.4 $\sqrt{6^{-3}}\times 6^{\frac{1}{2}}:6^{\frac{1}{4}}=6^{-\frac{3}{2}}\times 6^{\frac{1}{2}}:6^{\frac{1}{4}}=6^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=6^{-\frac{5}{4}}$

25.5 $5^{-3}\times \pi^0\times \sqrt[3]{25}=5^{-3}\times 1\times 5^{\frac{2}{3}}=5^{-3+\frac{2}{3}}=5^{-\frac{7}{3}}$

25.6 $\dfrac{\pi^{\pi}\times 2^{\pi}}{3^{2\pi}}=\dfrac{(\pi\times 2)^{\pi}}{(3^2)^{\pi}}=\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)^{\pi}=\left(\dfrac{9}{2\pi}\right)^{-\pi}$

25.7 $\sqrt{3}\times 5^{\frac{1}{2}}:\sqrt[4]{49}=3^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{2}}:7^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{3\times 5}{7}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{15}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$

25.8 $\left(\sqrt{5}\right)^3\times 5\times\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^{-15}=5^{\frac{3}{2}}\times 5\times 2^{-\frac{15}{6}}=5^{\frac{3}{2}+1}\times 2^{-\frac{15}{6}}=5^{\frac{5}{2}}\times 2^{-\frac{5}{2}}=$

$=5^{\frac{5}{2}}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}=\left(5\times\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

26. $2^{3+3x}=2^{3(1+x)}=\left(2^{1+x}\right)^3=3^3=27$

Opção correta: **(D)**

27. $3^{\frac{x}{2}+1}=3\sqrt{3}\iff 3^{\frac{x}{2}}\times 3=3\times 3^{\frac{1}{2}}\iff \dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\iff x=1$

Opção correta: **(B)**

28.1

(A) $f(2)=4^2=16\neq 8$

(B) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}\neq -2$

(C) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4^{\frac{1}{2}}=2$

Opção correta: **(C)**

28.2 $f(x)=16^{x^2-\frac{1}{2}}\iff 4^x=16^{x^2-\frac{1}{2}}\iff 4^x=4^{2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}\iff x=2\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)\iff 2x^2-x-1=0\iff$

$\iff x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2}\iff x=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{4}\iff x=\dfrac{1-3}{4}\vee x=\dfrac{1+3}{4}\iff x=-\dfrac{1}{2}\vee x=1$

$\left\{-\dfrac{1}{2},1\right\}$

28.3 $A(0,1)$

$f(x)=8\iff 4^x=8\iff 2^{2x}=2^3\iff 2x=3\iff x=\dfrac{3}{2}\ ;\ C\left(\dfrac{3}{2},8\right)$

$B(3,1)$

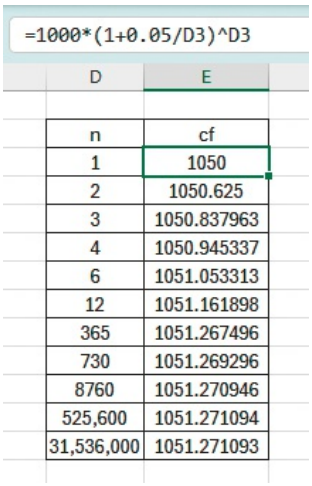
$A_{[ABC]}=\dfrac{\overline{AB}\times|y_C-y_A|}{2}=\dfrac{3\times 7}{2}=\dfrac{21}{2}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 48

Tarefa 9

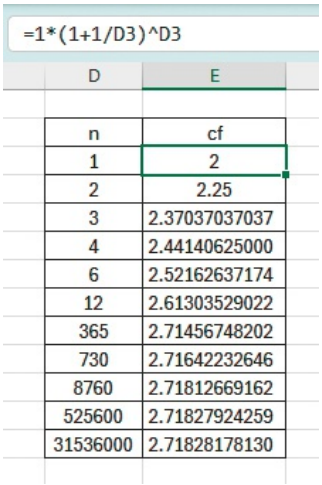
1.1



n	cf
1	1050
2	1050.625
3	1050.837963
4	1050.945337
6	1051.053313
12	1051.161898
365	1051.267496
730	1051.269296
8760	1051.270946
525,600	1051.271094
31,536,000	1051.271093

1.2 C_f é crescente, mas parece estabilizar, em cerca de $1051{,}27$ euros.

2.



n	cf
1	2
2	2.25
3	2.37037037037
4	2.44140625000
6	2.52162637174
12	2.61303529022
365	2.71456748202
730	2.71642232646
8760	2.71812669162
525600	2.71827924259
31536000	2.71828178130

O capital final, ainda que aumente, vai estabilizando. De facto, nunca atinge nem ultrapassa um certo valor, que se situa entre 2 e 3.

PÁG. 52

Aplicar

31.1 $f(x)=\frac{1}{e^2} \iff e^x=e^{-2} \iff x=-2$

Opção correta: **(A)**

31.2 $(f(x))^2=\sqrt{e^3} \iff (e^x)^2=e^{\frac{3}{2}} \iff 2x=\frac{3}{2} \iff x=\frac{3}{4}$

31.3 $A(0\,,f(0))$, logo, $A(0\,,1)$.

$f(x)=e \iff e^x=e \iff x=1$, logo, $C(1\,,e)$.

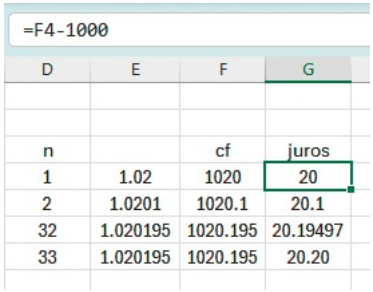
$D(0\,,e)$

$A_{[ABCD]}=\overline{AD}\times\overline{DC}=(e-1)\times(1-0)=e-1$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

32.1 $1000\times\left(1+\frac{0{,}02}{12}\right)^{12}\approx 1020{,}18$ euros

32.2 $1000\times\left(1+\frac{0{,}02}{n}\right)^{n}=1020{,}20 \iff \left(1+\frac{0{,}02}{n}\right)^{n}=1{,}02020$



33 capitalizações

33. $260{,}15=C_i\times(1+0{,}01)^4 \iff C_i=\frac{260{,}15}{(1{,}01)^4} \iff C_i\approx 250$ euros

34. $5862{,}72=5000\times(1+r)^7 \iff (1+r)^7=\frac{5862{,}72}{5000} \iff$

$\iff 1+r=\sqrt[7]{1{,}172544} \iff 1+r\approx 1{,}023 \iff r\approx 0{,}023 \iff r\approx 2{,}3\%$

35. Considerando a taxa de juro máxima de 100% e capitalização contínua, ou seja, com o número de capitalizações a tender para infinito, obter-se-ia $2000\times e\approx 5436{,}56$ euros.

PÁG. 53

Tarefa 10

3.

Se $|b|>1$, o gráfico da função definida por $y=b\times a^x$ é a imagem do gráfico da função definida por $y=a^x$ pela dilatação vertical de fator $|b|$.

Se $|b|<1$, o gráfico da função definida por $y=b\times a^x$ é a imagem do gráfico da função definida por $y=a^x$ pela contração vertical de fator $|b|$.

Se $b<0$, além da contração/dilatação, o gráfico sofre uma reflexão em relação eixo Ox.

O gráfico da função definida por $y=b\times a^{x-c}$ é a imagem do gráfico da função definida por $y=b\times a^x$ pela translação horizontal de vetor de coordenadas $(c\,,0)$.

O gráfico da função definida por $y=b\times a^{x-c}+d$ é a imagem do gráfico da função definida por $y=b\times a^{x-c}$ pela translação vertical de vetor de coordenadas $(0\,,d)$.

As duas transformações anteriores podem ser expressas desta forma: o gráfico de f é a imagem do gráfico da função definida por $y=b\times a^x$ por uma translação de vetor de coordenadas $(c\,,d)$.

4.

$D'_f=]-1\,,+\infty[$

Interseção com Oy: $(0\,,5)$

Interseção com Ox: $(-2{,}585\,;0)$ (abcissa arredondada às milésimas)

$f(x)\longrightarrow -1$ quando $x\longrightarrow -\infty$ e $f(x)\longrightarrow +\infty$ quando $x\longrightarrow +\infty$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$D'_g =]-\infty , 1[$

Interseção com Oy : $\left(0 , -\frac{1}{2}\right)$

Interseção com Ox : $(0{,}585 ; 0)$ (abcissa arredondada às milésimas)

$g(x) \longrightarrow 1$ quando $x \longrightarrow -\infty$ e $g(x) \longrightarrow -\infty$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

5.

$D'_h =]-\infty , 3[$

Interseção com Oy : $(0 , -15)$

Interseção com Ox : $(1{,}631 ; 0)$ (abcissa arredondada às milésimas)

$h(x) \longrightarrow -\infty$ quando $x \longrightarrow -\infty$ e $h(x) \longrightarrow 3$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

PÁG. 56

Aplicar

36.2

a. $f(x) = 8 \Leftrightarrow 2^{3x+2} = 8 \Leftrightarrow 2^{3x+2} = 2^3 \Leftrightarrow 3x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

b. $f(x) = 2^{10} \Leftrightarrow 2^{3x+2} = 2^{10} \Leftrightarrow 3x + 2 = 10 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$

c. $f(x) = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 2^{3x+2} = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 2^{3x+2} = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 3x + 2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{9}$

36.3 $f(0) = 2^2 = 4$; $(0 , 4)$

37.1 $D'_g =]-2 , +\infty[$

PÁG. 57

Aplicar

37.2 $g(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - 2 = 6$; $(0 , 6)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 2 \Leftrightarrow 2^{3-x} = 2 \Leftrightarrow 3 - x = 1 \Leftrightarrow x = 2$; $(2 , 0)$

37.3 $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -2$

38.1 $h(3) = 1 \Leftrightarrow -a^{3-2} + 5 = 1 \Leftrightarrow a = 4$

38.2

a.

(A) Falsa, pois h é decrescente.

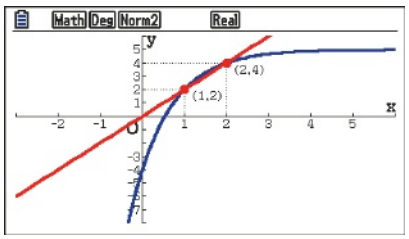
(B) Falsa, pois $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

(D) Falsa, pois $D'_h =]-\infty , 5[$.

Opção correta: **(C)**

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

b. $h(x) = 2x$

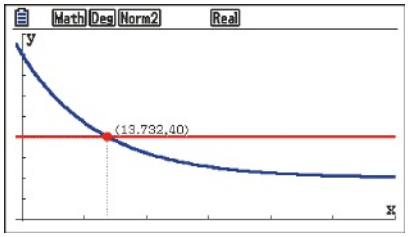


1 e 2 .

39.1 $T(0) = 20 + 60 = 80\ ^\circ C$

39.2 $T(5) = 20 + 60e^{-0,08 \times 5} \approx 60\ ^\circ C$

39.3 $T(t) = 40$



$0,73 \times 60 = 43,8$; 13 minutos e 44 segundos.

39.4 $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = 20$; 20 °C

PÁG. 58

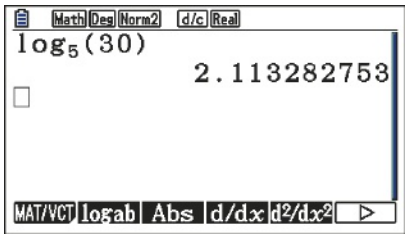
Tarefa 11

2. À reta de equação $y = x$.

4. $\mathbb{R}^+$

PÁG. 60

Tarefa 12



Como $5^2 = 25$ e $5^3 = 125$, não existe nenhum número inteiro n tal que $5^n = 30$ (porque a função definida por $f(x) = 5^x$ é crescente).

PÁG. 64

Aplicar

44.1 $f(x) = 3^x$, $D_f = \mathbb{R}$, $D'_f = \mathbb{R}^+$

$y = 3^x \iff \log_3 y = \log_3 3^x \iff \log_3 y = x$

$f^{-1}(x) = \log_3 x$; $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$; $D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

44.2 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $D_g=\mathbb{R}$, $D'_g=\mathbb{R}^+$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} y=x$

$g^{-1}(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$; $D_{g^{-1}}=\mathbb{R}^+$; $D'_{g^{-1}}=\mathbb{R}$

44.3 $h(x)=10^x$, $D_h=\mathbb{R}$, $D'_h=\mathbb{R}^+$

$y=10^x \Leftrightarrow \log_{10} y=\log_{10} 10^x \Leftrightarrow \log_{10} y=x \Leftrightarrow \log y=x$

$h^{-1}(x)=\log x$; $D_{h^{-1}}=\mathbb{R}^+$; $D'_{h^{-1}}=\mathbb{R}$

44.4 $i(x)=e^x$, $D_i=\mathbb{R}$, $D'_i=\mathbb{R}^+$

$y=e^x \Leftrightarrow \log_e y=\log_e e^x \Leftrightarrow \ln y=\ln e^x \Leftrightarrow \ln y=x$

$i^{-1}(x)=\ln x$; $D_{i^{-1}}=\mathbb{R}^+$; $D'_{i^{-1}}=\mathbb{R}$

45.1 $f(x)=\log_8 x$, $D_f=\mathbb{R}^+$, $D'_f=\mathbb{R}$

$y=\log_8 x \Leftrightarrow 8^y=8^{\log_8 x} \Leftrightarrow 8^y=x$

$f^{-1}(x)=8^x$; $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$; $D'_{f^{-1}}=\mathbb{R}^+$

45.2 $g(x)=\log_{\frac{2}{3}} x$, $D_g=\mathbb{R}^+$, $D'_g=\mathbb{R}$

$y=\log_{\frac{2}{3}} x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^y=x$

$g^{-1}(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$; $D_{g^{-1}}=\mathbb{R}$; $D'_{g^{-1}}=\mathbb{R}^+$

45.3 $h(x)=\log_{e^2} x$, $D_h=\mathbb{R}^+$, $D'_h=\mathbb{R}$

$y=\log_{e^2} x \Leftrightarrow \left(e^2\right)^y=\left(e^2\right)^{\log_{e^2} x} \Leftrightarrow e^{2y}=x$

$h^{-1}(x)=e^{2x}$; $D_{h^{-1}}=\mathbb{R}$; $D'_{h^{-1}}=\mathbb{R}^+$

45.4 $i(x)=2\log_4 x$, $D_i=\mathbb{R}^+$, $D'_i=\mathbb{R}$

$y=2\log_4 x \Leftrightarrow \frac{y}{2}=\log_4 x \Leftrightarrow 4^{\frac{y}{2}}=4^{\log_4 x} \Leftrightarrow \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^y=x \Leftrightarrow 2^y=x$

$i^{-1}(x)=2^x$; $D_{i^{-1}}=\mathbb{R}$; $D'_{i^{-1}}=\mathbb{R}^+$

46.1 $\log_2 32=\log_2 2^5=5$

46.2 $4^{2\log_4 3}=4^{\log_4 3^2}=3^2=9$

46.3 $\log_{\sqrt{5}}\left(\log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}\right)\right)=\log_{\sqrt{5}}(1)=0$

46.4 $\log(\log 10)=\log 1=0$

46.5 $\log_{0,1} 0{,}01=\log_{0,1} 0{,}1^2=2$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

46.6 $\log_9(3\sqrt{3}) = \log_9 3^{\frac{3}{2}} = \log_9\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} = \log_9 9^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$

46.7 $e^{\ln 5} + \ln e^3 = 5 + 3 = 8$

46.8 $\log 100 + \log 1000 = 2 + 3 = 5$

46.9 $7^{3+\log_3 27} = 7^3 \times 7^{\log_3 3^3} = 7^3 \times 7^3 = 7^{3+3} = 7^6$

46.10 $\log_2\left(8 \times 2^{-6}\right) = \log_2\left(2^3 \times 2^{-6}\right) = \log_2 2^{-3} = -3$

47.

(A) $f(9) = \log_9 9 = 1 \neq 0$

(B) $f\left(\frac{1}{9}\right) = \log_9 \frac{1}{9} = \log_9 9^{-1} = -1 \neq -2$

(C) $f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_9 \frac{1}{3} = \log_9 3^{-1} = \log_9 9^{-2} = -2$

(D) $f(3) = \log_9 3 = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \neq 2$

Opção correta: **(C)**

48.1 $\log_5 2 + \log_5 3 = \log_5(2 \times 3) = \log_5 6$

48.2 $\log_3 4 + \log_3 2 = \log_3(4 \times 2) = \log_3 8$

48.3 $2\log_3 9 = \log_3 9^2 = \log_3 81$

48.4 $1 + \log_3 5 = \log_3 3 + \log_3 5 = \log_3(3 \times 5) = \log_3 15$

48.5 $\frac{\ln 3}{4} + \ln 3 = \frac{5}{4}\ln 3 = \ln 3^{\frac{5}{4}} = \ln \sqrt[4]{3^5} = \ln\left(3\sqrt[4]{3}\right)$

49.1 $10^{\log x} + 10^{3\log x} = 10^{\log x} + 10^{\log x^3} = x + x^3$

49.2 $10^{x\log(\log 10)} = 10^{x\log 1} = 10^0 = 1$

49.3 $e^{3+\ln x} - e^{3-\ln x} = e^3\left(e^{\ln x} - e^{-\ln x}\right) = e^3\left(x - x^{-1}\right) = e^3 x - \frac{e^3}{x}$

49.4 $\ln\left(\left(e^{2+x}\right)^x\right) - \ln\left(e^{x^2}\right) = \ln\frac{\left(e^{2+x}\right)^x}{e^{x^2}} = \ln e^{2x+x^2-x^2} = \ln e^{2x} = 2x$

50. $\log_4\left(\frac{64 \times \sqrt[3]{0{,}25}}{\sqrt{2}}\right) = \log_4\left(\frac{4^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right) = \log_4\left(\frac{4^3 \times 4^{-\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{4}}}\right) = \log_4\left(4^{3-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\right) = \log_4 4^{\frac{29}{12}} = \frac{29}{12}$

51.1 $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) + \log_3\left(\sqrt{729}\right) = \log_3 3^{-2} + \log_3 3^{\frac{6}{2}} = \log_3 3^{-2} + \log_3 3^3 =$

$= \log_3\left(3^{-2} \times 3^3\right) = \log_3 3 = 1$

51.2 $\ln\left(e^{-2} \times e^6\right) - \log_3 81 = \ln e^4 - \log_3 3^4 = 4 - 4 = 0$

51.3 $2^{\log_2 3} + \log_5 25 - 2\log_3 3 = 3 + \log_5 5^2 - \log_3 3^2 = 3 + 2 - 2 = 3$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 65

Tarefa 13

3. Para $a>1$, $D_f=\mathbb{R}$, $D'_f=\mathbb{R}^+$, f é crescente em $\mathbb{R}^+$.

$f(x)\longrightarrow-\infty$ quando $x\longrightarrow 0^+$ e $f(x)\longrightarrow+\infty$ quando $x\longrightarrow+\infty$.

Para $0<a<1$, $D_f=\mathbb{R}^+$, $D'_f=\mathbb{R}$, f é decrescente em $\mathbb{R}^+$.

$f(x)\longrightarrow+\infty$ quando $x\longrightarrow 0^+$ e $f(x)\longrightarrow-\infty$ quando $x\longrightarrow+\infty$.

4.1 $a=2$

Interseção com o eixo Ox: $(1,0)$. Não interseta o eixo Oy.

4.2 $a=\frac{1}{2}$

Interseção com o eixo Ox: $(1,0)$. Não interseta o eixo Oy.

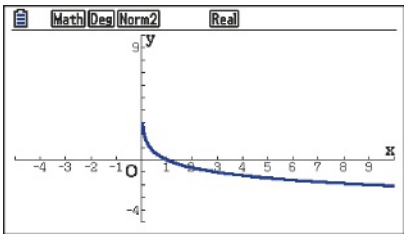
PÁG. 66

Aplicar

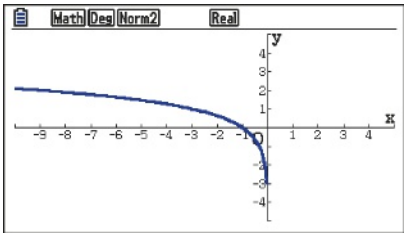
53.

(A) $a=3>1$, f é crescente.

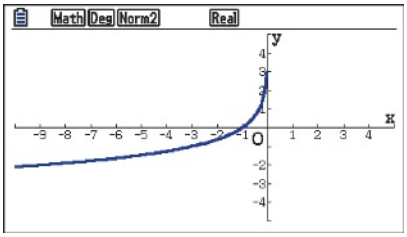
(B) $0<a=\frac{1}{3}<1$, f é decrescente.



(C)



(D)



$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=-\infty$

Opção correta: **(C)**

54.

(A) $f(x)=0 \iff \log_2(x-2)=0 \iff x-2=1 \wedge x-2>0 \iff x=3$

(B) $f(x)=0 \iff \log_2(x+2)=0 \iff x+2=1 \wedge x+2>0 \iff x=-1$

(C) $f(x)=0 \iff \log_2(x-3)=0 \iff x-3=1 \wedge x-3>0 \iff x=4$

(D) $f(x)=0 \iff \log_2(x+3)=0 \iff x+3=1 \wedge x+3>0 \iff x=-2$

Opção correta: **(D)**

55. $1-5x>0 \iff x<\frac{1}{5} \iff x\in\left]-\infty,\frac{1}{5}\right[$

Opção correta: **(A)**

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 67

Aplicar

56.1 $2-x>0 \iff x<2 \iff x\in\,]-\infty\,,2[$

$D_g=\,]-\infty\,,2[\;;\;D'_g=\mathbb{R}^+$

56.2 $g(0)=\log_{\frac{1}{2}}(2)-1=-1-1=-2\;;\;(0\,,-2)$

$g(x)=0 \iff \log_{\frac{1}{2}}(2-x)-1=0 \iff \log_{\frac{1}{2}}(2-x)=1 \iff 2-x=\left(\frac{1}{2}\right)^1 \wedge 2-x>0 \iff x=\frac{3}{2}\;;\;\left(\frac{3}{2}\,,0\right)$

56.3 $g(x)=-3 \iff \log_{\frac{1}{2}}(2-x)-1=-3 \iff \log_{\frac{1}{2}}(2-x)=-2 \iff$

$\iff 2-x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \wedge 2-x>0 \iff$

$\iff 2-x=4 \wedge x<2 \iff x=-2$

57.1 $f(-e)=\ln\left(e(-e)^2\right)=3$

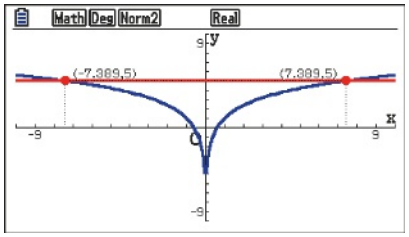
Opção correta: **(A)**

57.2 $f(x)=\ln\left(ex^2\right)=\ln e+\ln x^2=1+2\ln|x|$

Opção correta: **(C)**

57.3 $f(x)=5 \iff \ln\left(ex^2\right)=5 \iff ex^2=e^5 \iff x^2=e^4 \iff$

$\iff x=\pm\sqrt{e^4} \iff x=-e^2\approx-7{,}39 \vee x=e^2\approx 7{,}39$



58. $f(x)=0 \iff \log_a x=0 \iff x=1\;;\;A(1\,,0)\;;\;B(4\,,0)$

$f(4)=\log_a 4\;;\;C\left(4\,,\log_a 4\right)$

$A_{[ABC]}=3 \iff \frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2}=3 \iff 3\times\log_a 4=6 \iff$

$\iff \log_a 4=2 \iff a^2=4 \iff a^2=2^2 \iff a=2$

59.1 $y=2+4^x \iff y-2=4^x \iff \log_4(y-2)=\log_4 4^x \iff \log_4(y-2)=x$

$f^{-1}(x)=\log_4(x-2)\;;\;D_{f^{-1}}=\,]2\,,+\infty[$

59.2 $y=1-3e^{2x-1} \iff \frac{y-1}{-3}=e^{2x-1} \iff \ln\left(\frac{1-y}{3}\right)=\ln e^{2x-1} \iff$

$\iff \ln\left(\frac{1-y}{3}\right)=2x-1 \iff \frac{\ln\left(\frac{1-y}{3}\right)+1}{2}=x \iff \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-y}{3}\right)+\frac{1}{2}=x$

$g^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{3}\right)+\frac{1}{2}\;;\;D_{g^{-1}}=\,]-\infty\,,1[$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

59.3 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-1 \Leftrightarrow y+1=\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1}=x+2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1}-2=x$

$h^{-1}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-2 \;;\; D_{h^{-1}}=\mathbb{R}$

59.4 $y=2\ln(3-x)-5 \Leftrightarrow \frac{y+5}{2}=\ln(3-x) \Leftrightarrow e^{\frac{y+5}{2}}=e^{\ln(3-x)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{\frac{y+5}{2}}=3-x \Leftrightarrow 3-e^{\frac{y+5}{2}}=x$

$i^{-1}(x)=3-e^{\frac{x+5}{2}} \;;\; D_{i^{-1}}=\mathbb{R}$

60. Como $f(0)=9$, então $f^{-1}(9)=0 \Leftrightarrow b-\log_a 9=0 \Leftrightarrow \log_a 9=b \Leftrightarrow a^b=9$.

Como $f(1)=3$, então $f^{-1}(3)=1 \Leftrightarrow b-\log_a 3=1 \Leftrightarrow \log_a 3=b-1 \Leftrightarrow a^{b-1}=3$.

$a^b=9 \wedge a^{b-1}=3 \Rightarrow a^b=9 \wedge a^b\times a^{-1}=3 \Leftrightarrow 9\times a^{-1}=3 \Leftrightarrow a^{-1}=\frac{3}{9} \Leftrightarrow a=3$

$3^b=9 \Leftrightarrow 3^b=3^2 \Leftrightarrow b=2$

Assim, $f^{-1}(x)=2-\log_3 x$.

$y=2-\log_3 x \Leftrightarrow 2-y=\log_3 x \Leftrightarrow 3^{2-y}=3^{\log_3 x} \Leftrightarrow 3^{2-y}=x$

$f(x)=3^{2-x}$

PÁG. 74

Aplicar

66.1 $5^{5x}=\frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^{5x}=5^{-2} \Leftrightarrow 5x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{5}$

66.2 $10^{x^2}=100^2 \Leftrightarrow 10^{x^2}=10^4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

66.3 $8^{2x+1}=16\times 2^{2x} \Leftrightarrow 2^{3(2x+1)}=2^4\times 2^{2x} \Leftrightarrow 2^{6x+3}=2^{4+2x} \Leftrightarrow 6x+3=4+2x \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

66.4 $e^{\frac{2-\ln x}{2}}=e \Leftrightarrow \frac{2-\ln x}{2}=1 \Leftrightarrow \ln x=\frac{1\times 2-2}{-1} \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

66.5 $2^x\times x^2-2^x=0 \Leftrightarrow 2^x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \underbrace{2^x=0}_{\text{imp.}} \vee x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$

66.6 $e^x-2^{-x}=0 \Leftrightarrow e^x=2^{-x} \underset{2^x\neq 0}{\Leftrightarrow} e^x2^x=2^{-x}2^x \Leftrightarrow e^x2^x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2e)^x=1 \Leftrightarrow x=0$

66.7 $e^{2x+\log x}=0$ impossível

66.8 $e^{3+2\ln x}=e^4 \Leftrightarrow 3+2\ln x=4 \Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\sqrt{e}$

66.9 $e^{2x}-e^x-2=0 \Leftrightarrow (e^x)^2-e^x-2=0 \Leftrightarrow e^x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times(-2)}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow e^x=\frac{1-3}{2} \vee e^x=\frac{1+3}{2} \Leftrightarrow \underbrace{e^x=-1}_{\text{imp.}} \vee e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

66.10 $e^{x+2}-4x^2\times e^x=0 \iff e^x(e^2-4x^2)=0 \iff \underbrace{e^x=0}_{\text{imp.}} \vee e^2-4x^2=0 \iff$

$$\iff x^2=\frac{e^2}{4} \iff x=-\frac{e}{2} \vee x=\frac{e}{2}$$

67.1 Para $3x>0$, ou seja, para $x>0$, tem-se:

$2\ln(3x)=0 \iff \ln(3x)=0 \iff 3x=1 \iff x=\frac{1}{3}$

Como $\frac{1}{3}>0$, o conjunto-solução da equação é $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

67.2 Para $x+3>0$, ou seja, para $x>-3$, tem-se:

$2+\ln(x+3)=0 \iff \ln(x+3)=-2 \iff x+3=e^{-2} \iff x=\frac{1}{e^2}-3$

Como $\frac{1}{e^2}-3>-3$, o conjunto-solução da equação é $\left\{\frac{1}{e^2}-3\right\}$.

67.3 Para $x+2>0$, ou seja, para $x>-2$, tem-se:

$\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=0 \iff x+2=\left(\frac{1}{3}\right)^0 \iff x=-1$

Como $-1>-2$, o conjunto-solução da equação é $\{-1\}$.

67.4 Para $3x+1>0$, ou seja, para $x>-\frac{1}{3}$, tem-se:

$\log_{\frac{1}{e}}(3x+1)=0 \iff 3x+1=\left(\frac{1}{e}\right)^0 \iff x=0$

Como $0>-\frac{1}{3}$, o conjunto-solução da equação é $\{0\}$.

67.5 Para $x^2-3>0$, ou seja, para $x<-\sqrt{3} \wedge x>\sqrt{3}$, tem-se:

$\log_2(x^2-3)=0 \iff x^2-3=2^0 \iff x^2=4 \iff x=-2 \vee x=2$

Como $-2<-\sqrt{3}$ e $2>\sqrt{3}$, o conjunto-solução da equação é $\{-2, 2\}$.

67.6 Para $x>0$, tem-se:

$\log_{\frac{1}{e}}x=\ln 4 \iff x=\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln 4} \iff x=e^{-\ln 4} \iff x=e^{\ln 4^{-1}} \iff x=4^{-1} \iff x=\frac{1}{4}$

Como $\frac{1}{4}>0$, o conjunto-solução da equação é $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

67.7 Para $x>0 \wedge x+2>0$, ou seja, para $x>0$, tem-se:

$\ln(2x)=\ln(x+2) \iff 2x=x+2 \iff x=2$

Como $2>1$, o conjunto-solução da equação é $\{2\}$.

67.8 Para $x+3>0 \wedge x-1>0$, ou seja, para $x>1$, tem-se:

$\ln(x+3)=\ln(x-1)+\ln 2 \iff \ln(x+3)=\ln(2(x-1)) \iff x+3=2(x-1) \iff x=5$

Como $5>1$, o conjunto-solução da equação é $\{5\}$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

67.9 Para $x+3>0 \wedge x-3>0$, ou seja, para $x>3$, tem-se:

$$\log_5(x+3)-\log_5 7=-\log_5(x-3) \Leftrightarrow \log_5\left(\frac{x+3}{7}\right)=\log_5(x-3)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{7}=\frac{1}{x-3} \Leftrightarrow x^2-9=7 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=4$$

Como $-4<3$ e $4>3$, o conjunto-solução da equação é $\{4\}$.

67.10 Para $x^2+1>0 \wedge 3x-4>0$, ou seja, para $x>\frac{4}{3}$, tem-se:

$$\ln(x^2+1)\times\ln(3x-4)=0 \Leftrightarrow \ln(x^2+1)=0 \vee \ln(3x-4)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+1=1 \vee 3x-4=1 \Leftrightarrow x^2=0 \vee x=\frac{1+4}{3} \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{5}{3}$$

Como $0<\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{3}>\frac{4}{3}$, o conjunto-solução da equação é $\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

67.11 Para $x-3>0 \wedge 6-x>0$, ou seja, para $3<x<6$, tem-se:

$$\log(x-3)=\log(6-x) \Leftrightarrow x-3=6-x \Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$$

Como $3<\frac{9}{2}<6$, o conjunto-solução da equação é $\left\{\frac{9}{2}\right\}$.

67.12 Para $2x>0 \wedge \frac{x}{2-x}>0$, ou seja, para $0<x<2$, tem-se:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x)=2-\log_2\left(\frac{x}{2-x}\right) \Leftrightarrow -\log_2(2x)=2-\log_2\left(\frac{x}{2-x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x)=\log_2\left(\frac{x}{2-x}\right)-2 \Leftrightarrow \log_2(2x)=\log_2\left(\frac{x}{2-x}\right)-\log_2 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x)=\log_2\left(\frac{x}{4(2-x)}\right) \Leftrightarrow 2x=\frac{x}{4(2-x)} \underset{x>0}{\Leftrightarrow} 2=\frac{1}{4(2-x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8(2-x)=1 \Leftrightarrow 16-8x=1 \Leftrightarrow x=\frac{15}{8}$$

Como $0<\frac{15}{8}<2$, o conjunto-solução da equação é $\left\{\frac{15}{8}\right\}$.

PÁG. 75

Aplicar

69.1 $Q(t)=0{,}30Q_0 \Leftrightarrow Q_0e^{-0{,}00012t}=0{,}30Q_0 \Leftrightarrow e^{-0{,}00012t}=0{,}30 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -0{,}00012t=\ln(0{,}30) \Leftrightarrow t=\frac{\ln(0{,}30)}{-0{,}00012} \Leftrightarrow t\approx 10\,033 \text{ anos}$$

69.2 $\frac{Q(15\,200)}{Q_0}=\frac{Q_0e^{-0{,}00012\times 15\,200}}{Q_0}=e^{-0{,}00012\times 15\,200}\approx 0{,}1614=16{,}14\%$

70.2 $T(t)=55 \Leftrightarrow (70-26)e^{-0{,}057t}+26=55 \Leftrightarrow e^{-0{,}057t}=\frac{29}{44} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -0{,}057t=\ln\left(\frac{29}{44}\right) \Leftrightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{29}{44}\right)}{-0{,}057} \Leftrightarrow t\approx 7{,}31$$

$0{,}33\times 60=18{,}6$

7 minutos e 19 segundos.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

70.3 $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = T_a = 26\ ^\circ\text{C}$

PÁG. 76

Aplicar

71. $T(t) = 75e^{-kt} + 25$

$T(2) = 80 \iff 75e^{-2k} + 25 = 80 \iff e^{-2k} = \dfrac{80 - 25}{75} \iff e^{-2k} = \dfrac{11}{15} \iff$

$\iff -2k = \ln\left(\dfrac{11}{15}\right) \iff k = \dfrac{\ln\left(\dfrac{11}{15}\right)}{-2} \iff k \approx 0{,}155$

$T(t) = 50 \iff 75e^{-0{,}155t} + 25 = 50 \iff e^{-0{,}155t} = \dfrac{50 - 25}{75} \iff e^{-0{,}155t} = \dfrac{1}{3} \iff$

$\iff -0{,}155t = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \iff t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)}{-0{,}155} \iff t \approx 7$ minutos

72.1 $T(0) = 32e^{-0{,}2 \times 0} + 18 = 50\ ^\circ\text{C}$

72.2 $T(2) = 32e^{-0{,}2 \times 2} + 18 \approx 39{,}5\ ^\circ\text{C}$

72.3 $T(t) = 25 \iff 32e^{-0{,}2t} + 18 = 25 \iff e^{-0{,}2t} = \dfrac{25 - 18}{32} \iff$

$\iff -0{,}2t = \ln\dfrac{7}{32} \iff t = \dfrac{\ln\dfrac{7}{32}}{-0{,}2} \iff t \approx 7{,}599$

$0{,}599 \times 60 = 35{,}94$

7 min 36 s

72.4 $T_a = 18\ ^\circ\text{C}$

PÁG. 78

Aplicar

74.1 $P(t) = 500\, e^{\frac{\ln 800 - \ln 500}{1 - 0}(t - 0)}$

Como $\dfrac{\ln 800 - \ln 500}{1 - 0}(t - 0) = (\ln 800 - \ln 500)t$ e $\ln 800 - \ln 500 = \ln\left(\dfrac{800}{500}\right) = \ln(1{,}6) \approx 0{,}47$,

então $P(t) \approx 500\, e^{0{,}47t}$.

74.2 $P(4) \approx 500\, e^{0{,}47 \times 4} \approx 3277$

75.1 $C(t) = 15\,000\, e^{bt}$

$C\left(\dfrac{8}{12}\right) = 16\,200 \iff 15\,000\, e^{b\frac{8}{12}} = 16\,200 \iff e^{b\frac{8}{12}} = \dfrac{16\,200}{15\,000} \iff$

$\iff b\dfrac{8}{12} = \ln\dfrac{162}{150} \iff b = \dfrac{\ln\dfrac{162}{150}}{\dfrac{8}{12}} \iff b \approx 0{,}115$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

75.2 $C(t) = 15\,000\, e^{0,115t}$; $C(2) = 15\,000\, e^{0,115\times 2} \approx 18\,879$

Percentagem de aumento dois anos após: $\frac{18\,879 - 15\,000}{15\,000} \times 100 = 25,86 \approx 25,9\%$

75.3 $C(t+x) = 3C(t) \Leftrightarrow 15\,000\, e^{0,115(t+x)} = 3 \times 15\,000\, e^{0,115t} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{0,115(t+x)}}{e^{0,115t}} = \frac{3 \times 15\,000}{15\,000} \Leftrightarrow e^{0,115x} = 3 \Leftrightarrow 0,115x = \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{0,115} \Leftrightarrow x \approx 9,553$$

$0,553 \times 12 = 6,636$

Nove anos e sete meses.

Interpretação: A população de coelhos triplica a cada nove anos e sete meses, aproximadamente.

PÁG. 80

Aplicar

77.1 $P(t) = \frac{1000}{1 + ae^{-kt}}$

$P(0) = 100 \Leftrightarrow \frac{1000}{1 + ae^{-k\times 0}} = 100 \Leftrightarrow \frac{1000}{1+a} = 100 \Leftrightarrow 1 + a = \frac{1000}{100} \Leftrightarrow a = 9$

$P(3) = 250 \Leftrightarrow \frac{1000}{1 + 9e^{-3k}} = 250 \Leftrightarrow 1 + 9e^{-3k} = \frac{1000}{250} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-3k} = \frac{4-1}{9} \Leftrightarrow -3k = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-3} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 3}{3}$$

$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-\frac{\ln 3}{3}t}}$

77.2 $P(t) = 900 \Leftrightarrow \frac{1000}{1 + 9e^{-\frac{\ln 3}{3}t}} = 900 \Leftrightarrow 1 + 9e^{-\frac{\ln 3}{3}t} = \frac{1000}{900} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{\ln 3}{3}t} = \frac{\frac{10}{9} - 1}{9} \Leftrightarrow -\frac{\ln 3}{3}t = \ln\left(\frac{1}{81}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{81}\right)}{-\frac{\ln 3}{3}} \Leftrightarrow t = 12 \text{ meses}$$

PÁG. 81

Aplicar

78.1 $I_1(t) = 2,8 \Leftrightarrow \frac{4}{1 + 15e^{-0,66t}} = 2,8 \Leftrightarrow 1 + 15e^{-0,66t} = \frac{4}{2,8} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-0,66t} = \frac{\frac{4}{2,8} - 1}{15} \Leftrightarrow -0,66t = \ln\left(\frac{1}{35}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{35}\right)}{-0,66} \Leftrightarrow t \approx 5,39$$

$0,39 \times 7 = 2,73$

Cinco semanas e três dias.

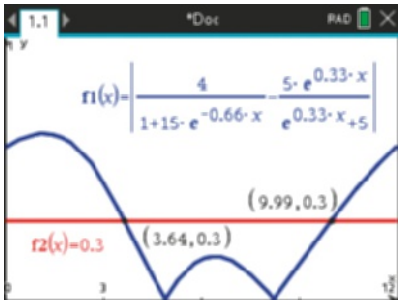
78.2 $\lim\limits_{t\to+\infty} I_1(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{4}{1 + 15e^{-0,66t}} = 4$

O número de infetados tende para 4 milhares, ou seja, 4000 .

A percentagem de habitantes infetados tende para $\frac{4000}{800\,000} \times 100 = 0,5\%$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

78.3 $|I_1(t) - I_2(t)| < 0{,}3$



$|I_1(t) - I_2(t)| < 0{,}3 \iff a < t < b$, com $a \approx 3{,}64$ e $b \approx 9{,}99$.

Durante $b - a \approx 6{,}35$ semanas, que corresponde a 6 semanas e $0{,}35 \times 7 = 2{,}45 \approx 2$ dias, aproximadamente.

79.1 $d(I) = 80 \iff 10\log(I) + 120 = 80 \iff$

$$\iff \log(I) = \frac{80 - 120}{10} \iff I = 10^{-4} \iff I = 1 \times 10^{-4}\ \text{W/m}^2$$

79.2 $d(I) = 0 \iff 10\log(I) + 120 = 0 \iff$

$$\iff \log(I) = \frac{0 - 120}{10} \iff I = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$$

79.3 $d(2I) - d(I) = 10\log(2I) + 120 - (10\log(I) + 120) =$

$$= 10\log(2I) + 120 - 10\log(I) - 120 = 10(\log(2) + \log(I)) - 10\log(I) =$$

$$= 10\log(2) + 10\log(I) - 10\log(I) = 10\log(2) \approx 10 \times 0{,}3010 = 3{,}01 \approx 3\ \text{dB}$$

79.4 $d(xI) - d(I) = 20 \iff 10\log(xI) + 120 - (10\log(I) + 120) = 20 \iff$

$$\iff 10\log(xI) + 120 - 10\log(I) - 120 = 20 \iff 10\log(xI) - 10\log(I) = 20 \iff$$

$$\iff 10(\log(xI) - \log(I)) = 20 \iff 10\log\left(\frac{xI}{I}\right) = 20 \iff 10\log(x) = 20 \iff$$

$$\iff \log(x) = 2 \iff x = 10^2 \iff x = 100$$

Se a intensidade do som aumenta 100 vezes, o nível sonoro aumenta 20 dB.

PÁG. 82

Aplicar+

1. $x^6 + x = 0 \iff x(x^5 + 1) = 0 \iff x = 0 \vee x^5 + 1 \iff x = 0 \vee x^5 = -1 \iff x = 0 \vee x = -1$

Opção correta: **(C)**

2. $9^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{9^3} = \sqrt[4]{(3^2)^3} = \sqrt[4\div 2]{3^{6\div 2}} = \sqrt{27}$

Opção correta: **(A)**

3.

(A) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^9 - \left(\sqrt[6]{4}\right)^6 = \left(\sqrt[6]{4}\right)^6 \iff \sqrt{4^3} - 4 = 4 \iff$

$$\iff 8 - 4 = 4 \iff 4 = 4 \text{ proposição verdadeira}$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

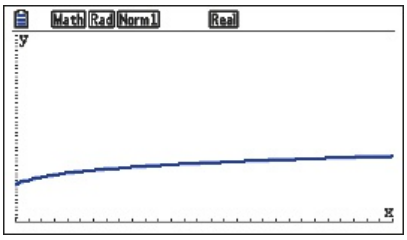
(B) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3 = 2 \iff \sqrt{4} = 2 \iff 2 = 2$ proposição verdadeira

(C) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^9 = 8 \iff \sqrt{4^3} = 8 \iff 8 = 8$ proposição verdadeira

(D) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^6 + \left(\sqrt[6]{4}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{4}\right)^9 \iff 4 + \sqrt{4} = \sqrt{4^3} \iff 6 = 8$ proposição falsa

Opção correta: **(D)**

4.1 Comecemos por apresentar um esboço do gráfico da função f recorrendo à calculadora gráfica.



f é invertível porque qualquer reta horizontal interseta o seu gráfico, no máximo, uma vez.

Ou

Sejam $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

Tem-se $\sqrt[6]{x_1} = \sqrt[6]{x_2} \iff \left(\sqrt[6]{x_1}\right)^6 = \left(\sqrt[6]{x_2}\right)^6 \iff x_1 = x_2$.

4.2 O domínio de uma função invertível é o contradomínio da sua função inversa.

$D'_{f^{-1}} = [0, +\infty[$

4.3 $y = \sqrt[6]{x} \iff y^6 = |x| \iff x = y^6 \vee x = -y^6$

$f^{-1}(x) = x^6 \quad ; \quad D_{f^{-1}} = [0, +\infty[$

5. O contradomínio de g é $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{3\} = D_{g^{-1}}$.

Nas funções inversas, as assíntotas verticais e horizontais também se invertem. A reta de equação $x = -2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g, ou seja, a reta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal ao gráfico de g^{-1}.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 83

Aplicar+

6.1 $g(-1) = (-1)^2 + 3 = 4 = g(1)$, pelo que g não é invertível.

6.2 A restrição de g ao intervalo $[0, +\infty[$ é invertível (neste intervalo, g é crescente, pelo que qualquer reta horizontal interseta o gráfico de g, no máximo, uma vez). Designando por h essa restrição,

$D_{h^{-1}} = [3, +\infty[$ e $h^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$.

7.1 Efetuando a divisão inteira de $6x + 3$ por $8 - 2x$, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 6x+3 & -2x+8 \\ \hline -6x+24 & -3 \\ \hline 27 & \end{array}$$

Logo, $h(x) = -3 + \dfrac{27}{8 - 2x}$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

7.2 Sejam x_1, $x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{4\}$ tal que $h(x_1) = h(x_2)$. Tem-se

$$-3+\frac{27}{8-2x_1} = -3+\frac{27}{8-2x_2} \Leftrightarrow \frac{27}{8-2x_1} = \frac{27}{8-2x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8-2x_1 = 8-2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

h é invertível.

7.3 a. $h(x) = 3 \Leftrightarrow -3+\frac{27}{8-2x} = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-6(8-2x)+27}{8-2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{-21+12x}{8-2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -21+12x = 0 \wedge 8-2x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$$

$h^{-1}(3) = \frac{7}{4}$

b. $h(x) = -3 \Leftrightarrow -3+\frac{27}{8-2x} = -3 \Leftrightarrow \frac{27}{8-2x} = 0$ equação impossível

$h^{-1}(-3)$ não existe, pois $-3 \notin D'_h$.

7.4 $-3+\frac{27}{8-2x} = y \Leftrightarrow \frac{27}{8-2x} = y+3 \Leftrightarrow \frac{27}{y+3} = 8-2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = 8-\frac{27}{y+3} \Leftrightarrow 2x = \frac{8y+24-27}{y+3} \Leftrightarrow x = \frac{8y-3}{2y+6}$$

$h^{-1}(x) = \frac{8x-3}{2x+6}$ e $D_{h^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : 8-2x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{4\}$.

8.1 Como o gráfico de g é uma reta não horizontal, g é invertível.

8.2 A expressão analítica de g é da forma $g(x) = mx+b$, com $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$.

$y = mx+b \Leftrightarrow y-b = mx \Leftrightarrow x = \frac{1}{m}y - \frac{b}{m}$

Logo, $g^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{b}{m}$. Assim, sendo g e a sua inversa iguais, tem-se $m = \frac{1}{m}$ e $b = -\frac{b}{m}$.

De $m = \frac{1}{m}$, conclui-se que $m = -1$ ou $m = 1$ (No caso de $m = -1$, b pode tomar qualquer valor real. No caso de $m = 1$, b tem de ser zero).

9.1 $(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f(1) = \sqrt{1} = 1$

Opção correta: **(A)**

9.2 $D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in [-8, 7] : g(x) \in [0, +\infty[\}$

$g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-8, 0[$

Opção correta: **(C)**

9.3 Para $x \in [-8, 0[$, tem-se $m = \frac{2-1}{-8-(-4)} = -\frac{1}{4}$.

Logo, $g(x) = -\frac{1}{4}x$.

$(g \circ g)(-5) = g(g(-5)) = g\left(\frac{5}{4}\right) = -2$

Opção correta: **(A)**

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 84

Aplicar+

10.1 g é decrescente no seu domínio, pelo que qualquer reta horizontal interseta o seu gráfico, no máximo, uma vez, donde se conclui que g é invertível.

10.2 $f(x)=\frac{3}{5} \iff \frac{2x}{x^2+1}=\frac{3}{5} \iff$

$\iff 3x^2+3=10x \iff 3x^2-10x+3=0 \iff$

$\iff x=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\times3\times3}}{2\times3} \iff x=\frac{1}{3} \vee x=3$

$\left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=f(3)=\frac{3}{5}$, pelo que f não é invertível.

10.3

I. $g^{-1}(3)=-2 \iff g(-2)=3$ proposição verdadeira

II. $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g\left(\frac{2\times0}{0^2+1}\right)=g(0)=\frac{4}{5}$ proposição verdadeira

Opção correta: **(D)**

10.4 $(f\circ g)(x)=0 \iff f(g(x))=0 \iff$

$\iff \frac{2g(x)}{g^2(x)+1}=0 \iff 2g(x)=0 \wedge \underbrace{g^2(x)+1\neq0}_{\text{cond. universal}} \iff$

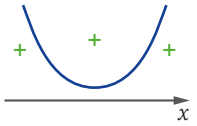
$\iff g(x)=0 \iff x=4$

10.5 $D_{g\circ f}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} : f(x)\in[-2, +\infty[\}$

$f(x)\geqslant-2 \iff \frac{2x}{x^2+1}\geqslant-2 \underset{x^2+1>0}{\iff} 2x\geqslant-2x^2-2 \iff$

$\iff x^2+x+1\geqslant0 \iff x\in\mathbb{R}$

$D_{g\circ f}=\mathbb{R}$



Cálculo auxiliar:

$x^2+x+1=0 \iff x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}$

equação impossível

11. $(g\circ f)(x)=3 \iff g(f(x))=3 \iff$

$\iff f(x)\leqslant-4 \iff \frac{1-5x}{x-3}\leqslant-4 \iff$

$\iff \frac{1-5x}{x-3}+4\leqslant0 \iff \frac{1-5x+4x-12}{x-3}\leqslant0 \iff$

$\iff \frac{-x-11}{x-3}\leqslant0$

Cálculo auxiliar:

$-x-11=0 \iff x=-11$

$x-3=0 \iff x=3$

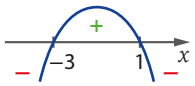
x	$-\infty$	-11		-3	$+\infty$
$-x-11$	+	0	−	−	−
$x-3$	−	−	−	0	+
$f(x)$	−	0	+	N.D.	−

C. S. $=]-\infty, -11]\cup]3, +\infty[$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

12. O gráfico da função f é uma semirreta com origem no ponto de coordenadas $(-3, -1)$ e que interseta o eixo Ox num ponto de abcissa positiva. Como o gráfico começa no ponto de abcissa -3 e se estende para a direita, o domínio de f é $[-3, +\infty[$. A função tem de ser monótona crescente pois a origem da semirreta está no terceiro quadrante e interseta o eixo Ox num ponto de abcissa positiva.

12.1 $D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in [-3, +\infty[\}$



$g(x) \geqslant -3 \iff -x^2 - 2x + 3 \geqslant 0 \iff$

$\iff x \in [-3, 1]$

$D_{f\circ g} = [-3, 1]$

Cálculo auxiliar:

$-x^2 - 2x + 3 = 0 \iff x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times 3}}{2 \times (-1)} \iff$

$\iff x = 1 \vee x = -3$

12.2 Comecemos por definir a função f.

3 é zero de f, isto é, $f(3) = 0$.

$D_f = [-3, +\infty[$ e $f(x) = mx + b$.

$m = \dfrac{-1 - 0}{-3 - 3} = \dfrac{1}{6}$ e $\dfrac{1}{6} \times 3 + b = 0 \iff b = -\dfrac{1}{2}$.

$f(x) = \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{2}$

$D_{h\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_h\} = \{x \in [-3, +\infty[: f(x) \in \mathbb{R}\setminus\{3\}\}$

$f(x) \neq 3 \iff \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{2} \neq 3 \iff \dfrac{1}{6}x \neq \dfrac{7}{2} \iff x \neq 21$

$D_{h\circ f} = [-3, +\infty[\setminus\{21\}$

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h\left(\dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{6}x - \frac{1}{2} - 3} = \dfrac{x - 3}{x - 21}$

PÁG. 85

Aplicar+

13. f é uma função estritamente crescente, de domínio $[-1, 1]$.

Como $f(-1) = 6^{-1} = \dfrac{1}{6}$ e $f(1) = 6$, o seu contradomínio é $\left[\dfrac{1}{6}, 6\right]$.

Opção correta: **(A)**

14. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2+2}$

$D'_f = [2, +\infty[$, pois a função f é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima e vértice no ponto de coordenadas $(0, 2)$.

g é uma função estritamente crescente. O menor valor que a função $g \circ f$ toma é $2^2 = 4$.

$D'_{g\circ f} = [4, +\infty[$

Opção correta: **(B)**

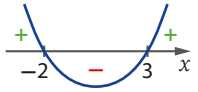
15.1 $f(x) = 4\sqrt[3]{128} \iff 2^x = 2^2 \times (2^7)^{\frac{1}{3}} \iff 2^x = 2^{2+\frac{7}{3}} \iff x = \dfrac{13}{3}$

15.2 $f(a+1) - f(a) = 2^{a+1} - 2^a = 2^a \times 2 - 2^a = 2^a = f(a)$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

16.1 Como g é uma função exponencial, para ser uma função crescente a base da exponencial tem de ser superior a 1.

$a^2 - a - 5 > 1 \iff a^2 - a - 6 > 0$



$a \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$

Cálculo auxiliar:

$a^2 - a - 6 = 0 \iff a = -2 \vee a = 3$

16.2 $a = -3 \implies g(x) = 7^x$

a. $3g(x+1) = \dfrac{3^{x+4}}{49} \iff 7^{x+1} = \dfrac{3^{x+4}}{3 \times 7^2} \iff 7^{x+3} = 3^{x+3} \iff$

$\iff \dfrac{7^{x+3}}{3^{x+3}} = 1 \iff \left(\dfrac{7}{3}\right)^{x+3} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^0 \iff x + 3 = 0 \iff x = -3$

C. S. $= \{-3\}$

b. $g(0) = 7^0 = 1$, então as coordenadas do ponto A são $(0, 1)$.

$g(x) = 49 \iff 7^x = 7^2 \iff x = 2$, então as coordenadas do ponto C são $(2, 49)$.

O retângulo $[ABCD]$ tem 2 unidades de largura e 48 unidades de comprimento.

$A_{[ABCD]} = 2 \times 48 = 96$

17.1 $16^x = 8^{5-x^2} \iff (2^4)^x = (2^3)^{5-x^2} \iff$

$\iff 2^{4x} = 2^{15-3x^2} \iff 4x = 15 - 3x^2 \iff$

$\iff 3x^2 + 4x - 15 = 0 \iff x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 3 \times (-15)}}{2 \times 3} \iff$

$\iff x = -3 \vee x = \dfrac{5}{3}$

C. S. $= \left\{-3, \dfrac{5}{3}\right\}$

17.2

a. $(f \circ h)(x) = -3 \iff f(h(x)) = -3 \iff$

$\iff 1 - (h(x))^2 = -3 \iff (h(x))^2 = 4 \iff$

$\iff h(x) = 2 \vee h(x) = -2 \iff 16^x = 2 \vee \underbrace{16^x = -2}_{\text{eq. impossível}} \iff$

$\iff 2^{4x} = 2 \iff 4x = 1 \iff x = \dfrac{1}{4}$

b. $(h \circ f)(x) = 16^{1-x^2}$

$D'_f =]-\infty, 1]$, pois a função f é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e vértice no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

h é uma função estritamente crescente.

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 16^x = 0$ e $h(1) = 16$, pelo que $D'_{h \circ f} =]0, 16]$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 86

Aplicar+

18.1 $f(x)=\sqrt{e^3} \iff e^x=e^{\frac{3}{2}} \iff x=\frac{3}{2}$

Opção correta: **(C)**

18.2 Os gráficos de funções inversas são simétricos relativamente à reta de equação $y=x$.

Opção correta: **(D)**

18.3 $f\left(-\frac{4}{3}\right)=e^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{e^{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^4}}=\frac{1}{e\sqrt[3]{e}}$

18.4 $g(x)=x^2+4x+1=x^2+4x+2^2+1-2^2=(x+2)^2-3$

g é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima e vértice no ponto de coordenadas $(-2,-3)$.

$D'_g=[-3,+\infty[$

f é uma função exponencial de base superior a um, logo é uma função estritamente crescente.

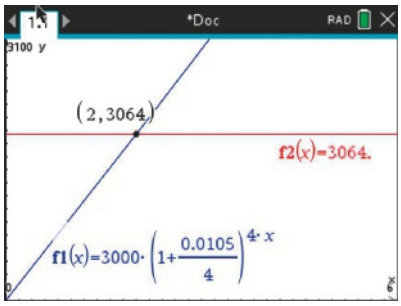
$(f\circ g)(x)=e^{x^2+4x+1}$

O menor valor que a função $f\circ g$ vai tomar é e^{-3}, que é um mínimo absoluto.

19.1 $3000\left(1+\frac{0{,}0105}{12}\right)^6\approx 3015{,}78$ euros

19.2 Utilizando a capacidade gráfica da calculadora, vamos resolver a equação que traduz o problema:

$3000\left(1+\frac{0{,}0105}{4}\right)^{4n}=3063{,}58$



O depósito tem a duração de dois anos.

PÁG. 87

Aplicar+

20.1 $c_i\left(1+\frac{0{,}02}{6}\right)^6=1530{,}25 \iff c_i\approx 1500$

O capital depositado foi 1500 euros.

20.2 $2500\left(1+\frac{r}{12}\right)^{14}=2539{,}66 \iff \left(1+\frac{r}{12}\right)^{14}=\frac{2539{,}66}{2500} \iff$

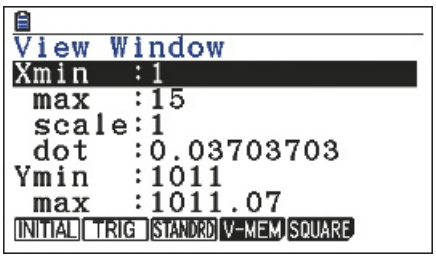
$$\iff 1+\frac{r}{12}=\sqrt[14]{\frac{2539{,}66}{2500}} \iff \frac{r}{12}=\sqrt[14]{\frac{2539{,}66}{2500}}-1 \iff$$

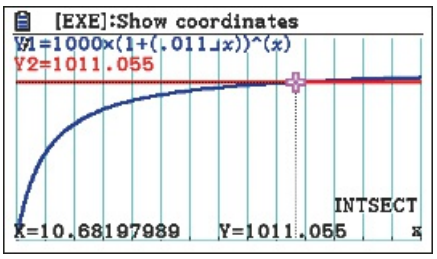
$$\iff \frac{r}{12}\approx 0{,}1125\%$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

20.3 Utilizando a calculadora gráfica, vamos resolver a condição que traduz o problema:

$$1000\left(1+\frac{0{,}011}{x}\right)^{x} > 1011{,}055$$





Onze capitalizações por ano.

21.1 $f(x)=0 \iff 4\times 3^{3-x}-36=0 \iff 3^{3-x}=9 \iff$

$\iff 3^{3-x}=3^{2} \iff 3-x=2 \iff x=1$

Ponto de interseção com o eixo Ox : $(1\ ,\ 0)$

$f(0)=4\times 3^{3-0}-36=72$

Ponto de interseção com o eixo Oy : $(0\ ,\ 72)$

21.2 $f(x)=288 \iff 4\times 3^{3-x}-36=288 \iff 3^{3-x}=81 \iff$

$\iff 3^{3-x}=3^{4} \iff 3-x=4 \iff x=-1$

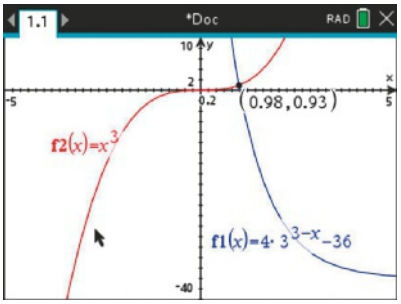
21.3 $3^{3-x}>0 \iff 4\times 3^{3-x}>0 \iff 4\times 3^{3-x}-36>-36$

$D'_f=]-36\ ,\ +\infty[$

21.4 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4\times 3^{3-x}-36\right)=4\times 0-36=-36$

$f(x)\longrightarrow -36$ quando $x\longrightarrow+\infty$.

21.5 Utilizando a calculadora gráfica, vamos resolver a equação que traduz o problema: $f(x)=x^{3}$



As coordenadas do ponto são $(0\ ,98\ ;0\ ,93)$.

22.1 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+b\times 6^{3x-1}\right)=a+b\times 0=a$

Como $f(x)\longrightarrow 2$ quando $x\longrightarrow-\infty$, então $a=2$.

22.2 $g(0)=a+b\times 6^{3\times 0-1}=a+\frac{b}{6}=2+\frac{b}{6}$

$g(0)=\frac{3}{2} \iff 2+\frac{b}{6}=\frac{3}{2} \iff \frac{b}{6}=\frac{1}{2} \iff b=3$

22.3 $6^{3x-1}>0 \iff -3\times 6^{3x-1}<0 \iff 2-3\times 6^{3x-1}<2$

$D'_g=]-\infty\ ,\ 2[$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

22.4 $g(x)=\frac{23}{12} \Leftrightarrow 2-3\times 6^{3x-1}=\frac{23}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6^{3x-1}=\frac{1}{36} \Leftrightarrow 6^{3x-1}=6^{-2} \Leftrightarrow 3x-1=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

22.5 $g(x)=2-\sqrt[3]{27\times 6^{x^2+5}} \Leftrightarrow 2-3\times 6^{3x-1}=2-\sqrt[3]{27\times 6^{x^2+5}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\times 6^{3x-1}=3\sqrt[3]{6^{x^2+5}} \Leftrightarrow 6^{3x-1}=\left(6^{x^2+5}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6^{3x-1}=6^{\frac{x^2+5}{3}} \Leftrightarrow 3x-1=\frac{x^2+5}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-9x+8=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=8$

C. S. $=\{1\,,\,8\}$

PÁG. 88

Aplicar+

22.6

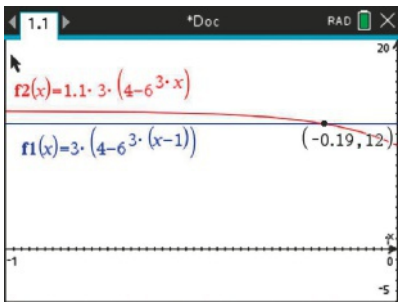
a. g é decrescente e a medida da base é 12, pelo que o valor mínimo de S é $\frac{12\times g(0)}{2}=9$.

b. $S(c)=\frac{12\times g(c)}{2}=6\times\left(2-3\times 6^{3c-1}\right)=$

$=6\times\left(2-\frac{3\times 6^{3c}}{6}\right)=12-3\times 6^{3c}=3\left(4-6^{3c}\right)$

c. Utilizando a calculadora gráfica, vamos resolver a equação que traduz o problema:

$S(c-1)=1{,}1S(c) \Leftrightarrow 3\left(4-6^{3(c-1)}\right)=1{,}1\times 3\left(4-6^{3c}\right)$



$c\approx -0{,}2$

23. $\ln(a\times b)+\ln\left(a^2\right)=\ln a+\ln b+2\ln a=3\times 1{,}1+1{,}6=4{,}9$

Opção correta: **(A)**

24. $a^{2+\log_a 4}=a^2\times a^{\log_a 4}=a^2\times 4=4a^2$

Opção correta: **(C)**

25. $\ln(2a)=-\ln\left(\frac{b}{2}\right) \Leftrightarrow \ln(2a)=\ln\left(\frac{b}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2a=\frac{2}{b} \Leftrightarrow a\times b=1$

Opção correta: **(D)**

PÁG. 89

Aplicar+

26. $e^{1-4\ln a}=\frac{e}{e^{4\ln a}}=\frac{e}{e^{\ln a^4}}=\frac{e}{a^4}$

Opção correta: **(D)**

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

27. $\log_9(3a)=2 \iff 3a=9^2 \iff a=27$

$$\log_3\left(\frac{9a^2}{27}\right)=\log_3\left(\frac{9\times 27^2}{27}\right)=\log_3\left(3^5\right)=5$$

Opção correta: **(B)**

28. $v_{n+1}-v_n=\log_4\left(2^{3(n+1)-1}\right)-\log_4\left(2^{3n-1}\right)=$

$$=\log_4\left(\frac{2^{3(n+1)-1}}{2^{3n-1}}\right)=\log_4\left(\frac{2^{3n+3-1}}{2^{3n-1}}\right)=\log_4\left(2^3\right)=\frac{\log_2\left(2^3\right)}{\log_2(4)}=\frac{3}{2}$$

Opção correta: **(D)**

29. $a^b=3^2 \iff \log_a a^b=\log_a 3^2 \iff b=2\log_a 3$

$$\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{3}{a^2}\right)=\frac{\log_a\left(\frac{3}{a^2}\right)}{\log_a\sqrt{a}}=\frac{\log_a 3-\log_a a^2}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}b-2}{\frac{1}{2}}=b-4$$

Opção correta: **(A)**

30. $\log_5\left(\frac{\sqrt{125^x}}{5a^x}\right)=\log_5\left(\frac{\left(\left(5^3\right)^x\right)^{\frac{1}{2}}}{5a^x}\right)=$

$$=\log_5 5^{\frac{3x}{2}}-\log_5\left(5a^x\right)=\frac{3x}{2}-\left(\log_5 5+\log_5 a^x\right)=$$

$$=\frac{3x}{2}-\left(1+x\log_5 a\right)=\frac{3x}{2}-1-x^2=-x^2+\frac{3x}{2}-1$$

Opção correta: **(A)**

31. Se f é uma função invertível e o ponto de coordenadas $(4\,,\,2)$ pertence ao seu gráfico, então $f^{-1}(2)=4$.

$$\left(g\circ f^{-1}\right)(2)=g\left(f^{-1}(2)\right)=g(4)=$$

$$=27^{\log_2 4-\log_8 4}=27^{2-\frac{\log_2 4}{\log_2 8}}=27^{2-\frac{2}{3}}=$$

$$=\left(3^3\right)^{\frac{4}{3}}=3^4=81$$

32.1 $\log_2 y=1+3\log_2(x-2)-\log_2\left(x^2-4\right) \iff$

$\iff \log_2 y=\log_2 2+\log_2(x-2)^3-\log_2\left(x^2-4\right) \iff$

$\iff \log_2 y=\log_2\left(2(x-2)^3\right)-\log_2\left(x^2-4\right) \iff$

$\iff \log_2 y=\log_2\frac{2(x-2)^3}{x^2-4} \iff y=\frac{2(x-2)^3}{x^2-4} \iff$

$\iff y=\frac{2(x-2)^3}{(x-2)(x+2)} \iff y=\frac{2(x-2)^2}{x+2}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

32.2 $\log_{\frac{1}{2}} y = \log_2 y + \frac{2}{3} \times \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}} 9 \iff$

$\iff -\log_2 y = \log_2 y - \frac{2}{3} \times \log_2(x+1) + \log_2 9 \iff$

$\iff -2\log_2 y = -\frac{2}{3}\log_2(x+1) + 2\log_2(3) \iff$

$\iff \log_2 y = \frac{1}{3}\log_2(x+1) - \log_2 3 \iff$

$\iff \log_2 y = \log_2 \frac{\sqrt[3]{x+1}}{3} \iff y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{3}$

PÁG. 90

Aplicar+

33. $\log_3 x - \log_9 y = \frac{1}{2} \iff \log_3 x - \frac{\log_3 y}{\log_3 9} = \frac{1}{2} \iff$

$\iff \log_3 x - \frac{1}{2}\log_3 y = \frac{1}{2} \iff \log_3 x - \log_3 \sqrt{y} = \frac{1}{2} \iff$

$\iff \log_3 \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \iff \frac{x}{\sqrt{y}} = 3^{\frac{1}{2}} \iff \frac{x}{\sqrt{y}} = \sqrt{3}$

$\frac{x^6}{y^3} = \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^6 = (\sqrt{3})^6 = 3^3 = 27$

Opção correta: **(D)**

34. c é a medida do comprimento da hipotenusa. Pelo teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$.

$\log_4(c-a) + \log_4(c+a) = 3 \iff \log_4((c-a)(c+a)) = 3 \iff$

$\iff \log_4(c^2 - a^2) = 3 \iff \log_4(a^2 + b^2 - a^2) = 3 \iff$

$\iff \log_4 b^2 = 3 \iff b^2 = 4^3 \iff b = \pm\sqrt{64} \underbrace{\iff}_{b>0} b = 8$

Opção correta: **(C)**

35.1 $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0\} =]3, +\infty[$

35.2 $g(x) = 0 \iff 2 - \log_5(x-3) = 0 \iff$

$\iff 2 = \log_5(x-3) \iff 5^2 = x - 3 \wedge x > 3 \iff x = 28$

28 é zero de g.

35.3 $y = 2 - \log_5(x-3) \iff \log_5(x-3) = 2 - y \iff$

$\iff x - 3 = 5^{2-y} \iff x = 3 + 5^{2-y}$

$g^{-1}(x) = 3 + 5^{2-x}$; $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$

36. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(3^{x+2}\right) = \log_3 3^{x+2} = x + 2$

Opção correta: **(C)**

37. $f(x) = 0 \iff \log_{\sqrt{2}}(x+2) - 6 = 0 \iff$

$\iff \log_{\sqrt{2}}(x+2) = 6 \iff x + 2 = \sqrt{2}^6 \iff x = 6$

Opção correta: **(D)**

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

38.1 $f(0) = -1 + e^{1-2\times 0} = -1 + e$

As coordenadas do ponto de interseção com o eixo das ordenadas são $(0, e-1)$.

38.2 $f(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + e^{1-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{1-2x} = 1 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Zero de f: $\frac{1}{2}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 3e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = 1 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Zero de g: 0

38.3 $e^{1-2x} > 0 \Leftrightarrow -1 + e^{1-2x} > -1 \Leftrightarrow f(x) > -1$

$D'_f =]-1, +\infty[$

$e^{-2x} > 0 \Leftrightarrow -3e^{1-2x} < 0 \Leftrightarrow 3 - 3e^{1-2x} < 3 \Leftrightarrow g(x) < 3$

$D'_g =]-\infty, 3[$

38.4 $y = 3 - 3e^{-2x} \Leftrightarrow 3e^{-2x} = 3 - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{3-y}{3} \Leftrightarrow -2x = \ln\left(\frac{3-y}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{y}{3}\right)$

$g^{-1}(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{x}{3}\right)$

38.5 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -1 + e^{1-2x} = 3 - 3e^{-2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^1 \times e^{-2x} + 3e^{-2x} = 4 \Leftrightarrow (e+3)e^{-2x} = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{4}{e+3} \Leftrightarrow -2x = \ln\left(\frac{4}{e+3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{e+3}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{4}{e+3}\right)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{e+3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \ln\frac{\sqrt{e+3}}{2}$

PÁG. 91

Aplicar+

39.1 $D_h = \{x \in \mathbb{R} : 2 - 2x > 0\} =]-\infty, 1[$

Cálculo auxiliar: $2 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -2 \Leftrightarrow x < 1$

39.2 $h(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \log_{\frac{1}{4}}(2 - 2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(2 - 2x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 - 2x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \wedge x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x = \sqrt{4^3} - 2 \wedge x < 1 \Leftrightarrow x = -3$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

39.3 h é monótona. Para sabermos se é crescente ou decrescente podemos determinar duas imagens, por exemplo, $h(0)=1+\log_{\frac{1}{4}}(2-2\times 0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ e $h\left(\frac{1}{2}\right)=1+\log_{\frac{1}{4}}\left(2-2\times\frac{1}{2}\right)=1+0=1$.

Como $0<\frac{1}{2}$ e $h(0)<h\left(\frac{1}{2}\right)$, concluímos que h é uma função crescente.

39.4 $y=1+\log_{\frac{1}{4}}(2-2x) \Leftrightarrow y-1=\log_{\frac{1}{4}}(2-2x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{y-1}=2-2x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{y-1}-2=-2x \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{y-1}=x$$

$$h^{-1}(x)=1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}=1-2^{-1}\times 2^{2-2x}=1-2^{1-2x}$$

$D_{h^{-1}}=\mathbb{R}$

40.1 $f(1)=2-\log_3(8-4\times 1)=2-\log_3 4$

As coordenadas do ponto A são $\left(1\,,\,2-\log_3 4\right)$.

$$A_{[AOB]}=\frac{|-3|\times\left(2-\log_3 4\right)}{2}=3-\frac{3}{2}\log_3 4=\log_3 3^3-\log_3 4^{\frac{3}{2}}=\log_3\frac{27}{\sqrt{4^3}}=\log_3\frac{27}{8}$$

Opção correta: **(C)**

40.2

a. $f\left(\frac{a}{8}\right)=2-\log_3\left(a-4\times\frac{a}{8}\right)=2-\log_3\left(\frac{a}{2}\right)$

$$A_{[AOB]}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(2-\log_3\left(\frac{a}{2}\right)\right)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-\log_3\left(\frac{a}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{a}{2}\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2}=3 \Leftrightarrow a=6$$

b. $y=2-\log_3(6-4x) \Leftrightarrow \log_3(6-4x)=2-y \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6-4x=3^{2-y} \Leftrightarrow 4x=6-3^{2-y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{6-3^{2-y}}{4} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\times 3^{2-y}$$

$f^{-1}(x)=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\times 3^{2-x}$

$D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

c. $D'_{f^{-1}}=D_f=\left]-\infty\,,\,\frac{3}{2}\right[$

41.1 $h(x)=\log_3(36x^3)-\log_9(4x^2)=\log_3(36x^3)-\frac{\log_3(2x)^2}{\log_3 9}=$

$$=\log_3(36x^3)-\frac{2\log_3(2x)}{2}=\log_3(36x^3)-\log_3(2x)=$$

$$=\log_3\left(\frac{36x^3}{2x}\right)=\log_3(18x^2)=\log_3 9+\log_3(2x^2)=2+\log_3(2x^2)$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

41.2 Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $h(x_1) = h(x_2)$, tem-se:

$2 + \log_3(2x_1^2) = 2 + \log_3(2x_2^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3(2x_1^2) = \log_3(2x_2^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+} x_1 = x_2$

Uma imagem, pela função h, tem um e só um objeto, logo a função h é invertível.

41.3 $h(x) = f(x) \Leftrightarrow 2 + \log_3(2x^2) = 1 + \log_3(1 - x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \log_3(2x^2) = \log_3(1 - x) \Leftrightarrow \log_3 3 + \log_3(2x^2) = \log_3(1 - x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3(6x^2) = \log_3(1 - x) \Leftrightarrow 6x^2 = 1 - x \wedge x > 0 \wedge x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x^2 + x - 1 = 0 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 6 \times (-1)}}{2 \times 6} \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \dfrac{1}{3} \vee x = -\dfrac{1}{2}\right) \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 1 + \log_3\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = \log_3 3 + \log_3\left(\dfrac{2}{3}\right) = \log_3 2$

As coordenadas do ponto de interseção são $\left(\dfrac{1}{3}, \log_3 2\right)$.

PÁG. 92

Aplicar+

42.1 $e^{x+1} = \sqrt{e^{2x^2-2}} \Leftrightarrow e^{x+1} = e^{x^2-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

C. S. $= \{-1, 2\}$

42.2 $3^{x+4} = 75 \times 5^{x+1} \Leftrightarrow 3^{x+4} = 3 \times 5^2 \times 5^{x+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{x+3} = 5^{x+3} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{5^{x+3}}{3^{x+3}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{3}\right)^0 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{x+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = x + 3 \Leftrightarrow x = -3$

C. S. $= \{-3\}$

42.3 $3^x + 2 \times 3^{2-x} = 11 \Leftrightarrow 3^x + \dfrac{2 \times 3^2}{3^x} = 11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 + 18 = 11 \times 3^x \Leftrightarrow (3^x)^2 - 11 \times 3^x + 18 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x = \dfrac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 18}}{2} \Leftrightarrow 3^x = 9 \vee 3^x = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \log_3 2$

C. S. $= \{\log_3 2, 2\}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

42.4 Domínio das expressões:

$$\{x \in \mathbb{R} : 2 - x > 0 \wedge 2x + 3 > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < 2 \wedge x > -\frac{3}{2}\right\} = \left]-\frac{3}{2}, 2\right[$$

$$\ln(2 - x) = \ln(2x + 3) \Leftrightarrow 2 - x = 2x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 = 3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

C. S. $= \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

42.5 Domínio das expressões:

$$\{x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0 \wedge 13 - x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \wedge x < 13\} =]3, 13[$$

$$\log_2(x - 3) = 4 - \log_2(13 - x) \Leftrightarrow \log_2(x - 3) + \log_2(13 - x) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2((x - 3)(13 - x)) = 4 \Leftrightarrow -x^2 + 16x - 39 = 2^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 16x - 55 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \times (-1) \times (-55)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 11 \vee x = 5$$

C. S. $= \{5, 11\}$

42.6 Domínio das expressões:

$$\{x \in \mathbb{R} : 6x + 1 > 0 \wedge x > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{1}{6} \wedge x > 0\right\} =]0, +\infty[$$

$$\log_4(6x + 1) - \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_2(6x + 1)}{\log_2 4} = 2 + \log_2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(6x + 1) = 4 + 2\log_2 x \Leftrightarrow \log_2(6x + 1) = \log_2 2^4 + \log_2 x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(6x + 1) = \log_2(16x^2) \Leftrightarrow 6x + 1 = 16x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8} \vee x = \frac{1}{2} \underbrace{\Leftrightarrow}_{x \in]0, +\infty[} x = \frac{1}{2}$$

C. S. $= \left\{\frac{1}{2}\right\}$

43. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^x - 1 = 5 - 8 \times 2^{-x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^x - 1 = 5 - \frac{8}{2^x} \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6 \times 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 8}}{2} \Leftrightarrow 2^x = 2 \vee 2^x = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

$f(1) = 2 - 1 = 1$

$f(2) = 2^2 - 1 = 3$

As coordenadas dos pontos de interseção são $A(1, 1)$ e $B(2, 3)$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

44. Domínio das expressões:

$\{x \in \mathbb{R} : x+3>0 \wedge 8-2x>0 \wedge (x+3)^2>0\} = \{x \in \mathbb{R} : x>-3 \wedge x<4 \wedge x \neq -3\} =]-3, 4[$

$x\log_2(x+3) = (x-2)\log_2(8-2x) + \log_2(x+3)^2 \iff$

$\iff x\log_2(x+3) - 2\log_2(x+3) = (x-2)\log_2(8-2x) \iff$

$\iff (x-2)\log_2(x+3) - (x-2)\log_2(8-2x) = 0 \iff$

$\iff (x-2)\left(\log_2(x+3) - \log_2(8-2x)\right) = 0 \iff$

$\iff x-2=0 \vee \log_2(x+3) - \log_2(8-2x) = 0 \iff$

$\iff x=2 \vee \log_2(x+3) = \log_2(8-2x) \iff$

$\iff x=2 \vee x+3 = 8-2x \iff x=2 \vee 3x=5 \iff$

$\iff x=2 \vee x=\frac{5}{3}$

C. S. $= \left\{\frac{5}{3}, 2\right\}$

45.1 $M(0) = 4\times 3^{-2\times 0+1} = 12$ mg

45.2 $M(t)=4 \iff 4\times 3^{-2t+1}=4 \iff 3^{-2t+1}=1 \iff -2t+1=0 \iff t=\frac{1}{2}$

Decorre meia hora, ou seja, 30 minutos.

PÁG. 93

Aplicar+

46.1 $T(0) = 18+56e^{\left(-\frac{0}{30}\right)} = 74$ °C

46.2 $T(5) = 18+56e^{\left(-\frac{5}{30}\right)} \approx 65{,}4$ °C

46.3 $T(t)=32 \iff 18+56e^{\left(-\frac{t}{30}\right)}=32 \iff$

$\iff e^{\left(-\frac{t}{30}\right)} = \frac{1}{4} \iff -\frac{t}{30} = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \iff$

$\iff t = -30\ln\left(\frac{1}{4}\right) \iff t \approx 42$ minutos

47.1 $N(0)=a$ é o número de bactérias que inicialmente existiam na colónia.

47.2 $\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{ae^{0{,}229(t+1)}}{ae^{0{,}229t}} = e^{0{,}229} \approx 1{,}26$;

o número de bactérias aumenta aproximadamente 26% a cada hora.

47.3 $N(t+x) = 3N(t) \iff ae^{0{,}229(t+x)} = 3ae^{0{,}229t} \iff$

$\iff ae^{0{,}229t}\times e^{0{,}229x} - 3ae^{0{,}229t} = 0 \iff ae^{0{,}229t}\left(e^{0{,}229x}-3\right)=0 \iff$

$\iff \underbrace{ae^{0{,}229t}=0}_{\text{eq. impossível}} \vee e^{0{,}229x}-3=0 \iff 0{,}229x = \ln 3 \iff$

$\iff x = \frac{\ln 3}{0{,}229} \iff x \approx 4{,}797$,

que corresponde a 4 horas e $0{,}797\times 60 = 47{,}82$ minutos; o número de bactérias na colónia triplica a cada 4 horas e 48 minutos, aproximadamente.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

47.4 $N(1)=44 \Leftrightarrow ae^{0,229\times 1}=44 \Leftrightarrow a=\dfrac{44}{e^{0,229}}$

$N(3)=\dfrac{44}{e^{0,229}}e^{0,229\times 3}=44e^{0,229\times 2}\approx 69{,}560$

Ao fim de três horas existiam $69{,}560$ milhares de bactérias, ou seja, $69\,560$ bactérias.

48.1 $P(0)=10 \Leftrightarrow \dfrac{100}{1+Ae^{-0,8\times 0}}=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+A=10 \Leftrightarrow A=9$

48.2 $P(t)=50 \Leftrightarrow \dfrac{100}{1+9e^{-0,8\times t}}=50 \Leftrightarrow 1+9e^{-0,8\times t}=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-0,8\times t}=\dfrac{1}{9} \Leftrightarrow -0,8\times t=\ln\left(\dfrac{1}{9}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{-0,8} \Leftrightarrow t\approx 2{,}747$

$0{,}747\times 12=8{,}964$

Aproximadamente, dois anos e nove meses.

48.3 $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{100}{1+9e^{-0,8t}}=\dfrac{100}{1+9\times 0}=100$

A população nunca atingirá os cem indivíduos.

PÁG. 94

Aplicar+

49.1 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(ae^{-0,35t}+b\right)=25 \Leftrightarrow a\times 0+b=25 \Leftrightarrow b=25$

$T(0)=80 \Leftrightarrow ae^{-0,35\times 0}+25=80 \Leftrightarrow a=55$

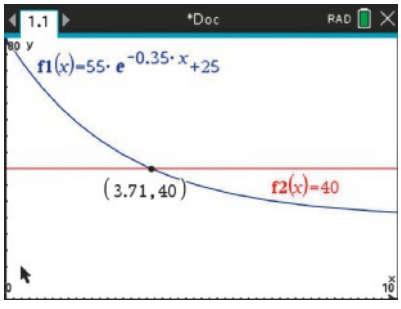
49.2 $T(t)>40$

Analiticamente:

$55e^{-0,35\times t}+25>40 \Leftrightarrow 55e^{-0,35\times t}>15 \Leftrightarrow e^{-0,35\times t}>\dfrac{3}{11} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,35\times t>\ln\dfrac{3}{11} \Leftrightarrow t<\dfrac{\ln\frac{3}{11}}{-0,35} \Leftrightarrow t<3{,}71$

Graficamente:



Durante $3{,}71$ minutos, que corresponde a 3 minutos e $0{,}71\times 60=42{,}6\approx 43$ segundos.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

50.1 $L(1)=60 \Leftrightarrow ae^{b}=60 \Leftrightarrow a=\dfrac{60}{e^{b}}$

$L(2)=30 \Leftrightarrow ae^{2b}=30 \Leftrightarrow \dfrac{60}{e^{b}}e^{2b}=30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 60e^{b}=30 \Leftrightarrow e^{b}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=\ln\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow b=-\ln 2$

Logo, $a=\dfrac{60}{\frac{1}{2}}=120$.

50.2 $L(x)=15 \Leftrightarrow 120e^{-x\ln 2}=15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-x\ln 2}=\dfrac{15}{120} \Leftrightarrow -x\ln 2=\ln\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-\ln 8}{-\ln 2} \Leftrightarrow x=\log_2 8 \Leftrightarrow x=3$

A distância entre a lâmpada e o objeto é 3 metros.

50.3 $\dfrac{L(x+2)}{L(x)}=\dfrac{120e^{-(x+2)\ln 2}}{120e^{-x\ln 2}}=e^{-2\ln 2}=e^{\ln\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{4}$

O nível de iluminação decresce 75% .

51.1 $M(1{,}5)=0{,}423 \Leftrightarrow Ae^{-1{,}036\times 1{,}5}=0{,}423 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A=\dfrac{0{,}423}{e^{-1{,}554}} \Leftrightarrow A\approx 2$

A massa da amostra quando foi colocada em repouso era 2 mg .

51.2 $\dfrac{M(t+2)}{M(t)}=\dfrac{Ae^{-1{,}036(t+2)}}{Ae^{-1{,}036t}}=e^{-2{,}072}\approx 0{,}13$

A massa de Z-65 reduz-se, aproximadamente, 87% a cada dois anos.

PÁG. 95

Aplicar+

52. Lei do arrefecimento/aquecimento de Newton: $T(t)=(T_0-T_a)e^{-k(t-t_0)}+T_a$

$T(10)=103 \Leftrightarrow (211-28)e^{-k(10-0)}+28=103 \Leftrightarrow$

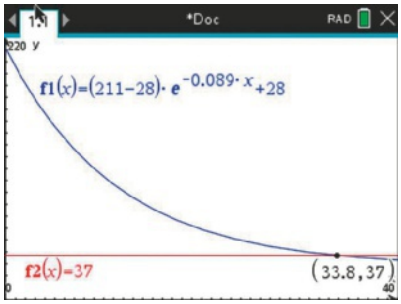
$\Leftrightarrow e^{-10k}=\dfrac{75}{183} \Leftrightarrow -10k=\ln\left(\dfrac{75}{183}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{\ln\left(\frac{75}{183}\right)}{-10} \Leftrightarrow k\approx 0{,}089$

$T(t)<37 \Leftrightarrow (211-28)e^{-0{,}089(t)}+28<37$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

Vamos recorrer a uma calculadora gráfica para obter o ponto de interseção.



O frango passou a ter uma temperatura inferior a $37\ °C$ ao fim de aproximadamente 34 minutos.

53.1 $A(0)=0{,}6 \iff \dfrac{3}{1+ae^{-b\times 0}}=0{,}6 \iff$

$\iff \dfrac{3}{1+a}=0{,}6 \iff \dfrac{3}{0{,}6}=1+a \iff a=4$

$A(2{,}5)=1{,}214 \iff \dfrac{3}{1+4e^{-b\times 2{,}5}}=1{,}214 \iff 1+4e^{-b\times 2{,}5}=\dfrac{3}{1{,}214} \iff$

$\iff e^{-b\times 2{,}5}\approx 0{,}368 \iff -b\times 2{,}5\approx \ln 0{,}368 \iff b\approx 0{,}4$

53.2 $A(t)=B(t) \iff \dfrac{3}{1+4e^{-0{,}4t}}=6e^{-0{,}4t} \iff$

$\iff 3=6e^{-0{,}4t}+24\left(e^{-0{,}4t}\right)^2 \iff 8\left(e^{-0{,}4t}\right)^2+2e^{-0{,}4t}-1=0 \iff$

$\iff e^{-0{,}4t}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 8\times(-1)}}{2\times 8} \iff \underbrace{e^{-0{,}4t}=-\dfrac{1}{2}}_{\text{eq. impossível}} \vee e^{-0{,}4t}=\dfrac{1}{4} \iff$

$\iff -0{,}4t=\ln\dfrac{1}{4} \iff t=\dfrac{-\ln 4}{-0{,}4} \iff t=3{,}466$

$t=3{,}466 \longrightarrow 3$ dias e $0{,}466\times 24\approx 11$ horas

O número de indivíduos de cada espécie foi igual ao fim de três dias e onze horas, aproximadamente.

53.3

a. $\dfrac{B(t+3{,}25)}{B(t)}=\dfrac{6e^{-0{,}4(t+3{,}25)}}{6e^{-0{,}4t}}=\dfrac{e^{-0{,}4t}\times e^{-0{,}4\times 3{,}25}}{e^{-0{,}4t}}=e^{-1{,}3}\approx 0{,}27$

O número de indivíduos da espécie B reduz-se, aproximadamente, 73% a cada três dias e seis horas.

b. $B(t+x)=0{,}8B(t) \iff 6e^{-0{,}4(t+x)}=0{,}8\times 6e^{-0{,}4t} \iff$

$\iff 6e^{-0{,}4t}\times e^{-0{,}4x}=0{,}8\times 6e^{-0{,}4t} \iff e^{-0{,}4x}=0{,}8 \iff$

$\iff -0{,}4x=\ln(0{,}8) \iff x=\dfrac{\ln(0{,}8)}{-0{,}4} \iff x\approx 0{,}56$

$x\approx 0{,}56 \longrightarrow 0{,}56\times 24\approx 13$ horas

A cada 13 horas, aproximadamente, o número de indivíduos da espécie B reduz-se 20%.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

54.1 36 horas $\longleftrightarrow$ 1,5 dias

$$1{,}5 = B(\ln(1{,}66) + A) \iff B = \frac{1{,}5}{\ln(1{,}66) + A}$$

$$2 = B(\ln(1{,}66 - 0{,}1) + A) \iff B = \frac{2}{\ln(1{,}56) + A}$$

$$\frac{1{,}5}{\ln(1{,}66) + A} = \frac{2}{\ln(1{,}56) + A} \iff 1{,}5\ln(1{,}56) + 1{,}5A = 2\ln(1{,}66) + 2A \iff$$

$$\iff 1{,}5\ln(1{,}56) - 2\ln(1{,}66) = 0{,}5A \iff A \approx -0{,}6932$$

$$B = \frac{1{,}5}{\ln(1{,}66) - 0{,}6932} \approx -8{,}05$$

$$0 = -8{,}05(\ln(m) - 0{,}6932) \iff \ln(m) = 0{,}6932 \iff$$

$$\iff m = e^{0{,}6932} \iff m \approx 2$$

A massa que foi colocada em repouso tinha 2 mg .

54.2 $t(xm) = t(m) + 5{,}59 \iff B(\ln(xm) + A) = B(\ln(m) + A) + 5{,}59 \iff$

$$\iff B(\ln(x) + \ln(m) + A) = B(\ln(m) + A) + 5{,}59 \iff$$

$$\iff B(\ln(m) + A) + B\ln(x) = B(\ln(m) + A) + 5{,}59 \iff$$

$$\iff B\ln(x) = 5{,}59 \iff \ln(x) = \frac{5{,}59}{-8{,}05} \iff$$

$$\iff x = e^{\frac{5{,}59}{-8{,}05}} \iff x \approx 0{,}5$$

A massa de Mn-52 reduz-se a metade a cada 5,59 dias, ou seja, a semivida do Mn-52 é 5,59 dias, aproximadamente.

54.3 $t = B(\ln(m) + A) \iff \frac{t}{B} = \ln(m) + A \iff$

$$\iff \ln(m) = \frac{t}{B} - A \iff m = e^{\frac{t}{B} - A}$$

$m(t) = e^{\frac{t}{B} - A}$

PÁG. 96

Aplicar+

55.1 $M(xE) = 1 + M(E) \iff \frac{2}{3}\log\left(\frac{xE}{E_0}\right) = 1 + \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right) \iff$

$$\iff \frac{2}{3}\left(\log(x) + \log\left(\frac{E}{E_0}\right)\right) = 1 + \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right) \iff$$

$$\iff \frac{2}{3}\log(x) + \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = 1 + \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right) \iff$$

$$\iff \frac{2}{3}\log(x) = 1 \iff \log(x) = \frac{3}{2} \iff$$

$$\iff x = 10^{\frac{3}{2}} \iff x \approx 31{,}6$$

Se a diferença entre a magnitude de dois sismos for 1 , o maior liberta, aproximadamente, mais 31,6 vezes energia do que o menor.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

55.2 $M_2 - M_1 = k \Leftrightarrow \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) - \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) - \log\left(\frac{E_1}{E_0}\right)\right) = k \Leftrightarrow \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{3}{2}k \Leftrightarrow \frac{E_2}{E_1} = 10^{\frac{3}{2}k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E_2 = 10^{\frac{3}{2}k}E_1$

Se a diferença entre a magnitude de dois sismos for k, o maior liberta mais $10^{\frac{3}{2}k}$ vezes energia do que o menor.

55.3

a. $k = 8{,}3 - 7{,}1 = 1{,}2$

$E_{\text{São Francisco}} = 10^{\frac{3}{2}\times 1{,}2}E_{\text{México}} \Leftrightarrow E_{\text{São Francisco}} \approx 63{,}1E_{\text{México}}$

b. $E_{\text{África do Sul}} = 4E_{\text{São Francisco}} \Leftrightarrow 10^{\frac{3}{2}k} = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}k = \log 4 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}\log 4 \Leftrightarrow k \approx 0{,}4$

$M_{\text{África do Sul}} = 8{,}3 + 0{,}4 = 8{,}7$

55.4 $9 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{7\times 10^6}{E_0}\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{7\times 10^6}{E_0}\right) = \frac{27}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7\times 10^6}{E_0} = 10^{\frac{27}{2}} \Leftrightarrow E_0 = \frac{7\times 10^6}{10^{\frac{27}{2}}} \Leftrightarrow E_0 \approx 2{,}21\times 10^{-7}$ kWh

56.1 $-3{,}63 = 1{,}97 + 5(1 - \log d) \Leftrightarrow \frac{-5{,}6}{5} = 1 - \log d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log d = 2{,}12 \Leftrightarrow d = 10^{2{,}12} \Leftrightarrow d \approx 131{,}83$ parsec

PÁG. 97

Aplicar+

56.2 $m = m + 5(1 - \log d) \Leftrightarrow 0 = 1 - \log d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log d = 1 \Leftrightarrow d = 10$ parsec

56.3 $M_{Sol} = -26{,}74 + 5\left(1 - \log\left(4{,}85\times 10^{-6}\right)\right) \approx 4{,}83$

$2{,}5\log\left(\frac{B_{Polaris}}{B_{Sol}}\right) = 4{,}83 + 3{,}63 \Leftrightarrow \log\left(\frac{B_{Polaris}}{B_{Sol}}\right) \approx 3{,}384 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{B_{Polaris}}{B_{Sol}} \approx 10^{3{,}384} \Leftrightarrow B_{Polaris} \approx 2421B_{Sol}$

A magnitude aparente do Sol é $-26{,}74$ e a da Polaris é $1{,}97$, pelo que o Sol, visto da Terra, parece muito mais brilhante do que a Polaris. No entanto, o brilho intrínseco da Polaris é cerca de 2421 vezes superior ao do Sol.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

57.1 $P(t)=3P(0) \iff \dfrac{1}{2+38e^{-t}}=3\times\dfrac{1}{2+38e^{0}} \iff$

$\iff \dfrac{1}{2+38e^{-t}}=\dfrac{3}{40} \iff 2+38e^{-t}=\dfrac{40}{3} \iff$

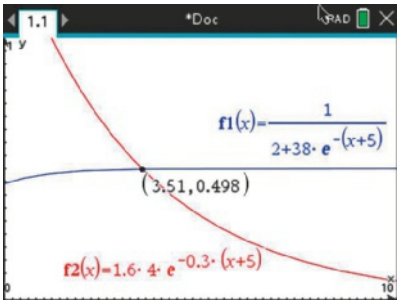
$\iff e^{-t}=\dfrac{17}{57} \iff -t=\ln\left(\dfrac{17}{57}\right) \iff t\approx 1{,}21$

$E(1{,}21)=4e^{-0{,}3\times 1{,}21}\approx 2{,}782$

Opção correta: **(C)**

57.2 $P(t_1+5)=1{,}6E(t_1+5)$

Vamos recorrer a uma calculadora gráfica para obter o instante t_1.



$t_1\approx 3{,}51$, aproximadamente, três anos e seis meses ($0{,}51\times 12\approx 6$).

PÁG. 103

Autoavaliação

1. Apenas num dos gráficos existem retas horizontais que intersetam o gráfico da função em mais do que um ponto.

Opção correta: **(B)**

2. $x=\log_6 5\times\log_5 4 \iff x=\log_6 5^{\log_5 4} \iff x=\log_6 4 \iff 6^x=4$

Opção correta: **(B)**

3. $\mathrm{P}=4\times\log\left(a^2\right)=4\times 2\log a=8\log a$

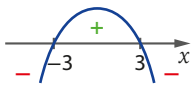
Opção correta: **(A)**

4. $D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g : g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} : g(x)\in\mathbb{R}^+\right\}$

$-x^2+9>0 \iff x\in\,]-3\,,\,3[$

$D_{f\circ g}=\,]-3\,,\,3[$

Opção correta: **(C)**



Cálculo auxiliar:

$-x^2+9=0 \iff x=\pm\sqrt{9} \iff$

$\iff x=-3 \vee x=3$

5. $y=3+5\log_3(x+2) \iff \dfrac{y-3}{5}=\log_3(x+2) \iff$

$\iff 3^{\frac{y-3}{5}}=x+2 \iff x=3^{\frac{y-3}{5}}-2$

$g^{-1}(x)=3^{\frac{x-3}{5}}-2 \;;\; D_{g^{-1}}=\mathbb{R}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 104

Autoavaliação

6.1 $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 > 0\} =]1 , +\infty[$

6.2 $g(5) = \log_b(5 - 1) = \log_b 4$

$g(x) = 0 \iff \log_b(x - 1) = 0 \iff x - 1 = b^0 \iff x = 2$

$A = \overline{AB} \times \overline{BC}$

$6 = (5 - 2) \times \log_b 4 \iff \log_b 4 = 2 \iff b^2 = 4 \iff b = 2 \vee b = -2 \underset{b>1}{\iff} b = 2$

6.3 Domínio das expressões:

$\{x \in \mathbb{R} : 4 - x > 0 \wedge x - 1 > 0\} =]1 , 4[$

$$f(x) = g(x) \iff 1 - \log_2(4 - x) = \log_2(x - 1) \iff$$
$$\iff 1 = \log_2(x - 1) + \log_2(4 - x) \iff 1 = \log_2((x - 1)(4 - x)) \iff$$
$$\iff 2^1 = (x - 1)(4 - x) \iff 2 = 5x - x^2 - 4 \iff$$
$$\iff x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 6}}{2} \iff$$
$$\iff x = 3 \vee x = 2$$

As duas soluções estão no domínio.

$g(3) = \log_2(3 - 1) = 1$ e $g(2) = \log_2(2 - 1) = 0$

As coordenadas dos pontos de interseção são: $(2 , 0)$ e $(3 , 1)$.

7.1 $h(30) - h(5) = (6{,}52 \ln(30) - 4{,}5375) - (6{,}52 \ln(5) - 4{,}5375) \approx 11{,}7$ m

7.2 $h(t) = 2h(5) \iff 6{,}52 \ln(t) - 4{,}5375 = 2(6{,}52 \ln(5) - 4{,}5375) \iff$

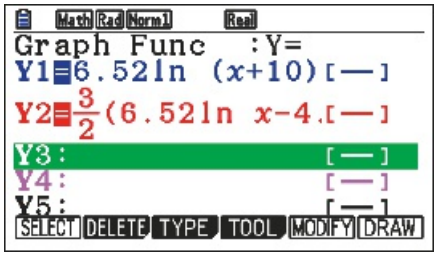
$$\iff 6{,}52 \ln(t) \approx 16{,}450 \iff \ln(t) \approx 2{,}523 \iff$$
$$\iff t \approx e^{2{,}523} \iff t \approx 12{,}466$$

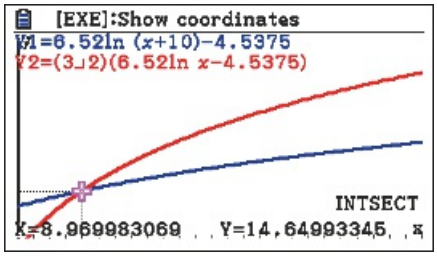
$12{,}466 \in [5 , 30]$

$12{,}466 - 5 = 7{,}466$

Sim, ao fim de, aproximadamente, sete anos e seis meses.

7.3 $h(t + 10) = \frac{3}{2} h(t) \iff 6{,}52 \ln(t + 10) - 4{,}5375 = \frac{3}{2}(6{,}52 \ln(t) - 4{,}5375)$





As coordenadas do ponto de interseção são $(8{,}97 ; 14{,}65)$.

A árvore tem aproximadamente nove anos.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 105

Autoavaliação

8. $(1-0{,}36)m_0 = m_0 e^{-k\times 2} \iff e^{-k\times 2} = 0{,}64 \iff k = \dfrac{\ln(0{,}64)}{-2} \iff k \approx 0{,}223$

Opção correta: **(A)**

9.1 $V(t+x) = \dfrac{1}{3}V(t) \iff 4e^{-0{,}4(t+x)} = \dfrac{1}{3}\times 4e^{-0{,}4t} \iff$

$\iff 4e^{-0{,}4t}\times e^{-0{,}4x} = \dfrac{1}{3}\times 4e^{-0{,}4t} \iff e^{-0{,}4x} = \dfrac{1}{3} \iff$

$\iff -0{,}4x = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \iff x = \dfrac{-\ln(3)}{-0{,}4} \iff$

$\iff x = \dfrac{5}{2}\ln(3) \iff x = \ln\left(3^{\frac{5}{2}}\right) \iff$

$\iff x = \ln\sqrt{243} \iff x \approx 2{,}75$

A cada duas horas e quarenta e cinco minutos, aproximadamente, o volume de água velha reduz-se $\dfrac{2}{3}$.

9.2 $V(t) = N(t) \iff 4e^{-0{,}4t} = \dfrac{8}{1+3e^{-0{,}4t}} \iff$

$\iff 4e^{-0{,}4t}\times\left(1+3e^{-0{,}4t}\right) = 8 \iff 12\left(e^{-0{,}4t}\right)^2 + 4e^{-0{,}4t} - 8 = 0 \iff$

$\iff e^{-0{,}4t} = \dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times 12\times(-8)}}{2\times 12} \iff$

$\iff e^{-0{,}4t} = \dfrac{2}{3} \vee \underbrace{e^{-0{,}4t} = -1}_{\text{eq. impossível}} \iff t = \dfrac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{-0{,}4} \iff t \approx 1$

Aproximadamente uma hora.

9.3 $N(t) = 7 \iff \dfrac{8}{1+3e^{-0{,}4t}} = 7 \iff 1+3e^{-0{,}4t} = \dfrac{8}{7} \iff$

$\iff e^{-0{,}4t} = \dfrac{1}{21} \iff t = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{21}\right)}{-0{,}4} \iff t = \dfrac{\ln(21)}{0{,}4}$

$V\left(\dfrac{\ln(21)}{0{,}4}\right) = 4e^{-0{,}4\times\frac{\ln(21)}{0{,}4}} = 4e^{-\ln(21)} = 4\times\dfrac{1}{21} = \dfrac{4}{21}$

$V(0) = 4e^{-0{,}4\times 0} = 4$

$\dfrac{4}{21} : 4\times 100 \approx 4{,}76\%$

A percentagem de água velha que ainda resta no tanque é $4{,}76\%$.

PÁG. 106

Preparar o exame

1. $(f-g)^{-1}(2) = 3 \iff (f-g)(3) = 2 \iff f(3)-g(3) = 2 \iff 4-g(3) = 2 \iff g(3) = 2$

Opção correta: **(B)**

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

2.1 $(g\circ f)(x)=0 \iff g(f(x))=0$

Como o único zero da função g é 2, tem-se $g(x)=0 \iff x=2$ e $g(f(x))=0 \iff f(x)=2$.

Observando o gráfico de f, concluímos que os objetos cuja imagem é 2, pela função f, são 1 e 5.

2.2 $D_{f\circ g}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}=\{x\in \mathbb{R} : g(x)\in[-1,6]\}$

$-1\leqslant x-2\leqslant 6 \iff 1\leqslant x\leqslant 8$

Logo, $D_{f\circ g}=[1,8]$.

Opção correta: **(C)**

Cálculo auxiliar:

Os pontos de coordenadas $(2,0)$ e $(3,1)$ pertencem ao gráfico da função afim g.

$m=\dfrac{1-0}{3-2}=1$ e $b=-2$, logo $g(x)=x-2$.

2.3 $h(x)=4-\dfrac{3}{g(x)}=4-\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{4x-11}{x-2}$

$y=\dfrac{4x-11}{x-2} \iff y(x-2)=4x-11 \iff xy-2y=4x-11 \iff$

$\iff xy-4x=2y-11 \iff x(y-4)=2y-11 \iff x=\dfrac{2y-11}{y-4}$

$h^{-1}(x)=\dfrac{2x-11}{x-4}$; $D_{h^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

3. Como $(f\circ g)(x)=x$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, então $g(x)=f^{-1}(x)$.

$y=2x+4 \iff \dfrac{y-4}{2}=x$, logo, $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x-2$.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 107

Preparar o exame

4.1 A reta de equação $y=-4$ é assíntota horizontal ao gráfico de g, pelo que $d=-4$.

$g(0)=5 \iff 3^{a\times 0+b}-4=5 \iff 3^b=9 \iff 3^b=3^2 \iff b=2$

$g(2)=3 \iff 3^{a\times 2+2}-4=-3 \iff 3^{2a+2}=1 \iff 3^{2a+2}=3^0 \iff 2a+2=0 \iff a=-1$

4.2 $g(x)=3^{-x+2}-4$

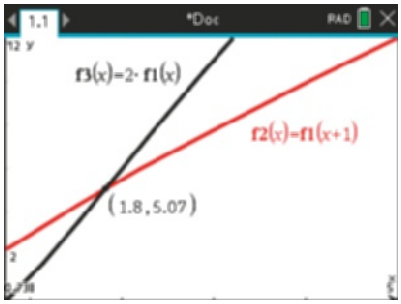
$y=3^{-x+2}-4 \iff y+4=3^{-x+2} \iff \log_3(y+4)=-x+2 \iff 2-\log_3(y+4)=x$

$g^{-1}(x)=2-\log_3(x+4)$, $D_{g^{-1}}=\{x\in\mathbb{R} : x+4>0\}=]-4,+\infty[$

4.3

a. $A_{[ABC]}=\dfrac{c\times(-g(c))}{2}=\dfrac{c\times(4-3^{-c+2})}{2}=\dfrac{4c-c\times 3^{-c}\times 3^2}{2}=\dfrac{4c-9c\times 3^{-c}}{2}=2c-\dfrac{9c}{2\times 3^c}$

b. $S(c+1)=2S(c)$



As coordenadas pedidas são $(c, g(c))$, com $c\approx 1{,}8$ e $g(c)\approx g(1{,}8)\approx 2{,}5$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 108

Preparar o exame

4.4

a. $D_{f\circ g}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} : 3^{-x+2}-4\in]-3,+\infty[\}$

$3^{-x+2}-4>-3 \iff 3^{-x+2}>1 \iff 3^{-x+2}>3^0 \underset{3^x \text{ crescente}}{\iff} -x+2>0 \iff x<2$

$D_{f\circ g}=]-\infty,2[$

b. $f(x)-f(3-2x)=\ln(2-x) \iff 2+\ln(x+3)-(2+\ln(3-2x+3))=\ln(2-x) \iff$

$\iff 2+\ln(x+3)-2-\ln(6-2x)=\ln(2-x) \iff \ln(x+3)-\ln(6-2x)=\ln(2-x) \iff$

$\iff \ln\left(\frac{x+3}{6-2x}\right)=\ln(2-x) \iff \frac{x+3}{6-2x}=2-x \iff \frac{x+3-(2-x)}{6-2x}=0 \iff$

$\iff \frac{-2x^2+11x-9}{6-2x}=0 \iff -2x^2+11x-9=0 \wedge 6-2x\neq 0 \iff$

$\iff x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\times(-2)\times(-9)}}{2\times(-2)} \wedge x\neq 3 \iff x=\frac{-11\pm\sqrt{49}}{-4} \wedge x\neq 3 \iff$

$\iff x=\frac{-11-7}{-4} \vee x=\frac{-11+7}{-4} \wedge x\neq 3 \iff x=\frac{9}{2} \vee x=1 \wedge x\neq 3 \iff x=\frac{9}{2} \vee x=1$

Domínio: $x+3>0 \wedge 6-2x>0 \wedge 2-x>0 \iff x>-3 \wedge x<3 \wedge x<2 \iff x\in]-3,2[$

Como $\frac{9}{2}\notin]-3,2[$ e $1\in]-3,2[$, conclui-se que o conjunto solução da equação é $\{1\}$.

5. $f(2)=9 \iff (8^a-1)^2=9 \iff 8^a-1=3 \vee 8^a-1=-3 \iff 8^a=4 \vee \underbrace{8^a=-2}_{\text{imp.}} \iff$

$\iff 2^{3a}=2^2 \iff 3a=2 \iff a=\frac{2}{3}$

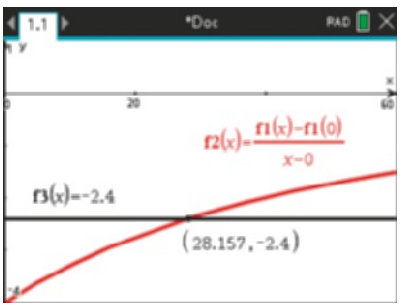
Opção correta: **(B)**

6.1 $T(t_1)=30 \iff 20+100e^{-kt_1}=30 \iff e^{-kt_1}=\frac{30-20}{100} \iff$

$\iff -kt_1=\ln\left(\frac{1}{10}\right) \iff k=\frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{-t_1} \iff k=\frac{\ln 10}{t_1}$

Opção correta: **(B)**

6.2 $\frac{T(t_2)-T(0)}{t_2-0}=-2{,}4$



$t_2\approx 28{,}157$, que corresponde a 28 minutos e $0{,}157\times 60\approx 9$ segundos.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 109

Preparar o exame

7. $A(a\,,0)$; $B(a+4,0)$; $\overline{AB}=4$

$D\big(a\,,f(a)\big)$; $f(a)=\log_{2a}a$; $C\big(a+4\,,f(a+4)\big)$; $f(a+4)=\log_{2a}(a+4)$

$\overline{AD}=\log_{2a}a$; $\overline{BC}=\log_{2a}(a+4)$

$$A_{[ABCD]}=4 \iff \frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{AB}=4 \iff \frac{\log_{2a}a+\log_{2a}(a+4)}{2}\times 4=4 \iff$$

$$\iff \log_{2a}a+\log_{2a}(a+4)=\frac{4\times 2}{4} \iff \log_{2a}\big(a\times(a+4)\big)=2 \iff \log_{2a}\left(a^2+4a\right)=2 \iff$$

$$\iff (2a)^2=a^2+4a \iff 4a^2=a^2+4a \iff 3a^2-4a=0 \iff$$

$$\iff a(3a-4)=0 \iff a=0\vee 3a-4=0 \underset{a>1}{\iff} a=\frac{4}{3}$$

8.1 $38{,}08-8{,}268\ln p=30 \iff \ln p=\dfrac{30-38{,}08}{-8{,}268} \iff p=e^{\frac{8{,}08}{8{,}268}} \iff p\approx 2{,}66\,\%$

8.2 $t(p)-t(2p)=38{,}08-8{,}268\ln p-\big(38{,}08-8{,}268\ln(2p)\big)=$

$$=38{,}08-8{,}268\ln p-38{,}08+8{,}268\ln(2p)=8{,}268\ln(2p)-8{,}268\ln p=$$

$$=8{,}268\big(\ln(2p)-\ln p\big)=8{,}268\ln\left(\frac{2p}{p}\right)=8{,}268\ln 2\approx 5{,}731$$

A diferença de idades entre dois fósseis, em que um tem o dobro da idade do outro é, aproximadamente, 5731 anos.

8.3 $t=38{,}08-8{,}268\ln p \iff \ln p=\dfrac{t-38{,}08}{-8{,}268} \iff p=e^{\frac{38{,}08-t}{8{,}268}} \iff$

$$\iff p=e^{\frac{38{,}08}{8{,}268}}\times e^{-\frac{1}{8{,}268}t} \iff p\approx 100e^{-0{,}121t}$$

$A\approx 100$ e $B\approx -0{,}121$.

A é a percentagem de C-14 presente no ser vivo, $100\,\%$.

9.1 Observando o gráfico de f, verifica-se que existem retas horizontais que intersetam o gráfico de f em mais do que um ponto, pelo que f não é invertível.

Alternativamente, $f(e)=f\big(e^{-1}\big)=1$, pelo que f não é invertível.

9.2 $f(x)=g(x) \iff \ln^2 x=\ln x+2 \iff \ln^2 x-\ln x-2=0 \iff$

$$\iff \ln x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times(-2)}}{2} \iff \ln x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2} \iff$$

$$\iff \ln x=\frac{1-3}{2}\vee\ln x=\frac{1+3}{2} \iff \ln x=-1\vee\ln x=2 \iff x=e^{-1}\vee x=e^2$$

$g\big(e^{-1}\big)=\ln\big(e^{-1}\big)+2=-1+2=1$; $A\left(\dfrac{1}{e}\,,1\right)$

$g\big(e^2\big)=\ln\big(e^2\big)+2=2+2=4$; $B\big(e^2\,,4\big)$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 110

Preparar o exame

10.1 $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x+\ln(e^x+1)=2x+1 \Leftrightarrow \ln(e^x+1)=x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(e^x+1)=x+1 \Leftrightarrow e^{x+1}=e^x+1 \Leftrightarrow e^x\times e-e^x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x(e-1)=1 \Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{e-1} \Leftrightarrow x=\ln\left(\dfrac{1}{e-1}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\ln\left((e-1)^{-1}\right) \Leftrightarrow x=-\ln(e-1)$

10.2 $h(x)=f(x)-x=x+\ln(e^x+1)-x=\ln(e^x+1)$

$y=\ln(e^x+1) \Leftrightarrow e^y=e^x+1 \Leftrightarrow e^y-1=e^x \Leftrightarrow \ln(e^y-1)=x$

$h^{-1}(x)=\ln(e^x-1)$

Opção correta: **(D)**

11. $\log_4 a+\log_2 b=1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_2 a}{\log_2 4}+\log_2 b=1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_2 a}{2}+\log_2 b=1$

$\log_4(a^3b^6)=\dfrac{\log_2(a^3b^6)}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 a^3+\log_2 b^6}{2}=\dfrac{3\log_2 a+6\log_2 b}{2}=$

$=\dfrac{3\log_2 a}{2}+3\log_2 b=3\left(\dfrac{\log_2 a}{2}+\log_2 b\right)=3\times 1=3$

Opção correta: **(A)**

12.1 Tem-se $2\ln t_{\text{Urano}}=k+3\ln d_{\text{Urano}}$ e $2\ln t_{\text{Saturno}}=k+3\ln d_{\text{Saturno}}$.

Da 1.ª igualdade, vem

$2\ln 84=k+3\ln(2d_{\text{Saturno}}) \Leftrightarrow 2\ln 84=k+3(\ln 2+\ln d_{\text{Saturno}}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln 84=k+3\ln 2+3\ln d_{\text{Saturno}} \Leftrightarrow 2\ln 84-3\ln 2=k+3\ln d_{\text{Saturno}}$

Substituindo na 2.ª igualdade, vem

$2\ln t_{\text{Saturno}}=2\ln 84-3\ln 2 \Leftrightarrow \ln t_{\text{Saturno}}=\dfrac{2\ln 84-3\ln 2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_{\text{Saturno}}=e^{\frac{2\ln 84-3\ln 2}{2}} \Leftrightarrow t_{\text{Saturno}}\approx 29{,}7$

12.2 $2\ln 1=k+3\ln 149{,}6 \Leftrightarrow k=-3\ln 149{,}6\approx 15$

PÁG. 111

Preparar o exame

13. $f(x)=0 \Leftrightarrow e^x-c=0 \Leftrightarrow e^x=c \Leftrightarrow x=\ln c \;;\; A(\ln c\,,0)$

$f(0)=e^0-c=1-c \;;\; B(0\,,1-c)$

$m_{AB}=c-1 \Leftrightarrow \dfrac{1-c-0}{0-\ln c}=c-1 \Leftrightarrow \dfrac{1-c}{-\ln c}=c-1 \Leftrightarrow \dfrac{c-1}{\ln c}=c-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln c=1 \Leftrightarrow c=e^1 \Leftrightarrow c=e$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

14. $\log_a(ab^3) = \log_a a + \log_a b^3 = 1 + 3\log_a b$

$\log_a(ab^3) = 5 \iff 1 + 3\log_a b = 5 \iff \log_a b = \frac{5-1}{3} \iff \log_a b = \frac{4}{3}$

$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$

Opção correta: **(B)**

15. Sejam a e b dois números reais positivos.

$\log_8 a + \log_8 b = \frac{1}{3} \iff \log_8(a \times b) = \frac{1}{3} \iff ab = 8^{\frac{1}{3}} \iff ab = 2$

Opção correta: **(A)**

16.1 $-\log x = 7{,}4 \iff \log x = -7{,}4 \iff x = 10^{-7{,}4} \approx 4 \times 10^{-8}$ mol/dm^3

16.2 Designando por l a concentração de iões H_3O^+ no leite, a concentração de iões H_3O^+ no café é $3l$.

A diferença entre o pH do leite e o pH do café é:

$-\log(l) - (-\log(3l)) = -\log(l) + \log(3l) = -\log(l) + \log 3 + \log(l) = \log 3 \approx 0{,}5$

PÁG. 112

Preparar o exame

17.1 Tem-se $a(1) = 15{,}1$ e $a(1{,}5) = 13{,}46$.

$$\begin{cases} ae^b = 15{,}1 \\ ae^{1{,}5b} = 13{,}46 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{15{,}1}{e^b} \\ a = \frac{13{,}46}{e^{1{,}5b}} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{15{,}1}{e^b} = \frac{13{,}46}{e^{1{,}5b}} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{e^{1{,}5b}}{e^b} = \frac{13{,}46}{15{,}1} \end{cases} \iff \begin{cases} e^{0{,}5b} = \frac{13{,}46}{15{,}1} \end{cases} \iff \begin{cases} 0{,}5b = \ln\left(\frac{13{,}46}{15{,}1}\right) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} b = \frac{\ln\left(\frac{13{,}46}{15{,}1}\right)}{0{,}5} \end{cases} \iff \begin{cases} b \approx -0{,}23 \\ ae^{-0{,}23} = 15{,}1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{15{,}1}{e^{-0{,}23}} \end{cases} \iff \begin{cases} b \approx -0{,}23 \\ a \approx 19 \end{cases}$$

17.2 $\frac{m(t+1{,}6)}{m(t)} = \frac{ae^{-0{,}43(t+1{,}6)}}{ae^{-0{,}43t}} = e^{-0{,}43 \times 1{,}6} = e^{-0{,}688} \approx 0{,}5$

A massa do rádio-226 reduz-se a metade a cada 1600 anos, aproximadamente (a semivida do rádio-226 é, aproximadamente 1600 anos).

18.1 $P(n) = cP(0) \iff ae^{bn} = cae^{b \times 0} \iff e^{bn} = c \iff bn = \ln c \iff b = \frac{\ln c}{n}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

18.2 Tem-se $P(0)=2 \iff ae^{b\times 0}=2 \iff a=2$ e $b=\dfrac{\ln 2}{50}$.

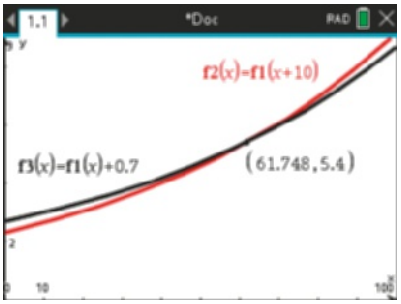
$P(t+10)=P(t)+0{,}7 \iff 2e^{b(t+10)}=2e^{bt}+0{,}7 \iff 2e^{bt+10b}-2e^{bt}=0{,}7 \iff$

$$\iff 2e^{bt}\left(e^{10b}-1\right)=0{,}7 \iff e^{bt}=\frac{0{,}7}{2\left(e^{10b}-1\right)}$$

Como $b=\dfrac{\ln 2}{50}$, então $e^{10b}=e^{10\frac{\ln 2}{50}}=e^{\frac{1}{5}\ln 2}=e^{\ln 2^{\frac{1}{5}}}=2^{\frac{1}{5}}$ e

$$e^{bt}=\frac{0{,}7}{2\left(2^{\frac{1}{5}}-1\right)} \iff bt=\ln\left(\frac{0{,}7}{2\left(2^{\frac{1}{5}}-1\right)}\right) \iff t=\frac{\ln\left(\frac{0{,}7}{2\left(2^{\frac{1}{5}}-1\right)}\right)}{\frac{\ln 2}{50}} \iff t\approx 61{,}748 .$$

$t\approx 61{,}748$ significa 61 anos após 1 de janeiro de 1900, ou seja, 1 de janeiro de 1961, e 0,748 anos corresponde aproximadamente a $0{,}748\times 12=8{,}976$ meses, ou seja, cerca de nove meses após janeiro de 1961. Assim, o instante ocorreu aproximadamente no final de setembro de 1961.



PÁG. 113

Preparar o exame

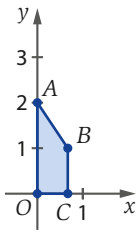
19. $A(0\,,\,g(0))$; $g(0)=2e^{-0}=2$; $A(0\,,\,2)$

$f(x)=g(x) \iff 3e^{x}-5=2e^{-x} \iff 3e^{x}-5-2e^{-x}=0 \iff$

$$\iff 3\left(e^{x}\right)^2-5e^{x}-2=0 \iff e^{x}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times 3\times(-2)}}{2\times 3} \iff$$

$$\iff e^{x}=\frac{5-7}{6}\vee e^{x}=\frac{5+7}{6} \iff \underbrace{e^{x}=-\frac{1}{3}}_{\text{imp.}}\vee e^{x}=2 \iff x=\ln 2$$

$f(\ln 2)=3e^{\ln 2}-5=3\times 2-5=1$; $B(\ln 2\,,\,1)$; $C(\ln 2\,,\,0)$



$$A_{[OABC]}=\frac{\overline{BC}+\overline{OA}}{2}\times\overline{OC}=\frac{1+2}{2}\times\ln 2=\frac{3}{2}\times\ln 2=\ln 2^{\frac{3}{2}}=\ln\sqrt{8}$$

20.1 $N_A(0)=\dfrac{120}{1+7e^{-0{,}2\times 0}}=15$ e $N_A(7)=\dfrac{120}{1+7e^{-0{,}2\times 7}}\approx 44{,}018$.

$N_A(7)-N_A(0)\approx 44{,}018-15=29{,}018\approx 29$ nenúfares

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

20.2 $N_A(t)=N_B(t) \Leftrightarrow \frac{120}{1+7e^{-0,2t}}=\frac{150}{1+50e^{-0,4t}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 120\left(1+50e^{-0,4t}\right)=150\left(1+7e^{-0,2t}\right) \Leftrightarrow 120+6000e^{-0,4t}=150+1050e^{-0,2t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6000e^{-0,4t}-1050e^{-0,2t}-30=0 \Leftrightarrow 200\left(e^{-0,2t}\right)^2-35e^{-0,2t}-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-0,2t}=\frac{-(-35)\pm\sqrt{(-35)^2-4\times200\times(-1)}}{2\times200} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-0,2t}=\frac{35\pm\sqrt{2025}}{400} \Leftrightarrow e^{-0,2t}=\frac{35-45}{400}\vee e^{-0,2t}=\frac{35+45}{400} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,2t}=-\frac{1}{40}}_{\text{imp.}}\vee e^{-0,2t}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow -0,2t=\ln\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0,2} \Leftrightarrow t\approx 8$ dias

21.1 Como $e^x>0$ e $e^{-x}>0$, então $e^x+e^{-x}\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ e

$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\left(e^x-e^{-x}\right)=e^x+e^{-x} \Leftrightarrow 3e^x-3e^{-x}-e^x-e^{-x}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^x-4e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^x-\frac{2}{e^x}=0 \Leftrightarrow \frac{\left(e^x\right)^2-2}{e^x}=0 \underset{e^x\neq0}{\Leftrightarrow}\left(e^x\right)^2-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{2x}=2 \Leftrightarrow 2x=\ln 2 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 2}{2}$

C. S. $=\left\{\frac{\ln 2}{2}\right\}$

21.2 Domínio: $\left\{x\in\mathbb{R}:(4-x)^2>0\wedge 4-x>0\wedge 7-2x>0\right\}$

$D=\left]-\infty,\frac{7}{2}\right[$

$\frac{e^x}{2}\ln(4-x)^2-5\ln(4-x)=(5-e^x)\ln(7-2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{e^x}{2}\times 2\ln(4-x)-5\ln(4-x)=(5-e^x)\ln(7-2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x\ln(4-x)-5\ln(4-x)=(5-e^x)\ln(7-2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^x-5)\ln(4-x)=-(e^x-5)\ln(7-2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^x-5)\ln(4-x)+(e^x-5)\ln(7-2x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^x-5)(\ln(4-x)+\ln(7-2x))=0 \Leftrightarrow (e^x-5)\ln((4-x)(7-2x))=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x-5=0\vee\ln((4-x)(7-2x))=0 \Leftrightarrow e^x=5\vee(4-x)(7-2x)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\ln 5\vee 28-8x-7x+2x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\ln 5\vee 2x^2-15x+27=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\ln 5\vee x=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\times2\times27}}{2\times2} \Leftrightarrow x=\ln 5\vee x=\frac{15\pm\sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\ln 5\vee x=\frac{15-3}{4}\vee x=\frac{15+3}{4} \Leftrightarrow x=\ln 5\vee x=3\vee x=\frac{9}{2}$

Como $\ln 5\in\left]-\infty,\frac{7}{2}\right[$, $3\in\left]-\infty,\frac{7}{2}\right[$ e $\frac{9}{2}\notin\left]-\infty,\frac{7}{2}\right[$, então C. S. $=\{\ln 5,3\}$.

Cálculo auxiliar:

$(4-x)^2>0 \Rightarrow x\neq 4$, $4-x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<4$, $7-2x>0 \Leftrightarrow x<\frac{7}{2}$

$(4-x)^2>0\wedge 4-x>0\wedge 7-2x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<4\wedge x<\frac{7}{2} \Leftrightarrow$

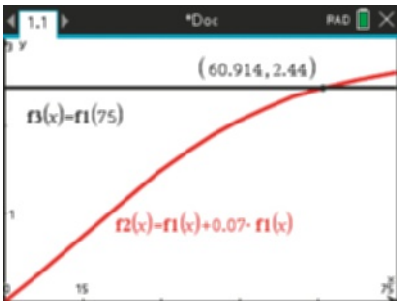
$\Leftrightarrow x<\frac{7}{2} \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,\frac{7}{2}\right[$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

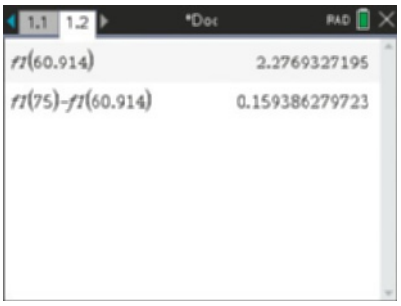
PÁG. 114

Preparar o exame

22. $t(x)+0{,}07t(x)=t(75)$



$x \approx 61$ m



O tempo de descida é $t(75)-t(60{,}914)\approx 0{,}159$ minutos, ou seja, aproximadamente, $0{,}159\times 60=9{,}54\approx 10$ segundos.

23. A função f é uma função quadrática representada graficamente por uma parábola com a concavidade voltada para baixo que tem máximo absoluto 2. A função g é uma função crescente. Logo, a função $g\circ f$ tem máximo absoluto igual a e^2.

Opção correta: **(C)**

PÁG. 115

Preparar o exame

24.1 Altura do topo do poste 1: $f(0)=5\left(e^{1-0{,}1\times 0}+e^{0{,}1\times 0-1}\right)\approx 15{,}4308$ m

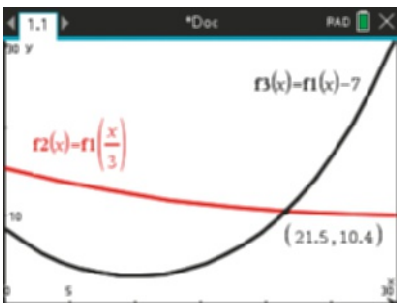
Altura do topo do poste 2: $f(0)=5\left(e^{1-0{,}1\times 30}+e^{0{,}1\times 30-1}\right)\approx 37{,}6220$ m

Diferença de alturas: $37{,}6220-15{,}4308=22{,}1912$ m

Distância entre os topos dos postes: os postes estão separados horizontalmente por 30 m. Logo, a distância entre os topos é a hipotenusa de um triângulo retângulo: $d=\sqrt{30^2+(22{,}1912)^2} \implies d\approx 37{,}3$ m

Opção correta: **(C)**

24.2 $f\left(\frac{x}{3}\right)=f(x)-7$



$x\approx 21{,}5$ metros, pelo que a distância na horizontal do ponto pedido ao 2.º poste é, aproximadamente, $30-21{,}5=8{,}5$ metros.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

25. Como $\log_a b = \frac{1}{\log_b 3}$ e $\frac{1}{\log_b 3} = \log_3 b$, então $\log_a b = \log_3 b$.

Sabemos que $b > 1$ e $a > 1$ e, como a função exponencial é injetiva, temos $a = 3$.

Assim, a equação dada fica $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 3^{-3\left(\frac{1}{x}+1\right)}$.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 3^{-3\left(\frac{1}{x}+1\right)} \Leftrightarrow \left(3^{-2}\right)^{x+1} = 3^{-3\left(\frac{1}{x}+1\right)} \Leftrightarrow 3^{-2(x+1)} = 3^{-3\left(\frac{1}{x}+1\right)}$$

Igualando os expoentes, vem

$$-2(x+1) = -3\left(\frac{1}{x}+1\right) \Leftrightarrow 2(x+1) = 3\left(\frac{1}{x}+1\right) \underset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2x(x+1) = 3(1+x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(x+1) - 3(1+x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \vee 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$$

C. S. $= \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA