Funções II

PÁG. 123

Diagnóstico

1.1 $g'(-2)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+x-1-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+x-2}{x+2}=$

$=\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2+x-1\right)=1$

1.2 $y=mx+b$, com $m=g'(-2)=1$ e $1=1\times(-2)+b \iff b=3$

A equação pedida é $y=x+3$.

2. $h'(1)$ é o declive da reta r: $\dfrac{-1-0}{0-1}=1$

3.1 $a'(x)=0$

3.2 $f'(x)=2$

3.3 $g'(x)=-8x$

3.4 $h'(x)=6x^2$

4. $f'(x)=\dfrac{\left(4x^2-3x\right)'(2x+3)-\left(4x^2-3x\right)(2x+3)'}{(2x+3)^2}=$

$=\dfrac{(8x-3)(2x+3)-2\left(4x^2-3x\right)}{(2x+3)^2}=\dfrac{16x^2+24x-6x-9-8x^2+6x}{(2x+3)^2}=\dfrac{8x^2+24x-9}{(2x+3)^2}$, em $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

5.1 $h(0)=1{,}5$ m

5.2 $h(t)=0 \iff -5t^2+15t+1{,}5=0 \iff -t^2+3t+0{,}3=0 \iff$

$\iff t=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times(-1)\times 0{,}3}}{2\times(-1)} \iff t=\dfrac{-3\pm\sqrt{10{,}2}}{-2}$

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-3-\sqrt{10{,}2}}{-2}+\dfrac{-3+\sqrt{10{,}2}}{-2}\right)=\dfrac{-3-\sqrt{10{,}2}-3+\sqrt{10{,}2}}{-4}=\dfrac{3}{2}=1{,}5$

$h(1{,}5)=-5\times(1{,}5)^2+15\times(1{,}5)+1{,}5=12{,}75$

A altura máxima atingida pela bola é 12,75 m e é atingida 1,5 s depois de ser atirada.

5.3 0 m/s

No instante em que a bola atinge a altura máxima, a sua velocidade passa de positiva a negativa, sendo, portanto, nula.

PÁG. 124

Diagnóstico

6. Como $g'(x)\geqslant 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, concluímos que g é crescente.

A reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0 tem declive nulo.

Opção correta: **(A)**

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

7.1 $g'(x) = \left((2x+1)^2\right)'(x-1)' + (2x+1)^2(x-1)' =$

$= 2(2x+1)(2x+1)'(x-1) + (2x+1)^2 = 4(2x+1)(x-1) + (2x+1)^2 =$

$= (2x+1)(4(x-1) + (2x+1)) = (2x+1)(4x-4+2x+1) =$

$= (2x+1)(6x-3) = 12x^2 - 6x + 6x - 3 = 3\left(4x^2 - 1\right)$

7.2 $g'(x) = 0 \iff 3\left(4x^2 - 1\right) = 0 \iff 4x^2 - 1 = 0 \iff$

$\iff x^2 = \frac{1}{4} \iff x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$

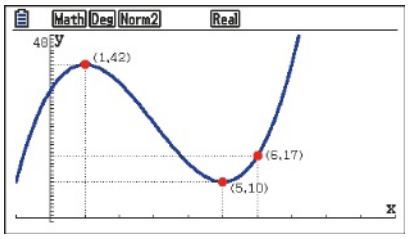
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	–	0	+
Monotonia de g	↗	Máx.	↘	Mín.	↗

A função g é crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ e é decrescente em $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Tem máximo relativo igual a $\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)^2\left(-\frac{1}{2}-1\right) = 0$ em $x = -\frac{1}{2}$

e tem mínimo relativo igual a $\left(2\times\frac{1}{2}+1\right)^2\left(\frac{1}{2}-1\right) = -2$ em $x = \frac{1}{2}$.

8.



N é crescente em $[0, 1]$ e em $[5, 6]$ e é decrescente em $[1, 5]$.

N tem mínimo relativo igual a 35 em $t = 0$ e tem mínimo absoluto igual a 10 em $t = 5$.

N tem máximo absoluto igual a 42 em $t = 1$ e tem máximo relativo igual a 17 em $t = 6$.

Durante a primeira hora e durante a sexta hora o número de bactérias aumentou, e diminuiu entre o início da segunda hora e o final da quinta. Ao fim de uma hora foi atingido o valor máximo de bactérias, 42 000, e ao fim de cinco horas foi atingido o valor mínimo, 10 000 bactérias.

PÁG. 126

Tarefa 2

7. $f'(x) = \frac{1}{x}$

PÁG. 127

Tarefa 3

7. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 129

Aplicar

3. $f'(x)=\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$(f\circ g)'(1)=f'(g(1))\times g'(1)=f'(3\times 1-1)\times 3=$

$=f'(2)\times 3=\dfrac{2\times 2}{2^2+1}\times 3=\dfrac{12}{5}$

PÁG. 130

Aplicar

4.1 $f'(x)=2e^x+2^x\ln 2$

4.2 $f'(x)=4x^3+\dfrac{1}{x}+3^x\ln 3$

4.3 $f'(x)=(x^2)'\times\log_3 x+x^2\times(\log_3 x)'=2x\log_3 x+x^2\times\dfrac{1}{x\ln 3}=2x\log_3 x+\dfrac{x}{\ln 3}$

4.4 $f'(x)=(x^3-1)'e^x+(x^3-1)(e^x)'=3x^2e^x+(x^3-1)e^x=e^x(x^3+3x^2-1)$

4.5 $f'(x)=(x^2-3)'\ln x+(x^2-3)(\ln x)'=2x\ln x+(x^2-3)\times\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x-\dfrac{3}{x}$

4.6 $f'(x)=(x^4)'\times\log_3(x^4)+x^4\times\left(\log_3(x^4)\right)'=$

$=4x^3\log_3(x^4)+x^4\times\dfrac{(x^4)'}{x^4\ln 3}=4x^3\log_3(x^4)+\dfrac{4x^3}{\ln 3}=4x^3\left(\log_3(x^4)+\dfrac{1}{\ln 3}\right)$

4.7 $f'(x)=(x^2)'\times\log_2(x^2)+x^2\times\left(\log_2(x^2)\right)'+e^x=$

$=2x\log_2(x^2)+x^2\times\dfrac{(x^2)'}{x^2\ln 2}+e^x=2x\log_2(x^2)+\dfrac{2x}{\ln 2}+e^x$

4.8 $f'(x)=\dfrac{(2^{x^2}x^2)'}{(2^{x^2}x^2)\ln 4}=\dfrac{(2^{x^2})'x^2+2^{x^2}(x^2)'}{(2^{x^2}x^2)\ln 4}=$

$=\dfrac{2^{x^2}\ln 2(x^2)'x^2+2^{x^2}(2x)}{(2^{x^2}x^2)\ln 4}=\dfrac{2^{x^2}\ln 2(2x)x^2+2^{x^2}(2x)}{(2^{x^2}x^2)\ln 4}=\dfrac{2x(x^2\ln 2+1)}{x^2\ln 4}=$

$=\dfrac{2(x^2\ln 2+1)}{x\ln 4}=\dfrac{2x^2\ln 2}{x\ln 4}+\dfrac{2}{x\ln 4}=\dfrac{2x\ln 2}{\ln 4}+\dfrac{2}{x\ln 4}=$

$=\dfrac{x\ln 2^2}{\ln 4}+\dfrac{2}{x\ln 4}=\dfrac{x\ln 4}{\ln 4}+\dfrac{2}{x\ln 4}=x+\dfrac{2}{x\ln 4}$

4.9 $f'(x)=(x^2)'\times(-\operatorname{sen}(x^2))=-2x\operatorname{sen}(x^2)$

4.10 $f'(x)=(3x)'\times\cos(3x)+(3x)'\times(-\operatorname{sen}(3x))=$

$=3\cos(3x)-3\operatorname{sen}(3x)=3(\cos(3x)-\operatorname{sen}(3x))$

4.11 $f'(x)=e^x\cos x+e^x\times(-\operatorname{sen}x)=e^x(\cos x-\operatorname{sen}x)$

4.12 $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'\times\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=-\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4.13 $f'(x)=\dfrac{(x^2+x)'}{\cos^2(x^2+x)}=\dfrac{2x+1}{\cos^2(x^2+x)}=(2x+1)\left(1+\operatorname{tg}^2(2x+1)\right)$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

4.14 $f'(x)=\dfrac{(\operatorname{sen} x)'}{\cos^2(\operatorname{sen} x)}=\dfrac{\cos x}{\cos^2(\operatorname{sen} x)}=(\cos x)\left(1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{sen} x)\right)$

4.15 $f'(x)=2\cos x\times(\cos x)'=-2\cos x\times(-\operatorname{sen} x)=-2\cos x\operatorname{sen} x$

4.16 $f(x)=\operatorname{sen}^2 x\times\cos x=\left(1-\cos^2 x\right)\times\cos x=\cos x-\cos^3 x$

$f'(x)=(\cos x)'-\left(\cos^3 x\right)'=-\operatorname{sen} x-3\cos^2 x(\cos x)'=$

$=-\operatorname{sen} x-3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)=3\cos^2 x\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} x\left(3\cos^2 x-1\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-2e^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$

$g'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)\ ;\ g'(2)=e^2(1+2)=3e^2$

6.1 $h'(x)=(\operatorname{sen} x)'\times\cos x+\operatorname{sen} x\times(\cos x)'=\cos x\times\cos x+\operatorname{sen} x\times(-\operatorname{sen} x)$

$=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=\cos^2 x-\left(1-\cos^2 x\right)=2\cos^2 x-1$

6.2 $m=h'\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=2\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)-1=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1=\dfrac{1}{2}\ ;\ 0=\dfrac{1}{2}\times 3+b\iff b=-\dfrac{3}{2}$

A equação pedida é $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$.

7. $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}+1\ ;\ m=f'(2)=\dfrac{1}{2\ln 2}+1=\dfrac{1}{\ln 4}+1$

$f(2)=\log_2 2+2=1+2=3$

$3=\left(\dfrac{1}{\ln 4}+1\right)\times 2+b\iff b=3-2\left(\dfrac{1}{\ln 4}+1\right)\iff b=1-\dfrac{2}{\ln 4}\iff$

$\iff b=1-\dfrac{2}{\ln 2^2}\iff b=1-\dfrac{2}{2\ln 2}\iff b=1-\dfrac{1}{\ln 2}$

A equação pedida é $y=\left(\dfrac{1}{\ln 4}+1\right)x+1-\dfrac{1}{\ln 2}$.

8. Como a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, então o seu declive é $f'(0)$.

$f'(x)=\left(\dfrac{x}{a}\right)'e^{\frac{x}{a}}=\dfrac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\ ;\ f'(0)=\dfrac{1}{a}e^{\frac{0}{a}}=\dfrac{1}{a}$

A reta r passa nos pontos de coordenadas $(-2,0)$ e $(0,f(0))$, ou seja, $(0,1+a)$,

logo, o declive da reta r é $\dfrac{1+a-0}{0+2}=\dfrac{1+a}{2}$.

Assim, $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1+a}{2}\underset{a\neq 0}{\iff}a(1+a)=2\iff a^2+a-2=0\iff$

$\iff a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-2)}}{2}\iff a=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2}\iff$

$\iff a=\dfrac{-1-3}{2}\vee a=\dfrac{-1+3}{2}\iff a=-2\vee a=1$

Como f é crescente, concluímos que $a=1$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

9. Designemos por x_0 a abcissa do ponto de tangência.

A reta tangente ao gráfico de g que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada $\frac{\sqrt{3}}{2}$ tem equação reduzida $g(x_0)=g'(x_0)\times x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$g(x_0)=\sqrt{x_0}$ e $g'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

$$\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\times x_0+\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x_0}-\frac{x_0}{2\sqrt{x_0}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{2x_0-x_0}{2\sqrt{x_0}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{2\sqrt{x_0}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{x_0\sqrt{x_0}}{2x_0}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_0}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $x_0=3$ e as coordenadas do ponto de tangência são $(3,\sqrt{3})$.

PÁG. 132

Aplicar

11.1 $f'(x)=\left(e^{-x}\right)'\left(x^2-3x+1\right)+e^{-x}\left(x^2-3x+1\right)'=$

$$=-e^{-x}\left(x^2-3x+1\right)+e^{-x}(2x-3)=e^{-x}\left(-x^2+3x-1+2x-3\right)=e^{-x}\left(-x^2+5x-4\right)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(-x^2+5x-4\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{imp.}} \vee -x^2+5x-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times(-1)\times(-4)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-5-3}{-2}\vee x=\frac{-5+3}{-2} \Leftrightarrow x=4\vee x=1$$

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
e^{-x}	+	+	+	+	+
$-x^2+5x-4$	–	0	+	0	–
$f'(x)$	–	0	+	0	–
Monotonia de f	↘	Mín.	↗	Máx.	↘

f é decrescente em $]-\infty,1]$ e em $[4,+\infty[$ e é crescente em $[1,4]$.

Tem mínimo relativo igual a $e^{-1}\left(1^2-3\times1+1\right)=-e^{-1}$ em $x=1$

e tem máximo relativo igual a $e^{-4}\left(4^2-3\times4+1\right)=5e^{-4}$ em $x=4$.

11.2 $g'(x)=e^x+2(-x)'e^{-x}=e^x-2e^{-x}$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-2e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^x-\frac{2}{e^x}=0 \Leftrightarrow \frac{\left(e^x\right)^2-2}{e^x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-2=0\wedge e^x\neq0 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2=2 \underset{e^x>0}{\Leftrightarrow} e^x=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\ln\sqrt{2}$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

x	$-\infty$	$\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
Monotonia de g	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

g é decrescente em $]-\infty, \ln\sqrt{2}]$ e crescente em $[\ln\sqrt{2}, +\infty[$.

Tem mínimo absoluto igual a $e^{\ln\sqrt{2}} + 2e^{-\ln\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ em $x = \ln\sqrt{2}$.

11.3 $h'(x) = 6x^2 - 12 \times \frac{(3x)'}{3x} = 6x^2 - 12 \times \frac{3}{3x} = 6x^2 - \frac{12}{x} = \frac{6x^3 - 12}{x}$

$h'(x) = 0 \iff \frac{6x^3 - 12}{x} = 0 \iff 6x^3 - 12 = 0 \wedge x \neq 0 \iff x = \sqrt[3]{2} \wedge x \neq 0$

x	0		$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$6x^3 - 12$	$-$	$-$	0	$+$
x	0	$+$	$+$	$+$
$h'(x)$	N.D.	$-$	0	$+$
Monotonia de h	N.D.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

h é decrescente em $]0, \sqrt[3]{2}]$ e crescente em $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$.

Tem mínimo absoluto igual a $2\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 12\ln\left(3\sqrt[3]{2}\right) = 4 - 12\ln\left(3\sqrt[3]{2}\right)$ em $x = \sqrt[3]{2}$.

11.4 $i'(x) = \frac{(2x - \ln x)' \times x - (2x - \ln x) \times (x)'}{x^2} = \frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right) \times x - (2x - \ln x)}{x^2} =$

$= \frac{2x - 1 - 2x + \ln x}{x^2} = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

$i'(x) = 0 \iff \frac{\ln x - 1}{x^2} = 0 \iff \ln x - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \iff \ln x = 1 \wedge x \neq 0 \iff x = e \wedge x \neq 0$

x	0		e	$+\infty$
$\ln x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
x^2	0	$+$	$+$	$+$
$i'(x)$	N.D.	$-$	0	$+$
Monotonia de i	N.D.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

i é decrescente em $]0, e]$ e crescente em $[e, +\infty[$.

Tem mínimo absoluto igual a $\frac{2e - \ln e}{e} = \frac{2e - 1}{e}$ em $x = e$.

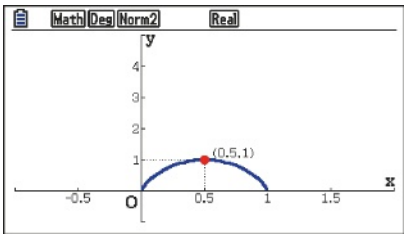
12. $H'(p) = (-p)'\log_2 p - p\left(\log_2 p\right)' - \left[(1-p)'\log_2(1-p) + (1-p)\left(\log_2(1-p)\right)'\right] =$

$= -\log_2 p - p \times \frac{1}{p\ln 2} - \left[(-1)\log_2(1-p) + (1-p) \times \frac{(1-p)'}{(1-p)\ln 2}\right] =$

$= -\log_2 p - \frac{1}{\ln 2} + \log_2(1-p) + \frac{1}{\ln 2} = -\log_2 p + \log_2(1-p) = \log_2\left(\frac{1-p}{p}\right)$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$H'(p)=0 \iff \log_2\left(\frac{1-p}{p}\right)=0 \iff \frac{1-p}{p}=1 \underset{p\neq 0}{\iff} 1-p=p \iff p=\frac{1}{2}$



A entropia máxima é 1, e é atingida quando $p=0{,}5$.

PÁG. 133

Aplicar

13. $R'(t)=50e^{-0,1t}+50t\times(-0,1t)'e^{-0,1t}=$

$=50e^{-0,1t}-5te^{-0,1t}=(50-5t)e^{-0,1t}$

$R'(t)=0 \iff (50-5t)e^{-0,1t}=0 \underset{e^{-0,1t}\neq 0}{\iff} 50-5t=0 \iff t=10$

t	0	10	$+\infty$
$50-5t$	+	0	–
$e^{-0,1t}$	+	+	+
$R'(t)$	+	0	–
Monotonia de R	↗	Máx.	↘

A produção atinge o valor máximo de, aproximadamente, $50\times 10e^{-0,1\times 10}\approx 184$ g/min, passados 10 minutos desde o instante inicial.

14. $C'(x)=-\frac{120}{x^2}+\frac{8}{x}=\frac{8x-120}{x^2}$

$C'(x)=0 \iff \frac{8x-120}{x^2}=0 \iff 8x-120=0 \wedge x^2\neq 0 \iff x=15$

x	0	15	$+\infty$
$8x-120$	–	0	+
x^2	+	+	+
$C'(x)$	–	0	+
Monotonia de C	↘	Mín.	↗

C é decrescente em $]0,15]$ e é crescente em $[15,+\infty[$.

Tem mínimo absoluto igual a $C(15)=\frac{120}{15}-8\ln 15\approx 29{,}66$ em $x=15$.

Se o número de peças produzidas variar de 0 a 15, o custo médio por unidade decresce. A partir das 15 unidades produzidas, quantas mais se produzirem, maior é o custo médio por unidade. Se se produzirem 15 unidades, o custo médio é mínimo, neste caso, 29,66 €. Saber para que número de unidades produzidas o custo é mínimo permite otimizar a produção.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

15.1 $P(t)=F(t) \Leftrightarrow 3t^3\times 10^{-0,45t}=t^3\times 10^{-0,4t} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{10^{-0,45t}}{10^{-0,4t}}=\frac{t^3}{3t^3} \Leftrightarrow 10^{-0,05t}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow -0,05t=\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{-\log_{10}3}{-0,05} \Leftrightarrow t=\frac{\frac{\log 3}{\log 10}}{0,05} \Leftrightarrow t=\frac{\log 3}{0,05} \Leftrightarrow t\approx 9,54$$

$0,542\times 60=32,52\approx 33$

As concentrações de medicamento nas correntes sanguíneas do Paulo e do Francisco foram iguais 9 horas e 33 minutos após as nove horas, ou seja, às 18h33min .

15.2 $F'(t)=3t^2\times 10^{-0,4t}+t^3\times(-0,4t)'\times 10^{-0,4t}\times\ln 10=$

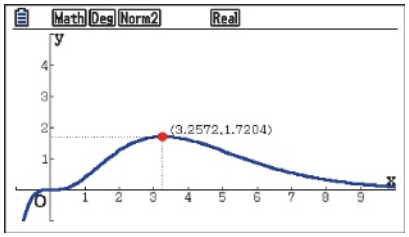
$$=3t^2\times 10^{-0,4t}-0,4\ln 10t^3\times 10^{-0,4t}=\left(3t^2-0,4\ln 10t^3\right)10^{-0,4t}$$

$F'(t)=0 \Leftrightarrow \left(3t^2-0,4\ln 10t^3\right)10^{-0,4t}=0 \underset{10^{-0,4t}\neq 0}{\Leftrightarrow} 3t^2-0,4\ln 10t^3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2(3-0,4\ln 10t)=0 \Leftrightarrow t^2=0\vee 3-0,4\ln 10t=0 \Leftrightarrow t=0\vee t\approx 3,257$$

t	0	3,257	$+\infty$
$3t^2-0,4t^3$	+	0	–
$10^{-0,4t}$	+	+	+
$F'(t)$	+	0	–
Monotonia de F	↗	Máx.	↘

$F(3,257)=3,257^3\times 10^{-0,4\times 3,257}\approx 1,72$ mg/l



16.1 $P'(x)=\frac{100(x^2+16)-100x(2x)}{(x^2+16)^2}=\frac{-100x^2+1600}{(x^2+16)^2}$

$P'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-100x^2+1600}{(x^2+16)^2}=0 \Leftrightarrow -100x^2+1600=0\wedge(x^2+16)^2\neq 0 \underset{x\geqslant 0}{\Leftrightarrow} x=4$

x	0	4	$+\infty$
$-100x^2+1600$	+	0	–
$(x^2+16)^2$	+	+	+
$P'(x)$	+	0	–
Monotonia de P	↗	Máx.	↘

A potência é maximizada quando o fluxo de água é de 4 m^3/s ,

e o valor máximo da potência é $P(4)=\frac{100\times 4}{4^2+16}=12,5$ kW .

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

16.2 Como a função P atinge um máximo em $x=4$, e para $x>4$ se tem $P'(x)<0$, a potência vai diminuindo para $x>4$.

17. $f'(x)=2x+\dfrac{4\times(3-x)'}{3-x}=2x-\dfrac{4}{3-x}=\dfrac{-2x^2+6x-4}{3-x}$

$f'(x)=0 \iff \dfrac{-2x^2+6x-4}{3-x}=0 \iff -2x^2+6x-4=0 \wedge 3-x\neq 0 \iff$

$\iff -x^2+3x-2=0 \wedge x\neq 3 \iff x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times(-1)\times(-2)}}{2\times(-1)} \wedge x\neq 3 \iff$

$\iff x=\dfrac{-3\pm\sqrt{1}}{-2} \wedge x\neq 3 \iff x=\dfrac{-3-1}{-2} \vee x=\dfrac{-3+1}{-2} \wedge x\neq 3 \iff (x=2 \vee x=1) \wedge x\neq 3$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$-2x^2+6x-4$	–	0	+	0	–	–	–
$3-x$	+	+	+	+	+	0	–
$f'(x)$	–	0	+	0	–	N.D.	+
Monotonia de f	↘	Mín.	↗	Máx.	↘	N.D.	↗

Mínimo: $f(1)=1^2+4\ln(3-1)=1+4\ln 2=\ln e+\ln 2^4=\ln(16e)$ em $x=1$;

Máximo: $f(2)=2^2+4\ln(2-1)=4+4\ln 1=4$ em $x=2$.

PÁG. 135

Aplicar

19.1 $f'(x)=5$; $f''(x)=0$

19.2 $g'(x)=6x$; $g''(x)=6$

19.3 $h'(x)=4x^3-12x^2$; $h''(x)=12x^2-24x$

19.4 $i'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$; $i''(x)=\dfrac{4x}{(x^2)^2}=\dfrac{4}{x^3}$

19.5 $j'(x)=\dfrac{3(5-2x)-(3x-2)(-2)}{(5-2x)^2}=\dfrac{15-6x+6x-4}{(5-2x)^2}=\dfrac{11}{(5-2x)^2}$

$j''(x)=-\dfrac{11\times 2\times(5-2x)\times(5-2x)'}{\left((5-2x)^2\right)^2}=-\dfrac{22\times(5-2x)\times(-2)}{(5-2x)^4}=\dfrac{44}{(5-2x)^3}$

19.6 $k'(x)=\dfrac{(x+2)^2-(x-3)\times 2\times(x+2)\times(x+2)'}{\left((x+2)^2\right)^2}=\dfrac{(x+2)^2-(x-3)\times 2\times(x+2)}{(x+2)^4}=$

$=\dfrac{(x+2)((x+2)-(x-3)\times 2)}{(x+2)^4}=\dfrac{x+2-2x+6}{(x+2)^3}=\dfrac{-x+8}{(x+2)^3}$

$k''(x)=\dfrac{-(x+2)^3-(-x+8)\times 3\times(x+2)^2\times(x+2)'}{\left((x+2)^3\right)^2}=\dfrac{-(x+2)^3-(-x+8)\times 3\times(x+2)^2}{(x+2)^6}=$

$=\dfrac{(x+2)^2(-(x+2)-(-x+8)\times 3)}{(x+2)^6}=\dfrac{-x-2+3x-24}{(x+2)^4}=\dfrac{2x-26}{(x+2)^4}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

19.7 $l'(x)=\frac{1}{x}-2x \quad ; \quad l''(x)=-\frac{1}{x^2}-2$

19.8 $m'(x)=e^x\cos x+e^x(-\operatorname{sen} x)=e^x(\cos x-\operatorname{sen} x)$

$m''(x)=e^x(\cos x-\operatorname{sen} x)+e^x(-\operatorname{sen} x-\cos x)=e^x(\cos x-\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x-\cos x)=-2e^x\operatorname{sen} x$

19.9 $n'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x) \quad ; \quad n''(x)=e^x(1+x)+e^x=e^x(1+x+1)=e^x(x+2)$

19.10 $o'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x \quad ; \quad o''(x)=2\ln x+2x\frac{1}{x}+1=2\ln x+3$

19.11 $p'(x)=1+\operatorname{tg}^2x=1+\frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}=\frac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}$

$p''(x)=-\frac{2\cos x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos^2x)^2}=\frac{2\cos x\operatorname{sen} x}{(\cos^2x)^2}=\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3x}$

19.12 $q'(x)=2\operatorname{sen} x\cos x$

$q''(x)=2(\cos x\cos x-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} x)=2(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)=$

$=2(\cos^2x-(1-\cos^2x))=2(2\cos^2x-1)=4\cos^2x-2$

19.13 $r'(x)=\frac{(e^x-2x)x-(e^x-x^2)}{x^2}=\frac{xe^x-2x^2-e^x+x^2}{x^2}=\frac{e^x(x-1)-x^2}{x^2}$

$r''(x)=\frac{(e^x(x-1)-x^2)'x^2-(e^x(x-1)-x^2)(2x)}{(x^2)^2}=$

$=\frac{(e^x(x-1)+e^x-2x)x^2-(e^x(x-1)-x^2)(2x)}{x^4}=$

$=\frac{(e^xx-e^x+e^x-2x)x-(e^xx-e^x-x^2)(2)}{x^3}=$

$=\frac{e^xx^2-2x^2-2e^xx+2e^x+2x^2}{x^3}=\frac{e^xx^2-2e^xx+2e^x}{x^3}=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$

19.14 $s'(x)=\frac{-\frac{1}{x}\times x-(1-\ln x)}{x^2}=\frac{-1-1+\ln x}{x^2}=\frac{\ln x-2}{x^2}$

$s''(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-(\ln x-2)(2x)}{(x^2)^2}=\frac{x-(\ln x-2)(2x)}{x^4}=\frac{x(1-2(\ln x-2))}{x^4}=$

$=\frac{1-2(\ln x-2)}{x^3}=\frac{5-2\ln x(-2)}{x^3}$

19.15 $t'(x)=2e^{2x}(x-x^2)+e^{2x}(1-2x)=e^{2x}(2(x-x^2)+(1-2x))=$

$=e^{2x}(2x-2x^2+1-2x)=e^{2x}(-2x^2+1)$

$t''(x)=2e^{2x}(-2x^2+1)+e^{2x}(-4x)=e^{2x}(2(-2x^2+1)-4x)=$

$=e^{2x}(-4x^2+2-4x)=-2e^{2x}(2x^2+2x-1)$

19.16 $u'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

$u''(x)=-\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 136
Tarefa 4

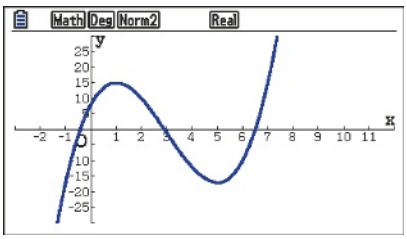
2. 4

PÁG. 141
Aplicar

21.

x	-5		-3		2		4		5
$f''(x)$	+	+	0	+	0	–	0	+	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		∪		∪	P.I.	∩	P.I.	∪	

22.1



$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

$f''(x) = 6x - 18$

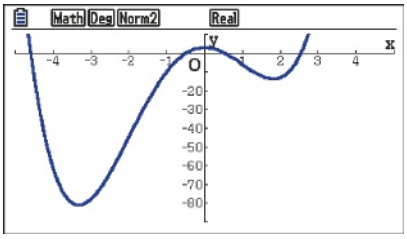
$f''(x) = 0 \iff 6x - 18 = 0 \iff x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	–	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	∩	P.I.	∪

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 3]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[3, +\infty[$.

O ponto de inflexão do gráfico de f é o ponto de coordenadas $(3, f(3)) = (3, -1)$.

22.2



$g'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x \;;\; g''(x) = 12x^2 + 12x - 24$

$g''(x) = 0 \iff 12x^2 + 12x - 24 = 0 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff$

$$\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-2)}}{2} \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \iff$$

$$\iff x = \frac{-1-3}{2} \vee x = \frac{-1+3}{2} \iff x = -2 \vee x = 1$$

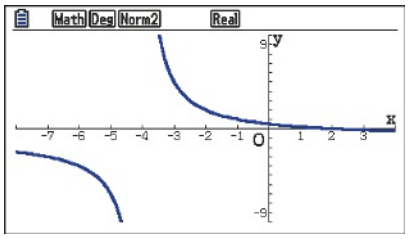
M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2]$ e em $[1, +\infty[$, e tem a concavidade voltada para baixo em $[-2, 1]$.

Os pontos de inflexão do gráfico de g são os pontos de coordenadas $(-2, g(-2)) = (-2, -45)$ e $(1, g(1)) = (1, -6)$.

22.3



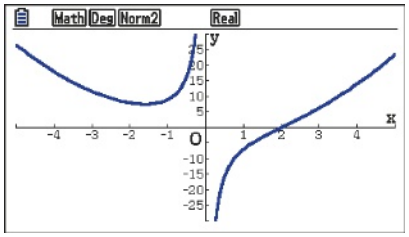
$$h'(x) = \frac{-(x+4)-(2-x)}{(x+4)^2} = \frac{-6}{(x+4)^2} \quad ; \quad h''(x) = \frac{-6\times 2\times(x+4)}{\left((x+4)^2\right)^2} = -\frac{12}{(x+4)^3}$$

$h''(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-4\}$

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -4[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-4, +\infty[$.

O gráfico de h não tem pontos de inflexão.

22.4



$$i'(x) = \frac{3x^2\times x-(x^3-8)}{x^2} = \frac{2x^3+8}{x^2}$$

$$i''(x) = \frac{6x^2\times x^2-(2x^3+8)\times 2x}{(x^2)^2} = \frac{6x^4-4x^4-16x}{x^4} = \frac{2x^4-16x}{x^4} = \frac{2x^3-16}{x^3}$$

$$i''(x) = 0 \iff \frac{2x^3-16}{x^3} = 0 \iff 2x^3-16 = 0 \wedge x^3 \neq 0 \iff x = 2$$

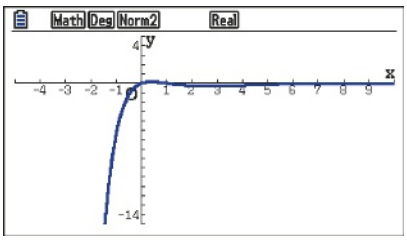
x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$i''(x)$	$+$	N.D.	$-$	0	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de i	$\cup$	N.D.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de i tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$ e em $[2, +\infty[$, e tem a concavidade voltada para baixo em $]0, 2]$.

O ponto de inflexão do gráfico de i é o ponto de coordenadas $(2, i(2)) = (2, 0)$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

22.5



$j'(x) = -e^{-x}(x - x^2) + e^{-x}(1 - 2x) = e^{-x}\left(-(x - x^2) + (1 - 2x)\right) = e^{-x}(x^2 - 3x + 1)$

$j''(x) = -e^{-x}(x^2 - 3x + 1) + e^{-x}(2x - 3) = e^{-x}\left(-(x^2 - 3x + 1) + (2x - 3)\right) = e^{-x}(-x^2 + 5x - 4)$

$j''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x^2 + 5x - 4) = 0 \underset{e^{-x} \neq 0}{\Leftrightarrow} -x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times (-1) \times (-4)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} \Leftrightarrow$

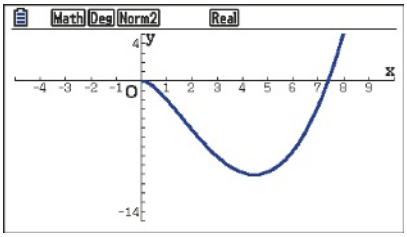
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-5-3}{-2} \vee x = \dfrac{-5+3}{-2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 1$

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$j''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de j	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$

O gráfico de j tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 1]$ e em $[4, +\infty[$, e tem a concavidade voltada para cima em $[1, 4]$.

Os pontos de inflexão do gráfico de j são os pontos de coordenadas $(1, j(1)) = (1, 0)$ e $(4, j(4)) = (4, -12e^{-4})$.

22.6



$l'(x) = 2x(\ln x - 2) + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x \ln x - 4x + x = 2x \ln x - 3x$

$l''(x) = 2 \ln x + 2x \times \dfrac{1}{x} - 3 = 2 \ln x + 2 - 3 = 2 \ln x - 1$

$l''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$l''(x)$	$-$	0	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de l	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de l tem a concavidade voltada para baixo em $]0, \sqrt{e}]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[\sqrt{e}, +\infty[$.

O ponto de inflexão do gráfico de l é o ponto de coordenadas $(\sqrt{e}, l(\sqrt{e})) = \left(\sqrt{e}, -\dfrac{3e}{2}\right)$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

23. $f'(x)=3x^2+6ax+b \quad ; \quad f''(x)=6x+6a$

$f''(x)=0 \iff 6x+6a=0 \iff x=-a$

Como o ponto de inflexão do gráfico de f tem coordenadas $(-1,-2)$,

então $-a=-1 \iff a=1$ e $f(-1)=-2 \iff (-1)^3+3\times 1\times(-1)^2+b\times(-1)=-2 \iff b=4$.

PÁG. 142

Aplicar

24.1 $a(t)=0 \iff -5t^2+100t+1500=0 \iff -t^2+20t+300=0 \iff$

$$\iff t=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\times(-1)\times 300}}{2\times(-1)} \iff t=\frac{-20\pm\sqrt{1600}}{-2} \iff$$

$$\iff t=\frac{-20-40}{-2} \vee t=\frac{-20+40}{-2} \iff t=30 \vee t=-10$$

$\frac{30-10}{2}=10 \quad ; \quad a(10)=-5\times 10^2+100\times 10+1500=2000$ m

24.2 $\frac{a(5)-a(0)}{5-0}=\frac{1875-1500}{5}=75$ m/s

24.3 $a'(t)=-5\times 2t+100=-10t+100 \quad ; \quad a'(30)=-10\times 30+100=-200$ m/s

25.1 $d(0)=57$ m

25.2 $d(t)=0 \iff 57-4{,}9t^2=0 \iff t^2=\frac{57}{4{,}9} \underset{t\geqslant 0}{\iff} t\approx 3{,}4$ s

25.3 $d'(t)=-4{,}9\times 2t=-9{,}8t \quad ; \quad d'(3{,}4)=-9{,}8\times 3{,}4=-33{,}32\approx -33{,}3$ m/s

25.4 $d''(t)=-9{,}8$ m/s^2

26. $h''(x)=0 \iff \left(e^{2x^2-x}-1\right)\left(x^2+x\right)=0 \iff$

$$\iff e^{2x^2-x}-1=0 \vee x^2+x=0 \iff e^{2x^2-x}=1 \vee x(x+1)=0 \iff$$

$$\iff 2x^2-x=0 \vee x=0 \vee x+1=0 \iff x(2x-1)=0 \vee x=0 \vee x=-1 \iff$$

$$\iff x=0 \vee 2x-1=0 \vee x=0 \vee x=-1 \iff x=0 \vee x=\frac{1}{2} \vee x=-1$$

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$h''(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de h	$\cup$	P.I.	$\cap$		$\cap$	P.I.	$\cup$

Opção correta: **(B)**

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 143

Aplicar

27.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$
$g''(x)$	+	0	–	0	+

Opção correta: **(C)**

28. $f'(x)=\ln(x^2)+x\times\frac{2x}{x^2}=\ln(x^2)+2$; $f''(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	–	N.D.	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	N.D.	$\cup$

Não. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$.

29. Vamos determinar o valor mínimo de $g'(x)$.

$$g''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)2(x^2+1)(2x)}{\left((x^2+1)^2\right)^2}=\frac{-2x(x^2+1)^2-4x(1-x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{-2x(x^2+1)-4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

$$g''(x)=0 \iff \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=0 \iff 2x^3-6x=0 \wedge (x^2+1)^3\neq 0 \iff$$

$$\iff 2x(x^2-3)=0 \wedge x^2+1\neq 0 \iff 2x=0 \vee x^2-3=0 \wedge x^2\neq -1 \iff$$

$$\iff x=0 \vee x^2=3 \iff x=0 \vee x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}$$

$$g'(0)=\frac{1-0^2}{(0^2+1)^2}=1$$

$$g'(-\sqrt{3})=\frac{1-(-\sqrt{3})^2}{\left((-\sqrt{3})^2+1\right)^2}=\frac{-2}{16}=-\frac{1}{8} \quad \text{e} \quad g'(\sqrt{3})=\frac{1-(\sqrt{3})^2}{\left((\sqrt{3})^2+1\right)^2}=\frac{-2}{16}=-\frac{1}{8}$$

O declive da reta tangente ao gráfico de g com o menor declive possível é $-\frac{1}{8}$.

PÁG. 151

Aplicar

30.1

a. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

b. Não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

30.2 f não é contínua em $x=0$, porque $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$ não existe.

f é contínua em $x=1$, porque $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x)=f(1)=2$.

31. A função é contínua em $x=-3$, porque o limite, quando $x\longrightarrow -3$, da função é igual à imagem do objeto -3 por meio desta função, neste caso, -2.

A função não é contínua em $x=4$, porque não existe limite desta função quando $x\longrightarrow 4$;

o limite da função quando $x\longrightarrow 4^-$ é 5 e quando $x\longrightarrow 4^+$ é 0.

32. A função não é contínua no seu domínio, porque é descontínua em $x=2$.

33. A função f é contínua em $x=0$, porque $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=f(0)=1$.

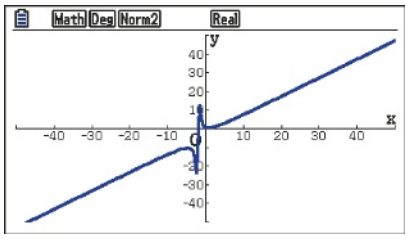
A função g não é contínua em $x=0$, porque $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} g(x)=2$ e $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} g(x)=1$.

34. Não é contínua no seu domínio, porque é descontínua em $x=-1$.

PÁG. 159

Aplicar

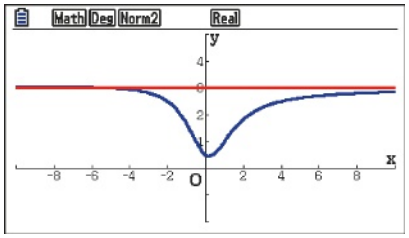
39.1



$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2}=-\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\longrightarrow -\infty}x=-\infty$$

39.2

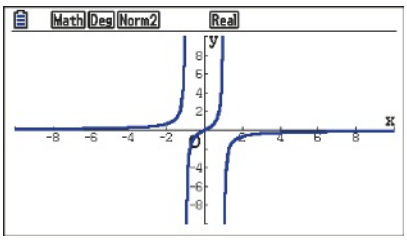


$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{3x^2-x+1}{x^2+2}=3$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{3x^2-x+1}{x^2+2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{3x^2}{x^2}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}3=3$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

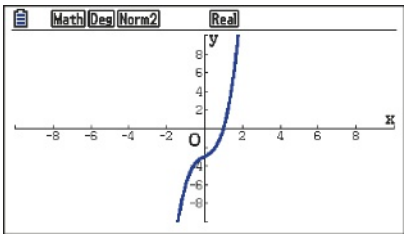
39.3



$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{1-x^2}$ não existe

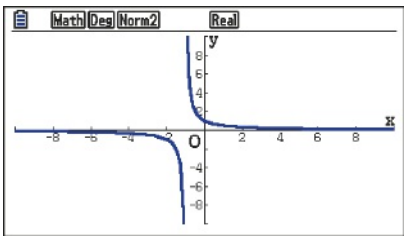
$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{1-x^2} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{1-x^2} = -\infty$

39.4



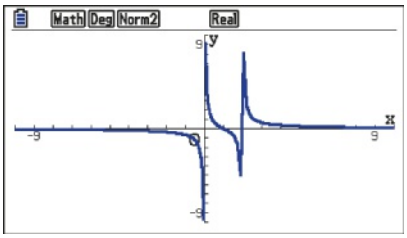
$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x^3 + x - 3\right) = -\infty$

39.5



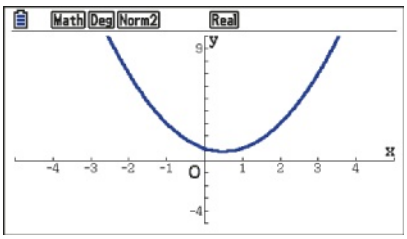
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

39.6



$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+x^2-6x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x^2-2x)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x-1}{x^2-2x} = -\dfrac{4}{15}$

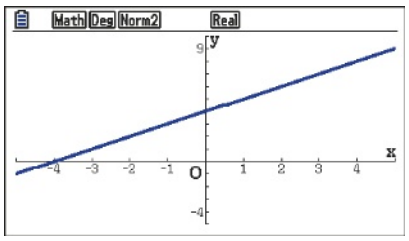
39.7



$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \left(x^2-x+1\right) = 3$

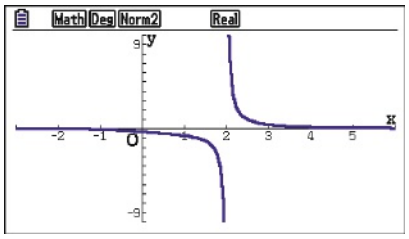
M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

39.8



$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8$$

39.9



$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^4-x^2-12}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{(x+2)\left(x^3-2x^2+3x-6\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^3-2x^2+3x-6}=\frac{0}{-28}=0$$

PÁG. 162

Tarefa 5

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(a^x\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{1}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(a^x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(a^x\ln a\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^2}{2}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p}=+\infty$

2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\log_a x\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln a}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\log_a x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln a}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2\ln a}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}=0$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(x+1))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 166

Aplicar

40.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2^x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x\ln 2}{2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2^x\ln 2)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x(\ln 2)^2}{2}=+\infty$

40.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{3x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(3x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{6x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(6x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{6}=+\infty$

40.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{4^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^3)'}{(4^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{4^x\ln 4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x^2)'}{(4^x\ln 4)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{4^x(\ln 4)^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(6x)'}{(4^x(\ln 4)^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{4^x(\ln 4)^3}=0$

40.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\log x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

40.5 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\log_2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\ln x}{\ln 2}}{x^2}=\dfrac{1}{\ln 2}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^2}$

Vamos fazer uma mudança de variável.

Fazendo $y=\dfrac{1}{x}$, quando $x\longrightarrow 0^+$, tem-se $y\longrightarrow+\infty$.

Tem-se $\ln x=\ln\left(\dfrac{1}{y}\right)=-\ln y$, $x^2=\dfrac{1}{y^2}$ e $\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{-\ln y}{\frac{1}{y^2}}=-y^2\ln y$.

Assim, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(-y^2\ln y\right)=-\infty$.

Como $\ln 2>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\log_2 x}{x^2}=-\infty$.

40.6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{10}}{\ln^2 x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^{10})'}{(\ln^2 x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x^9}{2\ln x\times\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^{10}}{\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(5x^{10})'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50x^9}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}50x^{10}=+\infty$

40.7 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(e^{-x})'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{3x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(-e^{-x})'}{(3x^2)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{6x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(e^{-x})'}{(6x)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-e^{-x}}{6}\right)=-\infty$

40.8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3x^4}{\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-3x^4)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-12x^3}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-12x^4\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-12x^4\right)=-\infty$

40.9 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6^{x+1}}{x^8-3x^9}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6^{x+1}}{-3x^9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{6^x}{x^9}\right)=-\infty$

Uma função exponencial de base maior do que um cresce mais rapidamente do que um polinómio.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

41.1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+x+3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(ax)=-\infty\ ,\ a>0$

Opção correta: **(A)**

41.2 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{f(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x}{f'(x)}=\dfrac{2\times2}{\frac{-6}{-2}}=\dfrac{4}{3}$

42.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{5x^3+x^2-4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{5x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{5x}=0$

42.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln(3x)}{2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{3}{3x}}{2}=\dfrac{1}{2}$

42.3 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{\ln(x+4)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1}{\frac{1}{x+4}}=\lim\limits_{x\to-3}(x+4)=1$

42.4 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^x-e^2}{x^2+3x-10}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^x}{2x+3}=\dfrac{e^2}{7}$

42.5 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\ln^2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2\ln x\times\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{2\ln x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{\ln x}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{\ln x}$ não existe, porque $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{\ln x}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$.

42.6 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(3x^3+1\right)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9x^2}{3x^3+1}=0$

42.7 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{e^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\operatorname{sen}x}{e^x}=0$

42.8 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen}^2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\operatorname{sen}x}{2\operatorname{sen}x\cos x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-1}{2\cos x}=\dfrac{1}{2}$

42.9 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2e^{x^2-x}-2}{3x^2-3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(2x-1)e^{x^2-x}}{6x-3}=\dfrac{2}{3}$

42.10 $\lim\limits_{x\to2\pi}\dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2\pi}\dfrac{\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}}{-\operatorname{sen}x}=\lim\limits_{x\to2\pi}\dfrac{1}{\cos x}=1$

42.11 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^x-2x}{e^{5x}-e^x-4x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3e^{3x}-e^x-2}{5e^{5x}-e^x-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9e^{3x}-e^x}{25e^{5x}-e^x}=\dfrac{1}{3}$

42.12 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)+\cos x}{\cos^2x-3\operatorname{sen}^2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\cos(2x)-\operatorname{sen}x}{-2\cos x\operatorname{sen}x-6\operatorname{sen}x\cos x}=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\cos(2x)-\operatorname{sen}x}{-8\operatorname{sen}x\cos x}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

43.1 Como a função é contínua, tem-se $\lim\limits_{x\to2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to2^+}g(x)=g(2)$.

$\lim\limits_{x\to2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{e^{2x-4}-1}{x^2-6x+8}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2e^{2x-4}}{2x-6}=-1$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(ax)}{\log_4 x} = \frac{\ln(2a)}{\log_4 2} = \frac{\ln(2a)}{\frac{1}{2}} = 2\ln(2a)$$

$$2\ln(2a) = -1 \iff \ln(2a) = -\frac{1}{2} \iff 2a = e^{-\frac{1}{2}} \iff a = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

43.2 $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{2x-4}-1}{x^2-6x+8} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}x\right)}{\log_4 x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}x\right)}{\frac{\ln x}{\ln 4}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}x\right)\right)'}{\left(\frac{\ln x}{\ln 4}\right)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{e}}}{\frac{1}{2\sqrt{e}}x}}{\frac{\frac{1}{x}\times \ln 4}{(\ln 4)^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x\ln 4}} = \lim_{x\to +\infty} \ln 4 = \ln 4$$

43.3 $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2x-4}-1}{x^2-6x+8} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2(x-2)}-1}{(x-2)(x-4)} =$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2(x-2)}-1}{2(x-2)} \times \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x-4} \underset{y=2(x-2)}{=} \lim_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y} \times (-1) = -1$$

PÁG. 171

Aplicar

46.1 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

46.2 $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

46.3 $\lim_{x\to -1^-} g(x) = -\infty$

46.4 $\lim_{x\to -1^+} g(x) = +\infty$

46.5 $\lim_{x\to 2^-} g(x) = -3$

46.6 $\lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty$

47.1 $D_f = \mathbb{R}$

A função f é contínua em $\mathbb{R}$ pois é definida por um polinómio.

O gráfico de f não tem assíntotas verticais.

47.2 $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

A função g é contínua no seu domínio pois é uma função racional.

Calculemos os limites laterais de g em $x = -2$.

$\lim_{x\to -2^-} g(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$ e $\lim_{x\to -2^+} g(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$.

A reta de equação $x = -2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

47.3 $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

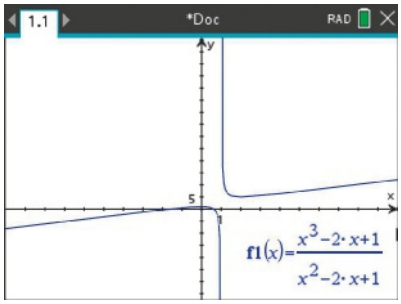
A função h é contínua no seu domínio pois é definida por um quociente de polinómios.

Calculemos os limites laterais de h em $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+x-1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+x-1}{x-1} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de h.



47.4 $D_i = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

A função i é contínua no seu domínio pois é definida por um quociente de polinómios.

Calculemos os limites laterais de i em $x = -3$ e em $x = 3$.

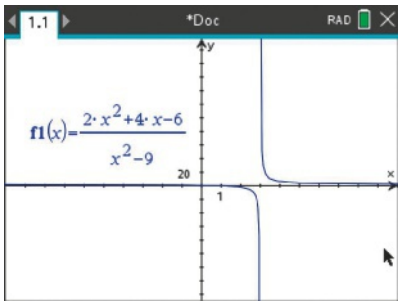
$$\lim_{x \to -3^-} i(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{2x^2+4x-6}{x^2-9} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to -3^-} \frac{2(x^2+2x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to -3^-} \frac{2(x+3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to -3^-} \frac{2(x+1)}{x-3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to -3^+} i(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{2x^2+4x-6}{x^2-9} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to -3^+} \frac{2(x^2+2x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to -3^+} \frac{2(x+3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to -3^+} \frac{2(x+1)}{x-3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to 3^-} i(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x^2+4x-6}{x^2-9} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 3^-} \frac{2(x^2+2x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{2(x+3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{2(x+1)}{x-3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} i(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x^2+4x-6}{x^2-9} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x^2+2x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x+3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x+1)}{x-3} = +\infty$$

A reta de equação $x = 3$ é a única assíntota vertical ao gráfico de i.



47.5 $D_j = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$

Cálculo auxiliar::

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-4)}}{2} \iff$$

$$\iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \iff$$

$$\iff x = \frac{-3-5}{2} \vee x = \frac{-3+5}{2} \iff$$

$$\iff x = -4 \vee x = 1$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

A função j é contínua no seu domínio pois é definida por uma composição de uma função exponencial com um polinómio.

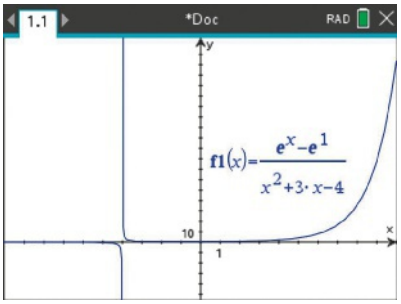
Calculemos os limites laterais de j em $x=-4$ e em $x=1$.

$$\lim_{x\to -4^-} j(x)=\lim_{x\to -4^-}\frac{e^x-e}{x^2+3x-4}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -4^+} j(x)=\lim_{x\to -4^+}\frac{e^x-e}{x^2+3x-4}=+\infty .$$

$$\lim_{x\to 1^-} j(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x-e}{x^2+3x-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x}{2x+3}=\frac{e}{5}$$

$$\lim_{x\to 1^+} j(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x-e}{x^2+3x-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x}{2x+3}=\frac{e}{5}$$

A reta de equação $x=-4$ é a única assíntota vertical ao gráfico de j.



47.6 $D_k=\{x\in\mathbb{R}: x-2\neq 0 \wedge x>0\}=]0,+\infty[\setminus\{2\}$

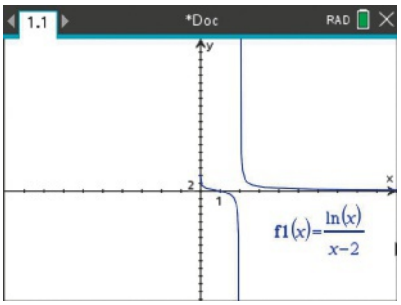
A função k é contínua no seu domínio pois é definida por uma composição de uma função logarítmica com um polinómio.

Calculemos os limites laterais de k em $x=0$ e em $x=2$.

$$\lim_{x\to 0^+} k(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} k(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\ln x}{x-2}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} k(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln x}{x-2}=+\infty .$$

As retas de equações $x=0$ e $x=2$ são assíntotas verticais ao gráfico de k.



47.7 $D_l=\left\{x\in\mathbb{R}: e^x-1\neq 0 \wedge x+1>0\right\}=]-1,+\infty[\setminus\{0\}$

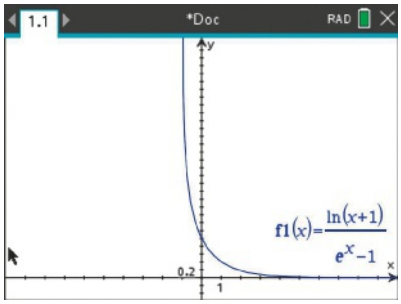
A função l é contínua no seu domínio pois é definida por uma composição de uma função logarítmica com uma função exponencial.

Calculemos os limites laterais de l em $x=-1$ e em $x=0$.

$$\lim_{x\to -1^+} l(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{\ln(x+1)}{e^x-1}=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} l(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{e^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{e^x}=1 .$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

A reta de equação $x=-1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de l.



47.8 $D_m=\{x\in\mathbb{R}: x^3\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

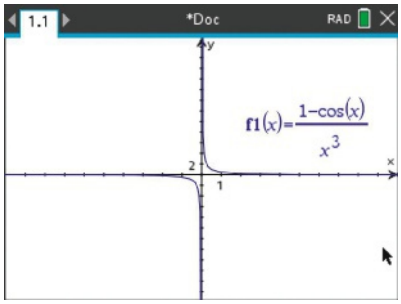
A função m é contínua no seu domínio pois é definida por uma composição de uma função logarítmica com uma função exponencial.

Calculemos os limites laterais de m em $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} m(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{3x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{3x}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=-\infty\times 1=-\infty \quad \text{e}$$

$$\lim_{x\to 0^+} m(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3x}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=+\infty\times 1=+\infty$$

A reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de m.



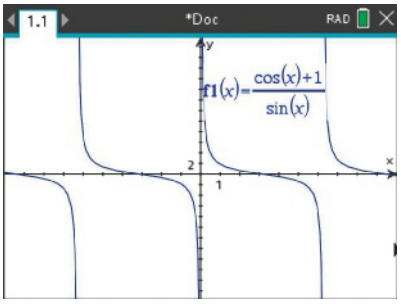
47.9 $D_n=\{x\in\mathbb{R}: \operatorname{sen} x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$

A função n é contínua no seu domínio pois é definida por uma composição de funções trigonométricas.

Calculemos os limites laterais de n em $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} n(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x+1}{\operatorname{sen} x}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} n(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x+1}{\operatorname{sen} x}=+\infty.$$

O gráfico de n tem uma infinidade de assíntotas verticais, cujas equações são da forma $x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.



48. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$ e f é contínua em $\mathbb{R}$.

PÁG. 173

Aplicar

50.1 $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

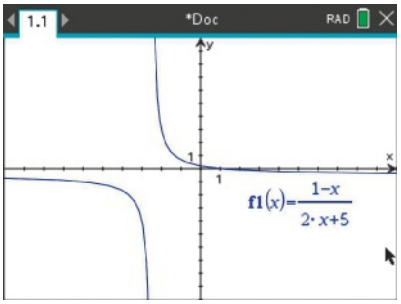
50.2 $\lim_{x\to +\infty} f(x)=3$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 174

Aplicar

51.1



A.V.: $x=-\frac{5}{2}$ e A.H.: $y=-\frac{1}{2}$.

Comecemos pela determinação das assíntotas verticais.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:2x+5\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

A função f é contínua no seu domínio. Vamos procurar a existência de assíntotas verticais em $x=-\frac{5}{2}$.

Como $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}^-} f(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}^+} f(x)=+\infty$, a reta de equação $x=-\frac{5}{2}$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

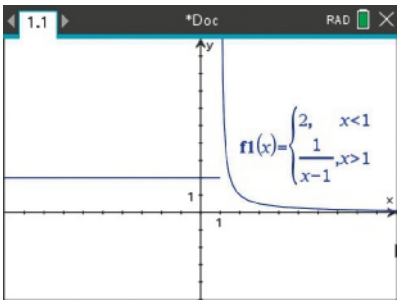
Quanto às assíntotas horizontais, tendo em conta o domínio de f, vamos procurá-las em $-\infty$ e em $+\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{1-x}{2x+5}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{2x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-x}{2x+5}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{-x}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Logo, a reta de equação $y=-\frac{1}{2}$ é a assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

51.2



A.V.: $x=1$; A.H.: $y=2$ e $y=0$.

Comecemos pela determinação das assíntotas verticais.

$D_g=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

A função g é contínua no seu domínio. Vamos procurar a existência de assíntotas verticais em $x=1$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=2$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$, a reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g.

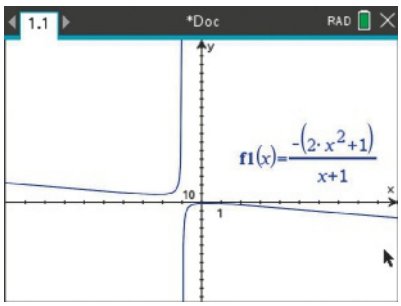
Quanto às assíntotas horizontais, tendo em conta o domínio de g, vamos procurá-las em $-\infty$ e em $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} 2=2$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x-1}=0$.

Logo, a reta de equação $y=2$ é a assíntota horizontal ao gráfico de g em $-\infty$ e a reta de equação $y=0$ é a assíntota horizontal ao gráfico de g em $+\infty$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

51.3



A.V.: $x=-1$ e A.H.: não tem.

Comecemos pela determinação das assíntotas verticais.

$D_h=\{x\in\mathbb{R}: x+1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

A função h é contínua no seu domínio. Vamos procurar a existência de assíntotas verticais em $x=-1$.

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(-\dfrac{2x^2+1}{x+1}\right)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(-\dfrac{2x^2+1}{x+1}\right)=-\infty$, a reta de equação $x=-1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de h.

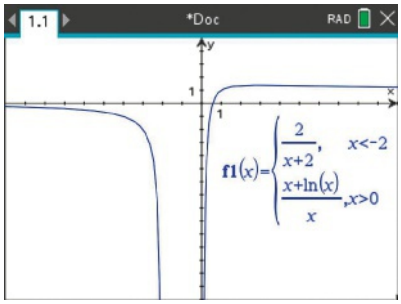
Quanto às assíntotas horizontais, tendo em conta o domínio de h, vamos procurá-las em $-\infty$ e em $+\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} h(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{2x^2+1}{x+1}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{2x^2}{x}\right)=\lim_{x\to -\infty}(-2x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{2x^2+1}{x+1}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{2x^2}{x}\right)=\lim_{x\to +\infty}(-2x)=-\infty$$

Logo, o gráfico de h não tem assíntotas horizontais.

51.4



A.V.: $x=-2$ e $x=0$; A.H.: $y=0$ e $y=1$.

Comecemos pela determinação das assíntotas verticais.

$D_i=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

A função i é contínua no seu domínio. Vamos procurar a existência de assíntotas verticais em $x=-2$ e em $x=0$.

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} i(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2}{x+2}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} i(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\ln x}{x}=-\infty$, as retas de equação $x=-2$ e $x=0$ são as assíntotas verticais ao gráfico de i.

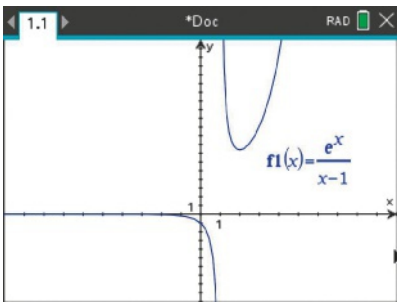
Quanto às assíntotas horizontais, tendo em conta o domínio de i, vamos procurá-las em $-\infty$ e em $+\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} i(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{2}{x+2}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} i(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

Logo, a reta de equação $y=0$ é a assíntota horizontal ao gráfico de i em $-\infty$ e a reta de equação $y=1$ é a assíntota horizontal ao gráfico de i em $+\infty$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

51.5



A.V.: $x=1$ e A.H.: $y=0$.

Comecemos pela determinação das assíntotas verticais.

$D_j=\{x\in\mathbb{R}: x-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

A função j é contínua no seu domínio. Vamos procurar a existência de assíntotas verticais em $x=1$.

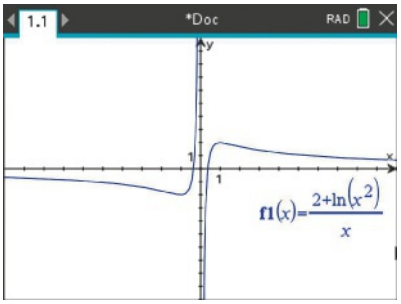
Como $\lim\limits_{x\to 1^-} j(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^x}{x-1}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} j(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^x}{x-1}=+\infty$, a reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de j.

Quanto às assíntotas horizontais, tendo em conta o domínio de j, vamos procurá-las em $-\infty$ e em $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} j(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

Logo, a reta de equação $y=0$ é a assíntota horizontal ao gráfico de j em $-\infty$.

51.6



A.V.: $x=0$ e A.H.: $y=0$.

Comecemos pela determinação das assíntotas verticais.

$D_k=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\wedge x^2>0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

A função k é contínua no seu domínio. Vamos procurar a existência de assíntotas verticais em $x=0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} k(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2+\ln(x^2)}{x}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} k(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2+\ln(x^2)}{x}=-\infty$, a reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de k.

Quanto às assíntotas horizontais, tendo em conta o domínio de k, vamos procurá-las em $-\infty$ e em $+\infty$.

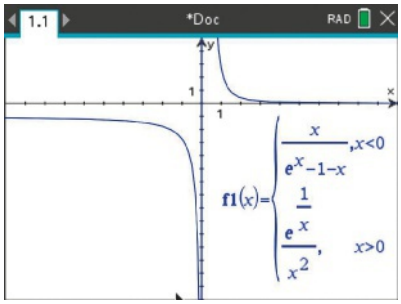
$\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\ln(x^2)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\ln(x^2)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

Logo, a reta de equação $y=0$ é a assíntota horizontal ao gráfico de k em $-\infty$ e em $+\infty$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

51.7



A.V.: $x=0$; A.H.: $y=-1$ e $y=0$.

Comecemos pela determinação das assíntotas verticais.

$D_l=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

A função l é contínua no seu domínio. Vamos procurar a existência de assíntotas verticais em $x=0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} l(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{e^x-1-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{e^x-1}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} l(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=+\infty$,

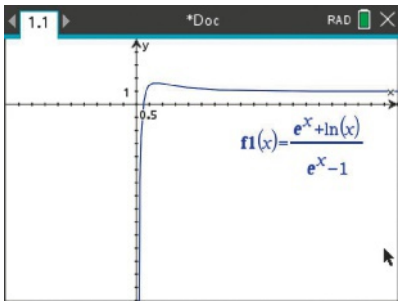
a reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de l.

Quanto às assíntotas horizontais, tendo em conta o domínio de l, vamos procurá-las em $-\infty$ e em $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} l(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-1-x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x-1}=-1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} l(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=0$

Logo, a reta de equação $y=-1$ é a assíntota horizontal ao gráfico de l em $-\infty$ e a reta de equação $y=0$ é a assíntota horizontal ao gráfico de l em $+\infty$.

51.8



A.V.: $x=0$ e A.H.: $y=1$.

Comecemos pela determinação das assíntotas verticais.

$D_m=\{x\in\mathbb{R}: e^x-1\neq 0\wedge x>0\}=]0,+\infty[$

A função m é contínua no seu domínio. Vamos procurar a existência de assíntotas verticais em $x=0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} m(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+\ln x}{e^x-1}=-\infty$, a reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de m.

Quanto às assíntotas horizontais, tendo em conta o domínio de m, vamos procurá-las em $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\ln x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\frac{1}{x}}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{xe^x}\right)=1$

Logo, a reta de equação $y=1$ é a assíntota horizontal ao gráfico de m em $+\infty$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

52. Comecemos pela determinação das assíntotas verticais.

A função g é contínua no seu domínio. Vamos procurar a existência de assíntotas verticais em $x=0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{e^x-1-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2}{e^x}=2$

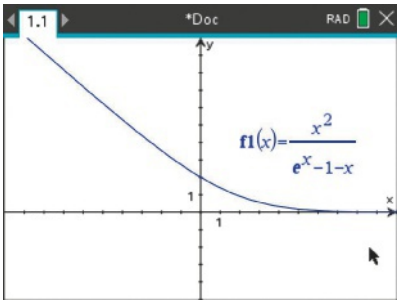
e $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{e^x-1-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{e^x}=2$, o gráfico de g não tem assíntotas verticais.

Quanto às assíntotas horizontais, tendo em conta o domínio de l, vamos procurá-las em $-\infty$ e em $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x-1-x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^x-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x-1-x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

Logo, a reta de equação $y=0$ é a assíntota horizontal ao gráfico de g em $+\infty$.



53. Como a função f é crescente e o eixo Ox é a assíntota horizontal ao gráfico de f, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^-$.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}=\dfrac{+\infty}{0^-}=-\infty$.

Opção correta: **(A)**

54. Como a reta de equação $y=2$ é a assíntota horizontal ao gráfico de g, então $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=0$.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 176

Aplicar

56.1 Como $D_g=\mathbb{R}\setminus\{4\}$ e o gráfico de g tem uma assíntota vertical, esta tem equação $x=4$.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-x+3\right)=0 \iff \lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-(x-3)\right)=0$

e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+2x-9\right)=0 \iff \lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-(-2x+9)\right)=0$,

o gráfico de g tem duas assíntotas oblíquas: uma de equação $y=x-3$, em $-\infty$,

e uma de equação $y=-2x+9$, em $+\infty$.

56.2 $y=x-3 \wedge y=-2x+9 \iff x-3=-2x+9 \iff x=4$ e $y=4-3 \iff y=1$

$(4,1)$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

57. A reta de equação $y=\frac{1}{2}x$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$, pelo que

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-2)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{f(x)}-2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2f(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}=\frac{0}{+\infty}=0$$

Logo, a reta de equação $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de g em $+\infty$.

PÁG. 181

Aplicar

61.1 a. $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=-\infty$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(-2x))=1$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-2x+1))=0$

f. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{f(x)}=3\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{f(x)}=3\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}}=3\times\frac{1}{-2}=-\frac{3}{2}$

61.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(-2x+1)+4)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(-2x+1))+\lim_{x\to+\infty}4=0+4=4$$

62. $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-(2x+3))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+5x+4}{x+1}-(2x+3)\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+5x+4-(2x+3)(x+1)}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=0$$

Logo, a reta de equação $y=2x+3$ é assíntota ao gráfico de g em $+\infty$.

63.1 $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{2x^2-x+1}{x+2}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{2x^2-x+1}{x+2}=+\infty$

A.V.: $x=-2$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^2+2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{x+2}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-5x+1}{x+2}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-5x}{x}\right)=-5$$

Logo, a reta de equação $y=2x-5$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $-\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^2+2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{x+2}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5x+1}{x+2}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5x}{x}\right)=-5$$

Logo, a reta de equação $y=2x-5$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

63.2 $\lim\limits_{x\to(-\ln 2)^-} h(x)=\lim\limits_{x\to(-\ln 2)^-}\ln\left(2e^{-x}-4\right)=-\infty$

A.V.: $x=-\ln 2$

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(2e^{-x}-4\right)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2e^{-x}}{2e^{-x}-4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^{-x}}{-2e^{-x}}=-1$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\left(2e^{-x}-4\right)+x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\left(2e^{-x}-4\right)+\ln e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\left(2e^{-x}-4\right)\times e^{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\left(2-4e^{x}\right)\right)=\ln 2$

Logo, a reta de equação $y=-x+\ln 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h em $-\infty$.

63.3 $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x}-2\right)=e-2=g(1)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3+x}{3x^2-3}=+\infty$.

A.V.: $x=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}-2\right)=-2$; A.H.: $y=-2$, em $-\infty$.

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x}{3x^3-3x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{3x^3}=\dfrac{1}{3}$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\dfrac{1}{3}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+x}{3x^2-3}-\dfrac{1}{3}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{3x^2-3}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{3x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3x}\right)=0$

A.O.: $y=\dfrac{1}{3}x$, em $+\infty$.

63.4 $\lim\limits_{x\to 1^-} i(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1+\ln x}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} i(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1+\ln x}=+\infty$.

A.V.: $x=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} i(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1+\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$; A.H.: $y=1$, em $+\infty$.

64. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=3 \iff \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x-3\right)=0 \iff \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+3)\right)=0$

A reta de equação $y=2x+3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$.

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-3x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-3\right)=2-3=-1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=3$

Logo, a reta de equação $y=-x+3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g em $+\infty$.

65. A reta r tem declive $\dfrac{2-1}{0-3}=-\dfrac{1}{3}$ e ordenada na origem 2.

65.1 A reta de equação $y=-\dfrac{1}{3}x+2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}+3f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\left(f(x)+\dfrac{1}{3}x\right)\right)=$

$=-\dfrac{1}{3}+3\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\dfrac{1}{3}x\right)=-\dfrac{1}{3}+3\times 2=\dfrac{17}{3}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

65.2 $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2}{f(x)}+x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{xf(x)}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}+1=\dfrac{1}{-\frac{1}{3}}+1=-2$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)+2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{f(x)}+x+2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{f(x)}+3x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\dfrac{x}{f(x)}+3\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{f(x)}\left(x+3f(x)\right)\right)$

Da alínea anterior,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}+3f(x)+x\right)=\dfrac{17}{3}\iff\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3f(x)+x\right)=\dfrac{17}{3}\iff$

$\iff-\dfrac{1}{3}+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3f(x)+x\right)=\dfrac{17}{3}\iff\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3f(x)+x\right)=6$

Assim,

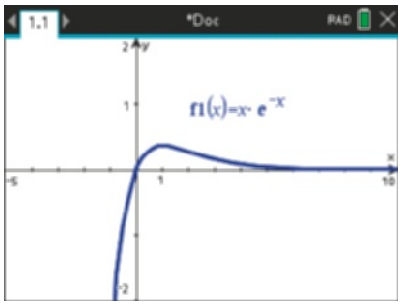
$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{f(x)}\left(x+3f(x)\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+3f(x)\right)=\dfrac{1}{-\frac{1}{3}}\times6=-18$

Logo, a reta de equação $y=-2x-18$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h em $+\infty$.

PÁG. 184

Tarefa 6

1.

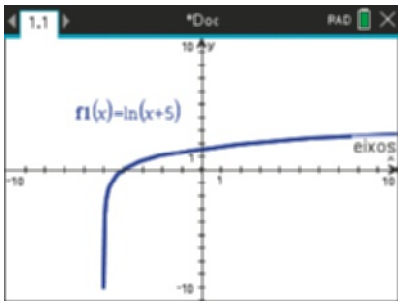


1.1 Apenas analisando o gráfico não é possível tirar conclusões.

1.2 $g(x)=0\iff xe^{-x}=0\underset{e^{-x}\neq0}{\iff}x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$; A.H.: $y=0$, em $+\infty$.

2.

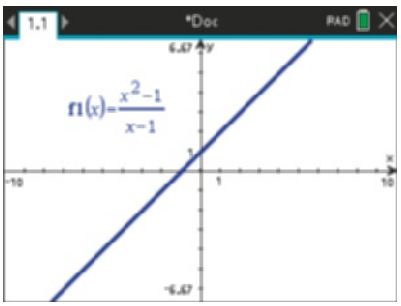


$\lim\limits_{x\to-5^+}h(x)=\lim\limits_{x\to-5^+}\ln(x+5)=-\infty$

A função tem assíntota vertical de equação $x=-5$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

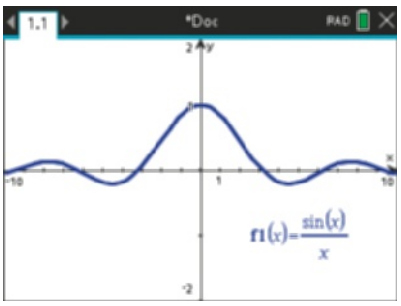
3.



3.1 Considerando apenas a representação gráfica de f obtida na calculadora, esta parece ser contínua em $\mathbb{R}$.

3.2 Não é contínua em $\mathbb{R}$, pois o domínio de f é $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

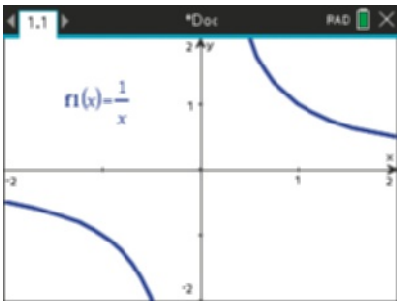
4.



4.1 Considerando apenas a representação gráfica de j obtida na calculadora, esta parece ser contínua em $\mathbb{R}$.

4.2 Não é contínua em $\mathbb{R}$, pois o domínio de j é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5.1



Sim, os gráficos parecem ser iguais.

5.2 Por exemplo, a função m não tem zeros e a função i tem uma infinidade de zeros, que correspondem aos zeros da função seno.

PÁG. 185

Aplicar

66.1 $D_f=\mathbb{R}$; $D'_f=[2,+\infty[$

$f'(x)=-2^{-x}\ln 2+2^x\ln 2=\left(-2^{-x}+2^x\right)\ln 2$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$f'(x)=0 \iff \left(-2^{-x}+2^{x}\right)\ln 2=0 \iff -2^{-x}+2^{x}=0 \iff$

$\iff 2^{x}=2^{-x} \iff x=-x \iff x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Zeros e sinal de f'	–	0	+
Monotonia e extremos de f	↘	Mín.	↗

f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$;

tem um mínimo absoluto $f(0)=2^{-0}+2^{0}=2$ em $x=0$.

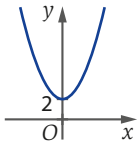
$f''(x)=\left(2^{-x}\ln 2+2^{x}\ln 2\right)\ln 2=\left(2^{-x}+2^{x}\right)(\ln 2)^{2}$

$f''(x)=0 \iff \left(2^{-x}+2^{x}\right)(\ln 2)^{2}=0 \iff 2^{-x}+2^{x}=0$ impossível

$f''(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

66.2



67.1 $f(x)=0 \iff \frac{x}{\ln x}=0 \iff x=0 \wedge \ln x\neq 0 \iff x=0 \wedge x\neq 1$

Como $D_f=\mathbb{R}^{+}\setminus\{1\}$, conclui-se que f não tem zeros.

$\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^{-}}\frac{x}{\ln x}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^{+}}\frac{x}{\ln x}=+\infty$; A.V.: $x=1$.

$f'(x)=\dfrac{\ln x-x\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^{2}}=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^{2}}$

$f'(x)=0 \iff \dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^{2}}=0 \iff \ln x-1=0 \wedge (\ln x)^{2}\neq 0 \iff$

$\iff \ln x=1 \wedge \ln x\neq 0 \iff x=e \wedge x\neq 1$

x	0		1		e	$+\infty$
Zeros e sinal de f'	N.D.	–	N.D.	–	0	+
Monotonia e extremos de f	N.D.	↘	N.D.	↘	Mín.	↗

f é decrescente em $]0, 1[$ e em $]1, e]$ e crescente em $[e, +\infty[$;

tem um mínimo relativo $f(e)=\frac{e}{\ln e}=e$ em $x=e$.

$D'_f=]-\infty, 0[\cup[e, +\infty[$

67.2 $g(x)=0 \iff \frac{x}{e^{x-1}}=0 \iff x=0 \wedge e^{x-1}\neq 0$

$g'(x)=\dfrac{e^{x-1}-xe^{x-1}}{\left(e^{x-1}\right)^{2}}=\dfrac{(1-x)e^{x-1}}{\left(e^{x-1}\right)^{2}}=\dfrac{1-x}{e^{x-1}}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$g'(x)=0 \iff \frac{1-x}{e^{x-1}}=0 \iff 1-x=0 \wedge e^{x-1}\neq 0 \underset{e^{x-1}\neq 0}{\iff} x=1$

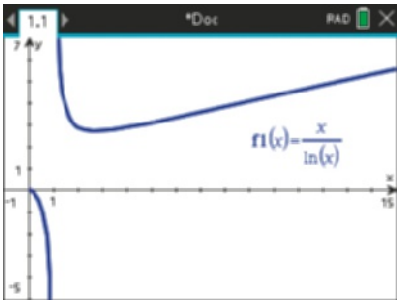
x	$-\infty$	1	$+\infty$
Zeros e sinal de g'	+	0	–
Monotonia e extremos de g	↗	Máx.	↘

g é crescente em $]-\infty, 1]$ e decrescente em $[1, +\infty[$;

tem um máximo absoluto $g(1)=\frac{1}{e^{1-1}}=1$ em $x=1$.

$D'_g=]-\infty, 1]$

67.3



a. Tendo em conta esta representação gráfica, parece que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$.

b. $f''(x)=\frac{\frac{1}{x}\times(\ln x)^2-(\ln x-1)\times 2\ln x\times\frac{1}{x}}{\left((\ln x)^2\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\times\ln x-(\ln x-1)\times 2\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^3}=\frac{\frac{1}{x}(2-\ln x)}{(\ln x)^3}$

$f''(x)=0 \iff \frac{\frac{1}{x}(2-\ln x)}{(\ln x)^3}=0 \iff \frac{1}{x}(2-\ln x)=0 \wedge (\ln x)^3\neq 0 \iff$

$\iff \left(\frac{1}{x}=0 \vee 2-\ln x=0\right) \wedge \ln x\neq 0 \underset{\frac{1}{x}\neq 0}{\iff} x=e^2 \wedge x\neq 1$

x	0		1		e^2	$+\infty$
Zeros e sinal de f''	N.D.	–	N.D.	+	0	–
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		∩	N.D.	∪	P.I.	∩

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, 1[$ e em $[e^2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]1, e^2]$. Tem ponto de inflexão em $x=e^2$.

68.1 $D_f=\mathbb{R}$; f é contínua no seu domínio.

$f(x)=0 \iff x^2e^x=0 \underset{e^x\neq 0}{\iff} x^2=0 \iff x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^x\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right)=0$; A.H.: $y=0$, em $-\infty$.

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$f'(x)=0 \iff (2x+x^2)e^x=0 \underset{e^x\neq 0}{\iff} 2x+x^2=0 \iff x(2+x)=0 \iff x=0 \vee x=-2$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
Zeros e sinal de f'	+	0	−	0	+
Monotonia e extremos de f	↗	Máx.	↘	Mín.	↗

f é crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[0, +\infty[$ e é decrescente em $[-2, 0]$;

tem um máximo relativo igual a $f(-2)=(-2)^2e^{-2}=4e^{-2}$ em $x=-2$

e tem um mínimo absoluto igual a $f(0)=0^2e^0=0$ em $x=0$.

$f''(x)=(2+2x)e^x+(2x+x^2)e^x=(2+2x+2x+x^2)e^x=(2+4x+x^2)e^x$

$f''(x)=0 \iff (2+4x+x^2)e^x=0 \underset{e^x\neq 0}{\iff} 2+4x+x^2=0 \iff$

$\iff x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times 2}}{2} \iff x=\dfrac{-4\pm\sqrt{8}}{2} \iff$

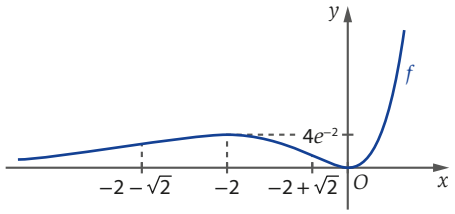
$\iff x=\dfrac{-4-2\sqrt{2}}{2} \vee x=\dfrac{-4+2\sqrt{2}}{2} \iff x=-2-\sqrt{2} \vee x=-2+\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$	$+\infty$
Zeros e sinal de f''	+	0	−	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	∪	P. I.	∩	P. I.	∪

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty -2-\sqrt{2}]$ e em $[-2+\sqrt{2}, +\infty[$

e tem a concavidade voltada para baixo em $[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}]$.

Tem pontos de inflexão em $x=-2-\sqrt{2}$ e em $x=-2+\sqrt{2}$.



68.2 $D_g=\mathbb{R}$

g é contínua no seu domínio.

g tem um zero em $x\approx 4{,}02$ (obtido graficamente).

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+4+e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{xe^x}\right)=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+4+e^{-x}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+e^{-x}\right)=4$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

A reta de equação $y=-x+4$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g em $+\infty$.

$g'(x)=-1-e^{-x}$

$g'(x)=0 \iff -1-e^{-x}=0 \iff e^{-x}=-1$ impossível

$g'(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

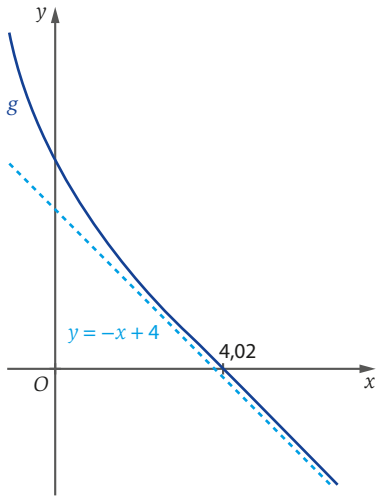
g é decrescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos.

$g''(x)=e^{-x}$

$g''(x)=0 \iff e^{-x}=0$ impossível

$g''(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$ e não tem pontos de inflexão.



68.3 $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x+1}{x-1}>0\right\}=$

$=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

Cálculo auxiliar::

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	N.D.	$+$

h é contínua no seu domínio.

$h(x)=0 \iff \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0 \iff$

$\iff \frac{x+1}{x-1}=1 \iff x+1=x-1$ impossível

h não tem zeros.

$\lim\limits_{x\to-1^-}h(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to1^+}h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=+\infty$.

As retas de equações $x=-1$ e $x=1$ são assíntotas verticais ao gráfico de h.

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=0$.

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h.

$$h'(x)=\frac{\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{-2(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}=-\frac{2}{x^2-1}$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$h'(x)=0 \iff -\frac{2}{x^2-1}=0$ impossível

$h'(x)<0 \iff x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

h é decrescente em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ e não tem extremos.

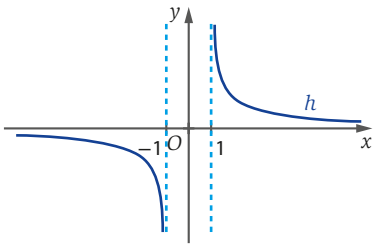
$h''(x)=\frac{4x}{(x^2-1)^2}$

$h''(x)=0 \iff \frac{4x}{(x^2-1)^2}=0 \iff 4x=0\wedge (x^2-1)^2\neq 0 \iff x=0\wedge x\neq -1\wedge x\neq 1$

$h''(x)<0 \iff x\in]-\infty,-1[$ e $h''(x)>0 \iff x\in]1,+\infty[$.

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$,

tem a concavidade voltada para cima em $]1,+\infty[$ e não tem pontos de inflexão.



69. $f(x)=0 \iff x^n\ln x=0 \iff x^n=0\vee \ln x=0 \iff x=0\vee x=1$; $B(1,0)$

$f'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^n\times\frac{1}{x}=x^{n-1}(n\ln x+1)$

$f'(x)=0 \iff x^{n-1}(n\ln x+1)=0 \iff x^{n-1}=0\vee n\ln x+1=0 \iff$

$\iff x=0\vee \ln x=-\frac{1}{n} \iff x=0\vee x=e^{-\frac{1}{n}}$

$f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n\ln\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)=e^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{ne}$; $A\left(e^{-\frac{1}{n}},-\frac{1}{ne}\right)$

$A_{[OAB]}=\frac{1}{6e} \iff \frac{\overline{OB}\times|y_A|}{2}=\frac{1}{6e} \iff \frac{1\times\frac{1}{ne}}{2}=\frac{1}{6e} \iff \frac{1}{2ne}=\frac{1}{6e} \iff 2ne=6e \iff n=3$

PÁG. 190

Aplicar

72. f é contínua em $[2,3]$ e $f(3)<1<f(2)$;

logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c\in]2,3[$ tal que $f(c)=1$.

73. g é contínua em $[-1,2]$ e $g(-1)=4<6<g(2)=16$;

logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c\in]-1,2[$ tal que $g(c)=6$.

74.1 h é contínua em $[0,2]$ e $h(0)=2<3<h(2)=6$;

logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c\in]0,2[$ tal que $h(c)=3$.

74.2 $h(x)=3 \iff x^3-2x+2=3 \iff x^3-2x-1=0$

Como -1 é uma raiz de x^3-2x-1, recorremos à Regra de Ruffini para efetuar a divisão.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

	1	0	−2	−1
−1		−1	1	1
	1	−1	−1	0

Assim, $x^3 - 2x - 1 = (x+1)(x^2 - x - 1)$ e

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-1)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee \underbrace{x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}_{\in]0,\,2[}$$

75. h é contínua em $[1, 5]$ e $h(1) < 5 < h(5)$;

logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c \in]1, 5[$ tal que $h(c) = 5$, ou seja, 5 pertence ao contradomínio de h.

76.1 $f(-1) = \frac{5}{2}$ e $f(2) = -11$.

76.2 Não, pois f não é contínua no intervalo $[-1, 2]$, pois $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

77. g é contínua em $]-\infty, 1[$, pois está definida por uma função polinomial;

g é contínua em $]1, +\infty[$, pois está definida pelo quociente de funções contínuas;

g é contínua em $x = 1$, pois $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$.

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (\sqrt{x}+1) = 2$$

g é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[-1, 2]$ e $g(-1) = 0 < \sqrt{2} < g(2) = \sqrt{2} + 1$;

logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c \in]-1, 2[$ tal que $g(c) = \sqrt{2}$.

O valor lógico da afirmação é verdadeiro.

78.1 A função g é contínua em $[-1, 0]$, $g(-1) = -1$, $g(0) = 1$ e $g(-1) \times g(0) < 0$, pelo que g tem, pelo menos, um zero em $]-1, 0[$.

78.2 $]0, 1[$

79. A função f é contínua em $[0, 1]$, $f(0) = 1$, $f(1) = e - 3 < 0$ e $f(0) \times f(1) < 0$, pelo que f tem, pelo menos, um zero em $]0, 1[$.

80. A função g é contínua em $[1, 4]$ e $g(1) = -\frac{1}{2}$ e $g(4) = \ln 4 - 2 \approx -0{,}61$, pelo que, como $g(1)$ e $g(4)$ têm o mesmo sinal, tendo unicamente em conta o teorema de Bolzano-Cauchy, nada se pode concluir acerca da existência de zeros da função no intervalo $]0, 4[$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 199

Aplicar

83.1 Seja f a função definida por $f(x)=x^3-x-1$.

f é contínua em $[1\,,\,2]$.

$f(1)=-1\ ;\ f(2)=5\ ;\ f(1)\times f(2)<0$

Pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um zero de f no intervalo $]1\,,\,2[$, ou seja, a equação tem, pelo menos, uma solução nesse intervalo.

83.2 Comecemos com o intervalo $I_1=[1\,,\,2]$.

1.ª iteração: $x_1=\dfrac{1+2}{2}=1{,}5$; erro máximo: $\dfrac{2-1}{2}=0{,}5$

Como $f(1{,}5)=0{,}875>0$, tem-se $f(1)\times f(1{,}5)<0$ e $I_2=[1\,;\,1{,}5]$.

2.ª iteração: $x_2=\dfrac{1+1{,}5}{2}=1{,}25$; erro máximo: $\dfrac{1{,}5-1}{2}=0{,}25$

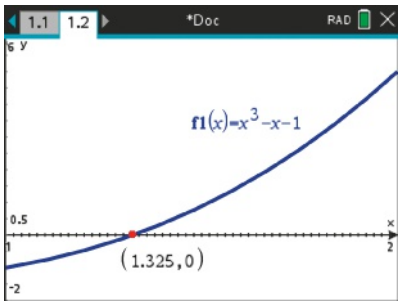
Como $f(1{,}25)=-0{,}296875<0$, tem-se $f(1{,}25)\times f(1{,}5)<0$ e $I_3=[1{,}25\,;\,1{,}5]$.

3.ª iteração: $x_3=\dfrac{1{,}25+1{,}5}{2}=1{,}375$; erro máximo: $\dfrac{1{,}5-1{,}25}{2}=0{,}125$

Valor aproximado: 1,375

Erro máximo: 0,125

83.3



$|1{,}325-1{,}375|=0{,}05$

A diferença, em valor absoluto, entre os dois valores aproximados é inferior ao erro máximo previsto pelo método da bissecção.

PÁG. 200

Aplicar

84.1 Seja f a função definida por $f(x)=e^{-x}-x$.

$f(0)=1$ e $f(1)=e^{-1}-1<0.$

Comecemos com o intervalo $I_1=[0\,,\,1]$.

1.ª iteração: $x_1=\dfrac{0+1}{2}=0{,}5$; erro máximo: $\dfrac{1-0}{2}=0{,}5$

Como $f(0{,}5)>0$, tem-se $f(0{,}5)\times f(1)<0$ e $I_2=[0{,}5\,;\,1]$.

2.ª iteração: $x_2=\dfrac{0{,}5+1}{2}=0{,}75$; erro máximo: $\dfrac{1-0{,}5}{2}=0{,}25$

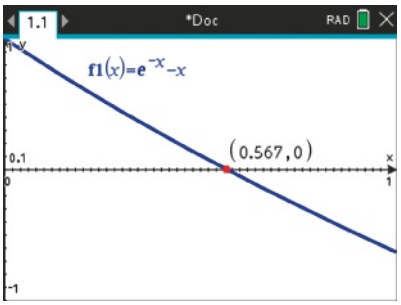
Como $f(0{,}75)<0$, tem-se $f(0{,}5)\times f(0{,}75)<0$ e $I_3=[0{,}5\,;\,0{,}75]$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

3.ª iteração: $x_3 = \frac{0{,}5 + 0{,}75}{2} = 0{,}625$; erro máximo: $\frac{0{,}75 - 0{,}5}{2} = 0{,}125$

Valor aproximado: 0,625

84.2



$|0{,}567 - 0{,}625| = 0{,}058$

A diferença, em valor absoluto, entre os dois valores aproximados é inferior ao erro máximo previsto pelo método da bissecção.

85.1 A função f definida por $f(x) = \ln(1 - x) - x - 2$ é contínua em $[-1{,}5\,;-1]$.

$f(-1{,}5) \approx 0{,}416$; $f(-1) \approx -0{,}307$; $f(-1{,}5) \times f(-1) < 0$

Pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um zero de f no intervalo $]-1{,}5\,;-1[$.

85.2 Comecemos com o intervalo $I_1 = [-1{,}5\,;-1]$.

1.ª iteração: $x_1 = \frac{-1{,}5 - 1}{2} = -1{,}25$; erro máximo: $\frac{-1 + 1{,}5}{2} = 0{,}25$

Como $f(-1{,}25) > 0$, tem-se $f(-1{,}25) \times f(-1) < 0$ e $I_2 = [-1{,}25\,;-1]$.

2.ª iteração: $x_2 = \frac{-1{,}25 - 1}{2} = -1{,}125$; erro máximo: $\frac{-1 + 1{,}25}{2} = 0{,}125$

Como $f(-1{,}125) < 0$, tem-se $f(-1{,}125) \times f(-1{,}25) < 0$ e $I_3 = [-1{,}25\,;-1{,}125]$.

3.ª iteração: $x_3 = \frac{-1{,}25 - 1{,}125}{2} = -1{,}1875$; erro máximo: $\frac{-1{,}125 + 1{,}25}{2} = 0{,}0625$

Valor aproximado: $-1{,}1875$

Erro máximo: 0,0625

86.1 A função f definida por $f(x) = x^3 + 2x - 5$ é contínua em $[1\,,2]$.

$f(1) = -2$; $f(2) = 7$; $f(1) \times f(2) < 0$

Pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um zero de f no intervalo $]1\,,2[$.

86.2 O erro máximo numa aproximação pelo ponto médio de um intervalo é igual a metade da amplitude desse intervalo: $\frac{2 - 1}{2} = 0{,}5$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

86.3

```
I1=[1,2]
x1 = 1.5 ; erro máximo = 0.5

I2=[1,1.5]
x2 = 1.25 ; erro máximo = 0.25

I3=[1.25,1.5]
x3 = 1.375 ; erro máximo = 0.125

I4=[1.25,1.375]
x4 = 1.3125 ; erro máximo = 0.0625

I5=[1.3125,1.375]
x5 = 1.34375 ; erro máximo = 0.03125

I6=[1.3125,1.34375]
x6 = 1.328125 ; erro máximo = 0.015625

I7=[1.328125,1.34375]
x7 = 1.3359375 ; erro máximo = 0.0078125

I8=[1.328125,1.3359375]
x8 = 1.33203125 ; erro máximo = 0.00390625

I9=[1.328125,1.33203125]
x9 = 1.330078125 ; erro máximo = 0.001953125

I10=[1.328125,1.330078125]
x10 = 1.3291015625 ; erro máximo = 0.0009765625
```

[1,2] ; [1 ; 1,5] ; [1,25 ; 1,5] ; [1,25 ; 1,375] ; [1,3125 ; 1,375] ; [1,3125 ; 1,34375] ; [1,328125 ; 1,34375] ; [1,328125 ; 1,3359375] ; [1,328125 ; 1,33203125] ; [1,328125 ; 1,330078125]

Valor aproximado: 1,3291015625

Erro máximo: 0,0009765625

87.1 f é contínua em $[1{,}8\,;\,1{,}9]$.

$f(1{,}8) \approx 0{,}0738$; $f(1{,}9) \approx -0{,}0037$; $f(1{,}8) \times f(1{,}9) < 0$

Pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um zero de f no intervalo $]1{,}8\,;\,1{,}9[$.

87.2 Comecemos com o intervalo $I_1 = [1{,}8\,;\,1{,}9]$.

1.ª iteração: $x_1 = \dfrac{1{,}8 + 1{,}9}{2} = 1{,}85$; erro máximo: $\dfrac{1{,}9 - 1{,}8}{2} = 0{,}05$

Como $f(1{,}85) \approx 0{,}0363$, tem-se $f(1{,}85) \times f(1{,}9) < 0$ e $I_2 = [1{,}85\,;\,1{,}9]$.

2.ª iteração: $x_2 = \dfrac{1{,}85 + 1{,}9}{2} = 1{,}875$; erro máximo: $\dfrac{1{,}9 - 1{,}85}{2} = 0{,}025$

Como $f(1{,}875) \approx 0{,}0166$, tem-se $f(1{,}875) \times f(1{,}9) < 0$ e $I_3 = [1{,}875\,;\,1{,}9]$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

3.ª iteração: $x_3 = \frac{1{,}875 + 1{,}9}{2} = 1{,}8875$; erro máximo: $\frac{1{,}9 - 1{,}875}{2} = 0{,}0125$

Como $f(1{,}8875) \approx 0{,}0065$, tem-se $f(1{,}8875) \times f(1{,}9) < 0$ e $I_4 = [1{,}8875\,;\,1{,}9]$.

4.ª iteração: $x_4 = \frac{1{,}8875 + 1{,}9}{2} = 1{,}89375$; erro máximo: $\frac{1{,}9 - 1{,}8875}{2} = 0{,}00625$

$1{,}89375$ é uma aproximação, com erro inferior a 10^{-2}, desse zero.

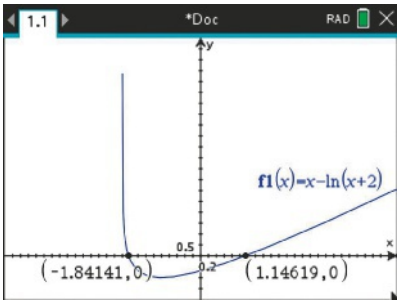
88.1 Seja f a função definida por $f(x) = x - \ln(x+2)$.

$x = \ln(x+2) \iff x - \ln(x+2) = 0$

PÁG. 201

Aplicar

88.2



Por exemplo, $[-1{,}9\,;-1]$ e $[1\,,2]$.

88.3 Comecemos com o intervalo $I_1 = [-1{,}9\,;-1]$.

$f(-1{,}9) > 0$ e $f(-1) = -1 < 0$.

1.ª iteração: $x_1 = \frac{-1{,}9 - 1}{2} = -1{,}45$; erro máximo: $\frac{-1 + 1{,}9}{2} = 0{,}45$

Como $f(-1{,}45) < 0$, tem-se $f(-1{,}45) \times f(-1{,}9) < 0$ e $I_2 = [-1{,}9\,;-1{,}45]$.

2.ª iteração: $x_2 = \frac{-1{,}9 - 1{,}45}{2} = -1{,}675$; erro máximo: $\frac{-1{,}45 + 1{,}9}{2} = 0{,}225$

Como $f(-1{,}675) < 0$, tem-se $f(-1{,}675) \times f(-1{,}9) < 0$ e $I_3 = [-1{,}9\,;-1{,}675]$.

3.ª iteração: $x_3 = \frac{-1{,}9 - 1{,}675}{2} = -1{,}7875$; erro máximo: $\frac{-1{,}675 + 1{,}9}{2} = 0{,}1125$

Como $f(-1{,}7875) < 0$, tem-se $f(-1{,}7875) \times f(-1{,}9) < 0$ e $I_4 = [-1{,}9\,;-1{,}7875]$.

4.ª iteração: $x_4 = \frac{-1{,}7875 - 1{,}9}{2} = -1{,}84375$; erro máximo: $\frac{-1{,}7875 + 1{,}9}{2} = 0{,}05625$

Consideremos agora o intervalo $I_1 = [1\,,2]$.

$f(1) < 0$ e $f(2) > 0$.

1.ª iteração: $x_1 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$; erro máximo: $\frac{2-1}{2} = 0{,}5$

Como $f(1{,}5) > 0$, tem-se $f(1{,}5) \times f(1) < 0$ e $I_2 = [1\,;1{,}5]$.

2.ª iteração: $x_2 = \frac{1 + 1{,}5}{2} = 1{,}25$; erro máximo: $\frac{1{,}5 - 1}{2} = 0{,}25$

Como $f(1{,}25) > 0$, tem-se $f(1{,}25) \times f(1) < 0$ e $I_3 = [1\,;1{,}25]$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

3.ª iteração: $x_3 = \frac{1 + 1{,}25}{2} = 1{,}125$; erro máximo: $\frac{1{,}25 - 1}{2} = 0{,}125$

Como $f(1{,}125) < 0$, tem-se $f(1{,}125) \times f(1{,}25) < 0$ e $I_4 = [1{,}125 \,;\, 1{,}25]$.

4.ª iteração: $x_4 = \frac{1{,}125 + 1{,}25}{2} = 1{,}1875$; erro máximo: $\frac{1{,}25 - 1{,}125}{2} = 0{,}0625$

PÁG. 202

Tarefa 9

1.1 $f(x) = x^2 - 2$

1.2 $f'(x) = 2x$; $f'(2) = 4$; $f(2) = 2$, $2 = 4 \times 2 + b \iff b = -6$

$t_1 : y = 4x - 6$

1.3 $4x - 6 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$; $x_2 = 1{,}5$

1.4 $f'(1{,}5) = 3$; $f(1{,}5) = 0{,}25$; $0{,}25 = 3 \times 1{,}5 + b \iff b = -4{,}25$

$t_2 : y = 3x - 4{,}25$

1.5 $3x - 4{,}25 = 0 \iff x = \frac{17}{12}$; $x_3 = \frac{17}{12} \approx 1{,}4167$

1.6 $f'(1{,}4167) = 2{,}8334$; $f(1{,}4167) \approx 0{,}0070$; $0{,}0070 = 2{,}8334 \times 1{,}4167 + b \iff b = -4{,}0071$

$t_3 : y = 2{,}8334x - 4{,}0071$

$2{,}8334x - 4{,}0071 = 0 \iff x \approx 1{,}4142$, $x_4 \approx 1{,}4142$

PÁG. 209

Aplicar

90.1 Seja f a função definida por $f(x) = x^3 - x + 1$.

f é contínua em $[-2\,,\,-1]$.

$f(-1) = 1$, $f(-2) = -5$, $f(-1) \times f(-2) < 0$

Pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um zero de f no intervalo $]-2\,,\,-1[$, ou seja, a equação tem, pelo menos, uma solução nesse intervalo.

90.2 $f'(x) = 3x^2 - 1$

Escolhendo, por exemplo, $x_1 = -1{,}5$, tem-se:

1.ª iteração: $f'(-1{,}5) = 5{,}75 \neq 0$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1{,}5 - \frac{f(-1{,}5)}{f'(-1{,}5)} = -1{,}5 + \frac{0{,}875}{5{,}75} \approx -1{,}3478$

Como $|x_2 - x_1| \approx |-1{,}3478 + 1{,}5| = 0{,}1522 > 10^{-2}$, fazemos mais uma iteração.

2.ª iteração: $f'(-1{,}3478) \approx 4{,}4497 \neq 0$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1{,}3478 - \frac{f(-1{,}3478)}{f'(-1{,}3478)} = -1{,}3478 + \frac{0{,}1006}{4{,}4497} \approx -1{,}3252$

Como $|x_3 - x_2| \approx |-1{,}3252 + 1{,}3478| = 0{,}0226 > 10^{-2}$, fazemos mais uma iteração.

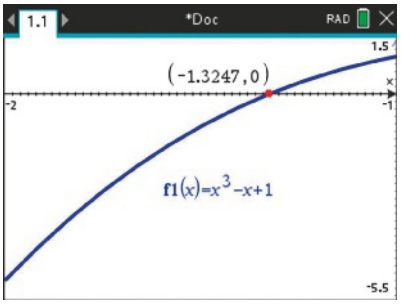
M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

3.ª iteração: $f'(-1{,}3252) \approx 4{,}2685 \neq 0$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -1{,}3252 - \frac{f(-1{,}3252)}{f'(-1{,}3252)} = -1{,}3252 + \frac{0{,}0021}{4{,}2685} \approx -1{,}3247$$

Valor aproximado: $-1{,}3247$

90.3



O valor obtido pelo método de Newton-Raphson é igual ao valor obtido com a calculadora, considerando arredondamentos com 4 casas decimais.

91.1 Seja f a função definida por $f(x) = e^{-x} - x$.

$f'(x) = -e^{-x} - 1$

Escolhendo, por exemplo, $x_1 = 0{,}5$, tem-se:

1.ª iteração: $f'(0{,}5) \approx -1{,}607 \neq 0$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}5 - \frac{f(0{,}5)}{f'(0{,}5)} = 0{,}5 + \frac{0{,}107}{1{,}607} \approx 0{,}567$$

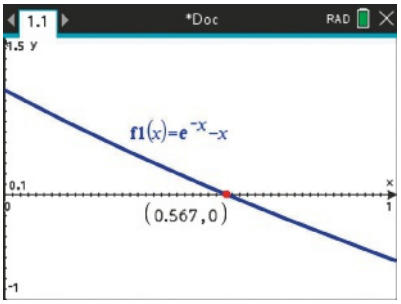
Como $|x_2 - x_1| \approx |0{,}567 - 0{,}5| = 0{,}067 > 10^{-2}$, fazemos mais uma iteração.

2.ª iteração: $f'(0{,}567) \approx -1{,}567 \neq 0$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}567 - \frac{f(0{,}567)}{f'(0{,}567)} = 0{,}567 + \frac{2{,}246 \times 10^{-4}}{1{,}567} \approx 0{,}567$$

Valor aproximado: $0{,}567$

91.2



$|0{,}567 - 0{,}567| = 0$

Os dois valores aproximados são iguais.

92.1 f é contínua em $[1\ ,\ 2]$.

$f(1) \approx 0{,}344$, $f(2) \approx -0{,}091$, $f(1) \times f(2) < 0$

Pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um zero de f no intervalo $]1\ ,\ 2[$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

92.2 $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}$

Escolhendo, por exemplo, $x_1 = 1{,}5$, tem-se:

1.ª iteração: $f'(1{,}5) = -0{,}429 \neq 0$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}5 - \frac{f(1{,}5)}{f'(1{,}5)} = 1{,}5 + \frac{0{,}247}{0{,}429} \approx 2{,}076$$

Como $|f(x_2)| \approx |f(2{,}076)| = 0{,}163 > 10^{-3}$, fazemos mais uma iteração.

2.ª iteração: $f'(2{,}076) = -0{,}984 \neq 0$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2{,}076 - \frac{f(2{,}076)}{f'(2{,}076)} = 2{,}076 - \frac{0{,}163}{0{,}984} \approx 1{,}910$$

Como $|f(x_3)| \approx |f(1{,}910)| = 0{,}012 > 10^{-3}$, fazemos mais uma iteração.

3.ª iteração: $f'(1{,}910) = -0{,}833 \neq 0$

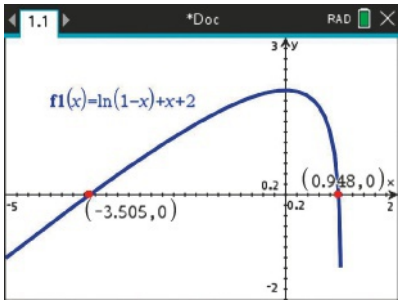
$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1{,}910 - \frac{f(1{,}910)}{f'(1{,}910)} = 1{,}910 - \frac{0{,}012}{0{,}833} \approx 1{,}896$$

Como $|f(x_4)| \approx |f(1{,}896)| = 0{,}0004 < 10^{-3}$ paramos o procedimento.

PÁG. 210

Aplicar

93.1 $f(x) = x + 2 + \ln(1 - x)$



Zeros: $-3{,}505$ e $0{,}948$.

93.2 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = -\frac{x}{1-x}$

Escolhendo, por exemplo, $x_1 = -0{,}5$, tem-se:

1.ª iteração: $f'(-0{,}5) = 0{,}333 \neq 0$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0{,}5 - \frac{f(-0{,}5)}{f'(-0{,}5)} = -0{,}5 - \frac{1{,}905}{0{,}333} \approx -6{,}221$$

2.ª iteração: $f'(-6{,}221) = 0{,}862 \neq 0$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -6{,}221 - \frac{f(-6{,}221)}{f'(-6{,}221)} = -6{,}221 + \frac{2{,}244}{0{,}862} \approx -3{,}618$$

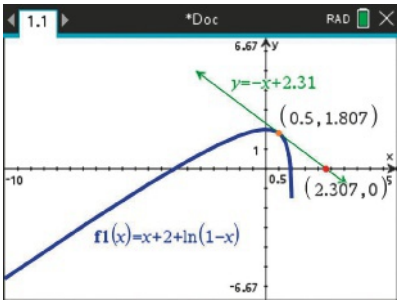
3.ª iteração: $f'(-3{,}618) = 0{,}783 \neq 0$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -3{,}618 - \frac{f(-3{,}618)}{f'(-3{,}618)} = -3{,}618 + \frac{0{,}088}{0{,}783} \approx -3{,}506$$

Parece estar a convergir para o zero $-3{,}505$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

93.3 Na 1.ª iteração do método, obtém-se o valor aproximado $2{,}307$, que não está no domínio da função f, pelo que o procedimento tem de parar. Esse valor é obtido pela interseção da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $0{,}5$, que não pertence ao domínio da função.



Com $x_1 = 0{,}9$, obtém-se a sequência $0{,}9$; $0{,}966$; $0{,}951$; $0{,}948$, que parece estar a convergir para o zero $0{,}948$.

94.1 Seja f a função definida por $f(x) = 3x^3 - x + 1$.

f é contínua em $[-1, 0]$.

$f(-1) = -1$; $f(0) = 1$; $f(-1) \times f(0) < 0$

Pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um zero de f no intervalo $]-1, 0[$, ou seja, a equação tem, pelo menos, uma solução nesse intervalo.

94.2 Por exemplo:

$x_1 = -0{,}6$
$x_2 = -1{,}0250000000$
$x_3 = -0{,}8824118560$
$x_4 = -0{,}8526408488$
$x_5 = -0{,}8513852619$
$x_6 = -0{,}8513830729$
$x_7 = -0{,}8513830729$

$x_1 = -0{,}3$
$x_2 = 6{,}1157894737$
$x_3 = 4{,}0863615023$
$x_4 = 2{,}7357909847$
$x_5 = 1{,}8362754938$
$x_6 = 1{,}2318226842$
$x_7 = 0{,}8070891716$
$x_8 = 0{,}4430595308$
$x_9 = -0{,}6236468349$
$x_{10} = -0{,}9819756245$
$x_{11} = -0{,}8701421944$
$x_{12} = -0{,}8518536449$
$x_{13} = -0{,}8513833798$
$x_{14} = -0{,}8513830729$

No método de Newton-Raphson, a aproximação seguinte é obtida através da reta tangente ao gráfico da função no ponto considerado.

Para $x_1 = -0{,}6$, a reta tangente tem um declive mais favorável, fazendo com que o ponto onde a reta interseta o eixo Ox fique mais próximo do zero da função, o que conduz a uma convergência mais rápida.

Para $x_1 = -0{,}3$, o declive da reta tangente é menos favorável, originando aproximações menos eficazes e, por isso, uma convergência mais lenta.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 211

Aplicar+

1. $f'(x)=\left(2\ln x+\frac{1}{x}\right)'=2\times\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x-1}{x^2}$

Opção correta: **(C)**

2. $f'(x)=\left(3^{x-2}\right)'=(x-2)'\times 3^{x-2}\times\ln 3=3^{x-2}\times\ln 3$

Opção correta: **(A)**

3. $g'(x)=(x\ \text{sen}\ x)'=x'\text{sen}\ x+x(\text{sen}\ x)'=\text{sen}\ x+x\cos x$

$m=g'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$

Opção correta: **(B)**

4.1 $f'(x)=\left(\frac{x^3+x}{x-1}\right)'=\frac{(x^3+x)'(x-1)-(x^3+x)(x-1)'}{(x-1)^2}=$

$=\frac{(3x^2+1)(x-1)-(x^3+x)}{(x-1)^2}=\frac{3x^3-3x^2+x-1-x^3-x}{(x-1)^2}=$

$=\frac{2x^3-3x^2-1}{(x-1)^2}$

4.2 $g'(x)=\left(3xe^{2x}\right)'=(3x)'e^{2x}+3x\left(e^{2x}\right)'=$

$=3e^{2x}+3x\times 2e^{2x}=e^{2x}(6x+3)$

4.3 $h'(x)=\left(\frac{e^{-x}+x}{x}\right)'=\frac{\left(e^{-x}+x\right)'x-\left(e^{-x}+x\right)x'}{x^2}=$

$=\frac{\left(-e^{-x}+1\right)x-\left(e^{-x}+x\right)}{x^2}=\frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}=\frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$

4.4 $i'(x)=\left(4^x\text{sen}\ x\right)'=\left(4^x\right)'\text{sen}\ x+4^x(\text{sen}\ x)'=$

$=4^x\times\ln 4\times\text{sen}\ x+4^x\cos x=4^x(\ln 4\ \text{sen}\ x+\cos x)$

4.5 $j'(x)=\left(x\ln\left(x^2\right)\right)'=(x)'\ln\left(x^2\right)+x\left(\ln\left(x^2\right)\right)'=$

$=\ln\left(x^2\right)+x\times\frac{2x}{x^2}=2+\ln\left(x^2\right)$

4.6 $k'(x)=\left(\frac{x+\ln x}{x^2}\right)'=\frac{(x+\ln x)'x^2-(x+\ln x)\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=$

$=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2-(x+\ln x)(2x)}{x^4}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)-2(x+\ln x)}{x^3}=$

$=\frac{x+1-2x-2\ln x}{x^3}=\frac{1-x-2\ln x}{x^3}$

4.7 $l'(x)=\left(\text{tg}\left(x^4+1\right)\right)'=\frac{\left(x^4+1\right)'}{\cos^2\left(x^4+1\right)}=\frac{4x^3}{\cos^2\left(x^4+1\right)}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

4.8 $m'(x)=\left(\frac{\text{sen } x-1}{\cos x}\right)'=\frac{(\text{sen } x-1)'\cos x-(\text{sen } x-1)(\cos x)'}{\cos^2 x}=$

$=\frac{\cos x\cos x-(\text{sen } x-1)(-\text{sen } x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\text{sen}^2 x-\text{sen } x}{\cos^2 x}=\frac{1-\text{sen } x}{\cos^2 x}$

4.9 $n'(x)=\left(x^2\log_3\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)'=(x^2)'\log_3\left(\frac{x-1}{x}\right)+x^2\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)'=$

$=2x\log_3\left(\frac{x-1}{x}\right)+x^2\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln 3}=2x\log_3\left(\frac{x-1}{x}\right)+x^2\frac{\frac{(x-1)'x-(x-1)x'}{x^2}}{\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln 3}=$

$=2x\log_3\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{x-(x-1)}{\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln 3}=2x\log_3\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{x}{(x-1)\ln 3}$

4.10 $o'(x)=\left(e^{\cos^2(3x)}\right)'=\left(\cos^2(3x)\right)'e^{\cos^2(3x)}=$

$=2\cos(3x)(\cos(3x))'e^{\cos^2(3x)}=2\cos(3x)(-3\text{sen}(3x))e^{\cos^2(3x)}=-6\cos(3x)\text{sen}(3x)e^{\cos^2(3x)}$

5. $g'(x)=(\ln(\cos(2x)))'=\frac{(\cos(2x))'}{\cos(2x)}=\frac{-2\text{sen}(2x)}{\cos(2x)}=-2\text{tg}(2x)$

Opção correta: **(D)**

6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=1 \iff g'(1)=1$

6.1 $(f\circ g)'(1)=f'(g(1))\times g'(1)=f'(2)\times 1=3$

Opção correta: **(C)**

6.2 A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 interseta o gráfico de g no ponto de abcissa 1, ou seja, têm o ponto de coordenadas $(1, 2)$ em comum.

$m=f'(2)=3$

$y=3x+b$

$2=3\times 1+b \iff b=-1$

A equação da reta tangente é $y=3x-1$.

O ponto de abcissa 2 é comum ao gráfico de f e à reta tangente.

$y=6-1=5$, logo, $f(2)=5$.

6.3 $h'(x)=\left(x^2e^{g(x)}\right)'=(x^2)'e^{g(x)}+x^2\left(e^{g(x)}\right)'=$

$=2xe^{g(x)}+x^2\times g'(x)e^{g(x)}=e^{g(x)}\left(2x+x^2\times g'(x)\right)$

O declive da reta tangente é $m=h'(1)=e^{g(1)}\left(2+1^2\times g'(1)\right)=e^2(2+1)=3e^2$.

$h(1)=1^2e^{g(1)}=e^2$

O ponto de coordenadas $(1, e^2)$ pertence à reta tangente ao gráfico de h.

Substituindo estas coordenadas na equação $y=3e^2x+b$, obtém-se $e^2=3e^2+b \iff b=-2e^2$.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1 é $y=3e^2x-2e^2$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 212

Aplicar+

7. $f'(x)=\left(\ln(ax)+x\right)'=\frac{a}{ax}+1=\frac{1}{x}+1$

$m=f'(2)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

Opção correta: **(D)**

8. $g'(x)=\left(\sqrt[3]{2x}+x\right)'=\frac{(2x)'}{3\sqrt[3]{(2x)^2}}+1=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x)^2}}+1$

O declive da reta tangente é $m=g'(4)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2\times 4)^2}}+1=\frac{7}{6}$.

$g(4)=\sqrt[3]{8}+4=6$

O ponto de coordenadas $(4\,,6)$ pertence à reta tangente ao gráfico de g.

Substituindo estas coordenadas na equação $y=\frac{7}{6}x+b$, obtém-se $6=\frac{7}{6}\times 4+b \iff b=\frac{4}{3}$.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 4 é $y=\frac{7}{6}x+\frac{4}{3}$.

9.1 As coordenadas dos pontos A e C são, respetivamente, $(0\,,1)$ e $(c\,,\ln c)$ e pertencem à reta t.

O declive da reta t pode ser obtido por $m_t=\frac{\ln c-1}{c-0}$.

A reta t é tangente ao gráfico de g no ponto C, logo $m_t=g'(c)=\frac{1}{c}$.

Assim sendo, $\frac{1}{c}=\frac{\ln c-1}{c-0} \iff \ln c=2 \iff c=e^2$. Logo, o declive da reta t é $m_t=\frac{1}{c}=e^{-2}$.

9.2 A ordenada na origem da reta t é 1. A equação reduzida da reta t é $y=e^{-2}x+1$.

Vamos determinar a abcissa do ponto B.

$0=e^{-2}x+1 \iff x=\frac{-1}{e^{-2}} \iff x=-e^2$

A área do triângulo $[OAB]$ é $A_{[OAB]}=\frac{e^2}{2}$.

10. A função f' tem dois zeros, -1 e 2.

$f(2)$ não é extremo da função f, dado f' ser não negativa no intervalo $[-1\,,+\infty[$.

$f(-1)$ é mínimo relativo da função f, dado f' ser negativa em $]-\infty\,,-1[$

e ser não negativa em $[-1\,,+\infty[$.

Opção correta: **(C)**

PÁG. 213

Aplicar+

11. Graficamente observamos que se deve fazer uma pausa ao fim de uma hora.

Analiticamente, comecemos por determinar a função derivada e os seus zeros.

$$E'(t)=\left(\frac{200t}{t^2+1}\right)'=\frac{(200t)'(t^2+1)-(200t)(t^2+1)'}{(t^2+1)^2}=$$

$$=\frac{200(t^2+1)-(200t)(2t)}{(t^2+1)^2}=\frac{200(-t^2+1)}{(t^2+1)^2}$$

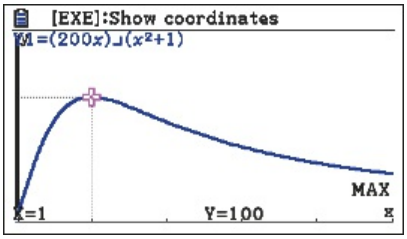
M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$$E'(t)=0 \iff \frac{200(-t^2+1)}{(t^2+1)^2}=0 \iff 200(-t^2+1)=0 \wedge (t^2+1)^2\neq 0 \iff$$

$$\iff -t^2+1=0 \iff t=\pm 1 \underset{t\geqslant 0}{\iff} t=1$$

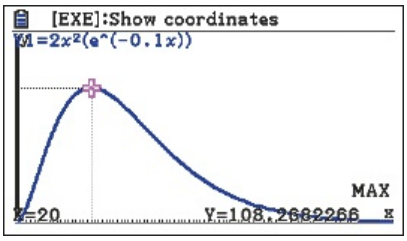
Vamos construir um quadro de sinal de E' e monotonia de E.

t	0		1	$+\infty$
Sinal de E'	+	+	0	−
Monotonia de E	Mín.	↗	Máx.	↘



Deve-se fazer uma pausa ao fim de uma hora.

12. Graficamente observamos que a taxa máxima de consumo do reagente é, aproximadamente, 108 gramas, ao fim de 20 horas.



Analiticamente, comecemos por determinar a função derivada e os seus zeros.

$$R'(t)=\left(2t^2e^{-0,1t}\right)'=\left(2t^2\right)'\left(e^{-0,1t}\right)+\left(2t^2\right)\left(e^{-0,1t}\right)'=$$

$$=4te^{-0,1t}-0,2t^2e^{-0,1t}=e^{-0,1t}\left(4t-0,2t^2\right)$$

$$R'(t)=0 \iff e^{-0,1t}\left(4t-0,2t^2\right)=0 \iff$$

$$\iff \underbrace{e^{-0,1t}=0}_{\text{imp.}} \vee 4t-0,2t^2=0 \iff t(4-0,2t)=0 \iff t=0 \vee t=20$$

Vamos construir um quadro de sinal de R' e monotonia de R.

t	0		20	$+\infty$
Sinal de R'	0	+	0	−
Monotonia de R	Mín.	↗	Máx.	↘

$R(20)=2\times 20^2\times e^{-0,1\times 20}\approx 108$

A taxa máxima de consumo do reagente é, aproximadamente, 108 gramas, ao fim de 20 horas.

13. Vamos determinar a função derivada e os seus zeros.

$$E'(c)=\left(\frac{\ln c}{c}\right)'=\frac{(\ln c)'c-(\ln c)\times c'}{c^2}=\frac{\frac{1}{c}c-(\ln c)\times 1}{c^2}=\frac{1-\ln c}{c^2}$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$E'(c)=0 \iff \frac{1-\ln c}{c^2}=0 \underset{c>0}{\iff} 1-\ln c=0 \iff$

$\iff \ln c=1 \iff c=e$

Vamos construir um quadro de sinal de E' e monotonia de E.

c	0		e	$+\infty$
Sinal de E'	N.D.	+	0	–
Monotonia de E	N.D.	↗	Máx.	↘

$c=e\approx 2{,}7183$, ou seja, 271,83 euros.

14.1 $P(R)=\frac{12^2R}{(R+2)^2}=\frac{144R}{(R+2)^2}$

Vamos determinar a função derivada e os seus zeros.

$$P'(R)=\left(\frac{144R}{(R+2)^2}\right)'=\frac{(144R)'(R+2)^2-144R\left((R+2)^2\right)'}{\left((R+2)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{144(R+2)^2-144R\times 2(R+2)(R+2)'}{(R+2)^4}=\frac{144(R+2)(R+2-2R)}{(R+2)^4}=$$

$$=\frac{144(2-R)}{(R+2)^3}$$

$P'(R)=0 \iff \frac{144(2-R)}{(R+2)^3}=0 \iff 144(2-R)=0 \wedge (R+2)^3\neq 0 \iff R=2$

Vamos construir um quadro de sinal de P' e monotonia de P.

R	0		2	$+\infty$
Sinal de P'	N.D.	+	0	–
Monotonia de P	N.D.	↗	Máx.	↘

$R=2$ ohms e $P(2)=\frac{144\times 2}{(2+2)^2}=18$ watts.

14.2 $P'(R)=\left(\frac{E^2R}{(R+r)^2}\right)'=\frac{\left(E^2R\right)'(R+r)^2-E^2R\left((R+r)^2\right)'}{\left((R+r)^2\right)^2}=$

$$=\frac{E^2(R+r)^2-E^2R\times 2(R+r)(R+r)'}{(R+r)^4}=\frac{E^2(R+r)\left((R+r)-R\times 2\right)}{(R+r)^4}=$$

$$=\frac{E^2(r-R)}{(R+r)^3}$$

$P'(R)=0 \iff \frac{E^2(r-R)}{(R+r)^3}=0 \iff E^2(r-R)=0 \wedge (R+r)^3\neq 0 \iff r-R=0 \iff R=r$

R	0		r	$+\infty$
Sinal de P'	N.D.	+	0	–
Monotonia de P	N.D.	↗	Máx.	↘

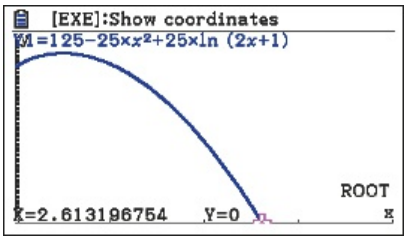
$P(r)$ é máxima.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 214

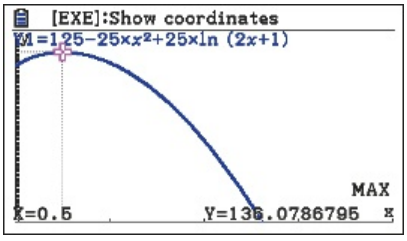
Aplicar+

15.1 $A(t)=0$



$t_1 \approx 2{,}61$

15.2 Graficamente observamos que o falcão atinge a altura máxima de, aproximadamente, 136 metros, ao fim de 0,5 segundos.



Analiticamente, comecemos por determinar a função derivada e os seus zeros.

$$A'(t)=\left(125-25t^2+25\ln(2t+1)\right)'=$$

$$=-50t+25\frac{(2t+1)'}{2t+1}=-50t+\frac{50}{2t+1}=\frac{50\left(-2t^2-t+1\right)}{2t+1}$$

$$A'(t)=0 \iff \frac{50\left(-2t^2-t+1\right)}{2t+1}=0 \iff 50\left(-2t^2-t+1\right)=0 \wedge 2t+1\neq 0 \iff$$

$$\iff -2t^2-t+1=0 \iff t=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\times(-2)\times 1}}{2\times(-2)} \iff t=\frac{1\pm\sqrt{9}}{-4} \iff$$

$$\iff t=\frac{1-3}{-4}\vee t=\frac{1+3}{-4} \iff t=\frac{1}{2}\vee t=-1 \underset{t\geqslant 0}{\iff} t=\frac{1}{2}$$

Vamos construir um quadro de sinal de A' e monotonia de A.

t	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Sinal de A'	+	+	0	−
Monotonia de A	Mín.	↗	Máx.	↘

$$A\left(\frac{1}{2}\right)=125-25\left(\frac{1}{2}\right)^2+25\ln(1+1)\approx 136$$

15.3 $A'(2)=\dfrac{50\left(-2\times 2^2-2+1\right)}{2\times 2+1}=\dfrac{-450}{5}=-90$

A velocidade do falcão é de 90 m/s, ou seja, 324 km/h.

16. $g'(x)=\left(\ln(f(x))\right)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ de domínio $]-1,+\infty[$.

Graficamente vemos que a função f tem dois extremos relativos: um máximo de abcissa zero e um mínimo de abcissa positiva, $x_{\min}$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

Os zeros de g' são os zeros de f', ou seja, as abcissas dos extremos relativos de f.

A função f é positiva em $]-1, +\infty[$. Portanto, o sinal da função g' depende do sinal da função f'.

x	-1		0		$x_{\min}$	$+\infty$
Monotonia de f		↗	Máx.	↘	Mín.	↗
Sinal de g'	N.D.	+	0	−	0	+

Opção correta: **(D)**

PÁG. 215

Aplicar+

17.1 $f'(x) = \left(e^{x^2+3x}\right)' = (x^2+3x)' e^{x^2+3x} = (2x+3)e^{x^2+3x}$

$f'(x) = 0 \iff (2x+3)e^{x^2+3x} = 0 \iff$

$\iff 2x+3 = 0 \vee \underbrace{e^{x^2+3x} = 0}_{\text{imp.}} \iff x = -\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
Sinal de f'	−	0	+
Monotonia de f	↘	Mín.	↗

f é decrescente em $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ e é crescente em $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

Tem mínimo absoluto igual a $f\left(-\frac{3}{2}\right) = e^{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+3\left(-\frac{3}{2}\right)} = e^{-\frac{9}{4}}$ em $x = -\frac{3}{2}$.

17.2 $g'(x) = \left(\frac{x}{\ln x - 1}\right)' =$

$= \frac{x'(\ln x - 1) - x(\ln x - 1)'}{(\ln x - 1)^2} = \frac{\ln x - 1 - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2} = \frac{\ln x - 2}{(\ln x - 1)^2}$

$g'(x) = 0 \iff \frac{\ln x - 2}{(\ln x - 1)^2} = 0 \iff$

$\iff \ln x - 2 = 0 \wedge (\ln x - 1)^2 \neq 0 \iff \ln x = 2 \wedge \ln x \neq 1 \iff x = e^2 \wedge x \neq e$

x	0	e		e^2	$+\infty$
Sinal de g'	−	N.D.	−	0	+
Monotonia de g	↘	N.D.	↘	Mín.	↗

g é decrescente em $]0, e[$ e em $]e, e^2]$, e é crescente em $[e^2, +\infty[$.

Tem mínimo relativo igual a $g(e^2) = \frac{e^2}{\ln e^2 - 1} = e^2$ em $x = e^2$.

17.3 $h'(x) = \left(\ln\left(x^3 - x\right)\right)' =$

$= \frac{(x^3 - x)'}{x^3 - x} = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$h'(x)=0 \iff \dfrac{3x^2-1}{x^3-x}=0 \iff$

$\iff 3x^2-1=0 \wedge x^3-x\neq 0 \iff$

$\iff x^2=\dfrac{1}{3} \wedge x\neq 0 \wedge x\neq -1 \wedge x\neq 1 \iff$

$\iff x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \ , \ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\notin D_{h'}=]-1\ ,\ 0[\cup]1\ ,+\infty[$

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		1	$+\infty$
Sinal de h'	+	0	−	N.D.	N.D.	N.D.	+
Monotonia de h	↗	Máx.	↘	N.D.	N.D.	N.D.	↗

$h\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\ln\left(\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\ln\left(-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\ln\left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$

h é decrescente em $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ 0\right[$, e crescente em $\left]-1\ ,\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ e em $]1\ ,+\infty[$.

Tem máximo relativo $\ln\left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ em $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

18. A afirmação **I**. é verdadeira, dado que para todo o $x\in\mathbb{R}$, $1\leqslant 2+\operatorname{sen} x\leqslant 3$, pelo que, como a função definida por $y=\ln x$ é crescente, tem-se $0\leqslant\ln(2+\operatorname{sen} x)\leqslant\ln 3$.

Logo, $g'(x)\geqslant 0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, donde se conclui que g é crescente.

A afirmação **II**. é falsa, pois, $0\leqslant g'(x)\leqslant\ln 3<2$ e, portanto, não existe nenhum valor real de x tal que $g'(x)=2$.

A afirmação **III**. é verdadeira, pois, $g'(x)=0 \iff \ln(2+\operatorname{sen} x)=0 \iff$

$\iff 2+\operatorname{sen} x=1 \iff \operatorname{sen} x=-1 \iff$

$\iff x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Portanto, g' tem uma infinidade de zeros e, como g é crescente, existe uma infinidade de retas tangentes ao gráfico de g paralelas ao eixo Ox .

PÁG. 216

Aplicar+

19. A função h'' tem dois zeros: um negativo, x_1 , e o outro 0 , e é negativa em $]x_1\ ,\ 0[$ e positiva em $]-\infty\ ,\ x_1[\cup]0\ ,+\infty[$. Portanto, os zeros de h'' são as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de h que terá concavidade voltada para cima em $]-\infty\ ,\ x_1[$ e em $]0\ ,+\infty[$ e voltada para baixo em $]x_1\ ,\ 0[$.

Opção correta: **(A)**

20. $f'(x)=\left(e^{x^2+3x}\right)'=(x^2+3x)'e^{x^2+3x}=(2x+3)e^{x^2+3x}$

$f''(x)=\left((2x+3)e^{x^2+3x}\right)'=$

$=(2x+3)'e^{x^2+3x}+(2x+3)\left(e^{x^2+3x}\right)'=2e^{x^2+3x}+(2x+3)(x^2+3x)'e^{x^2+3x}=$

$=2e^{x^2+3x}+(2x+3)^2e^{x^2+3x}=e^{x^2+3x}\left(2+(2x+3)^2\right)$

Logo, $f''(x)>0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e não tem pontos de inflexão.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

21. $h'(x)=\left(\frac{x}{e^{2x}}\right)'=$

$$=\frac{x'e^{2x}-x\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{e^{2x}-2xe^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}(1-2x)}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{1-2x}{e^{2x}}$$

$$h''(x)=\left(\frac{1-2x}{e^{2x}}\right)'=\frac{(1-2x)'e^{2x}-(1-2x)\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}\right)^2}=$$

$$=\frac{-2e^{2x}-(1-2x)\left(2e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{e^{2x}(-2-2+4x)}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{4x-4}{e^{2x}}$$

$$h''(x)=0 \iff \frac{4x-4}{e^{2x}}=0 \iff 4x-4=0 \wedge e^{2x}\neq 0 \iff x=1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal de h'	−	0	+
Concavidades e P.I. do gráfico de h	∩	P.I.	∪

$h(1)=\frac{1}{e^2}$

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 1]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$.

Tem ponto de inflexão de coordenadas $\left(1, \frac{1}{e^2}\right)$.

22.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de f''	−		−	0	+
x^2-1	+	0	−	0	+
Sinal de g''	−	0	+	0	+
Concavidades e P.I. do gráfico de g	∩	P.I.	∪		∪

Opção correta: **(B)**

PÁG. 217

Aplicar+

23. $g''(x)=\left(\frac{e^{3x}}{x^2}\right)'=$

$$=\frac{\left(e^{3x}\right)'x^2-e^{3x}\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=\frac{3e^{3x}x^2-e^{3x}2x}{x^4}=$$

$$=\frac{e^{3x}x(3x-2)}{x^4}=\frac{e^{3x}(3x-2)}{x^3}$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$g''(x)=0 \iff \dfrac{e^{3x}(3x-2)}{x^3}=0 \iff$

$\iff e^{3x}(3x-2)=0 \wedge x^3 \neq 0 \iff \underbrace{e^{3x}=0}_{\text{imp.}} \vee 3x-2=0 \iff x=\dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
Sinal de g''	+	N.D.	–	0	+
Concavidades e P.I. do gráfico de g	$\cup$	N.D.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0, \frac{2}{3}\right]$

e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$ e em $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

Tem ponto de inflexão em $x=\frac{2}{3}$.

24.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Monotonia de f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$
Sinal de f''	+	0	–	0	+
Concavidades e P.I. do gráfico de f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[0, 2]$

e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$.

Tem pontos de inflexão em $x=0$ e em $x=2$.

25. $g'(x)=\left(x\ln^2 x - x + 1\right)' =$

$= \left(x\ln^2 x\right)' - 1 = x'\ln^2 x + x\left(\ln^2 x\right)' - 1 =$

$= \ln^2 x + x \times 2\ln x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln^2 x + 2\ln x - 1$

$g''(x)=\left(\ln^2 x + 2\ln x - 1\right)' =$

$= 2\ln x \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2\ln x + 2}{x}$

$g''(x)=0 \iff \dfrac{2\ln x + 2}{x}=0 \iff$

$\iff 2\ln x + 2 = 0 \wedge x \neq 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1}$

x	0		e^{-1}	$+\infty$
Sinal de g''	N.D.	–	0	+
Concavidades e P.I. do gráfico de g	N.D.	$\cap$	P. I.	$\cup$

$g\left(e^{-1}\right) = e^{-1}\ln^2\left(e^{-1}\right) - e^{-1} + 1 = e^{-1} \times (-1)^2 - e^{-1} + 1 = 1$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0, e^{-1}\right]$

e tem a concavidade voltada para cima em $\left[e^{-1}, +\infty\right[$.

Tem ponto de inflexão de coordenadas $\left(e^{-1}, 1\right)$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

26. $I'(t) = \left(t^2 e^{-0,25t}\right)' = \left(t^2\right)' e^{-0,25t} + t^2\left(e^{-0,25t}\right)' =$

$= 2te^{-0,25t} - 0,25t^2 e^{-0,25t} = te^{-0,25t}(2 - 0,25t)$

$I'(t) = 0 \iff te^{-0,25t}(2 - 0,25t) = 0 \iff te^{-0,25t} = 0 \vee 2 - 0,25t = 0 \iff$

$\iff t = 0 \vee \underbrace{e^{-0,25t} = 0}_{\text{imp.}} \vee t = 8 \iff t = 0 \vee t = 8$

t	0		8	$+\infty$
Sinal de I'	+	+	0	−
Monotonia de I	Mín.	↗	Máx.	↘

$I''(t) = \left(te^{-0,25t}(2 - 0,25t)\right)' = \left(e^{-0,25t}\left(2t - 0,25t^2\right)\right)' =$

$= \left(e^{-0,25t}\right)'\left(2t - 0,25t^2\right) + e^{-0,25t}\left(2t - 0,25t^2\right)' =$

$= -0,25e^{-0,25t}\left(2t - 0,25t^2\right) + e^{-0,25t}(2 - 0,5t) = e^{-0,25t}\left(2 - t + \frac{1}{16}t^2\right)$

$I''(t) = 0 \iff e^{-0,25t}\left(2 - t + \frac{1}{16}t^2\right) = 0 \iff$

$\iff \underbrace{e^{-0,25t} = 0}_{\text{imp.}} \vee 2 - t + \frac{1}{16}t^2 = 0 \iff t^2 - 16t + 32 = 0 \iff$

$\iff t = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \times 32}}{2} \iff t = \frac{16 \pm \sqrt{128}}{2} \iff$

$\iff t = \frac{16 - 8\sqrt{2}}{2} \vee t = \frac{16 + 8\sqrt{2}}{2} \iff t = 8 - 4\sqrt{2} \vee t = 8 + 4\sqrt{2}$

x	0		$8 - 4\sqrt{2}$		$8 + 4\sqrt{2}$	$+\infty$
Sinal de I''	+	+	0	−	0	+
Monotonia de I'	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.	↗

$t_A = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2,343$

$t_B - t_A \approx 8 - 2,343 \approx 5,657$

$0,657 \times 7 \approx 5$

Aproximadamente, cinco semanas e cinco dias.

PÁG. 218

Aplicar+

27. $f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \ln(-x - 2)\right)' =$

$= x + \frac{-1}{-x - 2} = x + \frac{1}{x + 2}$

$f''(x) = \left(x + \frac{1}{x + 2}\right)' =$

$= 1 - \frac{1}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$f''(x)=0 \iff \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=0 \iff x^2+4x+3=0 \wedge (x+2)^2\neq 0 \iff$

$\iff x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times 3}}{2} \iff x=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2} \iff x=\frac{-4-2}{2}\vee x=\frac{-4+2}{2} \iff x=-3\vee x=-1$

x	$-\infty$	-3		-2
Sinal de f''	+	0	–	N.D.
Monotonia de f'	↗	Máx.	↘	N.D.

$m=f'(-3)=-3+\frac{1}{-3+2}=-4$

$f(-3)=\frac{(-3)^2}{2}+\ln(3-2)=\frac{9}{2}$

Ponto de tangência: $\left(-3\,,\frac{9}{2}\right)$

$y=-4x+b$

$\frac{9}{2}=-4\times(-3)+b \iff b=\frac{9}{2}-12 \iff b=-\frac{15}{2}$

$r:\ y=-4x-\frac{15}{2}$

28. A opção **(A)** não é verdadeira, pois a função não está definida à esquerda de -3, pois $D_g=[-3\,,5]$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=3$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=4$, logo as opções **(B)** e **(D)** são falsas.

Opção correta: **(D)**

29. f é contínua em $x=3$ se e só se $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(kx^2)=9k$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(1-xk)=1-3k=f(3)$

$9k=1-3k \iff k=\frac{1}{12}$

Opção correta: **(C)**

30.1 $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2-4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

Opção correta: **(B)**

30.2 $\lim\limits_{x\to-2} h(x)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{-1}{0}$

Vamos calcular os limites laterais.

$\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

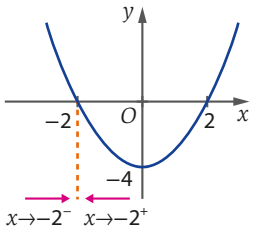
(quando $x\longrightarrow -2$ por valores inferiores a -2, x^2-4 tende para 0 por valores positivos, superiores a 0).

$\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$

(quando $x\longrightarrow -2$ por valores superiores a -2, x^2-4 tende para 0 por valores negativos, inferiores a 0).

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

Como os limites laterais são diferentes, conclui-se que $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x^2-4}$ não existe.



31.1 $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-x}{1-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x(x-1)}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{-1}=-1$

31.2 $f+g$ é contínua em $x=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(f+g)(x)=(f+g)(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=$

$=-1+\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\log_4(x+1)\right)=-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$(f+g)(1)=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=2-1=1$

$f+g$ não é contínua em $x=1$.

31.3 $\dfrac{f}{g}$ é contínua em $x=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\left(\dfrac{f}{g}\right)(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)}=\dfrac{-1}{\log_4 2}=-2$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(1)=-2$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)}=\dfrac{2}{-1}=-2$

$\dfrac{f}{g}$ é contínua em $x=1$.

31.4 Por exemplo, $h(x)=\begin{cases}-1 & \text{se } x<1\\ 2 & \text{se } x\geqslant 1\end{cases}$.

PÁG. 219

Aplicar+

32.1

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1} g(x)}{\lim\limits_{x\to 1} f(x)}=\dfrac{0}{f(1)}\underset{f(1)>0}{=}0$

b. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)}=\dfrac{f(1)}{0^-}\underset{f(1)>0}{=}-\infty$

c. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)}=\dfrac{f(1)}{0^+}\underset{f(1)>0}{=}+\infty$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

d. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1} f(x)}{\lim\limits_{x\to -1} g(x)}=\dfrac{0}{g(-1)}\underset{g(-1)<0}{=}0$

e. $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)}{\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)}=\dfrac{g(-1)}{0^-}\underset{g(-1)<0}{=}+\infty$

f. $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)}{\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)}=\dfrac{g(-1)}{0^+}\underset{g(-1)<0}{=}-\infty$

g. $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)}{\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)}=\dfrac{g(-2)}{0^-}\underset{g(-2)<0}{=}+\infty$

h. f é uma função cúbica cujos zeros são -2, -1 e 4, logo, $f(x)=a(x+2)(x+1)(x-4)$.

Como f tende para $-\infty$ quando $x\longrightarrow+\infty$, conclui-se que $a<0$.

g é uma função quadrática com a concavidade voltada para baixo, cujos zeros são 1 e 4, então $g(x)=b(x-1)(x-4)$, com $b<0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^3}{bx^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{b}=-\infty$$

(Para limites no infinito de quocientes de polinómios, podemos considerar o limite do quociente dos termos de maior grau dos polinómios envolvidos.)

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{bx^2}{ax^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{ax}=0$

32.2 $f(x)=a(x+2)(x+1)(x-4)$ e $f(0)=\dfrac{8}{5}\iff a(0+2)(0+1)(0-4)=\dfrac{8}{5}\iff$

$$\iff -8a=\frac{8}{5}\iff a=-\frac{1}{5}.$$

Logo, $f(x)=-\dfrac{1}{5}(x+2)(x+1)(x-4)$.

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=2\iff\lim_{x\to 4}\frac{-\frac{1}{5}(x+2)(x+1)(x-4)}{b(x-1)(x-4)}=2\iff$$

$$\iff\lim_{x\to 4}\frac{-\frac{1}{5}(x+2)(x+1)}{b(x-1)}=2\iff\frac{-\frac{1}{5}(4+2)(4+1)}{b(4-1)}=2\iff$$

$$\iff\frac{-6}{3b}=2\iff b=-1$$

Portanto, $g(x)=-(x-1)(x-4)$.

A função g é uma função quadrática, com a concavidade voltada para baixo, pelo que o seu máximo absoluto é a ordenada do vértice.

A abcissa do vértice é o ponto médio dos zeros de g, $x_V=\dfrac{1+4}{2}=\dfrac{5}{2}$,

e a ordenada a sua imagem, $y_V=g\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\left(\dfrac{5}{2}-1\right)\left(\dfrac{5}{2}-4\right)=\dfrac{9}{4}$.

33.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-4x^5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\left(1-4x^2\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-4x^2\right)=+\infty\times(-\infty)=-\infty$

33.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-6x^3}{x^3+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-6x^3}{x^3}=-6$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

33.3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^3+x^2-1}{x^2+x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(7x)=-\infty$

33.4 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-6x-9}{x^2-x-6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-6}{2x-1}=\dfrac{21}{5}$

33.5 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^{10}}=\dfrac{e^{-\infty}}{(-\infty)^{10}}=\dfrac{0}{+\infty}=0$

33.6 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln0^+}{0^+}=\dfrac{-\infty}{0^+}=-\infty$

33.7 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{10}}{e^x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{10}}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

33.8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x^5}=0$

33.9 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4^x}{x^3+2}=+\infty$

33.10 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{10}+1}{\log x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^{10}+1}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

33.11 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times2\underset{x\to0\Rightarrow y\to0}{\overset{y=2x}{=}}2\times\lim\limits_{y\to0}\dfrac{e^y-1}{y}=2\times1=2$

33.12 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\ln(4x+1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{\frac{4}{4x+1}}=\dfrac{3}{4}$

33.13 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}+x-2}{1-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}+1}{-1}=-2$

33.14 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{e^x-e^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x}{e^x}=\dfrac{4}{e^2}=4e^{-2}$

33.15 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(2x-3)}{e^{2x-4}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\frac{2}{2x-3}}{2e^{2x-4}}=\dfrac{2}{2}=1$

33.16 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{xe^x-2e^2}{3x-6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^x+xe^x}{3}=e^2$

33.17 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{5x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\dfrac{4}{5}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}\underset{x\to0\Rightarrow y\to0}{\overset{y=4x}{=}}\dfrac{4}{5}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y}=\dfrac{4}{5}\times1=\dfrac{4}{5}$

33.18 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x-\pi}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos(3x)}{1}=3\times(-1)=-3$

33.19 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{\operatorname{sen}(5x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\cos(4x)}{5\cos(5x)}=\dfrac{4}{5}$

33.20 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{sen}x-1}{\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{-\operatorname{sen}x}=\dfrac{0}{-1}=0$

33.21 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{\operatorname{sen}^3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}x\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\operatorname{sen}^3x}=\lim\limits_{x\to0}x\times\dfrac{1}{\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^3}=0\times\dfrac{1}{1^3}=0$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 220

Aplicar+

34.1 f é contínua em $x=0$ se e só se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\operatorname{sen}(3x)+2\cos^2 x\right)=0+2\times 1=2$

$f(0)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\operatorname{sen}(4x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\dfrac{1}{4\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}}\underset{x\to 0^-\ \Rightarrow\ y\to 0^-}{\overset{y=4x}{=}}\dfrac{1}{4\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}=\dfrac{1}{4\times 1}=\dfrac{1}{4}$

f não é contínua em $x=0$.

34.2 g é contínua em $x=2$ se e só se $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=g(2)$.

$g(2)=4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2-12}{x^2-x-12}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{6x}{2x-1}=\dfrac{12}{3}=4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-8}{3x-6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x^2}{3}=4$

g é contínua em $x=2$.

34.3 h é contínua em $x=-1$ se e só se $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)=h(-1)$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\ln\left(-\dfrac{x}{e}\right)=\ln e^{-1}=-1=h(-1)$

$\lim\limits_{x\to -1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{5e^{x+1}-5}{1-e^{5+5x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{5e^{x+1}}{-5e^{5+5x}}=\dfrac{5e^0}{-5e^0}=-1$

h é contínua em $x=-1$.

35.1 f é contínua em $x=3$ se e só se $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\ln 27-3\ln x}{x-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-3\times\frac{1}{x}}{1}=-1$

$f(3)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(-(kx)^2\right)=-9k^2$

$-9k^2=-1\iff k^2=\dfrac{1}{9}\iff k=-\dfrac{1}{3}\vee k=\dfrac{1}{3}$

35.2 g é contínua em $x=-2$ se e só se $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)=g(-2)$.

$g(-2)=k$

$\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{e^{x+2}-1}{x^2+6x+8}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{e^{x+2}}{2x+6}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x+2}{\operatorname{sen}(x+2)+\ln(x+3)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{\cos(x+2)+\frac{1}{x+3}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$k=\dfrac{1}{2}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

35.3 h é contínua em $x=0$ se e só se $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=h(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=0=h(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{k}{x}}=e^{\frac{k}{0^+}}$

Para h ser contínua em $x=0$, tem de existir $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ e, este só existe se $k<0$, $e^{\frac{k}{0^+}}=e^{-\infty}=0$.

36. Para que a função g seja contínua em $\mathbb{R}$ é necessário que seja contínua em $x=1$.

g é contínua em $x=1$ se e só se $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=g(1)$.

$$g(1)=\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\log_2(3x+2k)-\log_2 k\right)=$$

$$=\log_2(3+2k)-\log_2 k=\log_2\frac{3+2k}{k}$$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sen}(3x-3)}{x^2-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{3\cos(3x-3)}{2x-1}=3$$

$$\log_2\frac{3+2k}{k}=3 \iff \frac{3+2k}{k}=2^3 \iff$$

$$\iff \frac{3+2k}{k}-8=0 \iff \frac{3-6k}{k}=0 \iff$$

$$\iff 3-6k=0 \wedge k\neq 0 \iff k=\frac{1}{2}$$

37. Para que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$ é necessário que seja contínua em $x=0$ e em $x=3$.

$f(0)=g(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-e^x}{x}=-\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=-1$ e $f(3)=g(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$.

g é uma função polinomial, pode ser, por exemplo, uma função afim cujo gráfico contém os pontos de coordenadas $(0,-1)$ e $\left(3,\frac{1}{3}\right)$.

Logo, $b=-1$ e $m=\frac{\frac{1}{3}+1}{3-0}=\frac{4}{9}$.

Por exemplo, $g(x)=\frac{4}{9}x-1$.

PÁG. 221

Aplicar+

38. Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$, a função não é contínua em $x=0$. Logo, a opção **(A)** é falsa.

Como $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ é um valor finito, a reta de equação $x=2$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

Logo, a opção **(B)** é falsa.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$, a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Logo, a opção **(C)** é verdadeira.

O gráfico de f tem pelo menos uma assíntota vertical. Logo, a opção **(D)** é falsa.

Opção correta: **(C)**

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

39.1 O gráfico de f tem uma assíntota horizontal de equação $y+1=0 \iff y=-1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$

Opção correta: **(A)**

39.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$

Opção correta: **(B)**

40.1 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x-3)=+\infty$

Opção correta: **(D)**

40.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x}=-4$

Opção correta: **(A)**

40.3 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xg(x)+4x^2}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(g(x)+4x)}{g(x)}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{g(x)}\times\lim_{x\to-\infty}(g(x)+4x)=\frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}}\times(-3)=$$

$$=\frac{1}{-4}\times(-3)=\frac{3}{4}$$

Opção correta: **(C)**

41. O $\lim\limits_{x\to5} f(x)=1$ é um valor finito, logo, a reta de equação $x=5$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$, a reta de equação $y=-2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x-1)=0 \iff \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))=0$,

a reta de equação $y=x+1$ é assíntota não vertical (oblíqua) ao gráfico de f quando $x\to-\infty$.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 222

Aplicar+

42.1 f é uma função racional, portanto, contínua em $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

$\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}^-} \dfrac{2x-2}{3x+4}=\dfrac{-\frac{8}{3}-2}{0^-}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}^+} \dfrac{2x-2}{3x+4}=\dfrac{-\frac{8}{3}-2}{0^+}=-\infty$.

O gráfico de f tem apenas a assíntota vertical de equação $x=-\dfrac{4}{3}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-2}{3x+4}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-2}{3x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$,

logo, a reta de equação $y=\dfrac{2}{3}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

42.2 g é uma função racional, portanto, contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^3-3}{x^2+x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{9x^2}{2x+1}=\dfrac{9}{3}=3$,

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

logo, a reta de equação $x=1$ não é assíntota vertical ao gráfico de g.

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{3x^3-3}{x^2+x-2}=\frac{-27}{0^+}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -2^+}\frac{3x^3-3}{x^2+x-2}=\frac{-27}{0^-}=+\infty,$$

logo, a reta de equação $x=-2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g.

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3x^3-3}{x^2+x-2}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3-3}{x^3+x^2-2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3}{x^3}=3$$

$$b=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^3-3}{x^2+x-2}-3x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3-3-3x^3-3x^2+6x}{x^2+x-2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x^2+6x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x^2}{x^2}=-3$$

Como m e b são finitos, o gráfico de g tem assíntota em $+\infty$ de equação $y=3x-3$. Fazendo cálculos idênticos para $-\infty$, conclui-se que esta reta também é assíntota ao gráfico de g em $-\infty$.

42.3 h é uma função continua em $\mathbb{R}^+$, pois está definida pela diferença de funções contínuas nos seus domínios.

$\lim_{x\to 0^+}(\ln x-x)=-\infty-0=-\infty$, por isso, a reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de h.

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x-x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}-1=0-1=-1$$

$$b=\lim_{x\to +\infty}(\ln x-x+x)=\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$$

Como b não é finito, o gráfico de h não admite assíntotas não verticais.

42.4 i é uma função contínua em $]0,\pi[$, pois está definida pelo quociente de funções contínuas.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}=0$, pelo que a reta de equação $x=0$ não é assíntota vertical ao gráfico de i.

$\lim_{x\to \pi^-}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$, pelo que a reta de equação $x=\pi$ é a única assíntota vertical ao gráfico de i.

O gráfico de i não admite assíntotas não verticais, pois o seu domínio é um conjunto limitado.

42.5 j é uma função contínua em $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, pois está definida pelo quociente de funções contínuas.

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+e^x}{2x-6}=\frac{9+e^3}{0^+}=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+e^x}{2x-6}=\frac{9+e^3}{0^-}=-\infty,$$

pelo que a reta de equação $x=3$ é a única assíntota vertical ao gráfico de j.

$$m=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{x^2+e^x}{2x-6}}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+e^x}{2x^2-6x}=$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{2x^2-6x}+\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{2x^2-6x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{2x^2}+\frac{0}{+\infty}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2+e^x}{2x-6}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+e^x-x^2+3x}{2x-6}=$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x+3x}{2x-6}=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{2x-6}+\lim_{x\to -\infty}\frac{3x}{2x-6}=\frac{0}{+\infty}+\lim_{x\to -\infty}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

A reta de equação $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ é assíntota não vertical (obliqua) ao gráfico de j em $-\infty$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+e^x}{2x-6}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+e^x}{2x^2-6x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2-6x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x^2-6x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}+\infty=\frac{1}{2}+\infty=+\infty$$

Como m não é finito, o gráfico de j não admite assíntotas não verticais em $+\infty$.

42.6 k é uma função contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pois $\lim_{x\to0^-}\left(1+\frac{x^3}{e^{-x}}\right)=1$ e $\lim_{x\to0^+}\left(x+\frac{\ln^2 x}{x}\right)=0+\frac{(-\infty)^2}{0^+}=+\infty$.

A reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de k.

$$\lim_{x\to-\infty}k(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x^3}{e^{-x}}\right)\underset{\substack{y=-x\\ x\to-\infty\Rightarrow y\to+\infty}}{=}1+\lim_{y\to+\infty}\frac{(-y)^3}{e^y}=$$

$$=1+\frac{-1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}=1-\frac{1}{+\infty}=1$$

A reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de k em $-\infty$.

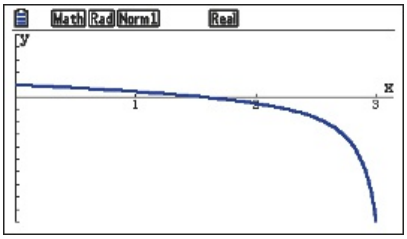
$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{\ln^2 x}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln^2 x}{x^2}\right)=1+\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)^2=1+0=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{\ln^2 x}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\times\frac{1}{x}}{1}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=2\times0=0$$

A reta de equação $y=x$ é assíntota não vertical (oblíqua) ao gráfico de k em $+\infty$.

43. O gráfico de f não admite assíntotas não verticais, pois o seu domínio é um conjunto limitado.

Pela observação do gráfico de f, parece ter uma assíntota vertical em $x=\pi$.



f é uma função contínua em $]0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\ln(x+1)}{\operatorname{tg}x}=\frac{\ln(\pi+1)}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{\operatorname{tg}x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\frac{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}}{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\operatorname{tg}x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\times\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\cos x}}=\frac{1}{1\times1}=1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(x+1)}{\operatorname{tg}x}=\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}{+\infty}=0\quad\text{e}\quad\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\ln(x+1)}{\operatorname{tg}x}=\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}{-\infty}=0.$$

A reta de equação $x=\pi$ é a única assíntota vertical ao gráfico de h.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

44.1 A reta r contém os pontos $A(0,2)$ e $B(3,4)$. Temos $b=2$ e $m=\frac{4-2}{3-0}=\frac{2}{3}$, logo, $r: y=\frac{2}{3}x+2$.

44.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\times(3f(x)-2x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\times 3\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{2}{3}x\right)=\frac{2}{3}\times 3\times 2=4$

Opção correta: **(D)**

44.3 g é uma função contínua em $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, pois está definida pelo quociente de funções contínuas no seu domínio.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{f(x)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{f(x)}=\frac{2}{0^+}=+\infty$,

pelo que a reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{xf(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{f(x)}-\frac{3}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+2-3xf(x)}{2f(x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}+\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x\left(f(x)-\frac{2}{3}x\right)}{2f(x)}=\frac{1}{+\infty}+\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{2}{3}x\right)}{-\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}=0+\frac{2}{-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}=-\frac{9}{2}$$

A reta de equação $y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$ é assíntota não vertical (oblíqua) ao gráfico de g em $+\infty$.

45.1 Não, pois a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

45.2 g é contínua em $\mathbb{R}$, então também é contínua em $x=-1$.

Assim sendo, $\lim\limits_{x\to-1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=g(-1)$.

$$\lim_{x\to-1^-}g(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{e^{x+1}-1}{x^2+x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\times\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x}\underset{x\to-1^-\Rightarrow y\to0^-}{\overset{y=x+1}{=}}\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}\times(-1)=$$

$$=1\times(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to-1^+}g(x)=g(-1)=\frac{2(-1)f(-1)}{-1+2}=-2f(-1)$$

$$-2f(-1)=-1\iff f(-1)=\frac{1}{2}$$

Opção correta: **(C)**

45.3 $g'(x)=\left(\frac{2xf(x)}{x+2}\right)'=\left(\frac{2x}{x+2}\times f(x)\right)'=$

$$=\left(\frac{2x}{x+2}\right)'\times f(x)+\left(\frac{2x}{x+2}\right)\times f'(x)=\frac{(2x)'(x+2)-2x(x+2)'}{(x+2)^2}\times f(x)+\left(\frac{2x}{x+2}\right)\times f'(x)=$$

$$=\frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2}\times f(x)+\left(\frac{2x}{x+2}\right)\times f'(x)=\frac{4}{(x+2)^2}\times f(x)+\left(\frac{2x}{x+2}\right)\times f'(x)$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

Sabemos que $f(1)=2$ e que $f'(1)=0$.

$$m=g'(1)=\frac{4}{(1+2)^2}\times f(1)+\left(\frac{2}{1+2}\right)\times f'(1)=\frac{4}{9}\times 2+\frac{2}{3}\times 0=\frac{8}{9}$$

$$g(1)=\frac{2\times 1\times f(1)}{1+2}=\frac{4}{3}$$

Ponto de tangência: $\left(1\,,\frac{4}{3}\right)$. Equação da reta tangente: $y=\frac{8}{9}x+b$.

$$\frac{4}{3}=\frac{8}{9}\times 1+b \iff b=\frac{4}{3}-\frac{8}{9} \iff b=\frac{4}{9}$$

$$y=\frac{8}{9}x+\frac{4}{9}$$

45.4 g é contínua em $\mathbb{R}$, então o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+3x\right)=2$, logo a reta de equação $y=-3x+2$ é assíntota não vertical ao gráfico de f em $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xf(x)}{x^2+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2xf(x)}{x^2}}{\frac{x^2+2x}{x^2}}=\frac{2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}}=2\times(-3)=-6$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)+6x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2xf(x)}{x+2}+6x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xf(x)+6x(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\left(f(x)+3x+6\right)}{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+2}\times\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+3x+6\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}\times\left(\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+3x\right)+6\right)=$$

$$=2(2+6)=16$$

A reta de equação $y=-6x+16$ é assíntota não vertical (oblíqua) ao gráfico de g em $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}-1}{x^2+x}=\frac{0-1}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g em $-\infty$.

PÁG. 223

Aplicar+

46. Rejeita-se a opção **(B)**, pois $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x))}{x}=\frac{\ln(1)}{+\infty}=0$;

rejeita-se a opção **(C)**, pois $\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x))}{x}=\frac{\ln(0^+)}{-1}=+\infty$;

rejeita-se a opção **(D)**, pois $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(f(x))}{x}=\frac{\ln(f(0))}{0^+}\underset{\substack{f(0)<1\\ \ln(f(0))<0}}{=}-\infty$.

Opção correta: **(A)**

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 224

Aplicar+

47. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=a^2$,

pelo que a reta de equação $y=3x+a^2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$.

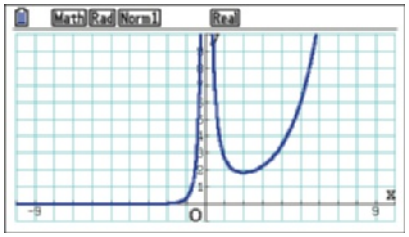
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(x)-ax\right)^2}{x^2}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-ax}{x}\right)^2=$$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{x}\right)^2=(3-a)^2$$

Logo, $(3-a)^2=1 \iff 3-a=1 \vee 3-a=-1 \iff a=2 \vee a=4 \underset{a<4}{\iff} a=2$.

Portanto, a reta de equação $y=3x+4$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$.

48.1



Por observação do gráfico de f, este parece ter uma assíntota horizontal de equação $y=0$ em $-\infty$ e uma assíntota vertical de equação $x=0$.

O contradomínio de f parece ser $\mathbb{R}^+$.

48.2 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$, pelo que o eixo Oy é assíntota vertical ao gráfico de f.

Como f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais.

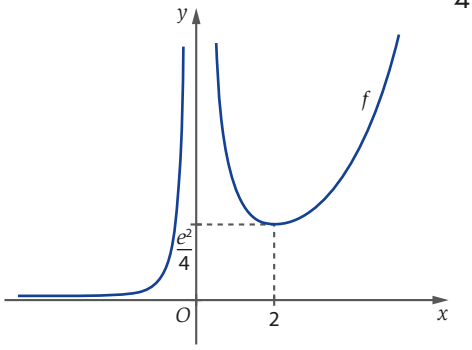
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$, pelo que o gráfico de f não tem assíntota não vertical em $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}=\frac{0}{+\infty}=0$, pelo que o eixo Ox é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

48.3 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, o contradomínio de f é $\mathbb{R}^+$.

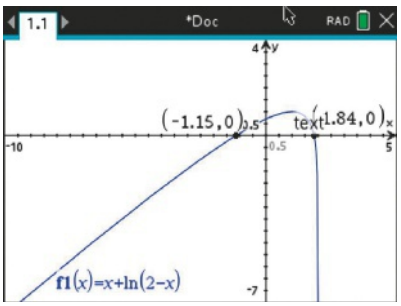
48.4 A função f é decrescente em $]0,2]$ e é crescente em $]-\infty,0[$ e em $[2,+\infty[$.

Tem um mínimo relativo igual a $f(2)=\frac{e^2}{4}$ em $x=2$.



M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

49.1



$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x > 0\} =]-\infty , 2[$

f é contínua no seu domínio, pois está definida pela soma de funções contínuas.

Zeros: $f(x) = 0 \iff x \approx -1{,}15 \vee x \approx 1{,}84$

$\lim\limits_{x \to 2} (x + \ln(2 - x)) = 2 + \ln 0^+ = -\infty$, a reta de equação $x = 2$ é a única assíntota vertical ao seu gráfico.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \ln(2 - x)}{x} = 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(2 - x)}{x} = 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{-1}{2 - x}}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (x + \ln(2 - x) - x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(2 - x) = +\infty$$

b não é finito, pelo que o gráfico de f não admite assíntotas não verticais.

$$f'(x) = (x + \ln(2 - x))' = 1 + \frac{-1}{2 - x} = \frac{1 - x}{2 - x}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1 - x}{2 - x} = 0 \iff 1 - x = 0 \wedge 2 - x \neq 0 \iff x = 1$$

x	$-\infty$	1	2
Zeros e sinal de f'	+	0	–
Monotonia e extremos de f	↗	Máx.	↘

f é crescente em $]-\infty , 1]$ e é decrescente em $[1 , 2[$.

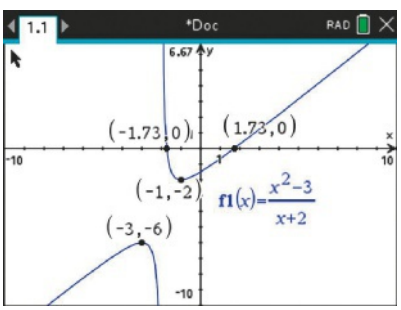
Tem máximo absoluto igual a $f(1) = 1 + \ln 1 = 1$ em $x = 1$.

$$f''(x) = \left(\frac{1 - x}{2 - x}\right)' = \frac{(1 - x)'(2 - x) - (1 - x)(2 - x)'}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-1(2 - x) + (1 - x)}{(2 - x)^2} = \frac{-1}{(2 - x)^2}$$

$f''(x) \leqslant 0$, $\forall x \in]-\infty , 2[$, pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty , 2[$ e não tem pontos de inflexão.

49.2



$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

g é contínua no seu domínio, pois está definida por uma função racional.

$$g(x)=0 \iff \frac{x^2-3}{x+2}=0 \iff$$

$$\iff x^2-3=0 \wedge x+2\neq 0 \iff x^2=3 \iff$$

$$\iff x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$$

Zeros: $x=\sqrt{3}$ e $x=-\sqrt{3}$

$\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{x^2-3}{x+2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x^2-3}{x+2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$,

a reta de equação $x=-2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g.

$$m=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{x^2-3}{x+2}}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-3}{x^2+2x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-3}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-3-x^2-2x}{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-3-2x}{x+2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x}{x}=-2$$

Fazendo cálculos idênticos para $+\infty$, conclui-se que a reta de equação $y=x-2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x\longrightarrow\pm\infty$.

$$g'(x)=\left(\frac{x^2-3}{x+2}\right)'=\frac{(x^2-3)'(x+2)-(x^2-3)(x+2)'}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{2x(x+2)-(x^2-3)}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

$$g'(x)=0 \iff \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=0 \iff$$

$$\iff x^2+4x+3=0 \wedge (x+2)^2\neq 0 \iff x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} \iff$$

$$\iff x=-1 \vee x=-3$$

x	$-\infty$	-3		-2		-1	$+\infty$
Zeros e sinal de g'	+	0	–	N.D.	–	0	+
Monotonia e extremos de g	↗	Máx.	↘	N.D.	↘	Mín.	↗

$g(-1)=\frac{(-1)^2-3}{-1+2}=-2$ e $g(-3)=\frac{(-3)^2-3}{-3+2}=-6$.

g é crescente em $]-\infty,-3]$ e em $[-1,+\infty[$, e é decrescente em $[-3,-2[$ e em $]-2,-1]$.
Tem mínimo relativo igual a -2 em $x=-1$ e tem máximo relativo igual a -6 em $x=-3$.

$$g''(x)=\left(\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}\right)'=$$

$$=\frac{(x^2+4x+3)'(x+2)^2-(x^2+4x+3)((x+2)^2)'}{(x+2)^4}=\frac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x+3)\times 2(x+2)\times 1}{(x+2)^4}=$$

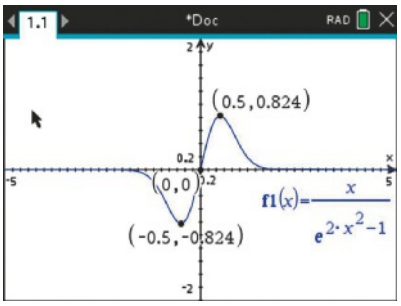
$$=\frac{(x+2)((2x+4)(x+2)-(x^2+4x+3)\times 2)}{(x+2)^4}=\frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x-6}{(x+2)^3}=\frac{2}{(x+2)^3}$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Zeros e sinal de g''	$-$	N.D.	$+$
Concavidades e P.I. do gráfico de g	$\cap$	N.D.	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-2, +\infty[$. Não tem pontos de inflexão.

49.3



$D_h = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x^2-1} \neq 0\} = \mathbb{R}$

h é contínua no seu domínio, pois está definida pelo quociente de funções contínuas.

Zeros: $h(x) = 0 \iff \frac{x}{e^{2x^2-1}} = 0 \iff x = 0$

O gráfico de h não admite assíntotas verticais, pois h é contínua em $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{2x^2-1}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4xe^{2x^2-1}} = \frac{1}{-\infty} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{2x^2-1}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4xe^{2x^2-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

pelo que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \longrightarrow \pm\infty$.

$$h'(x) = \left(\frac{x}{e^{2x^2-1}}\right)' = \frac{x'e^{2x^2-1} - x\left(e^{2x^2-1}\right)'}{\left(e^{2x^2-1}\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x^2-1} - x \times 4xe^{2x^2-1}}{\left(e^{2x^2-1}\right)^2} = \frac{e^{2x^2-1}\left(1-4x^2\right)}{\left(e^{2x^2-1}\right)^2} = \frac{1-4x^2}{e^{2x^2-1}}$$

$$h'(x) = 0 \iff \frac{1-4x^2}{e^{2x^2-1}} = 0 \iff 1 - 4x^2 = 0 \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{1}{4} \iff x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Zeros e sinal de h'	$-$	0	$+$	0	$-$
Monotonia e extremos de h	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1}} = -\frac{\sqrt{e}}{2} \quad \text{e} \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{e^{2\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}} = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

h é crescente em $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e é decrescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Tem máximo relativo igual a $\frac{\sqrt{e}}{2}$ em $x = \frac{1}{2}$, e tem mínimo relativo igual a $-\frac{\sqrt{e}}{2}$ em $x = -\frac{1}{2}$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$$h''(x)=\left(\frac{1-4x^2}{e^{2x^2-1}}\right)'=\frac{(1-4x^2)'e^{2x^2-1}-(1-4x^2)\left(e^{2x^2-1}\right)'}{\left(e^{2x^2-1}\right)^2}=$$

$$=\frac{-8xe^{2x^2-1}-(1-4x^2)4xe^{2x^2-1}}{\left(e^{2x^2-1}\right)^2}=\frac{xe^{2x^2-1}\left(-8-(1-4x^2)4\right)}{\left(e^{2x^2-1}\right)^2}=\frac{x\left(-12+16x^2\right)}{e^{2x^2-1}}$$

$$h''(x)=0 \iff \frac{x\left(-12+16x^2\right)}{e^{2x^2-1}}=0 \iff$$

$$\iff x\left(-12+16x^2\right)=0 \wedge e^{2x^2-1}\neq 0 \iff x=0 \vee x^2=\frac{3}{4} \iff$$

$$\iff x=0 \vee x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
Zeros e sinal de h''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Concavidades e P.I. do gráfico de h	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ e em $\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, e tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$.

Tem pontos de inflexão em $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=0$ e em $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

50. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-x-1\right)=0 \iff \lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-(x+1)\right)=0$,

pelo que a reta de equação $y=x+1$ é assíntota ao gráfico de h quando $x\longrightarrow+\infty$.

Portanto, na figura da opção B não pode estar representada graficamente a função h.

$\lim\limits_{x\to 2^+}h(x)=h(2)$, pelo que na figura da opção C não pode estar representada graficamente a função h, pois, o limite à direita de 2 da função representada neste referencial é igual a $-\infty$.

$h''(x)<0$, para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, pelo que o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,2[$ e em $]2,+\infty[$.

Portanto, na figura da opção A não pode estar representada a função h.

PÁG. 225

Aplicar+

51. $B\left(x,\frac{3\ln x}{x^2}\right)$, $\overline{OA}=x$ e $\overline{OB}=\frac{3\ln x}{x^2}$. Portanto, $h(x)=x\times\frac{3\ln x}{x^2}=\frac{3\ln x}{x}$.

B desloca-se sobre o gráfico de g, no primeiro quadrante, ou seja,

$$g(x)>0 \iff \frac{3\ln x}{x^2}>0 \iff \ln x>0 \iff x>1.$$

$$D_h=\{x\in\mathbb{R}:x>1\}=]1,+\infty[$$

$$h'(x)=\left(\frac{3\ln x}{x}\right)'=\frac{(3\ln x)'x-3\ln x\times(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{\frac{3}{x}x-3\ln x\times 1}{x^2}=\frac{3-3\ln x}{x^2}$$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$h'(x)=0 \iff \dfrac{3-3\ln x}{x^2}=0 \iff$

$\iff 3-3\ln x=0 \wedge x^2\neq 0 \iff \ln x=1 \iff x=e$

x	1	e	$+\infty$
Zeros e sinal de h'	+	0	–
Monotonia e extremos de h	↗	Máx.	↘

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln x}{x}=3\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=3\times 0=0$ e $h(e)=\dfrac{3\ln e}{e}=\dfrac{3}{e}$, logo, $D'_h=\left]0,\dfrac{3}{e}\right]$.

52. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: 2x-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. f é contínua no seu domínio.

Para aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy, a função tem de ser contínua no intervalo fechado e haver mudança de sinal nas extremidades. A função não é contínua em $[0,1]$, mas é contínua em $[-2,0]$, em $[-1,0]$ e em $[1,2]$.

$f(-2)=\dfrac{(-2)^2+2-1}{2(-2)-1}=-1$; $f(-1)=\dfrac{(-1)^2+1-1}{2(-1)-1}=-\dfrac{1}{3}$; $f(0)=\dfrac{(0)^2-0-1}{2(0)-1}=1$;

$f(1)=\dfrac{(1)^2-1-1}{2(1)-1}=-1$ e $f(2)=\dfrac{(2)^2-2-1}{2(2)-1}=\dfrac{1}{3}$.

$f(-2)\times f(0)<0$; $f(-1)\times f(0)<0$ e $f(1)\times f(2)<0$. Portanto, o teorema de Bolzano-Cauchy não permite concluir que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $[0,1]$.

Opção correta: **(C)**

53. g é uma função contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[2,4]$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy ou Teorema dos valores intermédios, não se passa de um valor, $g(4)$, ao outro, $g(2)$, sem passar por todos os intermédios. 4 é o único valor que não se consegue garantir que pertença ao contradomínio de g.

Opção correta: **(D)**

PÁG. 226

Aplicar+

54.1 Opção correta: **(D)**

54.2 g é uma função contínua em $[1,2]$, em qualquer uma das opções. Falta verificar uma das condições $g(1)<-2<g(2)$ ou $g(2)<-2<g(1)$.

(A) $g(1)=f(1)+1=-2+1=-1$ e $g(2)=f(2)+2=-1+2=1$.

(B) $g(1)=2f(1)+1=-4+1=-3$ e $g(2)=2f(2)+2=-2+2=0$, logo verifica $g(1)<-2<g(2)$.

(C) $g(1)=f(1)+2\times 1=-2+2=0$ e $g(2)=f(2)+2\times 2=-1+4=3$.

(D) $g(1)=2f(1)+2\times 1=-4+2=-2$ e $g(2)=2f(2)+2\times 2=-2+4=2$.

Opção correta: **(B)**

55. h é uma função contínua em $[-2,1]$.

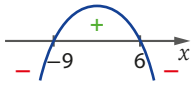
Para ter, pelo menos, um zero tem de se verificar $h(-2)\times h(1)<0$.

$h(-2)=-16+28-2k=12-2k$

$h(1)=2+7+k=9+k$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$h(-2)\times h(1)<0 \iff (12-2k)(9+k)<0 \iff k\in\,]-\infty\,,-9[\cup]6\,,+\infty[$



Opção correta: **(A)**

56. $f(x)=1$

f é uma função contínua em $[-1\,,0]$.

$f(-1)=(-1)^3-a+3=2-a$

$a>1 \iff -a<-1 \iff 2-a<1 \iff f(-1)<1$

$f(0)=3>1$

Como $f(-1)<1<f(0)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\, c\in\,]-1\,,0[\,:f(c)=1$,

ou seja, existe um objeto $c\in\,]-1\,,0[$ tal que a sua imagem por meio da função f é 1.

57.1 $g(x)=0$

g é uma função contínua em $\left[\frac{1}{4}\,,1\right]$.

$g\left(\frac{1}{4}\right)=2^{\frac{1}{4}}+\log_2\frac{1}{4}=\sqrt[4]{2}-2<0$

$g(1)=2^1+\log_2 1=2$

Como $g\left(\frac{1}{4}\right)\times g(1)<0$, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\, c\in\left]\frac{1}{4}\,,1\right[\,:f(c)=0$, ou,

como $g\left(\frac{1}{4}\right)<0<g(1)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, g tem, pelo menos, um zero em $\left]\frac{1}{4}\,,1\right[$.

57.2 A função h definida por $h(x)=g(x)-4x+1$ é contínua em $[1\,,4]$.

$h(1)=g(1)-4+1=2-3=-1$

$h(4)=g(4)-16+1=16+2-15=3$

Como $h(1)\times h(4)=-3<0$, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, h tem, pelo menos, um zero em $]1\,,4[$ e, portanto, o gráfico de g e a reta de equação $y=4x-1$ intersetam-se em, pelo menos, um ponto, em $]1\,,4[$.

58. $g\circ f$ é contínua em $[1\,,3]$, pois é a composta entre funções contínuas no seu domínio.

$(g\circ f)(1)=g(3)=\log_3 3=1$

Como $0<f(3)<1$, então $(g\circ f)(3)=\log_3(f(3))<0$.

Logo, $(g\circ f)(1)$ e $(g\circ f)(3)$ têm sinais contrários, pelo que, 0 está entre $(g\circ f)(1)$ e $(g\circ f)(3)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $g\circ f$ tem, pelo menos, um zero em $]1\,,3[$.

PÁG. 227

Aplicar+

59. $\overline{AB}=1-2a$ e $\overline{AD}=f(a)=\operatorname{sen}^2(a\pi)$.

Sendo g a função que dá a área do retângulo $[ABCD]$, tem-se que $g(a)=(1-2a)f(a)$.

g é uma função contínua em $\left[\frac{1}{4}\,,\frac{1}{2}\right]$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$g\left(\frac{1}{4}\right)=\left(1-2\times\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(1-2\times\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

Como $g\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{5}<g\left(\frac{1}{4}\right)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um $a\in\left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$ tal que $g(a)=\frac{1}{5}$, ou seja, tal que a área do retângulo $[ABCD]$ é igual a $\frac{1}{5}$.

60.1 f é uma função contínua em $[a\,,\,b]$ e $\frac{a+b}{2}$ é a média entre a e b, pelo que $a<\frac{a+b}{2}<b$, ou seja, $f(b)<\frac{a+b}{2}<f(a)$. Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um $c\in]a\,,\,b[$ tal que $f(c)=\frac{a+b}{2}$, ou seja, a equação $f(x)=\frac{a+b}{2}$ é possível em $]a\,,\,b[$.

60.2 $g(x)=f(x)-x$ é uma função contínua em $[a\,,\,b]$.

$g(a)=f(a)-a=b-a$ e $g(b)=f(b)-b=a-b$.

Como $a\neq b$, dado que $a<b$, $g(a)$ e $g(b)$ têm sinais contrários, pelo que $g(a)\times g(b)<0$.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, g tem, pelo menos, um zero em $]a\,,\,b[$ e, consequentemente, existe um $c\in]a\,,\,b[$ tal que $g(c)=0\iff f(c)-c=0\iff f(c)=c$.

61. g é contínua em $[0\,,\,1]$, pois é o produto e a composição de funções contínuas no seu domínio.

$g(0)=e^0\times f(0)\times a=af(0)$.

Como $0<a<1$, $af(0)<f(0)$ e $f(0)<f(1)$, pois f é crescente. Logo, $g(0)<f(1)$.

$g(1)=e^0\times f(1)\times(1+a)=f(1)(1+a)$

Como $1+a>1$, $f(1)(1+a)>f(1)$, ou seja, $g(1)>f(1)$.

Logo, como $g(0)<f(1)<g(1)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um $c\in]0\,,\,1[$ tal que $g(c)=f(1)$, ou seja, a equação $g(x)=f(1)$ é possível em $]0\,,\,1[$.

62.1 Seja f a função definida por $f(x)=\text{tg}\,x-\ln x$.

f é uma função contínua em $[13\,,\,14]$.

$f(13)=\text{tg}13-\ln 13\approx-2{,}1$; $f(14)=\text{tg}14-\ln 14\approx 4{,}6$; $f(13)\times f(14)<0$.

Logo, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, f tem, pelo menos, um zero de f em $]13\,,\,14[$, ou seja, a equação $\text{tg}\,x=\ln x$ é possível nesse intervalo.

62.2 $I_1=[13\,,\,14]$, $x_1=\frac{13+14}{2}=13{,}5$. Como $f(13{,}5)\approx-1{,}25$, tem-se $f(13{,}5)\times f(14)<0$.

$I_2=[13{,}5\,;\,14]$, $x_2=\frac{13{,}5+14}{2}=13{,}75$. Como $f(13{,}75)\approx-0{,}17$, tem-se $f(13{,}75)\times f(14)<0$.

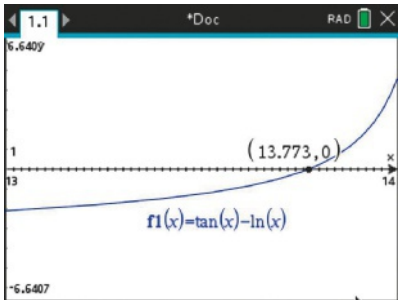
$I_3=[13{,}75\,;\,14]$, $x_3=\frac{13{,}75+14}{2}=13{,}875$. Como $f(13{,}875)\approx 1{,}10$, tem-se $f(13{,}75)\times f(14)<0$.

$I_4=[13{,}75\,;\,13{,}875]$, $x_4=\frac{13{,}75+13{,}875}{2}=13{,}8125$.

Valor aproximado: 13,8125 ; erro máximo: $\frac{13{,}875-13{,}75}{2}=0{,}0625$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

62.3



$|13{,}8125 - 13{,}773| = 0{,}0395 < 0{,}0625$

A diferença, em valor absoluto, entre os dois valores aproximados é inferior ao erro máximo previsto pelo método da bissecção.

PÁG. 228

Aplicar+

63.1 f é contínua em $[-1\,,\,0]$.

$f(-1) = e^{\text{sen}(-1)} - 2 \approx -1{,}57$ e $f(0) = e^{\text{sen}(0)} = 1$.

$f(-1) \times f(0) < 0$.

Logo, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-1\,,\,0[$.

63.2 $[-1\,,\,0]$; $x_1 = \dfrac{-1+0}{2} = -0{,}5$; erro máximo: 0,5.

Como $f(-0{,}5) \approx -0{,}38$, tem-se $f(-0{,}5) \times f(0) < 0$.

$[-0{,}5\,;\,0]$; $x_2 = \dfrac{-0{,}5+0}{2} = -0{,}25$; erro máximo: 0,25.

Como $f(-0{,}25) \approx 0{,}28$, tem-se $f(-0{,}5) \times f(-0{,}25) < 0$.

$[-0{,}5\,;\,-0{,}25]$; $x_3 = \dfrac{-0{,}5-0{,}25}{2} = -0{,}375$; erro máximo: $\dfrac{-0{,}25+0{,}5}{2} = 0{,}125$.

63.3

```
I1 = [-1,0]
x1 = -0.5
I2 = [-0.5,0]
x2 = -0.25
I3 = [-0.5,-0.25]
x3 = -0.375
I4 = [-0.375,-0.25]
x4 = -0.3125
I5 = [-0.375,-0.3125]
x5 = -0.34375
I6 = [-0.375,-0.34375]
x6 = -0.359375
I7 = [-0.359375,-0.34375]
x7 = -0.3515625
I8 = [-0.359375,-0.3515625]
x8 = -0.35546875
I9 = [-0.35546875,-0.3515625]
x9 = -0.353515625
I10 = [-0.35546875,-0.353515625]
Uma aproximação do zero de f, com erro inferior a 0.001, é -0.3544921875.
```

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

63.4 $|-0{,}35364+0{,}35449|=0{,}00085$

A diferença, em valor absoluto, entre os dois valores aproximados é inferior ao erro máximo previsto pelo método da bissecção.

64.1 $x^2=e^x \iff x^2-e^x=0$

Seja f a função definida por $f(x)=x^2-e^x$.

f é uma função contínua em $[-1\,,\,0]$.

$f(-1)=1-\frac{1}{e}>0$, $f(0)=-e^0=-1$ e $f(-1)\times f(0)<0$.

Logo, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-1\,,\,0[$, ou seja, a equação $f(x)=0$ tem, pelo menos, uma solução nesse intervalo.

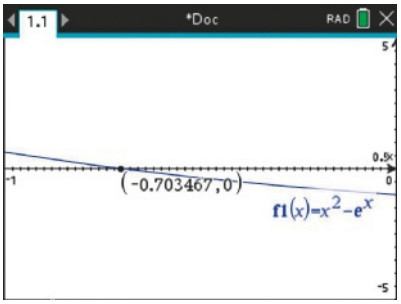
64.2 Começando, por exemplo, com o valor inicial $-0{,}5$, obtemos $-0{,}5$; $-0{,}7219$; $-0{,}7036$; $-0{,}7035$.

64.3 $f(x)=x^2-e^x$; $f'(x)=\left(x^2-e^x\right)'=2x-e^x$

$x_1=-0{,}8$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=-0{,}8-\frac{f(-0{,}8)}{f'(-0{,}8)}=-0{,}8-\frac{(-0{,}8)^2-e^{-0{,}8}}{-1{,}6-e^{-0{,}8}}\approx-0{,}706959$$

$$x_3\approx-0{,}706959-\frac{f(-0{,}706959)}{f'(-0{,}706959)}\approx-0{,}706959-\frac{(-0{,}706959)^2-e^{-0{,}706959}}{-1{,}413918-e^{-0{,}706959}}\approx-0{,}703472$$

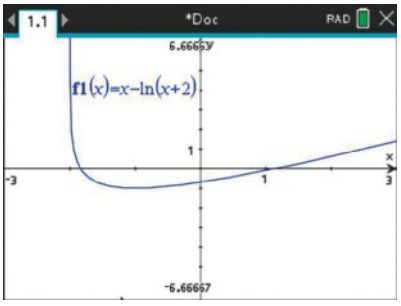


A solução aproximada obtida na calculadora, com seis casas decimais é $-0{,}703467$. A solução obtida por aplicação do método de Newton-Raphson, tomando para valor inicial $-0{,}8$ e efetuando duas iterações, coincide com a da calculadora até à quarta casa decimal. Considerando estas aproximações, o erro cometido é $|-0{,}703472+0{,}703467|=0{,}000005$.

PÁG. 229

Aplicar+

65.1 $x=\ln(x+2) \iff x-\ln(x+2)=0$



Por exemplo, $[-2\,,\,-1]$ e $[1\,,\,2]$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

65.2 Seja $f(x)=x-\ln(x+2)$. $f'(x)=(x-\ln(x+2))'=1-\dfrac{1}{x+2}$

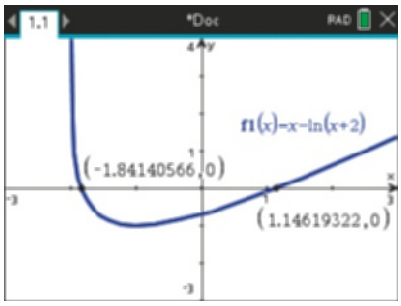
Não, pois $f'(-1)=0$.

65.3 $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+2>0\}=]-2,+\infty[$

Não. Tomando $x_1=-1{,}5$, obtemos para $x_2=-1{,}5-\dfrac{f(-1{,}5)}{f'(-1{,}5)}=-1{,}5-\dfrac{-1{,}5-\ln(-1{,}5+2)}{1-\dfrac{1}{-1{,}5+2}}\approx-2{,}3$ e $-2{,}3$ está fora do domínio da função f.

65.4 Sequência de aproximações em $[-2,-1]$: $-1{,}7$; $-1{,}91258308$; $-1{,}86234249$; $-1{,}84141623$; $-1{,}84140566$.

Sequência de aproximações em $[1,2]$: $1{,}5$; $1{,}15386816$; $1{,}14619756$; $1{,}14619322$.



66.1

$I_1=[-1,0]$; $x_1=-0{,}5$
erro máximo $=0{,}5$

$I_2=[-1;-0{,}5]$; $x_2=-0{,}75$
erro máximo $=0{,}25$

$I_3=[-0{,}75;-0{,}5]$; $x_3=-0{,}625$
erro máximo $=0{,}125$

$I_4=[-0{,}75;-0{,}625]$; $x_4=-0{,}6875$
erro máximo $=0{,}0625$

$I_5=[-0{,}75;-0{,}6875]$; $x_5=-0{,}71875$
erro máximo $=0{,}03125$

$I_6=[-0{,}75;-0{,}71875]$; $x_6=-0{,}734375$
erro máximo $=0{,}015625$

$I_7=[-0{,}75;-0{,}734375]$; $x_7=-0{,}7421875$
erro máximo $=0{,}0078125$

$I_8=[-0{,}7421875;-0{,}734375]$; $x_8=-0{,}73828125$
erro máximo $=0{,}00390625$

$I_9=[-0{,}7421875;-0{,}73828125]$; $x_9=-0{,}740234375$
erro máximo $=0{,}001953125$

$I_{10}=[-0{,}740234375;-0{,}73828125]$; $x_{10}=-0{,}7392578125$
erro máximo $=0{,}0009765625$

Zeros: $-0{,}739$ e $0{,}739$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

66.2

```
x1 = 0.1
x2 = 2.3507264870736866
x3 = -2.772001546374718
x4 = 6.877128528892349
x5 = -536.2407628400209
x6 = 1385664862368.6145
x7 = -1.596397515096882e+59
x8 = 3.240076298079217e+294
---------------------------
OverflowError
```

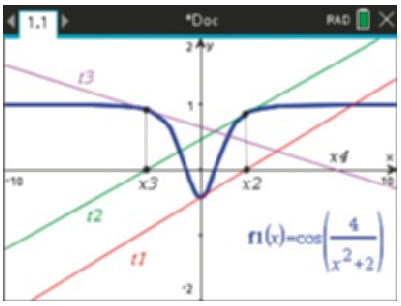
```
x1 = 0.5
x2 = 0.7657670534990777
x3 = 0.7392878210844969
x4 = 0.739242240246278
x5 = 0.7392422400474186
Uma aproximação do zero de f, com uma tolerância 1e-06, é 0.7392422400474186.
```

Para $x_1 = 0{,}1$, não se consegue encontrar um valor aproximado de nenhum dos zeros da função.

Se $x_1 = 0{,}5$, chegamos a um valor aproximado do zero positivo de f : $0{,}739$.

O valor aproximado do zero negativo é $-0{,}739$.

66.3



Dada a forma do gráfico, ao começarmos em $x_1 = 0{,}1$, as retas tangentes das sucessivas iterações intersetam o eixo Ox em pontos cada vez mais afastados do zero positivo da função.

Ao fim da terceira iteração, o ponto obtido, $x_4 \approx 6{,}8771$, tem derivada muito próxima de zero ($f'(x) = \frac{8x}{x^2+2}\operatorname{sen}\left(\frac{4}{x^2+2}\right)$ e $f'(x_4) \approx 0{,}001835$), o que faz com que a reta tangente seja quase paralela ao eixo Ox , que tem como consequência que o valor seguinte esteja ainda mais afastado do zero positivo da função.

A partir daqui, as derivadas da função nos pontos obtidos, em cada iteração, vão estando, aparentemente, cada vez mais próximas de zero, pelo que as sucessivas retas tangentes ao gráfico vão intersetando o eixo Ox em pontos de abcissa cada vez maior (em valor absoluto), afastando-se dos zeros da função.

Para $x_1 = 0{,}5$, não se verifica o comportamento observado nas iterações do caso $x_1 = 0{,}1$. Neste caso, as sucessivas retas tangentes, vão intersetando o eixo Ox em pontos de abcissas sucessivamente mais próximas do zero positivo da função, convergindo, aparentemente, para o mesmo.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 239

Autoavaliação

1.

(A) $\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx} \neq e^{kx}$

(B) $\left(ke^{k-x}\right)' = -ke^{k-x} \neq ke^{k-x}$

(C) $\left(e^{2-k}\right)' = 0 \neq e^{2-k}$

(D) $\left(ke^{x}\right)' = ke^{x}$ Opção correta: **(D)**

2. Ponto de tangência: $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, 5\right)$.

$f'(x) = (\ln(3x)+5)' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$; $m = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3$

Equação da reta tangente: $y - 5 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) \iff y = 3x + 4$

Opção correta: **(C)**

3.1 $x \approx 1{,}44$

3.2 $B\left(x, 2^{-x}\right)$; $C(x, 0)$; $\overline{OC} = x$ e $\overline{BC} = 2^{-x}$.

$A(x) = \frac{x \times 2^{-x}}{2} = x \times 2^{-x-1}$

$A'(x) = \left(x \times 2^{-x-1}\right)' = x' \times 2^{-x-1} + x \times \left(2^{-x-1}\right)' =$

$= 2^{-x-1} + x \times (-1)\ln(2) \times 2^{-x-1} = 2^{-x-1}(1 - x\ln 2)$

$A'(x) = 0 \iff 2^{-x-1}(1 - x\ln 2) = 0 \iff$

$\iff \underbrace{2^{-x-1} = 0}_{\text{imp.}} \vee 1 - x\ln 2 = 0 \iff x = \frac{1}{\ln 2} \iff x \approx 1{,}44$

x	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
Zeros e sinal de A'	+	0	–
Monotonia e extremos de A	↗	Máx.	↘

A área é máxima em $x = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}44$.

4.1 $d'(t) = \left(-0{,}15t^3 + 0{,}6t^2 + 0{,}7t + 1\right)' = -0{,}45t^2 + 1{,}2t + 0{,}7$

$d'(0) = 0{,}7$ m/s

4.2 $d''(t) = \left(-0{,}45t^2 + 1{,}2t + 0{,}7\right)' = -0{,}9t + 1{,}2$

$d''(t) = 0 \iff -0{,}9t + 1{,}2 = 0 \iff t = \frac{4}{3}$

t	0		$\frac{4}{3}$		5
Zeros e sinal de d''	+	+	0	–	–
Monotonia e extremos de d'	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.

$t = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$ segundos.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 240

Autoavaliação

5. f é uma função quadrática representada graficamente por uma parábola que tem a concavidade voltada para baixo. Pode ser definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a<0$.

$f'(x)=(ax^2+bx+c)'=2ax+b$, $f''(x)=(2ax+b)'=2a$ e $(e^x)'=e^x$,

pelo que $g'(x)=f'(x)+e^x$ e $g''(x)=f''(x)+e^x=2a+e^x$.

Vamos averiguar a existência de assíntota horizontal ao gráfico de g'' em $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2a+e^x)=2a+0=2a$, logo, a reta de equação $y=2a$ é assíntota horizontal ao gráfico de g'' em $-\infty$ e $2a<0$.

Opção correta: **(A)**

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-2x}}{2x^3}\underset{x\to-\infty\Rightarrow\ y\to+\infty}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{2\left(-\frac{y}{2}\right)^3}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{2\frac{-y^3}{8}}=-4\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{y^3}=-4\times(+\infty)=-\infty$

Opção correta: **(A)**

7. Como a reta r de equação $y=\frac{1}{3}x+2$ é assíntota ao gráfico de f, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{3}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=3$,

logo, a reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal ao gráfico de h.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 241

Autoavaliação

8. Como o gráfico da função f tem uma assíntota vertical em $x=2$, a função f não pode ser contínua em $x=2$, dado que, pelo menos, um dos limites laterais em $x=2$ tem de ser $-\infty$ ou $+\infty$. Logo, a afirmação **I.** é falsa.

A reta de equação $y=2x+3$ é tangente ao gráfico de f em $x=1$, pelo que $f'(1)=2>0$. Logo, a função f não pode ser decrescente em $]-\infty,2[$, pelo que a afirmação **II.** é falsa.

$g(x)=2x+e^{1+x^2}$; $g'(x)=\left(2x+e^{1+x^2}\right)'=2+2xe^{1+x^2}$ e

$g''(x)=\left(2+2xe^{1+x^2}\right)'=(2x)'e^{1+x^2}+2x\left(e^{1+x^2}\right)'=2e^{1+x^2}+2x\times2xe^{1+x^2}=e^{1+x^2}(2+4x^2)$.

Como $g''(x)>0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, o gráfico desta função tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$, pelo que a afirmação **III.** é falsa.

9. g é contínua em $\mathbb{R}$, e, em particular, é contínua em $x=1$, pelo que $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=g(1)$.

$\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{-(x-1)(x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{-(x+1)}\times\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)}\underset{x\to1^-\Rightarrow\ y\to0^-}{=}-\dfrac{1}{2}\times\lim\limits_{y\to0^-}\dfrac{\operatorname{sen}y}{y}=$

$=-\dfrac{1}{2}\times1=-\dfrac{1}{2}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$g(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln(kx)-x\right)=\ln k-1$

Logo, $\ln k-1=-\frac{1}{2} \iff \ln k=\frac{1}{2} \iff k=e^{\frac{1}{2}} \iff k=\sqrt{e}$.

10. f é contínua no seu domínio, pois está definida pelo quociente de funções contínuas.

$\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{\ln(x+1)}{e^{2x}-e^{x}}=\frac{\ln 0^+}{e^{-2}-e^{-1}}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{e^{2x}-e^{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{2e^{2x}-e^{x}}=\frac{1}{2-1}=1$.

A reta de equação $x=-1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{e^{2x}-e^{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{2e^{2x}-e^{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{(x+1)e^{x}(2e^{x}-1)}=\frac{1}{+\infty}=0$

Logo, a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

11.1 f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que é contínua em $[-3,-2]$.

$f(-3)=(-3)^3-3(-3)+6=-12$

$f(-2)=(-2)^3-3(-2)+6=4$

Como $f(-3)\times f(-2)<0$, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, f tem, pelo menos, um zero em $]-3,-2[$ e, portanto, tem, pelo menos, um zero em $[-3,-2]$.

11.2 Comecemos com o intervalo $I_1=[-3,-2]$.

1.ª iteração: $x_1=\frac{-3-2}{2}=-2{,}5$

Como $f(-2{,}5)=-2{,}125$, tem-se $f(-2{,}5)\times f(-2)<0$ e $I_2=[-2{,}5\,;-2]$.

2.ª iteração: $x_2=\frac{-2{,}5-2}{2}=-2{,}25$

Como $f(-2{,}25)\approx 1{,}359$, tem-se $f(-2{,}5)\times f(-2{,}25)<0$ e $I_3=[-2{,}5\,;-2{,}25]$.

11.3 $f(x)=x^3-3x+6$

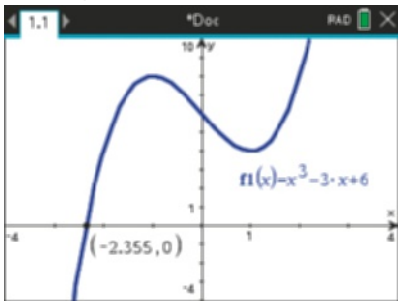
$f'(x)=\left(x^3-3x+6\right)'=3x^2-3$

Comecemos com $x_1=-2{,}5$.

1.ª iteração: $x_2=-2{,}5-\frac{f(-2{,}5)}{f'(-2{,}5)}=-2{,}5-\frac{-2{,}125}{3(-2{,}5)^2-3}\approx -2{,}365$

2.ª iteração: $x_3=-2{,}365-\frac{f(-2{,}365)}{f'(-2{,}365)}\approx -2{,}355$

Uma aproximação do zero da função f, arredondada às milésimas, é $-2{,}355$.



Utilizando a calculadora gráfica, o zero de f que obtemos, arredondado às milésimas, coincide com a aproximação obtida por aplicação do método de Newton-Raphson.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 242

Preparar o exame

1.1 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\pi}{g(x)-g(\pi)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}}=\dfrac{1}{g'(\pi)}=$

$=\dfrac{1}{\cos(3\pi)+\dfrac{3}{2}\pi+1}=\dfrac{1}{-1+\dfrac{3}{2}\pi+1}=\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}\pi}=\dfrac{2}{3\pi}$

1.2 A reta r tem declive $g'(0)=\cos(3\times 0)+\dfrac{3}{2}\times 0+1=2$.

A reta s é perpendicular à reta r, logo, tem declive $-\dfrac{1}{2}$.

Assim, a reta s é definida pela equação $y=-\dfrac{1}{2}x+b$.

A reta s interseta o eixo Ox no ponto $A(x_A,0)$, com $x_A>0$:

$0=-\dfrac{1}{2}x_A+b \iff b=\dfrac{1}{2}x_A \iff x_A=2b$

e interseta o eixo Oy no ponto $B(0,y_B)$: $y_B=-\dfrac{1}{2}\times 0+b \iff b=y_B$.

$A_{[OAB]}=12 \iff \dfrac{x_A\times y_B}{2}=12 \iff \dfrac{2b\times b}{2}=12 \iff b^2=12 \iff b=\pm\sqrt{12}$

Como a abcissa do ponto A é positiva, então $b=\sqrt{12}$ e a abcissa do ponto A é

$x_A=2b=2\sqrt{12}=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

2. A reta tangente ao gráfico de $g\circ f$ no ponto de abcissa 1 tem declive

$(g\circ f)'(1)=g'(f(1))\times f'(1)=g'(3)\times 2=\dfrac{1}{3}\times 2=\dfrac{2}{3}$.

Opção correta: **(B)**

3. $f'(x)=-2{,}5\left(-0{,}2e^{1-0{,}2x}+0{,}2e^{0{,}2x-1}\right)=-0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x}+e^{0{,}2x-1}\right)$

$f'(x)=0 \iff -0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x}+e^{0{,}2x-1}\right)=0 \iff -e^{1-0{,}2x}+e^{0{,}2x-1}=0 \iff$

$\iff e^{1-0{,}2x}=e^{0{,}2x-1} \iff 1-0{,}2x=0{,}2x-1 \iff x=5$

x	0		5		7
f'	+	+	0	−	−
f	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.

O valor máximo da função f é atingido quando $x=5$, ou seja, a distância máxima entre a superfície da água e a ponte é $f(5)=9-2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times 5}+e^{0{,}2\times 5-1}\right)=9-2{,}5\times 2=4$.

O barco não pode passar, porque a maior distância entre a superfície da água e o arco da ponte é 4 metros, e a distância do ponto mais alto do mastro do barco à superfície da água é 6 metros.

PÁG. 243

Preparar o exame

4. $f(x)=g(x) \iff a^x=a^{-x} \iff x=-x \iff x=0$

Logo, os gráficos de f e de g intersetam-se num único ponto, pelo que a afirmação **I.** é falsa.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$f'(x)=a^x\ln a$ e $g'(x)=-a^{-x}\ln a$.

$f'(1)-g'(-1)=a^1\ln a-\left(-a^{-(-1)}\ln a\right)=a\ln a+a\ln a=2a\ln a=a\ln a^2$

Logo, a afirmação **II.** é verdadeira.

Como $a>1$, a função f é crescente, pelo que a afirmação **III.** é falsa.

5.1 Quando se inicia o movimento, a distância do centro da esfera ao ponto P é

$d(0)=10+\dfrac{5-0}{e^{0,05\times 0}}=10+5=15$ cm.

Como, quando se inicia o movimento, o ponto da esfera mais afastado do ponto P está a 16 cm desse ponto, o raio da esfera é $16-15=1$ cm.

Logo, o volume da esfera é $\dfrac{4}{3}\pi\times 1^3=\dfrac{4}{3}\pi\approx 4{,}19$ cm^3.

5.2 $d'(t)=\dfrac{-e^{0,05t}-(5-t)\times 0{,}05e^{0,05t}}{\left(e^{0,05t}\right)^2}=\dfrac{0{,}05t-1{,}25}{e^{0,05t}}$

$d'(t)=0 \iff \dfrac{0{,}05t-1{,}25}{e^{0,05t}}=0 \iff 0{,}05t-1{,}25=0 \wedge e^{0,05t}\neq 0 \iff t=25$

t	0		25	$+\infty$
d'	$-$	$-$	0	$+$
d	15	↘	Mín.	↗

A função d é decrescente em $]0\,,25]$ e crescente em $[25\,,+\infty[$.

A distância do centro da esfera ao ponto P é mínima quando $t=25$, ou seja, 25 segundos após o início do movimento.

A distância mínima é $d(25)=10+\dfrac{5-25}{e^{0,05\times 25}}\approx 4{,}3$ cm.

5.3 $\lim\limits_{t\to+\infty} d(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(10+\dfrac{5-t}{e^{0,05t}}\right)=10+\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{5-t}{e^{0,05t}}=10$

Com o passar do tempo, a distância do centro da esfera ao ponto P tende para 10.

6.1 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x+1-e^{3x}}{6x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1-3e^{3x}}{6}\right)=-\dfrac{2}{6}=-\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x-1}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\cos x}{-\operatorname{sen} x}\right)=-\infty$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

6.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1-e^{3x}}{6x}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1-3e^{3x}}{6}\right)=\dfrac{1}{6}$

A.H.: $y=\dfrac{1}{6}$ em $-\infty$.

6.3 Para $x\in]0\,,2\pi[$,

$f'(x)=\dfrac{\cos x(\cos x-1)-\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x-1)^2}=\dfrac{\cos^2 x-\cos x+\operatorname{sen}^2 x}{(\cos x-1)^2}=\dfrac{1-\cos x}{(\cos x-1)^2}=\dfrac{1}{1-\cos x}$

Como $1-\cos x>0$, para todo o $x\in]0\,,2\pi[$, $f'(x)>0$, para todo o $x\in]0\,,2\pi[$, pelo que f é crescente em $]0\,,2\pi[$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

6.4 a. $g(x)=f(x)+x$ é contínua em $[1\,,\,2]$.

$g(1)<0$, $g(2)>0$ e $g(1)\times g(2)<0$.

Logo, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, g tem, pelo menos, um zero em $]1\,,\,2[$, pelo que a equação $f(x)=-x$ é possível em $]1\,,\,2[$.

b. 1.ª iteração: $x_1=\dfrac{1+2}{2}=1{,}5$; erro máximo: $\dfrac{2-1}{2}=0{,}5$

Como $g(1{,}5)>0$, tem-se $g(1)\times g(1{,}5)<0$ e $I_2=[1\,;1{,}5]$.

2.ª iteração: $x_2=\dfrac{1+1{,}5}{2}=1{,}25$; erro máximo: $\dfrac{1{,}5-1}{2}=0{,}25$

Como $g(1{,}25)<0$, tem-se $g(1{,}25)\times g(1{,}5)<0$ e $I_3=[1{,}25\,;1{,}5]$.

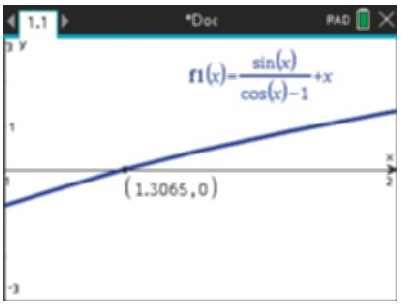
3.ª iteração: $x_3=\dfrac{1{,}25+1{,}5}{2}=1{,}375$; erro máximo: $\dfrac{1{,}5-1{,}25}{2}=0{,}125$

Como $g(1{,}375)>0$, tem-se $g(1{,}25)\times g(1{,}375)<0$ e $I_4=[1{,}25\,;1{,}375]$.

4.ª iteração: $x_3=\dfrac{1{,}25+1{,}375}{2}=1{,}3125$; erro máximo: $\dfrac{1{,}375-1{,}25}{2}=0{,}0625$

Valor aproximado: 1,3125 ; erro máximo: 0,0625 .

c.



$|1{,}3065-1{,}3125|=0{,}006$

A diferença, em valor absoluto, entre os dois valores aproximados é inferior ao erro máximo previsto pelo método da bissecção.

PÁG. 244

Preparar o exame

7.1 $P'(t)=-\dfrac{\frac{1}{t+1}\times(t+1)-\ln(t+1)}{(t+1)^2}=-\dfrac{1-\ln(t+1)}{(t+1)^2}=\dfrac{\ln(t+1)-1}{(t+1)^2}$

$P'(t)=0 \iff \dfrac{\ln(t+1)-1}{(t+1)^2}=0 \iff \ln(t+1)-1=0 \wedge (t+1)^2\neq 0 \iff$

$\iff \ln(t+1)=1 \wedge t+1\neq 0 \underset{t\geqslant 0}{\iff} t+1=e \iff t=e-1$

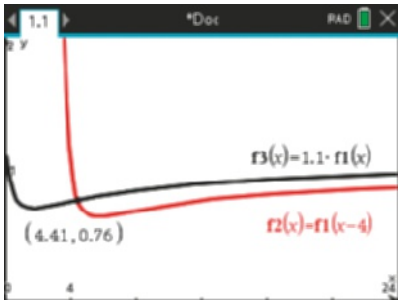
t	0		$e-1$		24
P'		−	0	+	
P		↘	Mín.	↗	

$t=e-1\approx 1{,}718$

O purificador do ar estive ligado, aproximadamente, 1 hora e $0{,}718\times 60=43{,}08\approx 43$ minutos.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

7.2 $P(t-4)=1{,}1P(t)$



$t \approx 4{,}41$, ou seja, às 4 horas e $0{,}41 \times 60 = 24{,}6 \approx 25$ minutos.

7.3 $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln(t+1)}{t+1}\right) = 1 - 0 = 1$

O nível de poluição do ar no laboratório nunca ultrapassará 1 mg/l de ar.

8.1 $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\cos(2x) - 2(-\operatorname{sen} x) + k = \cos(2x) + 2\operatorname{sen} x + k$

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5}{2} \iff \cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{6}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + k = \dfrac{5}{2} \iff$

$\iff \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + 2 \times \dfrac{1}{2} + k = \dfrac{5}{2} \iff \dfrac{1}{2} + 1 + k = \dfrac{5}{2} \iff k = 1$

8.2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{f(x)+2} = -\dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}} = -\dfrac{1}{f'(0)} = -\dfrac{1}{2}$

É o declive de qualquer reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 .

8.3 A reta r tem declive igual a

$f'\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \times \dfrac{7\pi}{6}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) + 1 = \cos\left(\dfrac{7\pi}{3}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + 1 =$

$= \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - 2 \times \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} - 1 + 1 = \dfrac{1}{2}$

Qualquer reta perpendicular a r tem declive igual a $-\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = -2$.

$0 = -2 \times 3 + b \iff b = 6$

A equação pedida é $y = -2x + 6$.

PÁG. 245

Preparar o exame

9.1 O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é $\dfrac{5+1}{2+1} = 2$, pelo que $g'(1) = 2$.

Como o ponto de coordenadas $(-1, -1)$ pertence à reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 , a sua ordenada na origem é $-1 = 2 \times (-1) + b \iff b = 1$, pelo que, como as coordenadas do ponto de tangência são $(1, g(1))$, $g(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$. A função g é duas vezes derivável e o ponto de coordenadas $(1, g(1))$ é um ponto de inflexão do gráfico de g , pelo que $g''(1) = 0$.

9.2

(A) $2 \times 1^3 - 5 \times 1^2 + 4 \times 1 + 2 = 3$

$(2x^3 - 5x^2 + 4x + 2)' = 6x^2 - 10x + 4$, $6 \times 1^2 - 10 \times 1 + 4 = 0 \neq 2$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

(B) $1^3-2\times1^2+3\times1+1=3$

$(x^3-2x^2+3x+1)'=3x^2-4x+3$, $3\times1^2-4\times1+3=2$

$(3x^2-4x+3)'=6x-4$, $6\times1-4=2\neq0$

(C) $-1^3+3\times1^2-1+2=3$

$(-x^3+3x^2-x+2)'=-3x^2+6x-1$, $-3\times1^2+6\times1-1=2$

$(-3x^2+6x-1)'=-6x+6$, $-6\times1+6=0$

Opção correta: **(C)**

10. $g''(x)=-f''(x)e^{-f'(x)}$

Como f é uma função polinomial de grau 3, então $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, com $a>0$, pois a função tende para $+\infty$ quando $x\longrightarrow+\infty$ e $b, c, d\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$; $f''(x)=6ax+2b$ e $f''(x)=0 \iff x=-\frac{b}{3a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$
$e^{-f'(x)}$	+	+	+
$f''(x)$	−	0	+
$-f'(x)$	+	0	−
$g''(x)$	+	0	−

Opção correta: **(B)**

PÁG. 246

Preparar o exame

11. $g''(x)=\frac{(2x-1)e^{x^2-x}\times x-e^{x^2-x}}{x^2}=\frac{(2x^2-x-1)e^{x^2-x}}{x^2}$

$g''(x)=0 \iff \frac{(2x^2-x-1)e^{x^2-x}}{x^2}=0 \iff$

$\iff (2x^2-x-1)e^{x^2-x}=0 \wedge x^2\neq0 \underset{e^{x^2-x}\neq0}{\iff} 2x^2-x-1=0 \wedge x\neq0 \iff$

$\iff x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}\wedge x\neq0 \iff x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}\wedge x\neq0 \iff$

$\iff \left(x=\frac{1-3}{4}\vee x=\frac{1+3}{4}\right)\wedge x\neq0 \iff \left(x=-\frac{1}{2}\vee x=1\right)\wedge x\neq0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		1	$+\infty$
g''	+	0	−	N.D.	−	0	+
g	$\cup$	P.I.	$\cap$	N.D.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ e em $[1, +\infty[$, e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$ e em $]0, 1]$.

Tem pontos de inflexão em $x=-\frac{1}{2}$ e em $x=1$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

12.1 Em $]1, +\infty[$,

$g'(x) = (x^2 - 3x - 2\ln x)' = 2x - 3 - \frac{2}{x}$

$g'(x) = 0 \iff 2x - 3 - \frac{2}{x} = 0 \iff \frac{2x^2 - 3x - 2}{x} = 0 \iff$

$\iff 2x^2 - 3x - 2 = 0 \wedge x \neq 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \wedge x \neq 0 \iff$

$\iff x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \wedge x \neq 0 \iff \left(x = \frac{3-5}{4} \vee x = \frac{3+5}{4}\right) \wedge x \neq 0 \iff$

$\iff \left(x = -\frac{1}{2} \vee x = 2\right) \wedge x \neq 0 \iff x = 2$

x	1		2	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 2$	N.D.	$-$	0	$+$
x	N.D.	$+$	$+$	$+$
g'	N.D.	$-$	0	$+$
g	N.D.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

g é decrescente em $]1, 2]$ e é crescente em $[2, +\infty[$.

Tem mínimo relativo igual a $g(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 2\ln 2 = -2 - 2\ln 2$ em $x = 2$.

12.2 Como a função g é contínua em $x = 1$, então, $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1-x}{e^{x-1} - 1} - e^{x-k}\right) = \frac{0}{0} - e^{1-k}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1-x}{e^{x-1} - 1} - e^{x-k}\right) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{-(x-1)}{e^{x-1} - 1} - e^{x-k}\right) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(-\frac{x-1}{e^{x-1} - 1} - e^{x-k}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \left(-\frac{1}{\frac{e^{x-1} - 1}{x-1}} - e^{x-k}\right) = -\frac{1}{\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}} - e^{1-k} \underset{y = x-1}{=} -\frac{1}{\lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}} - e^{1-k} =$

$= -\frac{1}{1} - e^{1-k} = -1 - e^{1-k}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 3x - 2\ln x) = g(1) = 1^2 - 3 \times 1 - 2\ln 1 = -2$

Assim, $-1 - e^{1-k} = -2 \iff e^{1-k} = 1 \iff 1 - k = 0 \iff k = 1$

12.3

a. Não, porque $g'(2) = 0$.

b. $x_1 = 2{,}5$

1.ª iteração: $g'(2{,}5) = 1{,}2 \neq 0$

$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = 2{,}5 - \frac{g(2{,}5)}{g'(2{,}5)} = 2{,}5 + \frac{3{,}083}{1{,}2} \approx 5{,}069$

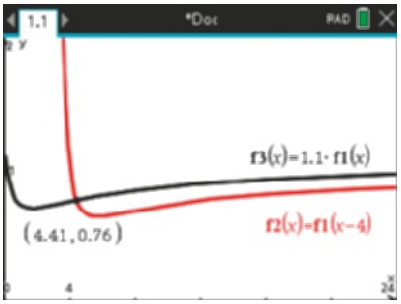
2.ª iteração: $g'(5{,}069) \approx 6{,}743 \neq 0$

$x_3 = x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} = 5{,}069 - \frac{g(5{,}069)}{g'(5{,}069)} = 5{,}069 - \frac{7{,}241}{6{,}743} \approx 3{,}995$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

3.ª iteração: $g'(3{,}995) \approx 4{,}489 \neq 0$

$$x_4 = x_3 - \frac{g(x_3)}{g'(x_3)} = 3{,}995 - \frac{g(3{,}995)}{g'(3{,}995)} = 3{,}995 - \frac{1{,}205}{4{,}489} \approx 3{,}727$$



$x \approx 3{,}727$

$|3{,}707 - 3{,}727| = 0{,}02$

O erro cometido pela aplicação do método é $0{,}02$.

PÁG. 247

Preparar o exame

13. Como a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{f(x)} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

Opção correta: **(A)**

14.1 $f(0) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - e^x}{\ln(1-2x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{-e^x}{\frac{-2}{1-2x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-e^x(1-2x)}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + \ln(ex+e)}{x+2} = \frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$, então f é contínua em $x = 0$.

14.2 Vamos mostrar que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x-2)) = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x-2)) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex+e)}{x+2} - (x-2) \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \ln(ex+e) - (x^2 - 4)}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(ex+e) + 4}{x+2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e}{ex+e} = 0$$

15.1 Como a reta de equação $y = 3x - 5$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \longrightarrow +\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - (3x-5)) = 0 \iff \lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 3x + 5) = 0$.

Opção correta: **(D)**

15.2 Como a função g é contínua em $x = 0$, então $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 2$ porque f é contínua.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-k}(e^x-1)}{2x-x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-k}(e^x-1)}{x(2-x)} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{e^{-k}}{2-x} \times \frac{e^x-1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-k}}{2-x} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = \frac{e^{-k}}{2-0} \times 1 = \frac{e^{-k}}{2}$$

Assim, $\frac{e^{-k}}{2} = 2 \iff e^{-k} = 4 \iff -k = \ln 4 \iff k = -\ln 4$.

PÁG. 248

Preparar o exame

16.1 f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, pelo que o gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

16.2 $f'(x) = 3e^x + 2e^{-x}$; $f''(x) = 3e^x - 2e^{-x} = f(x)$

$$f''(x) = 0 \iff 3e^x - 2e^{-x} = 0 \iff 3e^x = 2e^{-x} \underset{e^x \neq 0}{\iff} 3 = 2e^{-2x} \iff$$

$$\iff e^{-2x} = \frac{3}{2} \iff -2x = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$	$+\infty$
Zeros e sinal de f'	$-$	0	$+$
Concavidades e P.I. do gráfico de f	$\cap$	P. I.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$. Tem ponto de inflexão em $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

16.3 $g(x) = 3e^x - 2e^{-x} - 3x - 4$ é contínua em $[0, 1]$.

$g(0) \times g(1) \approx -1{,}3 < 0$. Logo, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, g tem, pelo menos, um zero em $]0, 1[$, pelo que o gráfico de f e a reta r se intersetam, pelo menos, num ponto de abcissa pertencente a $]0, 1[$.

$g'(x) = 3e^x - 2e^{-x} - 3$

$3e^x > 3$, para todo o $x \in]0, 1[$, pelo que $g'(x) > 0$ em $]0, 1[$ e, portanto, g é crescente em $]0, 1[$, concluindo-se que o gráfico de f e a reta r intersetam-se exatamente uma vez num ponto de abcissa pertencente a $]0, 1[$.

16.4 $I_1 = [0, 1]$, $g(0) = -3 < 0$ e $g(1) > 0$.

1.ª iteração: $x_1 = \frac{0+1}{2} = 0{,}5$; erro máximo: $\frac{1-0}{2} = 0{,}5$

Como $g(0{,}5) < 0$, tem-se $g(0{,}5) \times g(1) < 0$ e $I_2 = [0{,}5\ ;\ 1]$.

2.ª iteração: $x_2 = \frac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75$; erro máximo: $\frac{1-0{,}5}{2} = 0{,}25$

Como $g(0{,}75) < 0$, tem-se $g(0{,}75) \times g(1) < 0$ e $I_3 = [0{,}75\ ;\ 1]$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

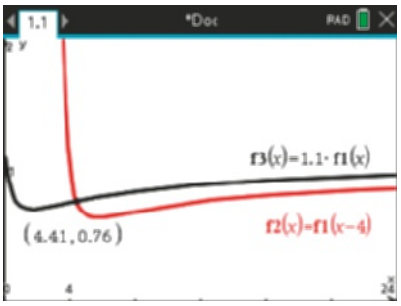
3.ª iteração: $x_3 = \frac{0{,}75+1}{2} = 0{,}875$; erro máximo: $\frac{1-0{,}75}{2} = 0{,}125$

Como $g(0{,}875) < 0$, tem-se $g(0{,}875) \times g(1) < 0$ e $I_4 = [0{,}875\ ;\ 1]$.

4.ª iteração: $x_4 = \frac{0{,}875+1}{2} = 0{,}9375$; erro máximo: $\frac{1-0{,}875}{2} = 0{,}0625$

Como $g(0{,}9375) > 0$, tem-se $g(0{,}875) \times g(0{,}9375) < 0$ e $I_5 = [0{,}875\ ;\ 0{,}9375]$.

5.ª iteração: $x_4 = \frac{0{,}875+0{,}9375}{2} = 0{,}90625$; erro máximo: $\frac{0{,}9375-0{,}875}{2} = 0{,}03125$



A abcissa do ponto de interseção é, aproximadamente, $0{,}90625$.

$|0{,}9375 - 0{,}925| = 0{,}0125$ e $|0{,}90625 - 0{,}925| = 0{,}01875$

Como $0{,}0125 < 0{,}01875$, verifica-se que a afirmação não é verdadeira, dado que a aproximação obtida na quarta iteração é melhor do que a obtida na quinta iteração.

17.1 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe se $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{a\cos(ax)}{e^x} = a$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x + 2 + \ln\left(2 - e^{-x}\right)\right) = 2$

Logo, $a = 2$.

17.2 $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + 2 + \ln\left(2 - e^{-x}\right)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x} + \frac{\ln\left(2 - e^{-x}\right)}{x}\right) = 1 + 0 = 1$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + 2 + \ln\left(2 - e^{-x}\right) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \ln\left(2 - e^{-x}\right)\right) = 2 + \ln 2$

Logo, a reta de equação $y = x + 2 + \ln 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

PÁG. 249

Preparar o exame

18. $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{x^5} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^5} = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{x^3}\right) =$

$= \left(\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \times \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = 1 \times (-\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{x^5} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^5} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{x^3}\right) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \times \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = 1 \times (+\infty) = +\infty$

Não existe $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de h, pois a função h é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, por ser definida pela composição de funções contínuas.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

19. $f(0)=a$ e $f(1)=1+2a$.

f é contínua em $[0\,,\,1]$.

Pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, f tem, pelo menos, um zero em $]0\,,\,1[$

se $f(0)\times f(1)<0 \iff a(1+a)<0 \iff a\in\left]-\frac{1}{2}\,,\,0\right[$.

20.1 $f'(x)=2+\frac{3(1-x)^2\times(-1)}{(1-x)^3}=2-\frac{3}{1-x}=-\frac{1+2x}{1-x}$

$f'(x)=0 \iff -\frac{1+2x}{1-x}=0 \iff \frac{1+2x}{1-x}=0 \iff$

$\iff 1+2x=0\wedge 1-x\neq 0 \iff x=-\frac{1}{2}\wedge x\neq 1$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1
f'	+	0	–	N.D.
f	↗	Máx.	↘	N.D.

f é crescente em $\left]-\infty\,,\,-\frac{1}{2}\right]$ e é decrescente em $\left[-\frac{1}{2}\,,\,1\right[$. Tem máximo relativo em $x=-\frac{1}{2}$.

20.2 A função g é contínua em $]-\infty\,,\,1[$, pois é definida pela composição de funções contínuas. Assim, a única reta que pode ser assíntota vertical ao gráfico de g é a reta de equação $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+3+\ln\left((1-x)^3\right)}{x-1}=\frac{-\infty}{0^-}=+\infty$$

Logo, a reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3+\ln\left((1-x)^3\right)}{x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+3}{x-1}+\frac{\ln\left((1-x)^3\right)}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x-1}+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left((1-x)^3\right)}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left((1-x)^3\right)}{x-1}=$$

$$=2+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left((1-x)^3\right)}{-(1-x)}\underset{y=x-1}{=}2+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left(y^3\right)}{-y}=2+\lim_{y\to+\infty}\frac{3\ln y}{-y}=$$

$$=2+\lim_{y\to+\infty}\left(-3\times\frac{\ln y}{y}\right)=2-3\times\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=2-3\times 0=2$$

Logo, a reta de equação $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de g.

20.3 $g(0)=\frac{f(0)}{0-1}=\frac{2\times 0+3+\ln\left((1-0)^3\right)}{-1}=-3$

A função f é contínua em $]-\infty\,,\,1[$, pois é definida pela composição de funções contínuas.

Logo, f é contínua em $]-6\,,\,-5[$.

$f(-6)=2\times(-6)+3+\ln\left((1-(-6))^3\right)\approx -3{,}16$

$f(-5)=2\times(-5)+3+\ln\left((1-(-5))^3\right)\approx -1{,}62$

$f(-6)<-3<f(-5)$

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe $c\in]-6\,,\,-5[$ tal que $f(c)=-3$, ou seja, a equação $f(x)=-3 \iff f(x)=g(0)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-6\,,\,-5[$, isto é, a equação é possível neste intervalo.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

20.4

a. Seja $h(x)=f(x)-g(0)$. Então, $f(x)=g(0) \iff h(x)=0$.

Não, dado que $x_2=x_1-\dfrac{h(x_1)}{h'(x_1)}\approx 1{,}73$ e $1{,}73\notin D_h$.

b. $x_1=-5{,}5$;

$x_2=x_1-\dfrac{h(x_1)}{h'(x_1)}\approx -5{,}900$; $|-5{,}9+5{,}5|=0{,}04$;

$x_3=x_2-\dfrac{h(x_2)}{h'(x_2)}\approx -5{,}897$; $|-5{,}9+5{,}897|=0{,}003<10^{-2}$.

$-5{,}897$ é uma aproximação da solução com tolerância inferior a 10^{-2}.

21.1 $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\left(2+\dfrac{1}{\ln x}\right)\right)=0\times(2+0)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x\left(2+\dfrac{1}{\ln x}\right)\right)=1\times(2+(-\infty))=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x\left(2+\dfrac{1}{\ln x}\right)\right)=1\times(2+(+\infty))=+\infty$

A reta de equação $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico de h.

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\left(2+\dfrac{1}{\ln x}\right)\right)=+\infty\times(2+0)=+\infty$

O gráfico de h não tem assíntotas não verticais.

21.2 $h'(x)=\left(2+\dfrac{1}{\ln x}\right)+x\times\left(-\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right)=2+\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{(\ln x)^2}=\dfrac{2(\ln x)^2+\ln x-1}{(\ln x)^2}$

$h'(x)=0 \iff \dfrac{2(\ln x)^2+\ln x-1}{(\ln x)^2}=0 \iff 2(\ln x)^2+\ln x-1=0\wedge(\ln x)^2\neq 0 \iff$

$\iff \ln x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2}\wedge \ln x\neq 0 \iff \ln x=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{4}\wedge x\neq 1 \iff$

$\iff \left(\ln x=\dfrac{-1-3}{4}\vee \ln x=\dfrac{-1+3}{4}\right)\wedge x\neq 1 \iff \left(\ln x=-1\vee \ln x=\dfrac{1}{2}\right)\wedge x\neq 1 \iff$

$\iff \left(x=e^{-1}\vee x=e^{\frac{1}{2}}\right)\wedge x\neq 1 \iff \left(x=\dfrac{1}{e}\vee x=\sqrt{e}\right)\wedge x\neq 1$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$\sqrt{e}$	$+\infty$
h'	N.D.	+	0	–	N.D.	–	0	+
h	N.D.	↗	Máx.	↘	N.D.	↘	Mín.	↗

A função h é crescente em $\left]0,\dfrac{1}{e}\right]$ e em $[\sqrt{e},+\infty[$, e é decrescente em $\left[\dfrac{1}{e},1\right[$ e em $]1,\sqrt{e}]$.

Tem um mínimo relativo, igual a $h(\sqrt{e})=\sqrt{e}\left(2+\dfrac{1}{\ln\sqrt{e}}\right)=2\sqrt{e}+\sqrt{e}\times\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=4\sqrt{e}$, em $x=\sqrt{e}$,

e tem um máximo relativo, igual a $h\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\left(2+\dfrac{1}{\ln\frac{1}{e}}\right)=2\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e}\times\dfrac{1}{-1}=\dfrac{1}{e}$, em $x=\dfrac{1}{e}$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 250

Preparar o exame

22. Como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ e $f(2) > 0$, então $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq f(2)$, pelo que a função f não é contínua em $x = 2$ e, consequentemente, não é contínua em $[1, 3]$, não sendo, portanto, possível aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy à função f neste intervalo.

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)} = \dfrac{1}{f(2)}$ e $\dfrac{1}{f(2)}$ é um valor finito positivo, porque $f(2) > 0$,

e $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$, então os limites laterais em $x = 2$ da função $\dfrac{1}{f}$

são finitos. Logo, a reta de equação $x = 2$ não é assíntota ao gráfico de $\dfrac{1}{f}$.

23. Como a função é contínua em $\mathbb{R}^+$ (porque é definida pela composição de funções contínuas), a única reta que pode ser assíntota vertical ao gráfico de h é a reta de equação $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x + \ln x}{e^x + x - 1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de h.

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x + x - 1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x + \ln x}{e^x}}{\frac{e^x + x - 1}{e^x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{e^x}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{e^x}{x}}}{1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} - \frac{1}{+\infty}} = \frac{1 + \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}}}{1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{x}{e^x}}} = \frac{1 + \frac{0}{+\infty}}{1 + \frac{1}{+\infty}} = 1$$

Logo, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de h, quando $x \longrightarrow +\infty$.

24.1 Como a função é contínua em $]0, +\infty[$ (porque é definida pela composição de funções contínuas), a única reta que pode ser assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(kx^2 - 2\ln\left(\sqrt{k}x\right)\right) = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(kx^2 - 2\ln\left(\sqrt{k}x\right)\right) = +\infty$$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

24.2 $f'(x) = 2kx - 2 \times \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}x} = 2kx - \dfrac{2}{x}$

$$f'(x) = 0 \iff 2kx - \frac{2}{x} = 0 \iff \frac{2kx^2 - 2}{x} = 0 \iff 2kx^2 - 2 = 0 \wedge x \neq 0 \iff x^2 = \frac{1}{k} \wedge x \neq 0 \underset{x>0}{\iff} x = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$f''(x) = 2k + \frac{2}{x^2} > 0$$

f tem mínimo absoluto igual a $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) = k \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 - 2\ln\left(\sqrt{k} \times \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) = 1 - 2\ln 1 = 1$ em $x = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Logo, o contradomínio da função f é $[1, +\infty[$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

25. $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x(2x^2-\ln x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2x^2-\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{2x^2-\ln x}{x^2}}=$

$=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{\ln x}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{1}{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=$

$=\dfrac{1}{2-0\times0}=\dfrac{1}{2}$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-\ln x}-\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-x(2x^2-\ln x)}{2(2x^2-\ln x)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{4x^2-2\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{4x^2-2\ln x}{x\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{4x^2}{x\ln x}-\frac{2\ln x}{x\ln x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{4x}{\ln x}-\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{\frac{\ln x}{4x}}-\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4}\times\frac{\ln x}{x}}-\frac{2}{x}}=\dfrac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}}=$

$=\dfrac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4}\times0}-\frac{2}{+\infty}}=\dfrac{1}{\frac{1}{0}-0}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

A reta de equação $y=\frac{1}{2}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h, quando $x\longrightarrow+\infty$.

PÁG. 251

Preparar o exame

26.1 $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\operatorname{sen}^2(1-x)}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\operatorname{sen}^2(1-x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\operatorname{sen}^2(1-x)}{(1-x)^2}\underset{y=1-x}{=}$

$=\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\operatorname{sen}^2y}{y^2}=\lim\limits_{y\to0^+}\left(\dfrac{\operatorname{sen}y}{y}\right)^2=\left(\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\operatorname{sen}y}{y}\right)^2=1^2=1$

$\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(e^{-x+1}(-x^2+4x-2)\right)=1=g(1)$

Como $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=g(1)$, então g é contínua em $x=1$.

A função g é contínua em $]0,1[$ e em $]1,+\infty[$, porque é definida pela composição de funções contínuas.

Logo, g é contínua em $\mathbb{R}^+$ e, portanto, o teorema de Bolzano-Cauchy pode ser aplicado a qualquer intervalo contido no domínio da função g.

26.2 Em $[1,+\infty[$:

$g'(x)=-e^{-x+1}(-x^2+4x-2)+e^{-x+1}(-2x+4)=$

$=e^{-x+1}(x^2-4x+2-2x+4)=e^{-x+1}(x^2-6x+6)$

$g''(x)=-e^{-x+1}(x^2-6x+6)+e^{-x+1}(2x-6)=$

$=e^{-x+1}(-x^2+6x-6+2x-6)=e^{-x+1}(-x^2+8x-12)$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

$g''(x)=0 \iff e^{-x+1}(-x^2+8x-12)=0 \underset{e^{-x+1}\neq 0}{\iff}$

$\iff -x^2+8x-12=0 \iff x=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times(-1)\times(-12)}}{2\times(-1)} \iff$

$\iff x=\dfrac{-8\pm\sqrt{16}}{-2} \iff x=\dfrac{-8-4}{-2}\vee x=\dfrac{-8+4}{-2} \iff x=6\vee x=2$

x	1		2		6	$+\infty$
g''	–	–	0	+	0	–
g		$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$

No intervalo $[1\,,+\infty[$, o gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $[1\,,3]$ e em $[6\,,+\infty[$, e tem a concavidade voltada para cima em $[2\,,6]$. Tem pontos de inflexão em $x=2$ e em $x=6$.

27.1 $G'(x)=-0{,}54e^{-0{,}6x}(x+0{,}5)^3+0{,}9e^{-0{,}6x}\times 3(x+0{,}5)^2=$

$=-0{,}54e^{-0{,}6x}(x+0{,}5)^3+2{,}7e^{-0{,}6x}(x+0{,}5)^2=e^{-0{,}6x}(x+0{,}5)^2(-0{,}54(x+0{,}5)+2{,}7)=$

$=e^{-0{,}6x}(x+0{,}5)^2(-0{,}54x-0{,}27+2{,}7)=e^{-0{,}6x}(x+0{,}5)^2(-0{,}54x+2{,}43)$

$G'(x)=0 \iff e^{-0{,}6x}(x+0{,}5)^2(-0{,}54x+2{,}43)=0 \underset{e^{-0{,}6x}\neq 0}{\iff}$

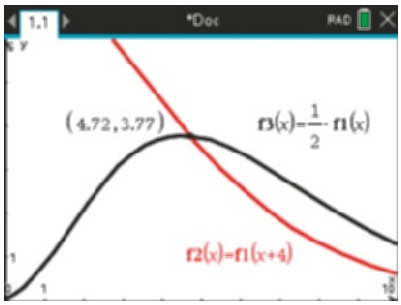
$\iff (x+0{,}5)^2=0\vee -0{,}54x+2{,}43=0 \iff$

$\iff x+0{,}5=0\vee x=4{,}5 \underset{x\geqslant 0}{\iff} x=4{,}5$

x	0		4,5	$+\infty$
G'	+	+	0	–
G	Mín.	↗	Máx.	↘

O número máximo de gafanhotos no enxame foi $G(4{,}5)=0{,}9e^{-0{,}6\times 4{,}5}(4{,}5+0{,}5)^3\approx 7{,}6$ milhões.

27.2 $G(x+4)=\dfrac{1}{2}G(x)$



$x\approx 4{,}72$, ou seja, $4{,}72\times 7=33{,}04\approx 33$ dias.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 252

Teste global

1. Se f é uma função invertível, então não existem dois objetos que tenham a mesma imagem, ou seja, f tem exatamente um zero.

Opção correta: **(B)**

2. $D_{g\circ f}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\}=\{x\in \mathbb{R}^+ : f(x)\in D_g\}$

(A) $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$; $\log_2 x\neq -1 \iff x\neq \dfrac{1}{2}$

(B) $g(x)=\dfrac{1}{x}$; $\log_2 x\neq 0 \iff x\neq 1$

(C) $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$; $\log_2 x\neq 1 \iff x\neq 2$; $D_{g\circ f}=\mathbb{R}^+\setminus\{2\}$

(D) $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$; $\log_2 x\neq 2 \iff x\neq 4$

Opção correta: **(C)**

3. Seja $-4<a<0$.

x	$-\infty$	-4		a		2	$+\infty$
Zeros e sinal de h'	↘	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.	↗
Zeros e sinal de h''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Concavidades e P.I. do gráfico de h	∩	P.I.	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

A afirmação **I.** é verdadeira.

Para que a reta de equação $y+x=1 \iff y=-x+1$ seja tangente ao gráfico de h, tem de existir um ponto de abcissa x_0 tal que $h'(x_0)=-1$. No entanto, por observação do gráfico de h', vemos que $h'(x)>0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$. Logo, a afirmação **II.** é falsa.

Opção correta: **(C)**

4. f é contínua em $\mathbb{R}$, e, em particular, é contínua em $x=-1$, pelo que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{\operatorname{sen}(3x+3)}{x+3-2e^{x+1}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -1^-}\frac{3\cos(3x+3)}{1-2e^{x+1}}=-3$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)=\ln\left(k+e^{-3}\right)$$

$$\ln\left(k+e^{-3}\right)=-3 \iff k+e^{-3}=e^{-3} \iff k=0$$

Opção correta: **(A)**

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 253

Teste global

5. Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{3}$, o declive da assíntota não vertical ao gráfico de f é $-\dfrac{1}{3}$.

$f''(x) < 0$, para todo o $x \in [0, +\infty[$, pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[0, +\infty[$.

Opção correta: **(D)**

6.1 $g(0) = 4^{-3\times 0-1} = 4^{-1} = \dfrac{1}{4}$; $B(0, g(0)) = \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$

$f(0) = 2^{2\times 0+2} = 4$; $C(0, f(0)) = (0, 4)$

$f(x) = g(x) \iff 2^{2x+2} = 4^{-3x-1} \iff 2^{2x+2} = 2^{-6x-2} \iff$

$\iff 2x + 2 = -6x - 2 \iff x = -\dfrac{1}{2}$

$\overline{BC} = 4 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{15}{4}$

$A_{[ABC]} = \dfrac{\left|-\frac{1}{2}\right| \times \frac{15}{4}}{2} = \dfrac{15}{16}$

6.2

a. $y = 4^{-3x-1} \iff -3x - 1 = \log_4 y \iff$

$\iff -3x = 1 + \log_4 y \iff x = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\log_4 y$

$g^{-1}(x) = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\log_4 x$

b. $3g^{-1}(x) = \log_4(10 - x) - 3 \iff 3\left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\log_4 x\right) = \log_4(10 - x) - 3 \iff$

$\iff -1 - \log_4 x = \log_4(10 - x) - 3 \iff 2 = \log_4 x + \log_4(10 - x) \iff$

$\iff 2 = \log_4(x(10 - x)) \iff 16 = 10x - x^2 \iff$

$\iff x^2 - 10x + 16 = 0 \iff x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} \iff$

$\iff x = 8 \vee x = 2$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 10 - x > 0\} =]0, 10[$

C. S. $= \{2, 8\}$

PÁG. 254

Teste global

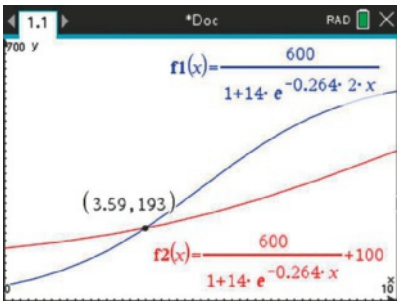
7.1 $\begin{cases} L(0) = 40 \\ L(10) = 40 + 260 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{600}{1 + a} = 40 \\ \dfrac{600}{1 + ae^{-10b}} = 300 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} a = 14 \\ \dfrac{600}{1 + 14e^{-10b}} = 300 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 14 \\ 1 + 14e^{-10b} = 2 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} a = 14 \\ e^{-10b} = \dfrac{1}{14} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 14 \\ b = -\dfrac{1}{10}\ln\left(\dfrac{1}{14}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} a = 14 \\ b \approx 0{,}264 \end{cases}$

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

7.2 $L(2t) = L(t) + 100$



$t \approx 3{,}59$, $0{,}59 \times 12 \approx 7$

Passados, aproximadamente, três anos e sete meses após o início do estudo.

8.1 $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{80t}{e^{0{,}25t}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{80}{0{,}25e^{0{,}25t}} = \dfrac{80}{+\infty} = 0$

À medida que o tempo passa, a concentração da substância ativa do medicamento no sangue do paciente tende para 0 , ou seja, com o passar do tempo a substância ativa do medicamento no sangue do paciente tende a desaparecer.

8.2 $C'(t) = \left(\dfrac{80t}{e^{0{,}25t}}\right)' = \dfrac{80e^{0{,}25t} - 80t \times 0{,}25e^{0{,}25t}}{\left(e^{0{,}25t}\right)^2} =$

$$= \frac{80e^{0{,}25t}(1 - 0{,}25t)}{\left(e^{0{,}25t}\right)^2} = \frac{80(1 - 0{,}25t)}{e^{0{,}25t}}$$

$C'(t) = 0 \iff \dfrac{80(1 - 0{,}25t)}{e^{0{,}25t}} = 0 \iff 1 - 0{,}25t = 0 \iff t = 4$

t	0		4	$+\infty$
Zeros e sinal de C'	+	+	0	−
Monotonia e extremos de C	Mín.	↗	Máx.	↘

$C(4) = \dfrac{80 \times 4}{e^{0{,}25 \times 4}} \approx 118$

A concentração da substância ativa do medicamento é máxima ao fim de 4 horas, e o valor máximo atingido é de, aproximadamente, 118 mg/L .

9.1 g é contínua em $\mathbb{R}^+$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x(\ln x - 1)) = -\infty(-\infty - 1) = +\infty$

A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g .

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x(\ln x - 1)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) + \ln x \times \frac{1}{x}}{1} =$

$$= 2 \times \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 2 \times 0 - 0 = 0$$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x(\ln x - 1)) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$

Como b não é finito, o gráfico de g não admite assíntotas não verticais.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

PÁG. 255

Teste global

9.2 $g'(x)=(\ln x(\ln x-1))'=(\ln x)'(\ln x-1)+\ln x(\ln x-1)'=$

$$=\frac{1}{x}(\ln x-1)+\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x-1}{x}$$

$$g''(x)=\left(\frac{2\ln x-1}{x}\right)'=$$

$$=\frac{2\frac{1}{x}\times x-(2\ln x-1)\times 1}{x^2}=\frac{3-2\ln x}{x^2}$$

$$g''(x)=0 \iff \frac{3-2\ln x}{x^2}=0 \iff$$

$$\iff 3-2\ln x=0 \wedge x^2\neq 0 \iff \ln x=\frac{3}{2} \iff$$

$$\iff x=e^{\frac{3}{2}} \iff x=\sqrt{e^3}$$

x	0	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
Zeros e sinal de g''	+	0	–
Concavidades e P.I. do gráfico de g	$\cup$	P.I.	$\cap$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]0,\sqrt{e^3}]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[\sqrt{e^3},+\infty[$. Tem ponto de inflexão em $x=\sqrt{e^3}$.

10. Não é possível, dado que, começando com $x_1=\frac{1}{2}$, obtém-se um valor de x_2 tal que $f'(x_2)=0$.

$y-5x=-3 \iff y=5x-3$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$, pelo que $f'\left(\frac{1}{2}\right)=5$ e, como f e a reta têm o ponto de tangência em comum, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$. Logo, $x_2=\frac{1}{2}-\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}-\frac{-\frac{1}{2}}{5}=\frac{3}{5}$.

Como a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{3}{5}$ é paralela ao eixo Ox, tem-se $f'\left(\frac{3}{5}\right)=0$, pelo que a aplicação do método teria de ser parada aqui.

11.1 $f(x)=g(x) \iff f(x)-g(x)=0$

Seja h a função definida, em $\mathbb{R}$, por $h(x)=f(x)-g(x)$. h é contínua em $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=3-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)-e^{\frac{\pi}{4}}\approx 0{,}307$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=3-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\approx -1{,}810$

Como $h\left(\frac{\pi}{4}\right)\times h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, h tem, pelo menos, um zero em $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, isto é, os gráficos de f e de g intersetam-se, pelo menos, uma vez em $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA

11.2 $I_1 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x_1 = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{8}$

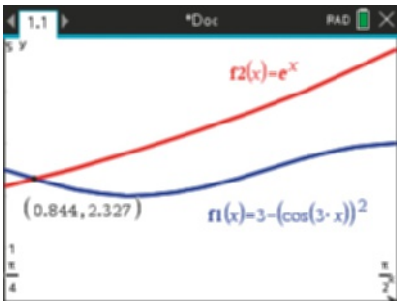
Como $h\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 3 - \cos^2\left(\frac{9\pi}{8}\right) - e^{\frac{3\pi}{8}} \approx -1{,}102$, tem-se $h\left(\frac{\pi}{4}\right) \times h\left(\frac{3\pi}{8}\right) < 0$.

$I_2 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right]$, $x_2 = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}}{2} = \frac{5\pi}{16}$

Como $h\left(\frac{5\pi}{16}\right) = 3 - \cos^2\left(\frac{15\pi}{16}\right) - e^{\frac{5\pi}{16}} \approx -0{,}631$, tem-se $h\left(\frac{5\pi}{16}\right) \times h\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$.

$I_3 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}\right]$, $x_3 = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{16}}{2} = \frac{9\pi}{32}$

Valor aproximado: $\frac{9\pi}{32}$; erro máximo: $\frac{\frac{5\pi}{16} - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{32}$.



A abcissa do ponto de interseção que se obtém com uma calculadora gráfica é, aproximadamente, 0,844 e $\left|0{,}844 - \frac{9\pi}{32}\right| \approx 0{,}040$, que é inferior ao erro máximo previsto $\left(\frac{\pi}{32} \approx 0{,}098\right)$ pela aplicação do método da bissecção com duas iterações.

M36012RFN_TXTRESVOLFUN © RAIZ EDITORA