Probabilidade

PÁG. 115

Aplicar

1.1 $\{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\,,\,7\,,\,8\}$

1.2 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

1.3 Por exemplo, sair um número positivo.

1.4

Face	1	2	3	4	5	6	7	8
Probabilidade	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

PÁG. 116

Aplicar

2.

×	−3	2	4
−1	3	−2	−4
0	0	0	0
1	−3	2	4

A probabilidade é igual, pois o número de resultados favoráveis a cada um deles é igual.

3. 0,35 , porque à medida que aumenta o número de vezes que se roda o ponteiro, a frequência relativa de parar no setor verde aproxima-se de 0,35 .

PÁG. 117

Aplicar

4.1 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ **4.2** $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ **4.3** $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

5. Casos possíveis: 1 - 7 ; 1 - 6 ; 2 - 7 ; 2 - 6 ; 3 - 5 ; 1 - 4 - 5 ; 2 - 4 - 5 ; 3 - 4 - 6 ; 3 - 4 - 7 .
Probabilidade: $\frac{5}{9}$

6. Por exemplo:

6.1 sair bola vermelha.

6.2 sair bola azul.

6.3 não sair bola vermelha.

6.4 sair bola preta.

6.5 sair uma bola.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

7. $12+8+6=26$

São disjuntos porque $F\cap N=\{\}$, mas não são contrários porque $F\cup N\neq E$.

PÁG. 118

Aplicar

8.

×	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12

Probabilidade: $\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

9. Considerando o acontecimento V: «A bola retirada é verde», como $P(AUB)=\frac{3}{5}$, concluímos que $P(V)=\frac{2}{5}$. Logo, no saco estão $\frac{2}{5}\times 25=10$ bolas verdes.

PÁG. 119

Aplicar

11. Com seis bolas numeradas de 1 a 6, para que o produto dos números das três bolas extraídas seja 8, há duas possibilidades: $1\times 2\times 4=8$ ou $2\times 2\times 2=8$.

11.1 Casos possíveis: cada bola pode ser qualquer uma das seis, $6^3=216$.

Casos favoráveis: com a possibilidade $1\times 2\times 4$, há $3!=6$ sequências; com a possibilidade $2\times 2\times 2$, só há uma sequência. Logo, o total de casos favoráveis é $6+1=7$.

Probabilidade: $\frac{7}{216}$

11.2 Casos possíveis: $6\times 5\times 4=120$

Casos favoráveis: com a possibilidade $1\times 2\times 4$, há $3!=6$ sequências; $2\times 2\times 2$ não é possível.

Probabilidade: $\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$

12. Vamos considerar todos os números naturais de quatro algarismos, ou seja, de 1000 a 9999.
O número total de casos possíveis é $9999-1000+1=9000$.

12.1 Casos favoráveis:

1.º algarismo: qualquer algarismo de 1 a 9, 9 opções;

2.º algarismo: qualquer algarismo exceto o 1.º, 9 opções;

3.º algarismo: diferente dos dois anteriores, 8 opções;

4.º algarismo: diferente dos três anteriores, 7 opções.

Número de números sem algarismos repetidos: $9\times 9\times 8\times 7=4536$

Probabilidade: $\frac{4536}{9000}=\frac{63}{125}$ **Ou** $\frac{10\times 9\times 8\times 7}{10\times 10\times 10\times 10}=\frac{63}{125}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

12.2 Casos favoráveis:

Escolhem-se 4 algarismos distintos de 1 a 9 : ${}^{9}C_{4} = 126$

Probabilidade: $\frac{126}{9000} = \frac{7}{500}$

12.3 Um número de 4 algarismos é uma capicua se tem a forma $ABBA$, com $A \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Para o número ser par, o último algarismo A tem de ser par:
$A \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Casos favoráveis: $4 \times 10 = 40$

Probabilidade: $\frac{40}{9000} = \frac{1}{225}$

PÁG. 120

Aplicar

13. 500 médicos:

120 só falam alemão, 250 só falam inglês e $500 - 120 - 250 = 130$ falam ambas as línguas.

Casos possíveis: ${}^{500}C_{2}$

«Não falarem a mesma língua ou falarem as duas línguas» é a união de dois acontecimentos disjuntos: não falarem a mesma língua (um só fala alemão e o outro só fala inglês) ou os dois falam ambas as línguas.

Casos favoráveis: um só fala alemão e o outro só fala inglês: 120×250 ; os dois falam ambas as línguas: ${}^{130}C_{2}$

Total de casos favoráveis: $120 \times 250 + {}^{130}C_{2}$

Probabilidade: $\frac{120 \times 250 + {}^{130}C_{2}}{{}^{500}C_{2}}$

Opção correta: **(D)**

14. $\frac{{}^{5}C_{3} \times 8 \times 7 \times 6}{9^{5}} = \frac{3360}{59\,049} \approx 0{,}057$

15.1 Casos possíveis: ${}^{12}C_{4} = 495$

Casos favoráveis: para escolher um iogurte dos três de cada sabor, $3^{4} = 81$

Probabilidade: $\frac{81}{495} = \frac{9}{55}$

15.2 Casos possíveis: ${}^{12}C_{4} = 495$

Casos favoráveis: escolher três sabores distintos entre os quatro, ${}^{4}C_{3} = 4$, para cada sabor escolhido, escolher um iogurte entre três, $3^{3} = 27$.

Total de casos favoráveis: $4 \times 27 = 108$

Probabilidade: $\frac{108}{220} = \frac{27}{55}$

16. Casos possíveis: como os lugares são distintos, qualquer criança pode sentar-se em qualquer lugar, 8!

Casos favoráveis: para que cada menino fique entre duas meninas, a disposição em círculo tem de ser da forma $FMFMFMFM$ ou $MFMFMFMF$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Se começarmos por sentar as meninas, há $4!$ formas de o fazer. Os meninos ocupam os lugares restantes de $4!$ formas. Como os lugares estão identificados por letras, temos de considerar o caso em que começamos por sentar os meninos.

Probabilidade: $\frac{4!\times 4!\times 2}{8!}=\frac{24\times 24\times 2}{40\,320}=\frac{1152}{40\,320}=\frac{1}{35}\approx 0{,}0286$

17. Casos possíveis: $8!$

Casos favoráveis:

Consideramos os três presidentes de câmara como um único bloco. Esse bloco mais os outros cinco indivíduos são seis entidades que podem ser dispostas de $6!$ formas. Dentro do bloco, os três presidentes podem permutar entre si de $3!$ formas.

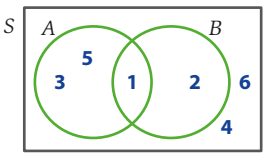
Probabilidade: $\frac{6!\times 3!}{8!}=\frac{720\times 6}{40\,320}=\frac{4320}{40\,320}=\frac{3}{28}$

PÁG. 121

Tarefa 1

1. $S=\{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\}$

2.



3. $A=\{1\,,3\,,5\}$; $B=\{1\,,2\}$; $A\cap B=\{1\}$; $A\cup B=\{1\,,2\,,3\,,5\}$

4. $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$; $P(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

5. Não, $P(A\cup B)\neq P(A)+P(B)$, porque A e B não são disjuntos (não são incompatíveis).

6. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

PÁG. 124

Aplicar

18. A afirmação é falsa, porque os acontecimentos não são disjuntos; a interseção tem um elemento que pratica ambas as modalidades.

O valor correto da probabilidade é $\frac{19}{25}$.

19.1 $\frac{12}{25}$

19.2

a. $P(A\cap B)=\frac{4}{25}=0{,}16=16\%$

b. $P(A\cup B)=\frac{14+7-4}{25}=\frac{17}{25}=0{,}68=68\%$

c. $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{8}{25}=0{,}32=32\%$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

20. Como o número de bolas pretas é o dobro do número de bolas azuis, $P = 2A$,

$A + P = 1 \iff A + 2A = 1 \iff 3A = 1 \iff A = \frac{1}{3}$ e $P = \frac{2}{3}$.

30% das bolas são azuis e pares e 40% das bolas são pretas e ímpares.

	Ímpar	Par	Total
Azuis	$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$	$30\% = \frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$
Pretas	$40\% = \frac{2}{5}$	$\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$	$\frac{2}{3}$
Total	$\frac{1}{30} + \frac{2}{5} = \frac{13}{30}$	$\frac{3}{10} + \frac{4}{15} = \frac{17}{30}$	1

20.1 $P(\text{azul e ímpar}) = \frac{1}{30}$

20.2 $P(\text{preta ou ímpar}) = P(\text{preta}) + P(\text{ímpar}) - P(\text{preta e ímpar}) = \frac{2}{3} + \frac{13}{30} - \frac{2}{5} = \frac{7}{10} = 70\%$

PÁG. 125

Aplicar

21. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff$

$\iff 0{,}75 = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \iff P(A) = 0{,}75 - 0{,}3 \iff P(A) = 0{,}45$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$

Opção correta: **(C)**

22. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}24 \iff P(\overline{A \cup B}) = 0{,}24 \iff 1 - P(A \cup B) = 0{,}24 \iff$

$\iff P(A \cup B) = 1 - 0{,}24 \iff P(A \cup B) = 0{,}76$

$P(\bar{A}) = 0{,}72 \iff 1 - P(A) = 0{,}72 \iff P(A) = 1 - 0{,}72 \iff P(A) = 0{,}28$

Como A e B são disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Assim, $0{,}76 = 0{,}28 + P(B) \iff P(B) = 0{,}76 - 0{,}28 \iff P(B) = 0{,}48$.

Opção correta: **(B)**

23. $P(\bar{A}) = 0{,}7 \iff 1 - P(A) = 0{,}7 \iff P(A) = 1 - 0{,}7 \iff P(A) = 0{,}3$

(A) $P(A \cup B) \geqslant P(A) = 0{,}3$

(B) $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \bar{A} \implies P(\bar{A} \cap \bar{B}) \leqslant P(\bar{A}) = 0{,}7$

(C) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \geqslant 1 - P(A) = 0{,}7$

(D) $P(A \cap B) \leqslant P(A) = 0{,}3$

Opção correta: **(D)**

24.1 $P(A \cup B) \geqslant P(B)$

Opção correta: **(A)**

24.2 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{20} \iff P(\overline{A \cup B}) = \frac{3}{20} \iff 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{20} \iff$

$\iff P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{20} \iff P(A \cup B) = \frac{17}{20}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

$P(A \cup B) = \frac{17}{20} \iff P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{17}{20} \iff$

$\iff P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \frac{17}{20}$

$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) =$

$= P(A) + 1 - P(B) - (P(A) - P(A \cap B)) =$

$= P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) =$

$= 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A) + P(B) - \frac{17}{20} =$

$= 1 + P(A) - \frac{17}{20} = \frac{13}{20}$

25. Sendo A : «Em cima da mesa, está um rei» e B : «Em cima da mesa, está uma carta de espadas», tem-se $0{,}55 = 0{,}2 + 0{,}4 - P(A \cap B) \iff P(A \cap B) = 0{,}05$, pelo que o rei de espadas está em cima da mesa.

Considerando que estão em cima da mesa n cartas, a probabilidade de o rei de espadas estar em cima da mesa é $\frac{1}{n}$. Assim, $\frac{1}{n} = 0{,}05 \iff n = \frac{1}{0{,}05} \iff n = 20$.

Logo, em cima da mesa estão 20 cartas.

PÁG. 126

Tarefa 2

1. $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

2. $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

PÁG. 135

Aplicar

32.1 $P(P|I) = \frac{200}{350} = \frac{4}{7}$

32.2 $P(\overline{I}|P) = \frac{30}{230} = \frac{3}{23}$

PÁG. 136

Aplicar

33. Vamos definir os acontecimentos V : «Ser vaca» e D : «Ser portador de doença».

Tem-se $P(V) = 55\% = 0{,}55$, $P(D|V) = 5\% = 0{,}05$ e $P(D|\overline{V}) = 2\% = 0{,}02$.

A percentagem da população da exploração pecuária que está doente é

$P(D) = P(D \cap V) + P(D \cap \overline{V}) =$

$= P(D|V) \times P(V) + P(D|\overline{V}) \times P(\overline{V}) =$

$= 0{,}05 \times 0{,}55 + 0{,}02 \times 0{,}45 = 0{,}0365$, ou seja, 3,65% .

34.1 $P(C|V) = 0{,}43 \iff \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = 0{,}43 \iff P(C \cap V) = 0{,}43 \times 0{,}35 \iff$

$\iff P(C \cap V) = 0{,}1505 \approx 0{,}15$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

34.2 $P(V \cup C) = P(V) + P(C) - P(V \cap C) = 0{,}35 + 0{,}23 - 0{,}1505 = 0{,}4295 \approx 0{,}43$

34.3 $P(V|C) = \dfrac{P(V \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}1505}{0{,}23} \approx 0{,}65$

35.1 $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \dfrac{3}{8} = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \dfrac{13}{20} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{13}{20} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) + \dfrac{1}{2}P(A) - P(A \cap B) = \dfrac{13}{20} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) + \dfrac{1}{2}P(A) = \dfrac{13}{20} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}P(A) = \dfrac{13}{20} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}P(A) = \dfrac{13}{20} - \dfrac{3}{8} \Leftrightarrow P(A) = \dfrac{11}{20}$

35.2 $\dfrac{13}{20} = \dfrac{11}{20} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{11}{20} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{11}{20} + \dfrac{11}{40} - \dfrac{13}{20} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{7}{40}$

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{7}{40}}{\frac{11}{40}} = \dfrac{7}{11}$

35.3 $P(B|\bar{A}) = \dfrac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{\frac{11}{40} - \frac{7}{40}}{1 - \frac{11}{20}} = \dfrac{2}{9}$

36. $P(A|(A \cup B)) = \dfrac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \dfrac{P(A)}{P(A) + P(A)} = \dfrac{P(A)}{2P(A)} = \dfrac{1}{2}$

Opção correta: **(C)**

PÁG. 137

Aplicar

37. Vamos definir os acontecimentos O : «Utilizar recursos disponibilizados online» e L : «Utilizar pelo menos um livro de preparação».

Tem-se que $P(O) = 0{,}4$, $P(L|\bar{O}) = \dfrac{3}{4}$ e $P(O|\bar{L}) = \dfrac{1}{4}$.

37.1 $P(L) = P(O \cap L) + P(\bar{O} \cap L)$

Como $P(\bar{O}) = 1 - P(O) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, vem $P(L \cap \bar{O}) = P(L|\bar{O}) \cdot P(\bar{O}) = \dfrac{3}{4} \times 0{,}6 = 0{,}45$.

Por outro lado, $P(O \cap \bar{L}) = P(O|\bar{L}) \cdot P(\bar{L}) = \dfrac{1}{4}(1 - P(L))$.

Sabemos que $P(O) = P(O \cap L) + P(O \cap \bar{L})$.

Então, $0{,}4 = P(O \cap L) + \dfrac{1}{4}(1 - P(L))$.

Assim, $P(O \cap L) = 0{,}4 - \dfrac{1}{4}(1 - P(L))$.

Logo, $P(L) = 0{,}4 - \dfrac{1}{4}(1 - P(L)) + 0{,}45 \Leftrightarrow P(L) = 0{,}60 + 0{,}25P(L) \Leftrightarrow P(L) - 0{,}25P(L) = 0{,}60 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}75P(L) = 0{,}60 \Leftrightarrow P(L) = 0{,}8$

$\Leftrightarrow P(L) = 80\%$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

37.2 $P(O|L)=\dfrac{P(O\cap L)}{P(L)}$

$P(O\cap L)=0{,}4-\dfrac{1}{4}(1-0{,}8)=0{,}4-0{,}25\times 0{,}2=0{,}4-0{,}05=0{,}35$

$P(O|L)=\dfrac{0{,}35}{0{,}8}=\dfrac{7}{16}$

38.1 $P(\bar{A})\times P(B|\bar{A})=P(\bar{A})\times\dfrac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=P(B\cap\bar{A})=P(B)-P(A\cap B)$

$P(B)\times\left(1-P(A|B)\right)=P(B)\times\left(1-\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\right)=P(B)-P(A\cap B)$

38.2 Vamos definir os acontecimentos A : «O jogador não é nacional desse país» e B : «O jogador é avançado».

Tem-se que $P(\bar{A})=0{,}6=\dfrac{3}{5}$, $P(B)=\dfrac{1}{5}$ e $P(A|B)=\dfrac{3}{4}$.

A probabilidade pedida é $P(B|\bar{A})$.

Assim, $P(\bar{A})\times P(B|\bar{A})=P(B)\times\left(1-P(A|B)\right)\iff$

$\iff \dfrac{3}{5}\times P(B|\bar{A})=\dfrac{1}{5}\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\iff P(B|\bar{A})=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{5}{3}\iff P(B|\bar{A})=\dfrac{1}{12}$.

39. Vamos definir os acontecimentos A : «A estação E_1 cumpre a ordem (emite o sinal)», $\bar{A}$: « E_1 não cumpre a ordem» e B : «O sinal não é recebido por E_3 ».

Tem-se que $P(A)=0{,}9$ e $P(\bar{A})=1-0{,}9=0{,}1$.

Se E_1 emitir, o sinal passa por E_2, que cumpre com probabilidade $0{,}75$.

Logo, $P(B|A)=1-0{,}75=0{,}25$.

Se E_1 não emitir, o sinal nunca chega a E_3 : $P(B|\bar{A})=1$.

$P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})\iff P(B)=0{,}9\times 0{,}25+0{,}1\times 1\iff P(B)=0{,}325$

$P(\bar{A}|B)=\dfrac{P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})}{P(B)}\iff P(\bar{A}|B)=\dfrac{0{,}1\times 1}{0{,}325}=\dfrac{4}{13}\approx 0{,}31$

PÁG. 138

Aplicar

40.1 Casos possíveis: $5\times 4\times 3=60$

a. $a+b+c=0$

Casos possíveis:

Se $a=0$ (há 2), $b=0$, $c=0\longrightarrow 2\times 2\times 1=4$; $b=2$, $c=-2\longrightarrow 2\times 2\times 1=4$

Total: $4+4=8$

Probabilidade: $\dfrac{8}{60}=\dfrac{2}{15}$

b. Só a caixa A tem bolas com o número 1. Resta multiplicar os números das bolas da caixa B pelos números das bolas da caixa C: $4\times 3=12$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Como o número da bola da caixa A é positivo, para que o produto seja positivo, os números das bolas das caixas B e C têm de ser positivos: $b=2$, $c=2$.

Total: $2\times 1=2$

Probabilidade: $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

c. Só a caixa C tem bola com o número -2 .

Restam $5\times 4=20$.

Para que o produto seja negativo, o produto dos números das bolas das caixas A e B tem de ser positivo. Tem de ser $a=1$, $b=2$.

Casos: $2\times 2=4$

Probabilidade: $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

40.2 $P(Z|(X\cap \overline{Y}))$ é a probabilidade de o produto dos números das quatro bolas retiradas da caixa C ser positivo, sabendo que os números das bolas retiradas de A e colocadas em C têm o mesmo valor absoluto e que os números das bolas retiradas da caixa B e colocadas em C são diferentes.

41. Vamos definir os acontecimentos E : «O dado é equilibrado» e V : «O dado é viciado».

Como o número de dados viciados é o triplo do número de dados equilibrados,

tem-se $P(E)=\frac{1}{4}$ e $P(V)=\frac{3}{4}$.

Num dado equilibrado, $P(\text{ímpar}|E)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Num dado viciado, $P(\text{par})=0{,}35$. Logo, $P(\text{ímpar})=1-0{,}35=0{,}65$.

$P(\text{ímpar})=P(E)\cdot P(\text{ímpar}|E)+P(V)\cdot P(\text{ímpar}|V) \iff$

$\iff P(\text{ímpar})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times 0{,}65\ P(\text{ímpar})=0{,}6125$

Queremos determinar $P(E|\text{ímpar})$.

$$P(E|\text{ímpar})=\frac{P(E)\cdot P(\text{ímpar}|E)}{P(\text{ímpar})}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{0{,}6125}=\frac{10}{49}$$

42.1 Escolhe-se um parque ao acaso: $P(P_1)=P(P_2)=P(P_3)=\frac{1}{3}$.

Sabemos que $P(\text{alimentar}|P_1)=0{,}10$, $P(\text{alimentar}|P_2)=0{,}40$ e $P(\text{alimentar}|P_3)=0{,}25$.

$P(\text{alimentar})=\frac{1}{3}(0{,}10+0{,}40+0{,}25)=0{,}25$

42.2 Queremos determinar $P(P_2|\text{alimentar})$.

$$P(P_2|\text{alimentar})=\frac{P(P_2)\cdot P(\text{alimentar}|P_2)}{P(\text{alimentar})}=\frac{\frac{1}{3}\times 0{,}40}{0{,}25}=\frac{8}{15}$$

PÁG. 139

Tarefa 3

1.1 Utilizemos um diagrama em árvore para representar o espaço de resultados associado a esta experiência.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA



$S = \{NN, NC, CN, CC\}$

1.2 Vamos definir em extensão cada um dos acontecimentos.

$A = \{NN, CN\}$, $B = \{NN, NC\}$, $A \cap B = \{NN\}$

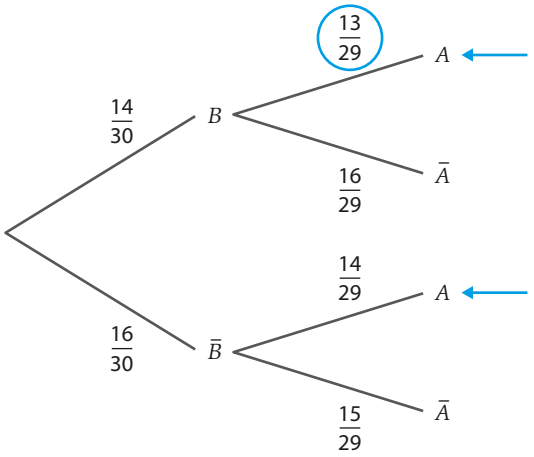
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Como $P(A|B) = P(A)$, A e B são acontecimentos independentes.

(O resultado obtido no segundo lançamento da moeda não depende do resultado obtido no primeiro, como seria de esperar.)

2. Seja A o acontecimento «Sair o nome de um aluno do sexo masculino no segundo sorteio», e seja B o acontecimento «Sair o nome de um aluno do sexo masculino no primeiro sorteio». Esta experiência pode ser representada pela árvore de probabilidades seguinte.



$$P(A) = P(B \cap A) + P(\overline{B} \cap A) = \frac{14}{30} \times \frac{13}{29} + \frac{16}{30} \times \frac{14}{29} = \frac{7}{15}$$

$$P(A|B) = \frac{13}{29}$$

Como $P(A|B) \neq P(A)$, A e B não são acontecimentos independentes.

PÁG. 141

Aplicar

45. Como A e B são acontecimentos independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, pelo que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$0{,}7 = 0{,}5 + P(B) - 0{,}5 \times P(B) \iff 0{,}2 = 0{,}5 \times P(B) \iff P(B) = \frac{2}{5}$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

46. Como A e B são acontecimentos independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, pelo que

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$

$P(A \cup B) = 0{,}15 + 0{,}07 - 0{,}15 \times 0{,}07 = 0{,}2095$

A probabilidade de um dos espetadores ganhar pelo menos um prémio é $0{,}2095$.

PÁG. 142

Aplicar

47. A e B são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

47.1 $P(A|B) = 0{,}7 \iff \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}7 \iff \dfrac{P(A \cap B)}{0{,}2} = 0{,}7 \iff P(A \cap B) = 0{,}14$

A e B são acontecimentos independentes, então $P(A|B) = P(A)$.

$P(\overline{A} \cup B) = 1 - P(\overline{\overline{A} \cup B}) = 1 - P(A \cap \overline{B}) =$

$= 1 - (P(A) - P(A \cap B)) = 1 - (0{,}7 - 0{,}14) = 0{,}44$

Opção correta: **(C)**

47.2 $P(A \cap \overline{B}) = 9P(A \cap B) \iff P(A) - P(A \cap B) - 9P(A \cap B) = 0 \iff$

$\iff P(A) - 10P(A \cap B) = 0 \iff$

$\iff P(A) - 10P(A) \times P(B) = 0 \iff$

$\iff P(A)(1 - 10P(B)) = 0 \iff$

$\iff P(A) = 0 \vee 1 - 10P(B) = 0 \iff$

$\iff P(A) = 0 \vee P(B) = 0{,}1$

$P(B) = 0{,}1$

48.1 Número de casos possíveis: ${}^{9}A'_{7} = 9^{7} = 4\,782\,969$

Número de casos favoráveis: ${}^{7}C_{2} \times {}^{5}C_{3} \times {}^{7}A'_{2} = 10\,290$

Probabilidade: $\dfrac{{}^{7}C_{2} \times {}^{5}C_{3} \times {}^{7}A'_{2}}{{}^{9}A'_{7}} \approx 0{,}0022$

48.2

a. $P(A|B)$ é a probabilidade de o número escolhido ser par, sabendo que tem os algarismos todos distintos. Se os algarismos são todos distintos, o número de casos possíveis é ${}^{9}A_{7} = 181\,440$ e o número de casos favoráveis é $4 \times {}^{8}A_{6} = 80\,640$.

$P(A|B) = \dfrac{80\,640}{181\,440} = \dfrac{4}{9}$

b. $P(A) = \dfrac{{}^{9}A'_{6} \times 4}{{}^{9}A'_{7}} = \dfrac{4}{9}$

Como $P(A|B) = P(A)$, A e B são acontecimentos independentes.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

49.1 $P(A\cap\overline{B})-P(A|B)\times P(\overline{B})=0 \iff P(A\cap\overline{B})-P(A|B)\times(1-P(B))=0 \iff$

$\iff P(A\cap\overline{B})-P(A|B)+P(A|B)\times P(B)=0 \iff$

$\iff P(A\cap\overline{B})-P(A|B)+P(A\cap B)=0 \iff$

$\iff P(A)-P(A|B)=0 \iff P(A)=P(A|B)$

A e B são acontecimentos independentes.

49.2 Sejam A e B os acontecimentos:

A : «Escolher uma sandes» e B :«Escolher recheio de fiambre».

$P(A)=0{,}4$

$P(B|A)=\frac{4}{5} \iff \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{4}{5} \iff P(B\cap A)=\frac{4}{5}\times 0{,}4 \iff P(B\cap A)=0{,}32$

A e B são acontecimentos independentes, então $P(B|A)=P(B)=\frac{4}{5}$.

$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{5}-0{,}32=0{,}48$

50. Sejam A , B e C os acontecimentos:

A : «O Filipe teve aprovação», B :«O Edgar teve aprovação» e C :«Apenas um dos dois passou no exame».

$P(A)=0{,}6$; $P(\overline{B})=0{,}2$

$P(C)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=$

$=P(A)\times P(\overline{B})+P(\overline{A})\times P(B)=$

$=0{,}6\times 0{,}2+(1-0{,}6)\times(1-0{,}2)=0{,}44$

$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A\cap\overline{B})}{0{,}44}=\frac{0{,}12}{0{,}44}=\frac{3}{11}$

PÁG. 143

Tarefa 4

Façamos uma tabela de dupla entrada para obter a soma dos números das faces voltadas para cima.

Dado 1 / Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Completemos a tabela.

Soma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilidade	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 147

Aplicar

53. Comecemos por construir uma tabela de dupla entrada para evidenciar os resultados da experiência e melhor identificar o valor da variável correspondente a cada resultado.

	0,5	0,5	1	2	2
0,5		1	1,5	2,5	2,5
0,5	1		1,5	2,5	2,5
1	1,5	1,5		3	3
2	2,5	2,5	3		4
2	2,5	2,5	3	4	

$P(X=1)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$P(X=1{,}5)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

$P(X=2{,}5)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

$P(X=3)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

$P(X=4)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	1	1,5	2,5	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

54. Numa distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta a soma das probabilidades é 1.

$\frac{k}{3}+\frac{k}{4}+\frac{k}{6}=1 \iff \frac{9}{12}k=1 \iff k=\frac{4}{3}$

$P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{k}{4}+\frac{k}{6}=\frac{5}{12}k=\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}=\frac{5}{9}$

Opção correta: **(B)**

55. Comecemos por construir uma tabela de dupla entrada para evidenciar os resultados da experiência e melhor identificar o valor da variável correspondente a cada resultado.

	1	2	3	4
1		2	3	4
2	2		3	4
3	3	3		4
4	4	4	4	

$P(X=2)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$P(X=3)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$P(X=4)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

Opção correta: **(C)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

56. $P(X=1)=\frac{5}{8}$

$P(X=2)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$

$P(X=3)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$

$P(X=4)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times 1=\frac{1}{56}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

PÁG. 148

Aplicar

57. Os números inteiros pertencentes ao intervalo $[-3, 2]$ são: -3, -2, -1, 0, 1 e 2.

Ao escolhermos aleatoriamente cinco destes seis números, a variável aleatória X «Produto dos cinco números escolhidos» só pode tomar dois valores distintos: 0 e -12. Se zero for um dos cinco números escolhidos, o produto é igual a 0; se o zero não for escolhido, o produto dos cinco números é igual a -12.

$P(X=-12)=\frac{1}{{}^{6}C_{5}}=\frac{1}{6}$

$P(X=0)=\frac{1\times {}^{5}C_{4}}{{}^{6}C_{5}}=\frac{5}{6}$

A função massa de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	-12	0
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

58. No dado tetraédrico equilibrado a probabilidade de ficar voltada para baixo cada uma das faces é igual a $\frac{1}{4}$.

No dado tetraédrico, não equilibrado, a probabilidade de ficar voltada para baixo a face com o número 4 é o triplo da probabilidade de qualquer uma das restantes faces ficar voltada para baixo.

Consideremos $P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=x$ e $P(\{4\})=3x$.

Como $P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+x+x+3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$.

Assim, $P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=\frac{1}{6}$ e $P(\{4\})=\frac{1}{2}$.

Comecemos por construir uma tabela de dupla entrada para evidenciar os resultados da experiência e melhor identificar o valor da variável X, valor absoluto da diferença dos números das faces que ficam voltadas para baixo, correspondente a cada resultado.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

$$P(X=0)=P(\{(1,1)\})+P(\{(2,2)\})+P(\{(3,3)\})+P(\{(4,4)\})=$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=1)=P(\{(1,2)\})+P(\{(2,1)\})+P(\{(3,2)\})+P(\{(2,3)\})+P(\{(4,3)\})+P(\{(3,4)\})=$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=2)=P(\{(1,3)\})+P(\{(3,1)\})+P(\{(4,2)\})+P(\{(2,4)\})=$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=3)=P(\{(1,4)\})+P(\{(4,1)\})=$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

59. $P(X=5)=\frac{5}{n!}$; $P(X=9)=\frac{9}{n!}$; $P(X=10)=\frac{10}{n!}$

$$\frac{5}{n!}+\frac{9}{n!}+\frac{10}{n!}=1 \Leftrightarrow \frac{24}{n!}=1 \Leftrightarrow n!=24 \Leftrightarrow n=4$$

60.1 Se, na extração de duas bolas da caixa, tenho zero bolas pretas, então significa que tenho duas bolas brancas, ou seja, $P(X=0)=P(Y=2)$.

Se, na extração de duas bolas da caixa, tenho uma bola preta, então significa que também tenho uma bola branca, ou seja, $P(X=1)=P(Y=1)$.

Se, na extração de duas bolas da caixa, tenho duas bolas pretas, então significa que tenho zero bolas brancas, ou seja, $P(X=2)=P(Y=0)$.

A distribuição de probabilidade da variável aleatória Y é dada pela tabela seguinte.

y_i	0	1	2
$P(Y=y_i)$	$\frac{14}{33}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{1}{11}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

60.2 Seja b o número de bolas brancas na caixa.

$$P(X=0)=\frac{1}{11} \Leftrightarrow \frac{{}^{b}C_{2}}{{}^{12}C_{2}}=\frac{1}{11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}^{b}C_{2}=6 \Leftrightarrow \frac{b!}{(b-2)!2!}=6 \Leftrightarrow \frac{b(b-1)(b-2)!}{(b-2)!2!}=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b(b-1)=132 \Leftrightarrow b^{2}-b-12=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow b=4 \vee b=-3,\ b\in\mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b=4$$

Na caixa estão quatro bolas brancas e oito bolas pretas.

$$P(Z=0)=\frac{4^{3}}{12^{3}}=\frac{1}{27} \qquad P(Z=2)=\frac{4\times 8^{2}\times 3}{12^{3}}=\frac{4}{9}$$

$$P(Z=1)=\frac{4^{2}\times 8\times 3}{12^{3}}=\frac{2}{9} \qquad P(Z=3)=\frac{8^{3}}{12^{3}}=\frac{8}{27}$$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória Z é dada pela tabela seguinte.

z_i	0	1	2	3
$P(Z=z_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

61. $P(X=1)=\frac{1}{5}$

$$P(X=2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5} \qquad P(X=4)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5} \qquad P(X=5)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{5}$$

A função massa de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

PÁG. 149

Tarefa 5

1. Comecemos por construir uma tabela de dupla entrada para evidenciar os resultados da experiência e melhor identificar o valor da variável correspondente a cada resultado.

	N	C
N	NN	NC
C	CN	CC

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

2. Por exemplo:

x_i	0	1	2
f_i	0,24	0,54	0,22

3. Os valores das frequências relativas, não sendo iguais, são próximos dos valores obtidos em **1.**.

PÁG. 160

Tarefa 6

Por exemplo:

Dados da simulação com 100 000 lançamentos:

Face 1: 12 022 vezes

Face 2: 19 927 vezes

Face 3: 31 812 vezes

Face 4: 11 956 vezes

Face 5: 12 239 vezes

Face 6: 12 044 vezes

Frequências relativas (aproximadas):

Face 1: 12,02%

Face 2: 19,93%

Face 3: 31,81%

Face 4: 11,96%

Face 5: 12,24%

Face 6: 12,04%

1.

x_i	p_i
1	0,12
2	0,20
3	0,32
4	0,12
5	0,12
6	0,12

2. A estimativa de μ é $\bar{x} = 3{,}28$. A estimativa de σ é $s_x \approx 1{,}51$.

PÁG. 162

Aplicar

65. $P(X = -a) = P(X = a)$

$$P(X = -a) + P(X = a) = 1 \iff 2P(X = a) = 1 \iff P(X = a) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = -a) = \frac{1}{2}$$

$$\mu = -a \times \frac{1}{2} + a \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}(-a - 0)^2 + \frac{1}{2}(a - 0)^2} = \sqrt{a^2} \underset{a>0}{=} a$$

Opção correta: **(C)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

66. A função massa de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	1	1,5	2,5	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\mu = 1\times\frac{1}{10}+1{,}5\times\frac{1}{5}+2{,}5\times\frac{2}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10} = 2{,}4$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{10}(1-2{,}4)^2+\frac{1}{5}(1{,}5-2{,}4)^2+\frac{2}{5}(2{,}5-2{,}4)^2+\frac{1}{5}(3-2{,}4)^2+\frac{1}{10}(4-2{,}4)^2} = \sqrt{0{,}69}\approx 0{,}83$$

$$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=P(1{,}57<X<3{,}23)=$$

$$=P(X=2{,}5)+P(X=3)=\frac{3}{5}=0{,}6$$

A probabilidade de a quantia, em euros, retirada da carteira pela Fátima, estar a menos de um desvio-padrão do valor médio é $0{,}6$, ou seja, 60%.

67.1 Comecemos por construir uma tabela de dupla entrada para evidenciar os resultados da experiência que consiste no lançamento de dois dados equilibrados e somar os números das faces que ficam voltadas para cima.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	*7*
2	3	4	5	6	*7*	8
3	4	5	6	*7*	8	9
4	5	6	*7*	8	9	10
5	6	*7*	8	9	10	11
6	*7*	8	9	10	11	12

A variável aleatória X «Valor ganho por cada euro apostado», toma o valor 3 se a soma dos números das faces que ficam voltadas para cima for superior a 10, toma o valor 0 se a soma dos números das faces que ficam voltadas para cima for igual a 7 e toma o valor -1 se a soma dos números das faces que ficam voltadas para cima for qualquer outro resultado.

Assim, $X\in\{-1,0,3\}$, pelo que $P(X=-1)=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$, $P(X=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ e $P(X=3)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

A função massa de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	-1	0	3
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

67.2 $\mu=-1\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{12}=-0{,}5$

Em média, o jogador perde 50 cêntimos por jogada.

67.3 Em vinte jogadas, estima-se que o jogador perca $0{,}5\times 20=10$ euros.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

68.1 Numa distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta, a soma das probabilidades é 1 .

$b+a+a+b=1 \iff 2b=1-2a \iff b=\frac{1}{2}-a$

$\mu=-3b+a+2a+6b=3a+3b=$

$=3a+3\left(\frac{1}{2}-a\right)=3a+\frac{3}{2}-3a=\frac{3}{2}=1{,}5$

68.2 $\sigma=3{,}5 \iff \sqrt{b(-3-1{,}5)^2+a(1-1{,}5)^2+a(2-1{,}5)^2+b(6-1{,}5)^2}=3{,}5 \iff$

$\iff \sqrt{20{,}25b+0{,}25a+0{,}25a+20{,}25b}=3{,}5 \iff$

$\iff \sqrt{40{,}5b+0{,}5a}=3{,}5$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem: $40{,}5b+0{,}5a=12{,}25$

Na alínea anterior, vimos que $b=\frac{1}{2}-a$, pelo que

$40{,}5\left(\frac{1}{2}-a\right)+0{,}5a=12{,}25 \iff 20{,}25-40{,}5a+0{,}5a=12{,}25 \iff$

$\iff -40a=-8 \iff a=0{,}2$

e $b=\frac{1}{2}-0{,}2 \iff b=0{,}3$.

68.3 $P(X<1{,}5+3{,}5)=P(X<5)=$

$=P(X=-3)+P(X=1)+P(X=2)=$

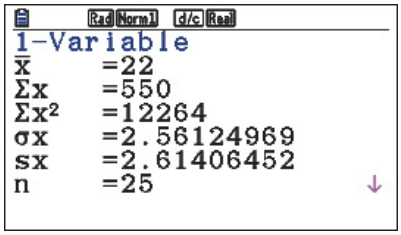
$=0{,}3+0{,}2+0{,}2=0{,}7$

PÁG. 164

Aplicar

70.1 A média amostral é uma estimativa da média populacional.

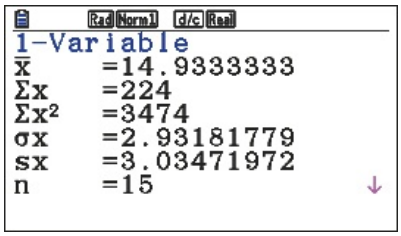
Estimativa da média: 22,0 $\mu g/m^3$.



70.2 O desvio-padrão amostral é uma estimativa do desvio-padrão populacional.

Estimativa do desvio-padrão populacional: 2,61 $\mu g/m^3$.

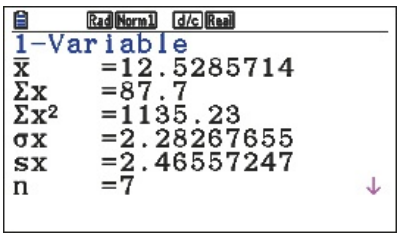
71.1 Estimativa do valor médio: 14,93 min ; estimativa do desvio-padrão populacional: 3,03 min .



M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

71.2 A vantagem de uma amostra aleatória é evitar o enviesamento dos dados (por exemplo, recolher apenas às 9h poderia sobrestimar ou subestimar o tempo médio).

72. Estimativa do valor médio: 12,5 cm ; estimativa do desvio-padrão populacional: 2,5 cm .



PÁG. 165

Tarefa 7

Classe	Marca	Freq. rel. (%)
[1500,2000[	1750	3
[2000,2500[	2250	16
[2500,3000[	2750	31
[3000,3500[	3250	34
[3500,4000[	3750	11
[4000,4500[	4250	4
[4500,5000[	4750	1

$$\mu = \frac{1750\times 3 + 2250\times 16 + 2750\times 31 + 3250\times 34 + 3750\times 34 + 4250\times 4 + 4750\times 1}{100} = 3000$$

PÁG. 178

Aplicar

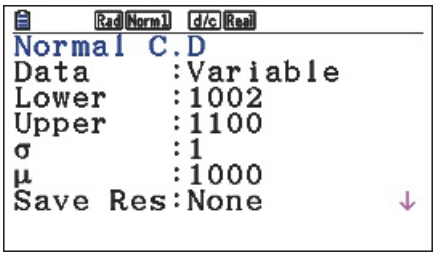
75. As curvas são simétricas em relação à reta r , logo os seus valores médios são iguais. Como tal, $P(X_1 < a) = P(X_2 > c) = 50\%$, pelo que a afirmação I. é verdadeira.

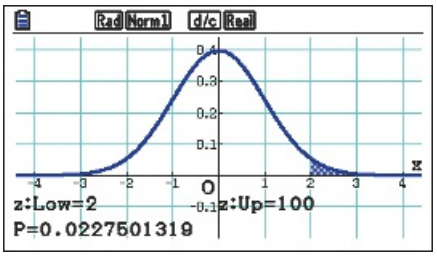
A forma da curva de Gauss depende do desvio-padrão (quanto maior este for, mais achatada é a curva). Assim, $d > b$. A afirmação II. é falsa.

Opção correta: **(B)**

76.1 Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, vamos obter o valor da probabilidade das embalagens terem mais de 1002 ml de leite para os casos do valor do desvio-padrão ser igual a 1 e ser igual a 2 .

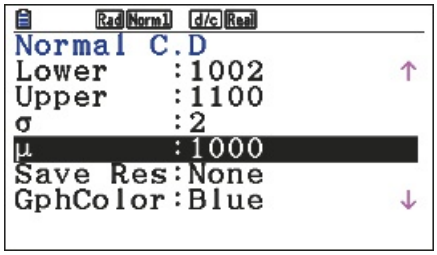
Para $\sigma = 1$, verificamos que esta probabilidade é inferior a 3% .

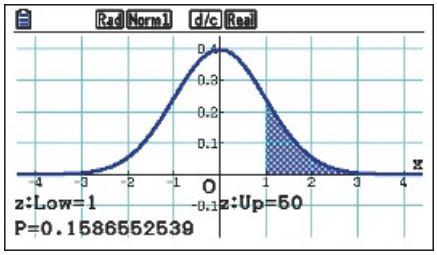




M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Para $\sigma = 2$, verificamos que esta probabilidade é significativamente superior a 3%.





Opção correta: **(C)**

76.2 $P(X > 1002) \approx 3\%$

$P(1000 < X < 1002) = 0{,}5 - P(X > 1002) \approx 47\%$

$P(1000 < X < 1002) = P(998 < X < 1000)$

$500 \times 0{,}47 = 235$

235 embalagens

PÁG. 179

Aplicar

77. Se $P(X < a) = P(X > b)$ e X é uma variável aleatória com distribuição normal, a sua curva de Gauss é simétrica relativamente ao seu valor médio, pelo que $\mu = \frac{a+b}{2}$.

Opção correta: **(D)**

78.1 $P(42 < X < 42{,}14) \approx 47{,}73\%$

$P(41{,}86 < X < 42{,}14) \approx 95{,}46\%$

$\mu + 2\sigma = 42{,}14 \iff \sigma = \frac{42{,}14 - 42}{2} \iff \sigma = 0{,}07$

$\mu + \sigma = 42{,}07$

$\mu + 3\sigma = 42{,}21$

$P(42{,}07 < X < 42{,}21) = P(42 < X < 42{,}21) - P(42 < X < 42{,}07) =$

$$= \frac{0{,}9973}{2} - \frac{0{,}6827}{2} = 0{,}1573 \approx 16\%$$

78.2 $P(X < 41{,}93) = P(X < 42) - \frac{P(41{,}93 < X < 42{,}07)}{2} =$

$$= 0{,}5 - \frac{0{,}6827}{2} = 0{,}15865$$

$P(X \geqslant 41{,}93) = 1 - 0{,}15865 = 0{,}84135$

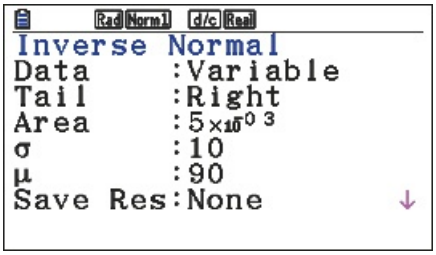
A probabilidade de exatamente um de dois tinteiros ter um volume de tinta inferior a 41,93 ml é $2 \times 0{,}15865 \times 0{,}84135 \approx 0{,}267$.

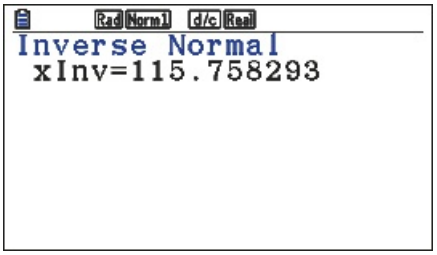
79.1 Sabe-se que $X \sim N(90, 10)$ e que $100 = \mu + \sigma$.

$P(X > 100) = P(X > 90) - \frac{P(80 < X < 100)}{2} = 0{,}5 - \frac{0{,}6827}{2} \approx 0{,}159$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

79.2 Seja k o número de toneladas de cereais em *stock*, tal que $P(X > k) = 0{,}005$.





O gestor deve ter 116 toneladas de cereais em *stock*.

PÁG. 180

Aplicar

80. $X \sim N(a, \sigma)$

$P(X > a) = 50\%$ $\qquad$ $P(155 < X < a) = 20\%$

$P(X > 155) = 70\%$ $\qquad$ $P(155 < X < a) = P(a < X < 2a - 155) = 20\%$

A probabilidade de exatamente dois desses três rapazes terem altura compreendida entre a e $2a - 155$ é ${}^{3}C_{2} \times 0{,}2^{2} \times (1 - 0{,}2) = 0{,}096$.

81. $X \sim N(13, 2)$

81.1 Comecemos por calcular as seguintes probabilidades:

$$P(X > 15) = P(X > \mu + \sigma) =$$
$$= P(X > 13) - \frac{P(11 < X < 15)}{2} = 0{,}5 - \frac{0{,}6827}{2} = 0{,}15865$$

$$P(15 < X < 17) = P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma) =$$
$$= \frac{P(9 < X < 17)}{2} - \frac{P(11 < X < 13)}{2} = \frac{0{,}9545}{2} - \frac{0{,}6827}{2} = 0{,}1359$$

$$P(X < 17 \mid X > 15) = \frac{P(15 < X < 17)}{P(X > 15)} =$$
$$= \frac{0{,}1359}{0{,}15865} \approx 86\%$$

81.2 A afirmação que contém a afirmação correta é a **(C)**.

A opção **(A)** é falsa, porque o valor médio da variável aleatória X é 13, e, portanto, $P(B) = P(X < 13) = 0{,}5$.

A opção **(D)** é falsa, dado que $18 > 17 = \mu + 2\sigma$, e, portanto, $P(A) = P(X > 18) < P(X > 17) = \frac{1 - 0{,}9545}{2} = 0{,}02275$.

A opção **(B)** é falsa, dado que $9 = \mu - 2\sigma$, sendo $P(C) = P(X < 9) = \frac{1 - 0{,}9545}{2} = 0{,}02275$ e, portanto, como $P(A) < 0{,}02275$, verifica-se que $P(A) < P(C)$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 181

Aplicar +

1.1 $\{1,2,3,4,5\}$

1.2 A roda tem dois setores com números maiores do que 3.

Opção correta: **(C)**

1.3 $A=\{2,4\}$; $B=\{2,3,5\}$; $C=\{1,3,5\}$

a.

(A) $B\cup C=\{1,2,3,5\}$

(B) $A\cap B=\{2\}$

(C) $B\cap C=\{3,5\}$

(D) $A\cup B=\{2,3,4,5\}$

Opção correta: **(B)**

b.

(A) $\bar{B}\cup C=\{1,3,4,5\}$

(B) $A\cap C=\{\}$

(C) $\bar{B}\cap C=\{1\}$

(D) $A\cup C=\{1,2,3,4,5\}$

Opção correta: **(D)**

1.4 Seja n o número de setores da roda. O número de resultados é ${}^{n}C_{2}+n$.

$${}^{n}C_{2}+n=120 \iff \frac{n!}{(n-2)!2!}+n=120 \iff \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!}+n=120 \iff$$

$$\iff \frac{n(n-1)}{2}+n=120 \iff n^2+n-240=0 \iff n=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-240)}}{2} \iff$$

$$\iff n=\frac{-1\pm\sqrt{961}}{2} \iff n=\frac{-1-31}{2}\vee n=\frac{-1+31}{2} \iff \underbrace{n=-16}_{\notin \mathbb{N}}\vee n=15$$

A roda está dividida em 15 setores.

2.1 Por exemplo:

a. «Sair face com o número 7»

b. «Sair face com o número 1»

c. «Sair face com um número primo»

d. «Sair face com um número inferior a 7»

2.2

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a. $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{7}{36}$ **c.** $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

2.3 Num dado equilibrado, os números superiores a 2 são 3, 4, 5, 6, 4 resultados possíveis em 6.

A probabilidade de sair um número superior a 2 num único lançamento é: $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Se o dado for lançado n vezes, a probabilidade de em todos os lançamentos sair um número superior a 2 é $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Mas, sabemos que a probabilidade é igual a $\frac{32}{243}$. Assim, $\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{32}{243}=\frac{2^5}{3^5}=\left(\frac{2}{3}\right)^5$, ou seja, $\frac{2^5}{3^5}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Logo, $n=5$, ou seja, o dado foi lançado cinco vezes.

PÁG. 182

Aplicar +

3. Moeda: $\{1,2\}$; dado: $\{1,2,3,4,5,6\}$.

3.1 $A=\{(1,1),(2,2)\}$

(A) Números pares

Resultados: $(2,2)$, $(2,4)$, $(2,6)$

Interseção com A: $(2,2)\neq\{\}$

(B) Moeda $\{2\}$, dado $\{1,2,3,4,5,6\}$

Resultados: $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$

Interseção com A: $(2,2)\neq\{\}$

(C) Números primos

Moeda $\{2\}$, dado $\{2,3,5\}$

Resultados: $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,5)$

Interseção com A: $(2,2)\neq\{\}$

(D) Dado $\{4\}$, moeda $\{1,2\}$

Resultados: $(1,4)$, $(2,4)$

Interseção com A: $\{\}$

Opção correta: **(D)**

3.2 Por exemplo:

«O número da face voltada para cima no dado é superior a 2»; o número de casos possíveis é $2\times6=12$ e o número de casos favoráveis é $2\times4=8$, pelo que a probabilidade deste acontecimento é $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

3.3

a. O acontecimento complementar de C é «Os números nas duas faces voltadas para cima são o 1», que é elementar por só ter um elemento $(1,1)$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

b. Consideremos, na moeda, $P(1)$ a probabilidade de sair a face com número 1 e $P(2)$ a probabilidade de sair a face com número 2.

Como $P(2)=2P(1)$ e $P(1)+P(2)=1$, tem-se $P(1)+2P(1)=1 \Leftrightarrow 3P(1)=1 \Leftrightarrow P(1)=\frac{1}{3}$ e $P(2)=\frac{2}{3}$.

No dado, todos os resultados têm probabilidade $\frac{1}{6}$.

O acontecimento complementar de C é «Os números nas duas faces voltadas para cima são o 1», ou seja, ambos são iguais a 1.

$P(\overline{C})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$, logo, $P(\overline{C})=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$.

4.1 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Opção correta: **(C)**

4.2 Em cada lançamento, $P(3)=\frac{1}{4}$ e $P(\text{não } 3)=\frac{3}{4}$.

Queremos exatamente duas vezes o número 3 em três lançamentos.

As sequências possíveis são $(3, 3, \text{não } 3)$, $(3, \text{não } 3, 3)$ e $(\text{não } 3, 3, 3)$. São três casos diferentes.

Em cada sequência, a probabilidade é $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$, ou seja, cada um dos três casos tem probabilidade $\frac{3}{64}$. Logo, a probabilidade pedida é $3\times\frac{3}{64}=\frac{9}{64}$.

5. Como a caixa tem 18 bolas e a probabilidade de extrair da caixa uma bola azul é $\frac{1}{6}$, concluímos que na caixa há $\frac{1}{6}\times 18=3$ bolas azuis e $18-3=15$ bolas amarelas.

Opção correta: **(C)**

PÁG. 183

Aplicar +

6. Há $4\times5\times7\times7\times5\times4=19\,600$ maneiras de completar o circuito.

6.1 Há $4\times5\times7\times6\times4\times3=10\,080$ maneiras de completar o circuito de modo a não repetir caminhos.

Probabilidade: $\frac{10\,080}{19\,600}=\frac{18}{35}$

6.2 Há $4\times5\times2\times2\times5\times4=1600$ maneiras de completar o circuito de modo a passar duas vezes na estação Z.

Probabilidade: $\frac{1600}{19\,600}=\frac{4}{49}$

6.3 Há $3\times4\times7\times7\times1\times1=588$ maneiras de completar o circuito de modo a passar nas estações X e Y apenas na volta.

Probabilidade: $\frac{588}{19\,600}=\frac{3}{100}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

6.4 Há $4\times1\times7\times7\times4\times4+4\times4\times7\times7\times1\times4=3136\times2=6272$ maneiras de completar o circuito de modo a passar na estação Y apenas uma vez.

Probabilidade: $\frac{6272}{19\,600}=\frac{8}{25}$

7.1 O número de formas de escolher 4 cartas de 52 é ${}^{52}C_4=270\,725$.

Casos favoráveis: escolher um naipe (4 opções) e depois 4 cartas desse naipe (13 cartas):

$4\times{}^{13}C_4=4\times715=2860$

Probabilidade: $\frac{2860}{270\,725}\approx0{,}011$

7.2

a. O número de formas de escolher 3 cartas de 52 é ${}^{52}C_3=22\,100$.

Casos favoráveis: escolher 3 naipes diferentes entre 4 e, para cada naipe, escolher 1 carta (13 opções cada): ${}^{4}C_3\times13^3=4\times2197=8788$

Probabilidade: $\frac{8788}{22\,100}\approx40\%$

b. O número de formas de escolher um 2, um 3 e um 4 é ${}^{52}A_3$.

Casos favoráveis: há 4 cartas de cada número e as 3 cartas podem sair em qualquer ordem: $4^3\times3!$

Probabilidade: $\frac{4^3\times3!}{{}^{52}A_3}$

Opção correta: **(C)**

8. Casos possíveis: os números naturais de quatro algarismos vão de 1000 a 9999, logo, são 9000.

Casos favoráveis: para escolher as posições dos dois 5, escolhemos duas posições entre quatro, há ${}^{4}C_2=6$ maneiras de o fazer.

Os outros dois algarismos não podem ser 5, não podem ser iguais entre si e o primeiro algarismo (milhar) não pode ser 0.

Vamos considerar dois casos:

1.º caso: o primeiro algarismo é 5.

Os dois algarismos que não são 5 podem ser de 0 a 9, exceto 5, são 9 opções, e podem ocupar três posições.

Total: $9\times8\times3=216$

2.º caso: o primeiro algarismo (milhar) é um dos dois que não são 5 e esse algarismo pode ser de 1 a 9, exceto 5, são 8 opções.

O outro algarismo pode ser de 0 a 9, exceto 5 e diferente do anterior, são 8 opções, e pode ocupar têS posições.

Total: $8\times8\times3=192$

Total de casos favoráveis: $216+192=408$

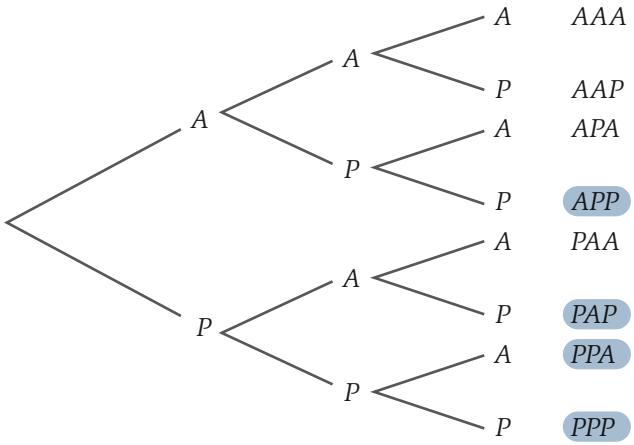
Probabilidade: $\frac{408}{9000}=\frac{17}{375}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 184

Aplicar +

9.1



$$p=\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{10}+\frac{4}{12}\times\frac{8}{11}\times\frac{3}{10}+\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{8}{10}+\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}=\frac{13}{55}$$

9.2 Pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis.

O número de casos possíveis é ${}^{12}C_2$, que é o número de maneiras de retirar duas das doze bolas. Para que as duas bolas retiradas sejam da mesma cor, ou se retiram duas bolas amarelas, e o número de maneiras de o fazer é ${}^{8}C_2$, ou se retiram duas bolas pretas, e o número de maneiras de o fazer é ${}^{4}C_2$. Portanto, o número de casos favoráveis é ${}^{8}C_2+{}^{4}C_2$, e uma expressão que dá esta probabilidade é $\frac{{}^{8}C_2+{}^{4}C_2}{{}^{12}C_2}$. Outra expressão que dá esta probabilidade é, por exemplo, $\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}+\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}$.

10.1 O acontecimento «Retirar pelo menos uma ficha amarela» é contrário ao acontecimento «Nenhuma das fichas retiradas é amarela». Logo, a probabilidade pedida é $1-\frac{{}^{7}C_3}{{}^{10}C_3}=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$.

Opção correta: **(D)**

10.2 O número de maneiras de colocar as dez fichas numa só fila é $\frac{10!}{2!5!3!}=2520$.

a. Tratamos as 5 vermelhas como um bloco. Assim, temos seis «objetos»: o bloco das vermelhas, 3 amarelas, 2 azuis.

O número de maneiras de as fichas vermelhas ficarem em posições consecutivas é $\frac{6!}{3!2!}=60$.

Probabilidade: $\frac{60}{2520}=\frac{1}{42}$

b. Cada cor forma um bloco, logo temos 3 blocos distintos e o número de maneiras de os ordenar é $3!=6$.

Probabilidade: $\frac{6}{2520}=\frac{1}{420}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

c. Vamos pensar no complementar, ou seja, as fichas azuis ficam juntas.

Se considerarmos as azuis como um bloco, temos nove objetos: o bloco das azuis, 5 vermelhas e 3 amarelas.

O número de maneiras de ordenar os nove objetos é $\frac{9!}{5!3!}=504$ e o número de maneiras de as fichas azuis não ficarem juntas é $2520-504=2016$.

Probabilidade: $\frac{2016}{2520}=\frac{4}{5}$

d. Comecemos por ordenar as sete fichas que não são amarelas. Existem $\frac{7!}{5!2!}=21$ (ou ${}^{7}C_{5}\times{}^{2}C_{2}$) maneiras de o fazer. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{8}C_{3}=56$ maneiras de colocar as fichas amarelas que não podem ficar em posições consecutivas. As fichas amarelas podem ficar em oito lugares, no início, no fim ou entre as fichas que não são amarelas.

O número de casos favoráveis é $21\times56=1176$.

Probabilidade: $\frac{1176}{2520}=\frac{7}{15}$

11. A Joana tem 42 tacadas após 14 buracos.

O Miguel fez 44 tacadas no total.

Para a Joana não perder, precisa de terminar com 44 tacadas ou menos.

Se, no último buraco, ela usar 1 tacada, fica com 43 no total e ganha; se usar 2 tacadas, fica com 44 no total e empata, portanto não perde; se precisar de 3 ou mais tacadas, perde.

Em cada tacada, a Joana acerta com probabilidade 0,6 e falha com probabilidade 0,4.

Se ela usar 1 tacada e acertar, a probabilidade é 0,6; se ela usar 2 tacadas, falhar na primeira e acertar na segunda, a probabilidade é $0,4\times0,6=0,24$.

A probabilidade de a Joana não perder o jogo é $0,6+0,24=0,84$.

Opção correta: **(D)**

PÁG. 185

Aplicar +

12.1 Casos possíveis: ${}^{9}C_{5}=126$

Casos favoráveis:

1.º caso: exatamente quatro vértices pertencem à pirâmide (escolhemos 4 dos 5 da pirâmide e 1 dos restantes 4 vértices que não pertencem à pirâmide): ${}^{5}C_{4}\times{}^{4}C_{1}=5\times4=20$

2.º caso: exatamente cinco vértices pertencem à pirâmide: ${}^{5}C_{5}\times{}^{4}C_{0}=1$

Probabilidade: $\frac{20+1}{126}=\frac{1}{6}$

12.2 Casos possíveis: ${}^{9}C_{3}=84$

O prisma quadrangular tem 6 faces, 5 com 4 vértices e uma com 5 vértices (o vértice I da pirâmide coincide com o centro da base inferior da pirâmide).

Cada face define um plano, e quaisquer 3 vértices, não colineares, da mesma face definem esse plano.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Existem $^4C_3 = 4$ maneiras de definir um dos planos que contenha uma das faces do prisma com 4 vértices e existem $^5C_3 - 2 = 8$ maneiras de definir o plano que contém a base inferior do prisma (observar que os pontos H, I e C são colineares, bem como os pontos D, I e G).

Casos favoráveis: $^4C_3 \times 5 + ^5C_3 - 2 = 28$

Probabilidade: $\frac{28}{84} = \frac{1}{3}$

13.1 Casos possíveis: $^6C_2 = 15$

Uma reta é paralela ao eixo Oz apenas quando os dois vértices que a definem pertencem à mesma aresta vertical que não esteja contida no eixo Oz: A e E, B e C.

Casos favoráveis: 2

Probabilidade: $\frac{2}{15}$

13.2 Cada uma das 5 faces pode ser pintada com uma das dez cores: $10^5 = 100\,000$

As 3 faces laterais são todas adjacentes entre si. Cada base é adjacente às 3 faces laterais. As duas bases não são adjacentes entre si.

1.º passo: colorir as 3 faces laterais

Queremos que todas tenham cores diferentes: $10 \times 9 \times 8 = 720$

2.º passo: colorir as bases

Cada base não pode coincidir com nenhuma das 3 faces laterais, mas pode ser igual à outra base. Para cada base há $10 - 3 = 7$ opções e para as duas bases há $7 \times 7 = 49$ opções.

Casos favoráveis: $720 \times 49 = 35\,280$

Probabilidade: $\frac{35\,280}{100\,000} = 0{,}3528$

14. Casos possíveis: $^{27}C_3 = 2925$

14.1 Cada fila tem nove cacifos. Para escolher a fila há 3 opções e há $^9C_3 = 84$ maneiras de escolher 3 cacifos numa fila.

Casos favoráveis: $3 \times 84 = 252$

Probabilidade: $\frac{252}{2925} \approx 0{,}0862$

14.2 Não haver dois dos três professores com cacifos na mesma fila significa que cada professor fica com cacifo numa fila diferente (ou seja, um cacifo em cada fila).

Para escolher um cacifo em cada fila, há nove possibilidades de escolha em cada fila.

Casos favoráveis: $9 \times 9 \times 9 = 729$

Probabilidade: $\frac{729}{2925} = \frac{81}{325}$

Ou

A probabilidade do primeiro professor escolher qualquer cacifo é 1. O segundo professor a escolher só tem 18 cacifos disponíveis em 26 e o terceiro professor já só tem 9 cacifos disponíveis em 25.

Probabilidade: $1 \times \frac{18}{26} \times \frac{9}{25} = \frac{81}{325}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

15. O código tem três vogais (5 possibilidades) seguidas de quatro algarismos (10 possibilidades).

Total de códigos: $5^3 \times 10^4 = 1\ 250\ 000$

15.1 Queremos exatamente um A numa das três posições.

Há ${}^3C_1 = 3$ maneiras de escolher a posição do A. Para as outras duas posições vamos escolher vogais diferentes de A e há quatro opções para cada.

Há $3 \times 4 \times 4 = 48$ maneiras de escolher as vogais do código.

Queremos exatamente dois algarismos 7.

Há ${}^4C_2 = 6$ maneiras de escolher as posições dos dois 7. Para as outras duas posições vamos escolher algarismos diferentes de 7 e há nove opções para cada.

Há $6 \times 9 \times 9 = 486$ maneiras de escolher os algarismos do código.

Casos favoráveis: $48 \times 486 = 23\ 328$

Probabilidade: $\frac{23\ 328}{250\ 000} \approx 0{,}02$

15.2 Vamos pelo complementar: o código não tem nenhum algarismo 4.

Para cada posição há nove opções: $9^4 = 6561$

A probabilidade de o código não ter nenhum algarismo 4 é $\frac{6561}{10\ 000}$ e a probabilidade pedida é $1 - \frac{6561}{10\ 000} = \frac{3439}{10\ 000} = 0{,}3439$.

15.3 Para os algarismos serem todos iguais, há 10 possibilidades (0000 , 1111 , …, 9999).

Queremos pelo menos duas vogais diferentes.

Há $5^3 = 125$ sequências de três vogais e há 5 sequências com as vogais todas iguais.

Logo, há $125 - 5 = 120$ sequências de três vogais com pelo menos duas vogais diferentes.

Casos favoráveis: $120 \times 10 = 1200$

Probabilidade: $\frac{1200}{1\ 250\ 000} = \frac{3}{3125}$

PÁG. 186

Aplicar +

16. Casos possíveis: ${}^{16}C_8 = 12\ 870$

16.1 Para uma linha (ou coluna) ficar totalmente preenchida, são precisas exatamente as 4 quadrículas dessa linha (ou coluna).

Como temos oito fichas, duas linhas completas ocupam exatamente as oito posições.

Há ${}^4C_2 = 6$ maneiras de escolher duas das quatro linhas e há ${}^4C_2 = 6$ maneiras de escolher duas das quatro colunas.

Estes casos são disjuntos (não podem ocorrer simultaneamente).

Casos favoráveis: $6 + 6 = 12$

Probabilidade: $\frac{12}{12\ 870} = \frac{2}{2145}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

16.2

1.º passo: escolher a linha, há 4 opções.

2.º passo: colocar as outras quatro fichas nas restantes 12 quadrículas, há ${}^{12}C_4 = 495$ maneiras de o fazer.

Temos de excluir os casos em que outra linha também fica completa. Existem três linhas restantes e cada uma ficaria completa de uma única forma: $495 - 3 = 492$

Casos favoráveis: $4 \times 492 = 1968$

Probabilidade: $\frac{1968}{12\,870} \approx 15{,}3\%$

17. Os conjuntos são definidos pelo número de frutas de cada tipo:

- maçãs: 0 a $10 \longrightarrow 11$ opções
- bananas: 0 a $4 \longrightarrow 5$ opções
- laranjas: 0 a $6 \longrightarrow 7$ opções

O número total de conjuntos (incluindo o conjunto vazio) é $11 \times 7 \times 5 = 385$.

Mas o enunciado exige pelo menos uma peça de fruta, então excluímos o conjunto vazio: $385 - 1 = 384$

Condições:

- exatamente 5 maçãs $\longrightarrow 1$ possibilidade
- pelo menos 2 bananas (2 , 3 ou 4) $\longrightarrow 3$ possibilidades
- laranjas sem restrição $\longrightarrow 0$ a $6 \longrightarrow 7$ possibilidades

Casos favoráveis: $1 \times 3 \times 7 = 21$

Probabilidade: $\frac{21}{384} = \frac{7}{128}$

18. Há $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ sequências de quatro algarismos distintos que se podem formar com os algarismos de 0 a 9 .

Um número é par se o último algarismo é par. Há 5 algarismos pares (0 , 2 , 4 , 6 , 8).

Comecemos por escolher o último algarismo (par).

1.º caso: o último algarismo é 0 . Para ocupar as três primeiras posições (sem repetir algarismos), restam nove algarismos: $9 \times 8 \times 7 = 504$.

2.º caso: o último algarismo não é 0 , logo há 4 opções. Para ocupar as três primeiras posições (sem repetir algarismos), como na primeira posição não pode estar o 0 , restam oito algarismos: $8 \times 8 \times 7 = 448$

Casos favoráveis: $504 + 4 \times 448 = 2296$

Probabilidade: $\frac{2296}{5040} = \frac{41}{90}$

19. Temos oito pessoas (a Joana e sete amigos) e oito lugares consecutivos. A distribuição dos bilhetes ao acaso equivale a todas as permutações possíveis dos oito lugares: $8! = 40\,320$

19.1 Há dois lugares extremos (esquerda e direita).

Fixando a Joana numa ponta, as restantes sete pessoas podem ocupar os outros lugares de $7! = 5040$ maneiras.

Casos favoráveis: $2 \times 7! = 2 \times 5040 = 10\,080$

Probabilidade: $\frac{10\,080}{40\,320} = \frac{1}{4}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

19.2 Tratamos os três como um «bloco». O bloco pode ocupar 6 posições possíveis (porque ocupa 3 lugares numa fila de oito: $8-3+1=6$). Dentro do bloco, os três podem permutar de $3!=6$ maneiras e as outras cinco pessoas permutam de $5!=120$ maneiras.

Casos favoráveis: $6\times 3!\times 5!=6\times 6\times 120=4320$

Probabilidade: $\frac{4320}{40\,320}=\frac{3}{28}$

19.3 Joana e Luísa juntas

Consideramos (J , L) como um bloco. Existem 2 possibilidades (J L ou L J).

Agora temos sete elementos no total: $7!$

Casos com J e L juntas: $2\times 7!=2\times 5040=10\,080$

Vamos retirar os casos em que a Amélia e o Miguel também estão juntos.

Agora temos dois blocos: (J , L) e (A , M)

Então, temos 6 elementos: $6!=720$.

Cada bloco pode permutar entre si: $2!\times 2!$

Casos a retirar: $6!\times 2!\times 2!=720\times 4=2880$

Casos favoráveis: $10\,080-2880=7200$

Probabilidade: $\frac{7200}{40\,320}=\frac{5}{28}$

20.1 $P(A\cap B)+P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(A\cap B)+P(\overline{A\cap B})=P(A\cap B)+1-P(A\cap B)=1$

20.2 $P(A\cap B)-P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(A\cap B)-P(\overline{A\cup B})=$

$=P(A\cap B)-(1-P(A\cup B))=P(A\cap B)-1+P(A\cup B)=$

$=P(A\cap B)-1+P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-1=$

$=P(A)-(1-P(B))=P(A)-P(\bar{B})$

PÁG. 187

Aplicar +

21.1 $P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}\cap B)=$

$=P(\bar{A})+P(B)-(P(B)-P(A\cap B))=P(\bar{A})+P(B)-P(B)+P(A\cap B)=$

$=P(\bar{A})+P(A\cap B)$

21.2 Começamos por definir os acontecimentos A e B no contexto da situação descrita.

A : «A carta extraída é de paus» e B : «A carta extraída é um ás».

$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(A\cap B)=\frac{39}{52}+\frac{1}{52}=\frac{10}{13}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

22.1 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como $P(A \cap B) \geqslant 0$, $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

22.2

a. $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B) \iff P(A \cup B) \leqslant 0{,}3 + 0{,}5 \iff P(A \cup B) \leqslant 0{,}8$

O valor de $P(A \cup B)$ é mínimo quando um dos acontecimentos está contido no outro, ou seja, $P(A \cap B) = \min(P(A), P(B))$. Logo, $P_{\min}(A \cup B) = \max(P(A), P(B))$. Neste caso, $P(A \cup B) \geqslant 0{,}5$.

Opção correta: **(C)**

b. $P(A \cap B)$ não pode ser maior do que $P(A)$ ou $P(B)$

Opção correta: **(D)**

23.1 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff$

$\iff \frac{5}{6} = P(A) + P(A) - \frac{1}{3} \iff 2P(A) = \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \iff P(A) = \frac{7}{12}$

23.2 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

24. Como $A \subset B$, tem-se $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ e $P(A) \leqslant P(B)$.

(A) $P(A) > P(B)$ falso, pois $A \subset B \implies P(A) \leqslant P(B)$

(C) $P(A \cap B) = 0$ falso, pois $A \cap B = A \implies P(A \cap B) = P(A) > 0$

(D) $P(A \cup B) = 1$ falso, pois $A \cup B = B \implies P(A \cup B) = P(B) < 1$, uma vez que B não é certo.

Opção correta: **(B)**

25. $P(\overline{A \cap B}) = 0{,}8 \iff 1 - P(A \cap B) = 0{,}8 \iff P(A \cap B) = 0{,}2$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}2] = 0{,}1$

Opção correta: **(A)**

PÁG. 188

Aplicar +

26. Casos possíveis: $9 \times 10^3 = 9000$

O 1.º algarismo não pode ser 0, logo há 9 opções. Para os restantes, há 10 opções para cada.

Vamos definir os acontecimentos A: «Todos os algarismos são pares» e B: «Todos os algarismos são inferiores a 7».

Algarismos pares: $0, 2, 4, 6, 8$ (5 opções)

O 1.º algarismo não pode ser 0, logo restam 4 opções ($2,4,6,8$). Os restantes três têm 5 opções cada.
O número de casos favoráveis a A é $4 \times 5^3 = 500$.

Algarismos inferiores a 7: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (7 opções)

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

O 1.º algarismo não pode ser 0, logo restam 6 $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Os restantes três têm 7 opções cada. O número de casos favoráveis a B é $6 \times 7^3 = 2058$.

Algarismos pares e inferiores a 7: $0, 2, 4, 6$ (4 opções)

O 1.º algarismo não pode ser 0, logo restam 3 opções $(2, 4, 6)$. Os restantes têm 4 opções cada. O número de casos favoráveis a $A \cap B$ é $3 \times 4^3 = 192$.

O número de casos favoráveis a $A \cup B$ é $500 + 2058 - 192 = 2366$.

Probabilidade: $\frac{2366}{9000} \approx 0{,}263$

27. A grelha é quadrada com 16 quadrículas, ou seja, 4×4.

São escolhidas ao acaso dez dessas 16 quadrículas (todas as escolhas são equiprováveis).

Em cada diagonal há 4 quadrículas e nesta grelha as diagonais não têm quadrículas em comum.

Há ${}^{16}C_{10} = 8008$ maneiras de escolher dez quadrículas de 16.

Consideremos o acontecimento «pelo menos uma diagonal fica preenchida» e designemos as diagonais por D_1 e D_2.

$P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)$

Casos com uma diagonal preenchida:

- Se uma diagonal está preenchida, quatro quadrículas estão ocupadas e falta escolher seis das restantes doze: ${}^{12}C_6 = 924$.
- O mesmo para a outra diagonal.

Casos com as duas diagonais preenchidas:

- As duas diagonais ocupam oito quadrículas distintas. Falta escolher duas das restantes oito: ${}^{8}C_2 = 28$

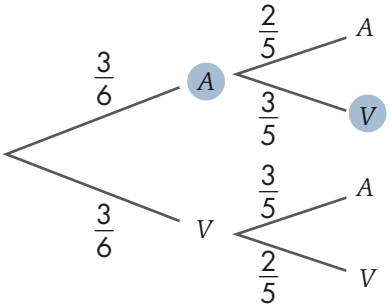
Casos favoráveis: $2 \times 924 - 28 = 1820$

Probabilidade: $\frac{1820}{8008} = \frac{5}{22}$

28. Dizer que «Um quarto das vezes em que a Maria come morangos fica com irritações na pele.» é equivalente a dizer que a Maria fica com irritações na pele dado que comeu morangos, num quarto das vezes.

Opção correta: **(C)**

29.



Opção correta: **(B)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

30. $P(\overline{A}) = 0{,}3 \iff 1 - P(A) = 0{,}3 \iff P(A) = 0{,}7$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff 0{,}9 = 0{,}7 + P(B) - 0{,}2 \iff P(B) = 0{,}4$

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}4} = \dfrac{1}{2}$

Opção correta: **(D)**

PÁG. 189

Aplicar +

31. $P(A \cup B) = 0{,}65 \iff P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}65 \iff$

$\iff P(A) + 3P(A) - P(A \cap B) = 0{,}65 \iff 4P(A) - 0{,}65 = P(A \cap B)$

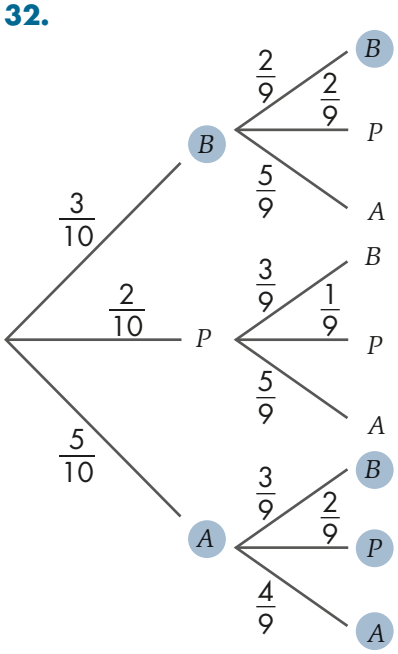
$P(A|B) = \dfrac{1}{4} \iff \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{4} \iff P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}P(B) \iff P(A \cap B) = \dfrac{3}{4}P(A)$

$4P(A) - 0{,}65 = \dfrac{3}{4}P(A) \iff 4P(A) - \dfrac{3}{4}P(A) = 0{,}65 \iff \dfrac{13}{4}P(A) = 0{,}65 \iff P(A) = 0{,}2$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Opção correta: **(D)**

32.



32.1

a. $\dfrac{2}{9}$ **b.** $\dfrac{2}{9}$ **c.** $\dfrac{3}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{9}$

32.2 $\dfrac{3}{10} \times \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{10} \times \dfrac{3}{9} + \dfrac{5}{10} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{3}{10}$

32.3 Vamos definir os acontecimentos B_1 : «Sai bola preta na 1.ª extração» e N_2 : «Não sai bola branca na 2.ª extração».

Queremos determinar $P(B_1|N_2) = \dfrac{P(B_1 \cap N_2)}{P(N_2)}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Determinar $P(B_1 \cap N_2)$.

A probabilidade de sair bola preta na 1.ª extração é $P(B_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Depois disso, ficam nove bolas no saco: três brancas, uma preta e cinco amarelas (uma bola que não é branca é preta ou amarela).

Logo, $P(B_1 \cap N_2) = \frac{2}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

Determinar $P(N_2)$.
Usamos a probabilidade total.

Caso 1: sai bola branca na 1.ª extração: $\frac{3}{10}$
Ficam duas bolas brancas em nove, logo sete bolas são não brancas: $\frac{7}{9}$

Caso 2: sai bola preta na 1.ª extração: $\frac{2}{10}$
Ficam três bolas brancas em nove, logo seis bolas são não brancas: $\frac{6}{9}$

Caso 3: sai bola amarela na 1.ª extração: $\frac{5}{10}$
Ficam três bolas brancas em nove, logo seis bolas são não brancas: $\frac{6}{9}$

Soma: $P(N_2) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{21}{90} + \frac{12}{90} + \frac{30}{90} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10}$

Probabilidade condicionada: $P(B_1 | N_2) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{7}{10}} = \frac{20}{105} = \frac{4}{21}$

33.1 $P(B|A) \times P(A) - P(A) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \times P(A) - P(A) + P(\overline{A \cap B}) =$

$= P(B \cap A) - P(A) + 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) = P(\bar{A})$

33.2 Começamos por definir os acontecimentos A : «O enfermeiro selecionado é português» e B : «O enfermeiro selecionado é do sexo masculino».

O acontecimento complementar do acontecimento A é «O enfermeiro selecionado não é português» e, do enunciado, sabemos que $P(\bar{A} \cup B) = 0{,}8$.

$P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(A \cap \bar{B})$

O acontecimento complementar do acontecimento B é «O enfermeiro selecionado é do sexo feminino» e $A \cap \bar{B}$: «O enfermeiro selecionado é português e do sexo feminino».

Assim, $0{,}8 = 1 - P(\text{português e feminino}) \iff P(\text{português e feminino}) = 0{,}2$.

Logo, o número de enfermeiros portugueses do sexo feminino que participaram no congresso é $0{,}2 \times 300 = 60$.

PÁG. 190

Aplicar +

34. Temos três caixas, que designamos por C_1 , C_2 e C_3 , e selecionamos uma ao acaso:

$P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Conteúdo:

- C_1 : um caderno azul
- C_2 : dois cadernos, um azul e um branco
- C_3 : três cadernos, um azul e dois brancos

34.1 Na caixa com três cadernos há um caderno azul: $P(\text{azul}|C_3)=\frac{1}{3}$

34.2 Usamos a probabilidade total.

$$P(\text{azul})=P(C_1)\times P(\text{azul}|C_1)+P(C_2)\times P(\text{azul}|C_2)+P(C_3)\times P(\text{azul}|C_3)=$$

$$=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{11}{18}$$

34.3 Queremos determinar $P(C_3|\text{branco})=\frac{P(C_3\cap\text{branco})}{P(\text{branco})}$.

Determinar $P(C_3\cap\text{branco})$.

$$P(C_3)\times P(\text{branco}|C_3)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

Determinar $P(\text{branco})$.

$$P(\text{branco})=1-P(\text{azul})=1-\frac{11}{18}=\frac{7}{18}$$

Logo, $P(C_3|\text{branco})=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{18}}=\frac{36}{63}=\frac{4}{7}$.

35. A caixa A tem cinco bolas verdes e duas bolas pretas (sete bolas) e a caixa B tem uma bola verde e seis bolas pretas (sete bolas).

35.1 Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa B e colocá-la na caixa A e, de seguida, também ao acaso, retira-se uma bola da caixa A.

a. Sabendo que se retirou uma bola preta da caixa B, então a caixa A passa a ter cinco bolas verdes e três pretas (oito bolas).

Logo, $P(\text{verde de A}|\text{preta de B})=\frac{5}{8}$.

b.

1.º caso: sai bola verde da caixa B, $\frac{1}{7}$

A caixa A fica com seis bolas verdes e duas bolas pretas (oito bolas)

$P(\text{preta}|\text{verde de B})=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

2.º caso: sai bola preta da caixa B, $\frac{6}{7}$

A caixa A fica com cinco bolas verdes e três bolas pretas (oito bolas)

$P(\text{preta}|\text{preta de B})=\frac{3}{8}$

Probabilidade total: $P(\text{preta})=\frac{1}{7}\times\frac{1}{4}+\frac{6}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{28}+\frac{18}{56}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

35.2 Lança-se um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. Se a face que ficar voltada para cima estiver numerada com um número maior do que 1, retira-se, ao acaso, uma bola da caixa A (com probabilidade $\frac{5}{6}$); caso contrário, retira-se, ao acaso, uma bola da caixa B (com probabilidade $\frac{1}{6}$).

a. Queremos determinar $P(\text{verde}|\text{dado 3})$.

Se no dado saiu 3 (>1), escolhe-se a caixa A e $P(\text{verde}|\text{A})=\frac{5}{7}$.

b. Queremos determinar $P(\text{preta}|\text{dado 1})$.

Se no dado saiu 1, escolhe-se a caixa B e $P(\text{preta}|\text{B})=\frac{6}{7}$.

c. Usamos a probabilidade total.

$$P(\text{verde})=P(A)\times P(V|A)+P(B)\times P(V|B)=$$

$$=\frac{5}{6}\times\frac{5}{7}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{7}=\frac{25}{42}+\frac{1}{42}=\frac{26}{42}=\frac{13}{21}$$

d. Queremos determinar $P(A|\text{preta})$.

$$P(A|P)=\frac{P(A\cap P)}{P(P)}$$

Determinar $P(A\cap P)$.

$$P(A\cap P)=P(A)\cdot P(P|A)=\frac{5}{6}\times\frac{2}{7}=\frac{10}{42}=\frac{5}{21}$$

Determinar $P(\text{preta})$.

$$P(P)=\frac{5}{6}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{6}\times\frac{6}{7}=\frac{10}{42}+\frac{6}{42}=\frac{16}{42}=\frac{8}{21}$$

Logo, $P(A|P)=\frac{\frac{5}{21}}{\frac{8}{21}}=\frac{5}{8}$.

36. Temos dez embalagens: oito dentro do prazo e duas fora do prazo. Escolhe-se uma ao acaso.

$P(\text{estragado}|\text{dentro do prazo})=0{,}005$ e $P(\text{estragado}|\text{fora do prazo})=0{,}65$.

Usamos a fórmula da probabilidade total.

$P(\text{estragado})=P(D)\times P(E|D)+P(F)\times P(E|F)$, onde D: «Dentro do prazo» e $P(D)=\frac{8}{10}=0{,}8$ e F: «Fora do prazo» e $P(F)=\frac{2}{10}=0{,}2$.

Logo, $P(E)=0{,}8\times0{,}005+0{,}2\times0{,}65=0{,}134$.

PÁG. 191

Aplicar +

37. Produção das máquinas: $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(C)=\frac{1}{4}$

Probabilidades de defeito:

- Máquina A: 98,5% sem defeito, logo $P(D|A)=1-0{,}985=0{,}015$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

- Máquina B: 2% defeituosas, logo $P(D|B)=0{,}02$
- Máquina C: 97% sem defeito, logo $P(D|C)=1-0{,}97=0{,}03$

37.1 Usamos a probabilidade total.

$$P(D)=P(A)\times P(D|A)+P(B)\times P(D|B)+P(C)\times P(D|C)=$$

$$=\frac{1}{2}\times 0{,}015+\frac{1}{4}\times 0{,}02+\frac{1}{4}\times 0{,}03=0{,}02$$

37.2 $P(C|D)=\dfrac{P(C)\cdot P(D|C)}{P(D)}=\dfrac{\frac{1}{4}\times 0{,}03}{0{,}02}=0{,}375$

38. Vamos definir os acontecimentos:

T : «O sino toca a horas», N : «O sino não toca a horas», P : «O Sr. Aníbal leva as ovelhas a pastar» .

Dados: $P(N\cap P)=0{,}09$, $P(P|T)=0{,}80$, $P(P|N)=0{,}30$.

Vamos determinar $P(N)$.

Sabemos que $P(N\cap P)=P(P|N)\times P(N)$.

Logo, $0{,}09=0{,}30\times P(N) \iff P(N)=\dfrac{0{,}09}{0{,}30} \iff P(N)=0{,}30$.

Então, $P(T)=1-P(N)=1-0{,}30=0{,}70$.

Vamos determinar $P(P)$, recorrendo à probabilidade total:

$$P(P)=P(P|T)\times P(T)+P(P|N)\times P(N)=$$

$$=0{,}80\times 0{,}70+0{,}30\times 0{,}30=0{,}65$$

Ou seja, a probabilidade de as ovelhas pastarem pela manhã é 65% .

39.1 Vamos definir os acontecimentos:

R : «Reside no concelho», com $P(R)=0{,}8$;

O : «Reside fora», com $P(O)=0{,}2$;

A : «Está no atendimento».

Dados:

$P(A|R)=\dfrac{1}{4}=0{,}25 \implies P(A\cap R)=0{,}8\times 0{,}25=0{,}2$

$P(O|A)=\dfrac{1}{3} \implies P(A\cap O)=\dfrac{1}{3}P(A)$

Como $P(A)=P(A\cap R)+P(A\cap O)$, tem-se

$P(A)=0{,}2+\dfrac{1}{3}P(A) \iff \dfrac{2}{3}P(A)=0{,}2 \iff P(A)=0{,}3$

Então, $P(A\cap O)=\dfrac{1}{3}\times 0{,}3=0{,}1$.

Tem-se $P(O|\bar{A})=\dfrac{P(O\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}$, com $P(O\cap\bar{A})=0{,}2-0{,}1=0{,}1$ e $P(\bar{A})=1-0{,}3=0{,}7$.

Assim, $P(O|\bar{A})=\dfrac{0{,}1}{0{,}7}=\dfrac{1}{7}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 192

Aplicar +

39.2 A empresa tem 50 funcionários, 40 residem no concelho, destes, 10 estão no atendimento e 30 não estão no atendimento.

Selecionam-se 4 dos 40.

Queremos determinar $P(\text{no maximo 1 no atendimento}) = P(0) + P(1)$.

$P(0) = \dfrac{{}^{10}C_0 \times {}^{30}C_4}{{}^{40}C_4} = \dfrac{27\,405}{91\,390} \approx 0{,}300$ e $P(1) = \dfrac{{}^{10}C_1 \times {}^{30}C_3}{{}^{40}C_4} = \dfrac{10 \times 4060}{91\,390} \approx 0{,}444$.

Logo, $P \approx 0{,}300 + 0{,}444 = 0{,}744$.

40. Vamos definir os acontecimentos F: «O cliente é do sexo feminino», M: «O cliente é do sexo masculino» e C: «O cliente tem olhos castanhos».

Como $\#M = 4 \times \#F$, então $P(M) = 4P(F)$.

$P(C|F) = \dfrac{4}{5}$ e $P(M|C) = 0{,}6$

40.1

a. $P(M) + P(F) = 1 \iff 4P(F) + P(F) = 1 \iff P(F) = \dfrac{1}{5}$

$P(C|F) = \dfrac{4}{5} \iff \dfrac{P(C \cap F)}{P(F)} = \dfrac{4}{5} \iff$

$\iff P(C \cap F) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{5} \iff P(C \cap F) = \dfrac{4}{25}$

$P(F|C) = 1 - P(M|C) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$P(F|C) = 0{,}4 \iff \dfrac{P(F \cap C)}{P(C)} = 0{,}4 \iff P(C) = \dfrac{\frac{4}{25}}{0{,}4} \iff P(C) = 0{,}4$

$P(C) = 40\%$

b. $P(M) = P(M \cap C) + P(M \cap \overline{C})$

$\dfrac{4}{5} = P(M|C) \times P(C) + P(M \cap \overline{C}) \iff \dfrac{4}{5} = 0{,}6 \times 0{,}4 + P(M \cap \overline{C}) \iff P(M \cap \overline{C}) = \dfrac{14}{25}$

$P(M|\overline{C}) = \dfrac{P(M \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{\frac{14}{25}}{1 - 0{,}4} = \dfrac{14}{15}$

c. Usamos $P(F \cup \overline{C}) = P(F) + P(\overline{C}) - P(F \cap \overline{C})$.

Sabemos que $P(F) = \dfrac{1}{5}$, $P(\overline{C}) = \dfrac{3}{5}$ e que $P(\overline{C}|F) = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$.

$P(\overline{C}|F) = \dfrac{1}{5} \iff \dfrac{P(\overline{C} \cap F)}{P(F)} = \dfrac{1}{5} \iff P(\overline{C} \cap F) = \dfrac{1}{25}$

Logo, $P(F \cup \overline{C}) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{25} = \dfrac{19}{25}$.

$P(F \cup \overline{C}) = 76\%$

40.2 Seja n o número de clientes que estavam na loja nessa hora do dia.

$\dfrac{4}{5}n$ é o número de clientes do sexo masculino que estavam na loja nessa hora do dia.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Probabilidade de selecionar dois clientes do sexo masculino: $\frac{4}{5}\times\frac{\frac{4}{5}n-1}{n-1}=\frac{12}{19}$

$$\frac{4}{5}\times\frac{\frac{4}{5}n-1}{n-1}=\frac{12}{19}\Leftrightarrow\frac{\frac{4}{5}n-1}{n-1}=\frac{15}{19}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{5}n-1=\frac{15}{19}\times(n-1)\Leftrightarrow\frac{1}{95}n=\frac{4}{19}\Leftrightarrow n=20$$

Estavam na loja 20 clientes.

41. Na figura, está representado o prisma retangular, no qual estão assinalados 11 pontos: $A, B, C, D, Q, E, O, F, G, P, H$

A face $[EFGH]$ está contida no plano xOy: os pontos E, F, G, H têm $z=0$;

a face $[ADEF]$ está contida no plano xOz: os pontos A, D, E, F têm $y=0$;

O é o ponto médio da aresta $[EF]$: como $E, F\in xOy$, então $O\in xOy$;

Q é o ponto médio da aresta $[AD]$: como $A, D\in xOz$, então $Q\in xOz$;

P é o ponto médio da aresta $[GH]$: como $G, H\in xOy$, então $P\in xOy$.

Pontos com ordenada nula (pontos do plano xOz): A, D, E, F, O, Q (6 pontos)

Pontos com ordenada não nula: B, C, G, H, P (5 pontos)

Pontos com abcissa nula: O, Q, P (3 pontos)

$P(B|A)$ é a probabilidade de os quatro pontos terem ordenada nula, sabendo que foram escolhidos exatamente dois pontos com abcissa nula.

Existem ${}^3C_2$ maneiras diferentes de escolher dois pontos de abcissa nula e, para cada uma destas, existem ${}^8C_2$ maneiras diferentes de escolher dois pontos com abcissas não nulas. O número de casos possíveis é ${}^3C_2\times{}^8C_2=3\times28=84$.

De entre os casos possíveis, existem três possibilidades de escolha de dois pontos de abcissa nula OP, QP e OQ. Para as escolhas OP e QP já temos um ponto de ordenada zero selecionado, pelo que falta escolher três. Se os pontos de abcissa nula selecionados foram OQ já temos dois pontos de ordenada nula escolhidos pelo que nos faltam outros dois. Sendo assim, o número de casos favoráveis é $2\times{}^4C_3+{}^4C_2=14$.

Probabilidade: $P(B|A)=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$

PÁG. 193

Aplicar +

42.1 $P(F, F)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$

42.2 $P(V)=P(V, F)+P(F, V)=\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{42}+\frac{10}{42}=\frac{10}{21}$

42.3 Depois de sair uma verdadeira, ficam 6 moedas e, dessas, 2 são falsas.

$P(2.^{\text{a}}F|1.^{\text{a}}V)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

42.4 $P(V_1|F_2)=\frac{P(V_1\cap F_2)}{P(F_2)}=\frac{\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}}{\frac{2}{7}}=\frac{\frac{10}{42}}{\frac{2}{7}}=\frac{5}{6}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

43.1 Dados: $P(X)=0{,}30$, $P(Y)=0{,}20$ e $P(Z)=0{,}50$

Seja V o acontecimento «Ter data de validade».

$P(V|Y)=0{,}92$, logo $P(\overline{V}|Y)=0{,}08$

$P(\overline{V}|Z)=0{,}07$

$$P(X|\overline{V})=0{,}15 \iff \frac{P(X\cap\overline{V})}{P(\overline{V})}=0{,}15 \iff$$
$$\iff P(X\cap\overline{V})=0{,}15\times P(\overline{V})$$

$$P(\overline{V})=P(X\cap\overline{V})+P(Y\cap\overline{V})+P(Z\cap\overline{V}) \iff P(\overline{V})=P(X\cap\overline{V})+P(Y)\times P(\overline{V}|Y)+P(Z)\times P(\overline{V}|Z) \iff$$
$$\iff P(\overline{V})=0{,}15\times P(\overline{V})+0{,}2\times 0{,}08+0{,}5\times 0{,}07 \iff$$
$$\iff 0{,}85\times P(\overline{V})=0{,}051 \iff P(\overline{V})=0{,}06$$

$P(\overline{V})=6\%$

43.2 Queremos determinar $P(Z|\mathrm{V})$.

$P(\mathrm{V})=1-0{,}06=0{,}94$

$P(V|Z)=1-0{,}07=0{,}93$

$P(Z\cap\mathrm{V})=0{,}5\times 0{,}93=0{,}465$

$P(Z|\mathrm{V})=\frac{0{,}465}{0{,}94}\approx 0{,}49$

PÁG. 194

Aplicar +

44. $P((B\cup C)|A)$ é a probabilidade de a segunda carta ser de paus ou ser uma figura, sabendo que na primeira extração saiu uma figura vermelha.

O número de casos possíveis é 51 , pois já saiu uma carta.

Um baralho tem 13 cartas de paus e 12 cartas com figuras (três figuras por cada naipe) mas, já saiu uma carta com figura vermelha na primeira extração pelo que ficaram 11 e 3 destas figuras são do naipe de paus. Assim sendo, o número de casos favoráveis é $13+11-3=21$.

$$P((B\cup C)|A)=\frac{21}{51}=\frac{7}{17}$$

45.1 Sejam B_1 e B_2 os acontecimentos retirar bola branca, respetivamente da caixa e do saco.

A probabilidade de pelo menos uma das bolas retiradas ser branca é a probabilidade do acontecimento contrário de as duas bolas retiradas serem pretas.

$P(B_1\cup B_2)=1-P(\overline{B_1\cup B_2})=1-P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})$

Os acontecimentos relativos a extrações de bolas na caixa e no saco são independentes.

Então, $P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})=P(\overline{B_1})\times P(\overline{B_2})$.

A probabilidade de a bola retirada da caixa ser preta é $P(\overline{B_1})=\frac{15}{20}$.

Sendo n o número de bolas brancas no saco, a probabilidade de a bola retirada do saco ser preta é

$P(\overline{B_2})=\frac{15-n}{15}$.

$$P(B_1\cup B_2)=1-\frac{15}{20}\times\frac{15-n}{15} \iff 0{,}75=1-\frac{15-n}{20} \iff 15-n=5 \iff n=10$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

45.2 Se a bola retirada da caixa for branca, no saco ficam onze bolas brancas e cinco pretas. Se a bola retirada da caixa for preta, no saco ficam dez bolas brancas e seis pretas.

Seja A o acontecimento «As duas bolas retiradas do saco são pretas».

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B_1\cap A)}{P(B_1\cap A)+P(\overline{B_1}\cap A)}=$$

$$=\frac{\frac{5}{20}\times\frac{{}^5C_2}{{}^{16}C_2}}{\frac{5}{20}\times\frac{{}^5C_2}{{}^{16}C_2}+\frac{15}{20}\times\frac{{}^6C_2}{{}^{16}C_2}}=\frac{50}{275}=\frac{2}{11}$$

45.3 Pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis. O acontecimento contrário do acontecimento «As bolas não serem todas da mesma cor» é «As bolas serem todas da mesma cor», ou seja, ou são as brancas ou são as cinco pretas.

O número de casos possíveis é ${}^{20}C_2\times{}^{15}C_3$, que é o número de maneiras de retirar duas das vinte bolas da caixa, e três das quinze bolas do saco. O número de casos favoráveis é ${}^5C_2\times{}^{10}C_3+{}^{15}C_2\times{}^5C_3$, que corresponde ao número de maneiras de extrair cinco bolas brancas, duas da caixa e três do saco (${}^5C_2\times{}^{10}C_3$) ou extrair cinco bolas pretas, duas da caixa e três do saco (${}^{15}C_2\times{}^5C_3$). Portanto, uma expressão que dá a probabilidade pedida é

$$1-\frac{{}^5C_2\times{}^{10}C_3+{}^{15}C_2\times{}^5C_3}{{}^{20}C_2\times{}^{15}C_3}.$$

PÁG. 195

Aplicar +

46.1

a. Sejam A o acontecimento «A bola está numerada com um número par» e B o acontecimento «A bola é preta».

$$P(B)=62{,}5\%=\frac{5}{8}$$

$$P(A|B)=\frac{3}{5}\iff\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{5}\iff$$

$$\iff P(A\cap B)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}\iff P(A\cap B)=\frac{3}{8}$$

Como $P(\overline{B}|A)=\frac{1}{3}$, então $P(B|A)=\frac{2}{3}$.

$$P(B|A)=\frac{2}{3}\iff\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{2}{3}\iff$$

$$\iff\frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}}=P(A)\iff P(A)=\frac{9}{16}$$

$$P(\overline{A})=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}=43{,}75\%$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

b. $P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} =$

$$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - 0{,}625} = \frac{\frac{9}{16} - \frac{3}{8}}{0{,}375} = \frac{1}{2}$$

$P(A|\overline{B}) = P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{1}{2}$

Há tantas bolas que não são pretas numeradas com um número ímpar como bolas que não são pretas com um número par.

46.2 $P(Y|X)$ é a probabilidade de se extraírem consecutivamente as bolas da mesma cor, sabendo que se extraíram consecutivamente as bolas brancas.

Seja n o número de bolas pretas. O número total de bolas é $n+6$.

As bolas brancas são extraídas consecutivamente, pelo que existem $n+6-5+1=n+2$ maneiras diferentes das bolas brancas se posicionarem dentro da sequência de todas as bolas extraídas, e, para cada uma destas, existem $n+1$ maneiras para colocar a bola azul, sobrando n lugares para as n bolas pretas. O número de casos possíveis é $(n+2)\times(n+1)$.

Se as bolas da mesma cor são extraídas consecutivamente, e se temos três cores diferentes, o número de casos favoráveis é $3!$.

$$P(Y|X) = \frac{1}{40} \iff \frac{3!}{(n+2)\times(n+1)} = \frac{1}{40} \iff$$

$$\iff n^2 + 3n - 238 = 0 \iff n = 14 \vee n = -17$$

O número de bolas pretas é 14, pelo que o número total de bolas que estão na caixa é 20.

47. Tem-se $P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ e $P(B|A) = \frac{3}{13}$.

$P(B|A) = P(B)$, logo os acontecimentos A e B são independentes.

48.1 Se A e B são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) =$$
$$= P(B)(1 - P(A)) = P(B) \times P(\overline{A})$$

Logo, $\overline{A}$ e B são acontecimentos independentes.

48.2 Como $\overline{A}$ e B são acontecimentos independentes, então $P(\overline{A}|B) = P(\overline{A}) = 0{,}7$.

$P(\overline{B}) = 0{,}4 \iff 1 - P(B) = 0{,}4 \iff P(B) = 0{,}6$

$P(\overline{A}|B) = 0{,}7 \iff \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = 0{,}7 \iff P(\overline{A} \cap B) = 0{,}42$

$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}42 = 0{,}88$

PÁG. 196

Aplicar +

49.1 Se A e B são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$A \cup B$ e $\overline{A} \cap \overline{B}$ são complementares, pelo que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Assim, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = P(\overline{A}) - P(B) \times (1 - P(A)) =$

$= P(\overline{A}) - P(B) \times P(\overline{A}) = P(\overline{A}) \times (1 - P(B)) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$

Logo, $\overline{A}$ e B são acontecimentos independentes.

49.2 Sejam A o acontecimento «Escolher um iogurte sólido» e B o acontecimento «Escolher um iogurte de morango».

Tem-se $P(A) = 0{,}45$ e $P(B) = 0{,}80$.

Como os acontecimentos A e B são independentes, então $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também são independentes.

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$

$P(\overline{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}55 + 0{,}2 - 0{,}55 \times 0{,}2 = 0{,}64 = 64\%$

50.1 $P = \dfrac{{}^{6}A_5 \times {}^{6}A_5}{{}^{12}A_{10}} = \dfrac{1}{462}$

50.2 Tem-se $P(A) = \dfrac{6! \times {}^{6}A_4}{{}^{12}A_{10}} = \dfrac{1}{462}$ e $P(B) = \dfrac{3! \times 8 \times {}^{9}A_7}{{}^{12}A_{10}} = \dfrac{2}{55}$.

$P(A \cap B) = \dfrac{4 \times 3! \times 3! \times {}^{6}A_4}{{}^{12}A_{10}} = \dfrac{1}{4620}$

$P(A \cap B) \neq \dfrac{1}{462} \times \dfrac{2}{55}$, logo os acontecimentos A e B não são independentes.

Ou

$P(A|B) = \dfrac{3! \times 4! \times {}^{6}A_4}{3! \times 8 \times {}^{9}A_7} = \dfrac{1}{168}$

$P(A|B) \neq P(A)$, logo os acontecimentos A e B não são independentes.

51.1 $P = \dfrac{8!}{10^8} \approx 0{,}00094$

51.2 Os acontecimentos A e B são independentes, pois $P(A) = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$ e $P(A|B) = \dfrac{10 \times {}^{39}A_7}{{}^{40}A_8} = \dfrac{1}{4}$.

PÁG. 197

Aplicar +

52. Tem-se $P(A) = 6\%$, $P(B|A) = 99{,}8\%$ e $P(\overline{B}|\overline{A}) = 99{,}6\%$.

52.1 $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \iff 99{,}8\% \times 6\% = P(A \cap B) \iff P(A \cap B) = 5{,}988\%$

$P(\overline{B}|A) = 100\% - 99{,}8\% = 0{,}2\%$

$P(\overline{B} \cap A) = 6\% \times 0{,}2\% = 0{,}012\%$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 94\%$

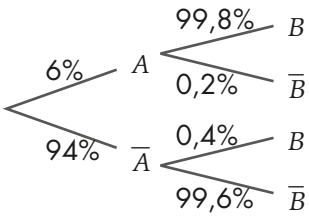
M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

$P(\overline{B}|\overline{A}) = 99{,}6\% \Leftrightarrow \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = 99{,}6\% \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 94\% \times 99{,}6\% \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 93{,}624\%$

$P(B|\overline{A}) = 100\% - 99{,}6\% = 0{,}4\%$

$P(B \cap \overline{A}) = 94\% \times 0{,}4\% = 0{,}376\%$



52.2

a. $P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 93{,}624\%$

b. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = = 0{,}06 \times 0{,}998 + 0{,}94 \times 0{,}004 = 0{,}06364 = 6{,}364\%$

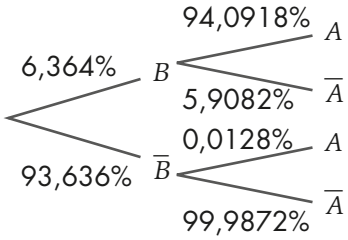
52.3 $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 93{,}636\%$

$P(\overline{A}|\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{93{,}624\%}{93{,}636\%} = 99{,}9872\%$

$P(A|\overline{B}) = 100\% - 99{,}9872\% = 0{,}0128\%$

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{5{,}988\%}{6{,}364\%} = 94{,}0918\%$

$P(\overline{A}|B) = 100\% - 94{,}0918\% = 5{,}9082\%$



52.4 $P(A|\overline{B}) = 0{,}0128\%$

52.5 $P(\overline{B}|A) = 0{,}2\%$

$P(A|B) = 94{,}0918\%$

$P(B|A) = 99{,}8\%$

$P(A|\overline{B}) = 0{,}0128\%$

52.6 $P(A) \times P(B) = 6\% \times 6{,}364\% = 0{,}38184\%$

$P(A \cap B) = 5{,}988\%$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, logo os acontecimentos A e B não são independentes.

53. $P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P(\overline{B}|A) = 3P(B|A) \Leftrightarrow \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = 3\dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{B} \cap A) = 3P(B \cap A)$

$P(A) = P(\overline{B} \cap A) + P(B \cap A) \Leftrightarrow 0{,}6 = 3P(B \cap A) + P(B \cap A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B \cap A) = \dfrac{0{,}6}{4} \Leftrightarrow P(B \cap A) = 0{,}15$

$P(A \cup B) = 7P(B \cap \overline{A}) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 7(P(B) - P(A \cap B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}6 + P(B) - 0{,}15 = 7P(B) - 7 \times 0{,}15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1{,}5 = 6P(B) \Leftrightarrow P(B) = 0{,}25$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

$P(A)\times P(B)=0{,}6\times 0{,}25=0{,}15$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$, logo os acontecimentos A e B são independentes.

PÁG. 198

Aplicar +

54. Seja M o acontecimento «Ficar aprovado a Análise Matemática» e L o acontecimento «Ficar aprovado a Álgebra Linear».

Tem-se $P(M)=70\%$ e $P(L)=60\%$.

Como os acontecimentos M e L são independentes, então $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

$P(M\cup L)=P(M)+P(L)-P(M\cap L)=$

$=0{,}7+0{,}6-0{,}7\times 0{,}6=0{,}88$

$P(M|M\cup L)=\dfrac{P(M\cap(M\cup L))}{P(M\cup L)}=$

$=\dfrac{P(M)}{P(M\cup L)}=\dfrac{0{,}7}{0{,}88}\approx 79{,}5\%$

55.1 A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	0	3	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$P(X=0)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$, $P(X=3)=\dfrac{1}{6}$, $P(X=6)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

55.2 Comecemos por construir uma tabela de dupla entrada para evidenciar os resultados da experiência e melhor identificar o valor da variável correspondente a cada resultado.

+	**0**	**3**	**6**
0	0	3	6
3	3	6	9
6	6	9	12

a. $Y\in\{0\,,3\,,6\,,9\,,12\}$

b. $P(Y=0)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$, $P(Y=3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}\times 2=\dfrac{1}{6}$, $P(Y=6)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times 2+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{36}$,

$P(Y=9)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{3}\times 2=\dfrac{1}{9}$, $P(Y=12)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória Y é dada pela tabela seguinte.

y_i	0	3	6	9	12
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

c. $P(Y<5)=P(Y=0)+P(Y=3)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{12}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

56. $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1 \iff 3P(X=1)+P(X=2)=1$

Se $P(X=1)=\frac{1}{3}$, então $P(X=2)=0$ e isso não é possível.

Opção correta: **(D)**

PÁG. 199

Aplicar +

57.1 $P(X>3)=P(X<3) \iff P(X=4)=P(X=1)+P(X=2) \iff b=0{,}3$

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1 \iff 0{,}2+0{,}1+a+0{,}3=1 \iff a=0{,}4$

57.2

a. $P(2\leqslant X<4)=P(X=2)+P(X=3)=0{,}5$

b. $P(X>1\,|\,X\leqslant 3)=\frac{P(1<X\leqslant 3)}{P(X\leqslant 3)}=$

$$=\frac{P(X=2)+P(X=3)}{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)}=\frac{0{,}5}{0{,}7}=\frac{5}{7}$$

58.1 Se não sai nenhum chocolate branco, significa que saem dois chocolates negros.

$P(X=0)=0{,}36 \iff P(\text{negro})\times P(\text{negro})=0{,}36 \iff P(\text{negro})=0{,}6$

Opção correta: **(D)**

58.2 $P(X=2)=0{,}16 \iff P(\text{branco})\times P(\text{branco})=0{,}16 \iff P(\text{branco})=0{,}4$

$P(\text{negro})>P(\text{branco})$, logo há mais chocolates negros do que chocolates brancos.

Opção correta: **(B)**

58.3 (A) O número de chocolates negros seria $0{,}6\times 6=3{,}6$, o que não é possível.

(B) O número de chocolates negros seria $0{,}6\times 8=4{,}8$, o que não é possível.

(C) O número de chocolates negros seria $0{,}6\times 10=6$ e o número de chocolates brancos 4.

(D) O número de chocolates negros seria $0{,}6\times 12=7{,}2$, o que não é possível.

Opção correta: **(C)**

PÁG. 200

Aplicar +

58.4 Seja n o número de chocolates negros na caixa.

$P(\text{branco})=0{,}4 \iff \frac{8}{n+8}=0{,}4 \iff n=12$

A variável aleatória Y pode tomar os valores 9, 10, 11 ou 12, ou seja, $Y\in\{9,10,11,12\}$.

$P(Y=9)=\frac{^{12}C_3}{^{20}C_3}=\frac{11}{57}$, $P(Y=10)=\frac{^{12}C_2\times{}^{8}C_1}{^{20}C_3}=\frac{44}{95}$, $P(Y=11)=\frac{^{12}C_1\times{}^{8}C_2}{^{20}C_3}=\frac{28}{95}$, $P(Y=12)=\frac{^{8}C_3}{^{20}C_3}=\frac{14}{285}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória Y é dada pela tabela seguinte.

y_i	9	10	11	12
$P(Y=y_i)$	$\frac{11}{57}$	$\frac{44}{95}$	$\frac{28}{95}$	$\frac{14}{285}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

59. A variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1, 2 ou 3, ou seja, $X \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Se a operadora OEN de telecomunicações detém 35% do mercado de internet móvel, as restantes operadoras detêm 65% do mercado de internet móvel.

$P(X=0) = (0{,}65)^3 = 0{,}274625$

$P(X=1) = {}^3C_1 \times 0{,}35 \times (0{,}65)^2 = 0{,}443625$

$P(X=2) = {}^3C_2 \times (0{,}35)^2 \times 0{,}65 = 0{,}238875$

$P(X=3) = (0{,}35)^3 = 0{,}042875$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,274625	0,443625	0,238875	0,042875

60.1 O número de casos possíveis é ${}^{10}C_2 = 45$.

O número de escolhas que podemos fazer de modo que saiam duas bolas brancas é ${}^3C_2 = 3$. Temos 5 bolas numeradas com números ímpares, logo o número de escolhas que podemos fazer de modo que saiam duas bolas ímpares é ${}^5C_2 = 10$. O número de casos favoráveis é ${}^3C_2 + {}^5C_2 = 13$. Logo, $P = \frac{13}{45}$.

60.2 Das cinco bolas pretas existentes só duas delas têm número par.

A variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1 ou 2, ou seja, $X \in \{0, 1, 2\}$.

$P(X=0) = \frac{{}^8C_3}{{}^{10}C_3} = \frac{7}{15}$, $P(X=1) = \frac{{}^8C_2 \times {}^2C_1}{{}^{10}C_3} = \frac{7}{15}$, $P(X=2) = \frac{{}^8C_1 \times {}^2C_2}{{}^{10}C_3} = \frac{1}{15}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

61.1 Como na caixa B só existem bolas laranja, cinco bolas laranja, no conjunto das seis bolas retiradas há sempre pelo menos duas laranja, pelo que $P(X \geqslant 2) = 1$.

61.2 A variável aleatória X pode tomar os valores 2, 3, 4 ou 5, ou seja, $X \in \{2, 3, 4, 5\}$.

$P(X \leqslant 4) = 1 - P(X=5)$

Para saírem cinco bolas laranja tem de ser retirada uma bola da caixa A, duas da caixa B e duas da caixa C.

$P(X \leqslant 4) = 1 - \frac{{}^3C_1}{{}^4C_2} \times 1 \times \frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} = \frac{4}{5}$

PÁG. 201

Aplicar +

62. $X \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y \in \{-1, 0, 1\}$, $Z \in \{-1, 0, 1\}$

62.1 Não pode ser a variável aleatória X porque $X \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

O produto dos números das duas faces voltadas para cima é -1 quando no dado cúbico sai o número -1 e no dado octaédrico sai o número 1, ou ao contrário.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

$P(Z=-1)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{8}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{5}{24}$

Não pode ser a variável aleatória Z.

É a variável aleatória Y.

62.2 $P(W=-1 \mid |W|=1)=\frac{P(W=-1\cap|W|=1)}{P(|W|=1)}=$

$$=\frac{P(W=-1)}{P(W=-1\vee W=1)}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{7}{12}+\frac{1}{12}}=\frac{7}{8}$$

63. $P(X=2|2\leqslant X\leqslant 3)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{P(X=2)}{P(2\leqslant X\leqslant 3)}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{a+a^2}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{1+a}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+a=\frac{4}{3}\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$$

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1\Leftrightarrow b+a+a^2+b=1\Leftrightarrow 2b+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2b=\frac{5}{9}\Leftrightarrow b=\frac{5}{18}$$

Opção correta: **(B)**

PÁG. 202

Aplicar +

64. Façamos uma tabela de dupla entrada para obter a soma dos números das faces voltadas para cima.

		Dado 1			
	+	0	0	1	2
Dado 2	0	0	0	1	2
	0	0	0	1	2
	0	0	0	1	2
	0	0	0	1	2
	1	1	1	2	3
	1	1	1	2	3

$X\in\{0,1,2,3\}$

$P(X=0)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$, $P(X=1)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$, $P(X=2)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$, $P(X=3)=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Opção correta: **(A)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

65.1 $P(X=-a)+P(X=a)+P(X=a^2)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{7}+\left(\frac{1}{7}+a\right)+\left(\frac{1}{7}+2a\right)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a=1-\frac{3}{7} \Leftrightarrow a=\frac{4}{21}$

$P(X=a^2)=\frac{1}{7}+2\times\frac{4}{21}=\frac{11}{21}$

65.2 $P(X=-a)+P(X=a)+P(X=a^2)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{7}+\left(\frac{1}{7}\times a\right)+\left(\frac{1}{7}\times a^2\right)=1 \Leftrightarrow a^2+a+1=7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+a-6=0 \Leftrightarrow a=2 \vee a=-3 \underset{a\in\mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} a=2$

$P(X=-a)=P(X=-2)=\frac{1}{7}$

$P(X=a)=P(X=2)=\frac{1}{7}\times 2=\frac{2}{7}$

$P(X=a^2)=P(X=4)=\frac{1}{7}\times 2^2=\frac{4}{7}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	-2	2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

PÁG. 203

Aplicar +

66. $0{,}5+b+0{,}3=1 \Leftrightarrow b=0{,}2$

$\mu=1{,}35 \Leftrightarrow a\times 0{,}5+2a\times 0{,}2+3\times 0{,}3=1{,}35 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}9a=0{,}45 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

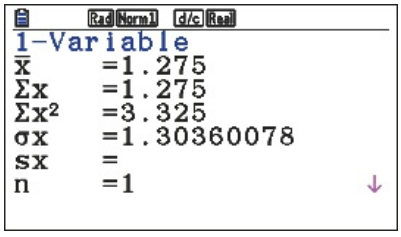
Opção correta: **(A)**

67. $0{,}5a+0{,}3a+2a+1{,}2a=1 \Leftrightarrow 4a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	-1	0	1	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$

Recorrendo à calculadora gráfica, obtemos $\sigma \approx 1{,}3$.



Opção correta: **(D)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

68. A variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1 ou 2, ou seja, $X \in \{0, 1, 2\}$.

$P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, $P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$\mu=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$

Opção correta: **(C)**

69. $P(X=-1)=P(X=2) \iff a=d$

$\mu=\frac{5}{12} \iff -1\times a+0\times b+1\times c+2\times a=\frac{5}{12} \iff$

$\iff a+c=\frac{5}{12} \iff c=\frac{5}{12}-a$

$a+b+c+d=1 \iff a+b+\frac{5}{12}-a+a=1 \iff$

$\iff a+b=\frac{7}{12}$

$P(-1\leqslant X\leqslant 0)=a+b=\frac{7}{12}$

PÁG. 204

Aplicar +

70. $P(\text{«Ganha o triplo do valor apostado»})=\frac{20}{360}=\frac{1}{18}$

$P(\text{«Perde o valor apostado»})=\frac{150}{360}+\frac{90}{360}=\frac{2}{3}$

$P(\text{«Recebe de volta o valor apostado»})=\frac{100}{360}=\frac{5}{18}$

70.1

a. $P=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

b. Para ganhar 2 euros, o jogador tem de numa das apostas ganhar o triplo do valor apostado e na outra perder o valor apostado, ou seja, recebe 6 euros, mas como cada aposta tem o valor de 2 euros, ganha 2 euros.

$P=\frac{1}{18}\times\frac{2}{3}\times 2=\frac{2}{27}$

70.2

a. A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	-2	0	4
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$

b. $\mu=-2\times\frac{2}{3}+0\times\frac{5}{18}+4\times\frac{1}{18}=-\frac{10}{9}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Em média, um jogador perde $\frac{10}{9}$ de euro por jogada, pelo que em 36 jogadas, estima-se que perca $\frac{10}{9} \times 36 = 40$ euros.

c. $P(\text{«Recebe de volta o dobro do valor apostado»}) = P(X = 2) = \frac{100}{360} = \frac{5}{18}$

$P(\text{«Perde o valor apostado»}) = P(X = -2) = \frac{150}{360} = \frac{5}{12}$

$P(\text{«Recebe de volta o valor apostado»}) = P(X = 0) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$

$P(X = a) = \frac{1}{18}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	-2	0	2	a
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$

$\mu = 0 \iff -2 \times \frac{5}{12} + 0 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{5}{18} + a \times \frac{1}{18} = 0 \iff \frac{a}{18} = \frac{5}{18} \iff a = 5$

No setor correspondente ao arco AB, ganha-se 5 euros, como cada aposta tem o valor de 2 euros, recebe-se 7 euros, ou seja, três vezes e meia o valor apostado.

71.1 Comecemos por construir uma tabela de dupla entrada para evidenciar os resultados da experiência e melhor identificar o valor da variável correspondente a cada resultado.

+	**0,5**	**0,5**	**0,5**	**0,5**	**1**	**2**
0,5		1	1	1	1,5	2,5
0,5	1		1	1	1,5	2,5
0,5	1	1		1	1,5	2,5
0,5	1	1	1		1,5	2,5
1	1,5	1,5	1,5	1,5		3
2	2,5	2,5	2,5	2,5	3	

$P(X = 1) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$, $P(X = 1{,}5) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$, $P(X = 2{,}5) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$, $P(X = 3) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

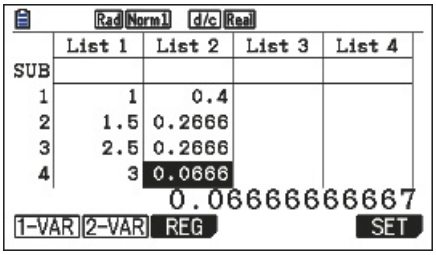
x_i	1	$1{,}5$	$2{,}5$	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

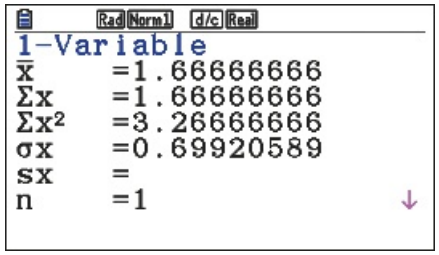
$\mu = 1 \times \frac{2}{5} + 1{,}5 \times \frac{4}{15} + 2{,}5 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{1}{15} = \frac{5}{3}$

Extraindo, simultaneamente e ao acaso, duas moedas da carteira, a quantia média retirada por extração é $\frac{5}{3}$ euros.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

71.2 Vamos recorrer à calculadora gráfica para determinar o valor de σ.





$\sigma \approx 0{,}699$

$P(\mu < X < \mu + \sigma) = P(1{,}667 < X < 1{,}667 + 0{,}699) = P(1{,}667 < X < 2{,}366) = 0$

PÁG. 205

Aplicar +

72. $P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = P(X=4) = P(X=5) = \frac{1}{5}$

$\mu = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5} = 3$

Neste contexto, com cinco chaves indistinguíveis ao tato, em que apenas uma abre uma porta, o número médio de tentativas que se tem de efetuar até se conseguir abrir a porta é 3.

73.1 r é o raio da circunferência menor, $r + r = 2r$ é o raio da circunferência do meio e $3r$ é o raio da circunferência maior.

$P(X > 9) = \frac{\pi \times (2r)^2}{\pi \times (3r)^2} = \frac{4}{9}$

73.2 $P(X = 12) = \frac{\pi \times r^2}{\pi \times (3r)^2} = \frac{1}{9}$

$P(X = 10) = \frac{\pi \times (2r)^2 - \pi \times r^2}{\pi \times (3r)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$P(X = 8) = \frac{\pi \times (3r)^2 - \pi \times (2r)^2}{\pi \times (3r)^2} = \frac{5}{9}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	8	10	12
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

73.3 $\mu = 8 \times \frac{5}{9} + 10 \times \frac{1}{3} + 12 \times \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$

Em 18 jogadas, estima-se que o total de pontos alcançado seja $18 \times \frac{82}{9} = 164$, pelo que é mais provável ter menos de 170.

PÁG. 206

Aplicar +

74.1 Vamos construir uma tabela de frequências absolutas simples e acumuladas.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

N.º de livros lidos	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
0	8	8
1	9	17
2	6	23
3	2	25

$P = \frac{6+2}{25} = \frac{8}{25}$

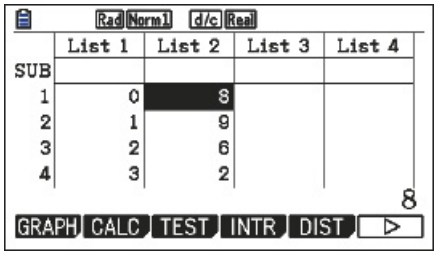
74.2 $P = \frac{{}^{9}C_3 + {}^{6}C_3}{{}^{25}C_3} = \frac{26}{575} \approx 4{,}5\%$

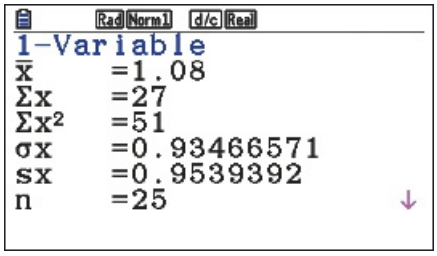
74.3 $P(X=0) = \frac{8}{25} = 32\%$, $P(X=1) = \frac{9}{25} = 36\%$, $P(X=2) = \frac{6}{25} = 24\%$, $P(X=3) = \frac{2}{25} = 8\%$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	32%	36%	24%	8%

74.4 Vamos recorrer à calculadora gráfica para determinar o valor médio e o desvio-padrão.





$\bar{x} = 1{,}08$ e $s \approx 0{,}954$.

75.1 A função massa de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	20	22	23	24	25	27	32	35	40
$P(X=x_i)$	0,08	0,16	0,2	0,2	0,16	0,08	0,04	0,04	0,04

75.2 $P(X > 24) = 0{,}16 + 0{,}08 + 3 \times 0{,}04 = 0{,}36$

PÁG. 207

Aplicar +

75.3

a. $P(X < 27) = 0{,}08 + 0{,}16 + 2 \times 0{,}2 + 0{,}16 = 0{,}80$

O número de alunos que fizeram menos de 27 abdominais é $25 \times 0{,}80 = 20$.

$P(22 < X < 27) = 2 \times 0{,}2 + 0{,}16 = 0{,}56$

O número de alunos que fizeram mais de 22 abdominais e menos de 27 é $25 \times 0{,}56 = 14$.

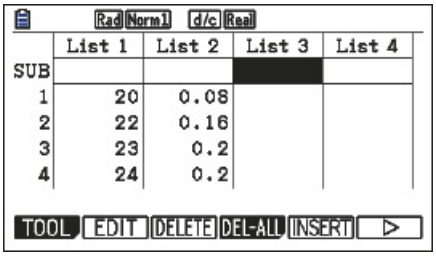
$P(X \leqslant 22) = 0{,}08 + 0{,}16 = 0{,}24$

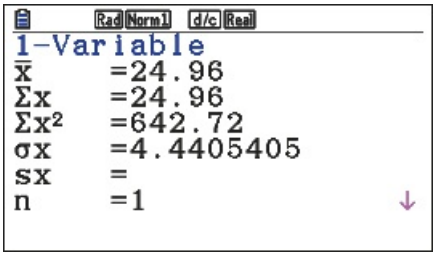
M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

O número de alunos que fizeram 22 abdominais ou menos é $25 \times 0{,}24 = 6$.

$$P = \frac{{}^{14}C_1 \times {}^{6}C_1}{{}^{20}C_2} = \frac{42}{95}$$

b. Vamos recorrer à calculadora gráfica para determinar o valor médio e o desvio-padrão.





$\bar{x} \approx 25$ e $s \approx 4{,}5$.

76. $\mu = 2$

$P(2 - \sigma < X < 2 + \sigma) \approx 0{,}6827$

Opção correta: **(C)**

77.1 $P(2 - 2\sigma < X < 2 + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(2{,}78 < X < 3{,}22) \approx 0{,}9545$

$4\sigma \approx 3{,}22 - 2{,}78 \iff \sigma \approx 0{,}11$

77.2 $P(X < 0{,}8) = 10\%$

$P(0{,}8 < X < 3) = P(3 < X < 5{,}2) = 50\% - 10\% = 40\%$

78. $P(X > a) > P(X < b)$

A distribuição normal é simétrica relativamente à sua média c.

A distância de a a c é $a - c$.

$P(X > a) = P(X < c - (a - c)) = P(X < 2c - a)$

$P(X < 2c - a) > P(X < b)$

$2c - a > b \iff c > \frac{a + b}{2}$

Opção correta: **(D)**

79.1 Seja A o acontecimento «Ser aprovado».

$P(A) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\overline{A}) = 1 - P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 1 - 0{,}9545 \approx 4{,}6\%$

79.2 $P = 4 \times 0{,}0455 \times (0{,}9545)^3 \approx 16\%$

PÁG. 208

Aplicar +

80.1 A distância de 58 a 60 é 2.

$P(X < 58) = P(X > 62) = 40\%$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

80.2 $P(60 < X < 62) = 50\% - 40\% = 10\%$

80.3 $P(60 < X < 62 \mid X \geqslant 58) = \dfrac{P(60 < X < 62)}{P(X \geqslant 58)} =$

$$= \frac{10\%}{P(58 < X < 60) + P(X \geqslant 58)} = \frac{10\%}{10\% + 50\%} = \frac{1}{6}$$

81.1 A curva com menor valor médio é C_4, logo $X \longrightarrow C_4$; segue-se C_3, logo $Z \longrightarrow C_3$.

As curvas C_1 e C_2 têm o mesmo valor médio, mas a curva C_2 é mais achatada pelo que o seu desvio-padrão é maior. Então, $Y \longrightarrow C_2$ e $W \longrightarrow C_1$.

81.2

a. $P(X < -1) = \dfrac{1 - P(-1 < X < 1)}{2} = \dfrac{1 - 0{,}6827}{2} = 0{,}1587$

b. $P(Z > 3 \mid Z < 5) = \dfrac{P(3 < Z < 5)}{P(Z < 5)} = \dfrac{\frac{0{,}9545}{2}}{0{,}5 + \frac{0{,}9545}{2}} = 0{,}4884$

c. $P(8 < W < 10 \mid W > 6) = \dfrac{P(8 < W < 10)}{P(W > 6)} =$

$$= \frac{P(6 < W < 10) - P(6 < W < 8)}{0{,}5} =$$

$$= \frac{(0{,}9545 - 0{,}6827) : 2}{0{,}5} = 0{,}2718$$

d. $P(Y < 0 \vee Y > 18) = P(Y < 0) + P(Y > 18) =$

$$= \left(0{,}5 - \frac{0{,}6827}{2}\right) + \left(0{,}5 - \frac{0{,}9545}{2}\right) = 0{,}1814$$

82.1

a. $P(X > 80) = \dfrac{1 - 0{,}6827}{2} \approx 0{,}159$

b. $P(X < 60) = \dfrac{1 - 0{,}9973}{2} \approx 0{,}001$

82.2

a. $P(65 < X < 80) = P(65 < X < 75) + P(75 < X < 80) = \dfrac{0{,}9545}{2} + \dfrac{0{,}6827}{2} \approx 81{,}9\%$

b. $P(85 < X < 90) = \dfrac{P(60 < X < 90) - P(65 < X < 85)}{2} = \dfrac{0{,}9973 - 0{,}9545}{2} \approx 2{,}1\%$

PÁG. 209

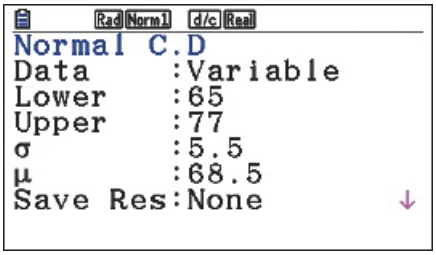
Aplicar +

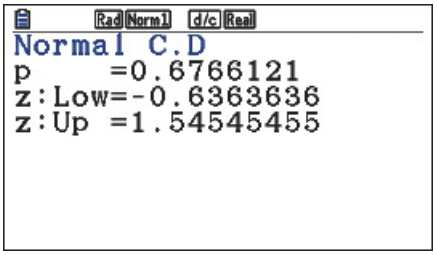
83.1 É mais provável pesar mais de $35{,}5$ kg, pois $35{,}5 - 35 < 35 - 34$.

83.2 É tão provável pesar mais de $33{,}5$ kg, como pesar menos de $36{,}5$ kg, pois $36{,}5 - 35 = 35 - 33{,}5$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

84. Vamos determinar esta probabilidade com recurso à calculadora.





$P(65 < X < 77) \approx 0{,}677$

$1000 \times 0{,}677 = 677$

Opção correta: **(B)**

85.1 $P(890 < X < 1010) \approx 0{,}6827$

$\mu - \sigma = 890 \iff \sigma = 60$

a. $P(950 < X < 1010) = \dfrac{0{,}6827}{2} = 34{,}1\%$

b. $P(X > 830) = \dfrac{P(830 < X < 1010)}{2} + P(X > 950) =$

$= \dfrac{0{,}9545}{2} + 0{,}5 = 97{,}7\%$

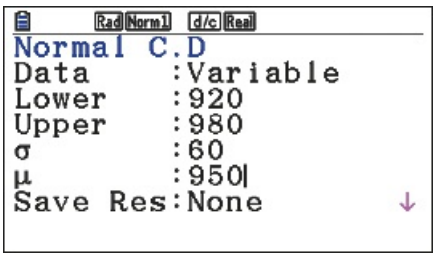
c. $P(X < 1010) = \dfrac{P(890 < X < 1010)}{2} + P(X < 950) =$

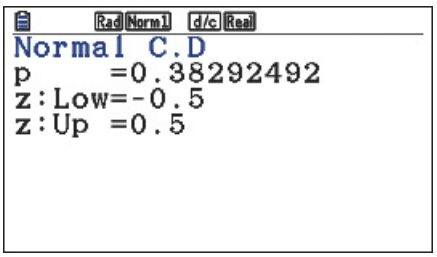
$= \dfrac{0{,}6827}{2} + 0{,}5 = 84{,}1\%$

d. $P(770 < X < 830) = \dfrac{P(770 < X < 1130) - P(830 < X < 1070)}{2} =$

$= \dfrac{0{,}9973 - 0{,}9545}{2} = 2{,}1\%$

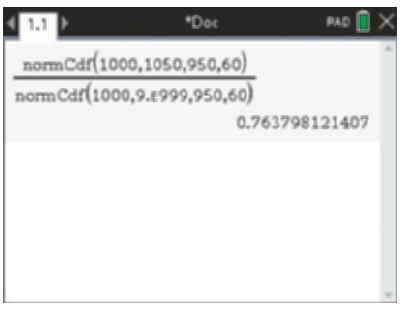
85.2 Vamos determinar $P(920 < X < 980)$ com recurso à calculadora.





$P(920 < X < 980) \approx 38{,}3\%$

85.3 $P(1000 < X < 1050 \mid X > 1000) = \dfrac{P(1000 < X < 1050)}{P(X > 1000)} = 76\%$



M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

86. $\mu = 3$

86.1 Se $P(X > k) = 16\%$, então $k > 3$.

Opção correta: **(D)**

PÁG. 210

Aplicar +

86.2 $P(3 < X < 5) = P(X > 3) - P(X > 5) = 0{,}5 - P(X > 5) \neq 0{,}5$

Opção correta: **(A)**

86.3

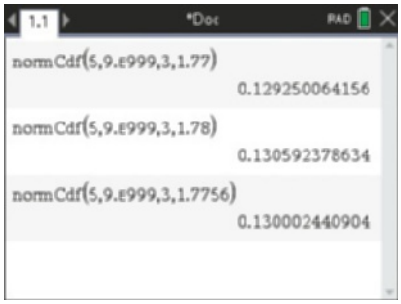
a. Os valores 1 e 5 distam o mesmo do valor médio: $3 - 1 = 5 - 3 = 2$.

$P(1 < X < 5) = 1 - (P(X < 1) + P(X > 5)) =$

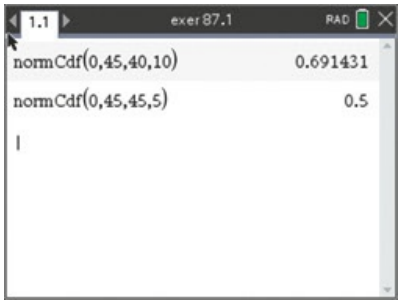
$= 1 - 2 \times 0{,}13 = 0{,}74$

Opção correta: **(C)**

b. 1,78

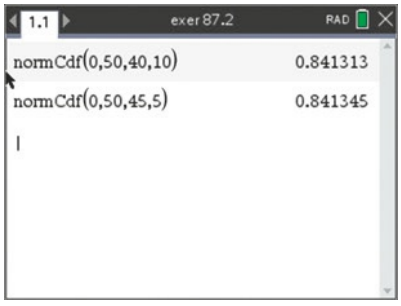


87.1 O Jaime deve optar pelo percurso A, uma vez que a probabilidade de chegar a horas é de aproximadamente $0{,}69$, enquanto pelo percurso B é de $0{,}5$.



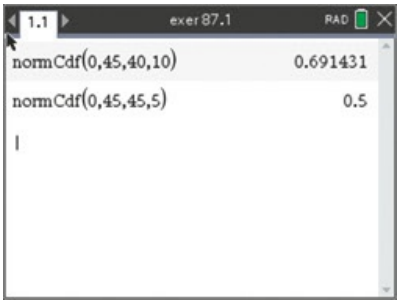
87.2 Como $50 = \mu + \sigma$ para qualquer uma das distribuições, os valores das probabilidades são iguais.

Pode optar, ou não, é indiferente o percurso escolhido, pois ambos têm a mesma probabilidade de o Jaime chegar a horas, 0,84.



M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

87.3 Neste caso, o percurso B seria a opção correta, pois a probabilidade de chegar a horas é superior à do percurso A.



PÁG. 218

Autoavaliação

1. $A=\{2\,,\,3\,,\,5\}$

Opção correta: **(C)**

2. $P(\text{par})=P(\{2\})+P(\{4\})=16{,}8\%+50\%=66{,}8\%$

Opção correta: **(D)**

3. O número de casos possíveis é ${}^{15}C_3$.

Para que as três bolas retiradas sejam da mesma cor, só existem duas possibilidades: ou são as três bolas azuis ou são as três bolas pretas. Portanto, o número de casos favoráveis é ${}^{8}C_3+{}^{6}C_3$.

$$P=\frac{{}^{8}C_3+{}^{6}C_3}{{}^{15}C_3}=\frac{76}{455}\approx 16{,}7\%$$

4. $P(A)=3P(B) \iff P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})=3\left(P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)\right) \iff$

$\iff P(A\cap B)+0{,}55=3\left(P(A\cap B)+0{,}15\right) \iff 2P(A\cap B)=0{,}1 \iff$

$\iff P(A\cap B)=\frac{1}{20}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

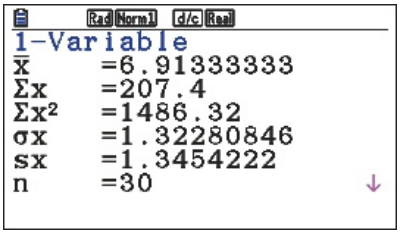
$=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})+P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)-P(A\cap B)=$

$=2\times\frac{1}{20}+0{,}15+0{,}55=0{,}75$

PÁG. 219

Autoavaliação

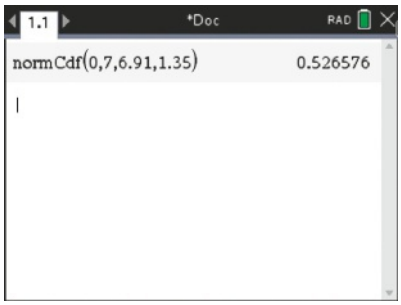
5.1 Depois de introduzirmos os valores numa calculadora obtemos:



O valor médio é 6,91 e o desvio-padrão é 1,35 .

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

5.2 Seja $X \sim N(6{,}91\,;\,1{,}35)$.



$P(X<7)=53\%$

6. $P\left(X|\overline{Y}\right)=\frac{1}{3}$ significa que $\frac{1}{3}$ das figuras que estão pintadas de verde ou de vermelho são círculos.

Opção correta: **(B)**

7. Vamos definir os acontecimentos T : «O dado é tetraédrico» e S : «O número é superior a três».

O número de dados cúbicos é o dobro do número de dados tetraédricos.

$P(T)=\frac{1}{3}$, $P(S|T)=\frac{1}{4}$, $P\left(S|\overline{T}\right)=\frac{1}{2}$

$$P(T|S)=\frac{P(T\cap S)}{P(S)}=\frac{P(T)\times P(S|T)}{P(T\cap S)+P(\overline{T}\cap S)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+P(\overline{T})\times P\left(S|\overline{T}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$$

PÁG. 220

Autoavaliação

8.1 $P\left(C|\left(\overline{A}\cap B\right)\right)$ é a probabilidade de a soma dos números das quatro bolas ser ímpar, sabendo que a primeira bola é preta, ou seja, está numerada com um número ímpar, e a segunda é branca, ou seja, está numerada com um número par.

Como já saiu uma bola branca e uma bola preta, ou seja, uma par e uma ímpar, a caixa contém sete bolas pares e nove bolas ímpares.

Para que a soma dos números das quatro bolas seja ímpar, as bolas que vão ser retiradas têm de ser ambas pares, ou têm de ser ambas ímpares.

$$P=\frac{7}{16}\times\frac{6}{15}+\frac{9}{16}\times\frac{8}{15}=\frac{19}{40}=47{,}5\%$$

8.2 A variável aleatória X pode tomar os valores 0 e 1 , $X\in\{0\,,1\}$.

A variável aleatória X toma o valor 0 quando as duas bolas retiradas são brancas.

$$P(X=0)=\frac{8^2}{18^2}=\frac{16}{81}$$

A variável aleatória X toma o valor 1 quando as duas bolas retiradas são pretas ou uma das bolas é branca e a outra é preta.

$$P(X=1)=\frac{10^2}{18^2}+\frac{8\times10\times2}{18^2}=\frac{65}{81}$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{65}{81}$

9. Seja N o acontecimento «Ter nacionalidade portuguesa» e T o acontecimento «Comprar calçado para trabalho».

$P(N)=45\%$, $P(N|T)=\frac{2}{7}$, $P(N\cap\overline{T})=\frac{1}{4}$

$P(N)=P(N\cap T)+P(N\cap\overline{T}) \iff 0{,}45=P(N\cap T)+0{,}25 \iff P(N\cap T)=0{,}2$

$P(N|T)=\frac{2}{7} \iff \frac{P(N\cap T)}{P(T)}=\frac{2}{7} \iff P(T)=\frac{0{,}2}{\frac{2}{7}} \iff P(T)=0{,}7$

$P(T\cap\overline{N})=P(T)-P(T\cap N)=0{,}7-0{,}2=0{,}5$

$P(T|\overline{N})=\frac{P(T\cap\overline{N})}{P(\overline{N})}=\frac{0{,}5}{1-0{,}45}=\frac{10}{11}$

10. $P(A\cup B)-3P(A\cap B)=P(A\cap\overline{B}) \iff$

$\iff P(A)+P(B)-P(A\cap B)-3P(A\cap B)=P(A\cap\overline{B}) \iff$

$\iff P(A)+P(B)-3P(A\cap B)=\underbrace{P(A\cap\overline{B})+P(A\cap B)}_{=P(A)} \iff$

$\iff P(B)-3P(A\cap B)=0 \iff P(B)=3P(A\cap B)$

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{3P(A\cap B)}=\frac{1}{3}$

Os acontecimentos são independentes porque $P(A|B)=P(A)=\frac{1}{3}$.

PÁG. 221

Autoavaliação

11. $P(X=1)+P(X=4)+P(X=b)=1 \iff \frac{1}{6}+a+\frac{1}{12}=1 \iff a=\frac{3}{4}$

$\mu=\frac{11}{3} \iff 1\times\frac{1}{6}+4\times\frac{3}{4}+b\times\frac{1}{12}=\frac{11}{3} \iff$

$\iff \frac{b}{12}=\frac{1}{2} \iff b=6$

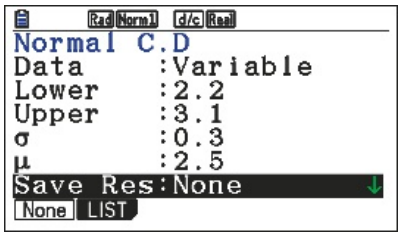
Opção correta: **(B)**

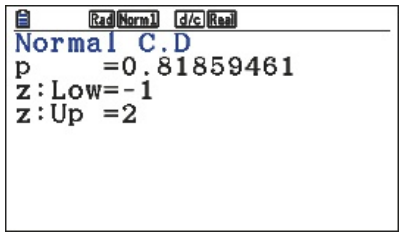
12. Se $P(X<2)=P(X>3)$, então 2 e 3 estão à mesma distância do valor médio, pois a distribuição normal é perfeitamente simétrica relativamente ao seu valor médio.

$\mu=\frac{2+3}{2}=2{,}5$

$X\sim N(2{,}5\,;\,0{,}3)$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

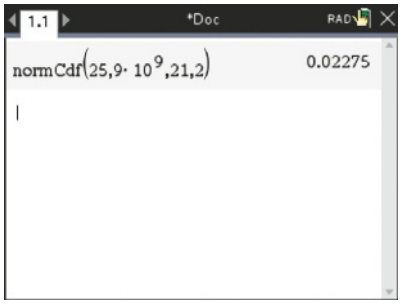




$P(2{,}2 < X < 3{,}1) \approx 0{,}82$

Opção correta: **(A)**

13. $X \sim N(21\ ,\ 2)$



$P(X \geqslant 25) \approx 0{,}02275$

$132 \times 0{,}02275 \approx 3$

Estima-se que foram três os dias em que a Joana não chegou antes das 8h45 .

14. O número de casos possíveis é $10!$, que é o número de maneiras de permutar os dez amigos pelos dez lugares da mesa. Para o número de casos favoráveis, pode-se começar por escolher, ordenadamente, dois dos cinco amigos de Sintra para os dois lugares das cabeceiras. O número de maneiras de o fazer é ${}^{5}A_{2}$.

Para cada uma destas maneiras, os restantes três amigos de Sintra podem escolher um dos dois lados da mesa, podendo fazê-lo de ${}^{2}C_{1} = 2$ maneiras. Como têm de ficar juntos, podem ocupar as posições 1 a 3 ou 2 a 4 do lado da mesa que foi escolhido. Finalmente, para cada uma destas maneiras, os três permutam de $3!$ maneiras, nos três lugares escolhidos, e os restantes cinco amigos permutam de $5!$ maneiras nos restantes cinco lugares. Logo, o número de casos favoráveis é ${}^{5}A_{2} \times 2 \times 2 \times 3! \times 5!$. Pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis, o que é o caso, pelo que a probabilidade pedida é dada por $\frac{{}^{5}A_{2} \times 2 \times 2 \times 3! \times 5!}{10!}$.

PÁG. 222

Preparar o exame

1. $P(C) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

Opção correta: **(A)**

2. Queremos 1 pera + 3 maçãs ou 2 peras + 2 maçãs.

Casos possíveis: ${}^{12}C_{4} = 495$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Casos favoráveis:

1 pera + 3 maçãs : ${}^{3}C_{1} \times {}^{9}C_{3} = 3 \times 84 = 252$

2 peras + 2 maçãs : ${}^{3}C_{2} \times {}^{9}C_{2} = 3 \times 36 = 108$

Total: $252 + 108 = 360$

Probabilidade: $\frac{360}{495} = \frac{8}{11}$

3. Há $9 \times 10^{4} = 90\,000$ números de cinco algarismos (o primeiro algarismo não pode ser 0).

3.1 Casos favoráveis: $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 27\,216$

Probabilidade: $\frac{27\,216}{90\,000} = 0{,}3024$

3.2 Para ser ímpar, o último algarismo tem de ser ímpar, há cinco possibilidades.

1.º passo: escolher as posições para colocar os dois zeros. Há três posições possíveis, pois temos de excluir a primeira e a última.

2.º passo: preencher as duas restantes posições com algarismos diferentes de zero. Há $9 \times 9 = 81$ maneiras de o fazer.

Casos favoráveis: $5 \times 3 \times 81 = 1215$

Probabilidade: $\frac{1215}{90\,000} = 0{,}0135$

3.3 Se os algarismos estiverem dispostos por ordem crescente, o número não pode ter 0 (senão começaria por 0) e, portanto, vamos escolher cinco algarismos de 1 a 9 : ${}^{9}C_{5} = 126$. Se os algarismos estiverem dispostos por ordem decrescente, o número pode ter 0 (fica no fim) e, portanto, vamos escolher cinco algarismos de 0 a 9 : ${}^{10}C_{5} = 252$.

Casos favoráveis: $126 + 252 = 378$

Probabilidade: $\frac{378}{90\,000} = 0{,}0042$

4. Casos possíveis: $6^{4} = 1296$

4.1 Vamos pelo complementar, ou seja, em todos os lançamentos a face que fica voltada para cima é diferente.

Casos favoráveis: $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

$P(\text{todos diferentes}) = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18}$

Logo, $P(\text{pelo menos dois iguais}) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$.

4.2 Consideremos que o resultado do quarto lançamento é k e entre os três primeiros apenas um é igual a k.

1.º passo: escolher o valor do quarto lançamento. Há 6 possibilidades.

2.º passo: escolher qual dos três primeiros lançamentos tem o mesmo resultado. Há 3 possibilidades.

3.º passo: os resultados dos outros dois lançamentos não podem ser k e podem repetir ou não. Há $5 \times 5 = 25$ possibilidades.

Casos favoráveis: $6 \times 3 \times 25 = 450$

Probabilidade: $\frac{450}{1296} = \frac{25}{72} \approx 35\%$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 223

Preparar o exame

5. Tem-se:

$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}5 \iff P(A \setminus B) = 0{,}5 \iff P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3 \iff P(\overline{A \cup B}) = 0{,}3 \iff 1 - P(A \cup B) = 0{,}3 \iff P(A \cup B) = 0{,}7$

Logo, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff 0{,}7 = 0{,}5 + P(B) \iff P(B) = 0{,}2$

Opção correta: **(A)**

6. Tem-se $P(B|A) = 0{,}3 \iff \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0{,}3 \iff P(B \cap A) = 0{,}3P(A)$

e $P(A \cup B) - P(B) = 0{,}45 \iff P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(B) = 0{,}45 \iff$

$\iff P(A) - P(A \cap B) = 0{,}45 \iff P(A) - 0{,}3P(A) = 0{,}45 \iff$

$\iff 0{,}7P(A) = 0{,}45 \iff P(A) = \dfrac{0{,}45}{0{,}7} \iff P(A) = \dfrac{9}{14}$

Logo, $P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{9}{14} = \dfrac{5}{14}$.

Opção correta: **(B)**

7.1 Sendo a o número de bolas amarelas e v o número de bolas verdes, tem-se:

$P(A \cap B) = \dfrac{2}{3}P(A) \iff P(A|B) = \dfrac{2}{3} \iff \dfrac{a-1}{a+v-1} = \dfrac{2}{3} \iff a = 2v + 1$, pelo que, inicialmente, o número de bolas amarelas existentes no saco é ímpar.

7.2 Como estão no saco duzentas bolas e 49% das bolas são verdes, concluímos que no saco estão $200 \times 0{,}49 = 98$ bolas verdes e $200 - 98 = 102$ bolas amarelas.

Extraindo, ao acaso, quatro bolas do saco, podemos formar ${}^{200}C_4$ conjuntos diferentes. Destes, os que contêm pelo menos três bolas verdes são os que contêm três bolas verdes e uma amarela e os que contêm quatro bolas verdes: ${}^{98}C_3 \times {}^{102}C_1 + {}^{98}C_4$.

Probabilidade: $\dfrac{{}^{98}C_3 \times {}^{102}C_1 + {}^{98}C_4}{{}^{200}C_4} \approx 0{,}3$

PÁG. 224

Preparar o exame

8.1 Há $10!$ maneiras de ordenar os dez jovens em fila.

Queremos ver de quantas maneiras a Ana (A), o Diogo (D) e o Francisco (F) aparecem em posições consecutivas (juntos, em qualquer ordem entre eles).

Começamos por agrupar os três.

Se A, D e F estão juntos, podemos tratá-los como um único bloco. Então, temos um bloco (ADF) e os 7 jovens restantes, ou seja, temos 8 objetos para ordenar e podemos fazê-lo de $8!$ formas.

De seguida, vamos permutar dentro do bloco.

Dentro do bloco, os três podem estar em qualquer ordem: $3!$

Casos favoráveis: $8! \times 3!$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Probabilidade: $\frac{8!\times 3!}{10!}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$

Opção correta: **(C)**

8.2 Vamos definir os acontecimentos F: «O jovem respondeu que praticava *surf*» e K: «O jovem respondeu que praticava *skate*».

Tem-se $P(F)=0{,}65$; $P(K\cap\overline{F})=0{,}2$ e $P(K|F)=\frac{4}{5}=0{,}8$.

Com a informação dada pelo enunciado, podemos construir a seguinte tabela de contingência:

	K	$\overline{K}$	Total
F			0,65
$\overline{F}$	0,2	$0{,}35-0{,}2=0{,}15$	$1-0{,}65=0{,}35$
Total			1

$P(K\cap F)=P(K|F)\times P(F)=0{,}8\times 0{,}65=0{,}52$

$P(F\cap\overline{K})=P(F)-P(F\cap K)\times=0{,}65-0{,}52=0{,}13$

$P(K)=P(F\cap K)+P(\overline{F}\cap K)=0{,}52+0{,}2=0{,}72$

$P(\overline{K})=1-P(K)=1-0{,}72=0{,}28$

	K	$\overline{K}$	Total
F	$0{,}8\times 0{,}65=0{,}52$	$0{,}65-0{,}52=0{,}13$	0,65
$\overline{F}$	0,2	0,15	0,35
Total	$0{,}52+0{,}2=0{,}72$	$1-0{,}72=0{,}28$	1

$P(\overline{F}|\overline{K})=\frac{P(\overline{F}\cap\overline{K})}{P(\overline{K})}=\frac{0{,}15}{0{,}28}=\frac{15}{28}$

$P(F|\overline{K})=\frac{P(F\cap\overline{K})}{P(\overline{K})}=\frac{0{,}13}{0{,}28}=\frac{13}{28}$

8.3 Com os 70 elementos do grupo é possível formar ${}^{70}C_2$ conjuntos de 2 jovens.

Designando por n o número de jovens com 13 anos do grupo, existem $70-n$ jovens com 14 anos.

$$\frac{n(70-n)}{{}^{70}C_2}=\frac{16}{35}\Leftrightarrow\frac{70n-n^2}{2415}=\frac{16}{35}\Leftrightarrow 35(70n-n^2)=16\times 2415\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2450n-35n^2=38\,640\Leftrightarrow 35n^2-2450n+38\,640=0\Leftrightarrow n^2-70n+1104=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{70\pm\sqrt{70^2-4\times 1104}}{2}\Leftrightarrow n=\frac{70\pm\sqrt{484}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{70-22}{2}\vee n=\frac{70+22}{2}\Leftrightarrow n=24\vee n=46$$

Como o número de jovens com 14 anos é maior do que o número de jovens com 13 anos, concluímos que no grupo há 24 jovens de 13 anos.

9. A caixa A tem três bolas pretas (P) e duas bolas brancas (B). Retiram-simultaneamente e ao acaso, três bolas da caixa A.

Consideremos o acontecimento X: «As bolas retiradas da caixa A são da mesma cor».

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Casos favoráveis:

Três bolas pretas: ${}^{3}C_{3}=1$; três bolas brancas: impossível (só há duas bolas brancas na caixa A).

Casos possíveis: ${}^{5}C_{3}=10$

Logo, $P(X)=\frac{1}{10}$ e $P(\bar{X})=\frac{9}{10}$.

Se X ocorre, então as bolas retiradas da caixa A são pretas e a caixa B passa a ter n bolas brancas e três bolas pretas.

Assim, $P(Y|X)=\frac{n}{n+3}$.

Como $P(Y|X)=P(\bar{X})$, vem $\frac{n}{n+3}=\frac{9}{10} \Leftrightarrow 10n=9(n+3) \Leftrightarrow 10n=9n+27 \Leftrightarrow n=27$.

Opção correta: **(D)**

PÁG. 225

Preparar o exame

10. Tem-se $P(\bar{B})=0{,}4$. Logo, $P(B)=0{,}6$.

Queremos enquadrar $P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$.

Sabemos que:

$\max\{0\,,\,P(B)+P(A)-1\}\leqslant P(B\cap A)\leqslant \min\{P(B)\,,\,P(A)\}$

$P(B)+P(A)-1=0{,}6+0{,}8-1=0{,}4$; $\max\{0\,;\,0{,}4\}=0{,}4$; $\min\{0{,}6\,;\,0{,}8\}=0{,}6$

Assim, $0{,}4\leqslant P(B\cap A)\leqslant 0{,}6$ e

$\frac{0{,}4}{0{,}8}\leqslant\frac{P(B\cap A)}{0{,}8}\leqslant\frac{0{,}6}{0{,}8} \Leftrightarrow \frac{4}{8}\leqslant\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\leqslant\frac{6}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leqslant P(B|A)\leqslant\frac{3}{4}$

Logo, $a=\frac{1}{2}$ e $b=\frac{3}{4}$.

11.1 $P(A)+P(B)=1 \Leftrightarrow P(B)=1-P(A)$ e $P(\bar{B})=1-(1-P(A))=P(A)$.

$$P(B|A)+P(A|\bar{B})=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}+\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=$$

$$=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}+\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B\cap A)+P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$

11.2 Vamos definir os acontecimentos A : «Estar infetado» e B : «Ser do sexo feminino».

Tem-se $P(A)=0{,}3$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$ e $P(\bar{A}|B)=\frac{6}{7}$.

Queremos determinar $P(A|\bar{B})$.

$$P(\bar{A}|B)=\frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{6}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{6}{7} \Leftrightarrow 1-\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}=\frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}=\frac{1}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}\times 0{,}3}{P(B)}=\frac{1}{7} \Leftrightarrow P(B)=7\times 0{,}1 \Leftrightarrow P(B)=0{,}7$$

Assim, $P(A)+P(B)=0{,}3+0{,}7=1$ e, usando a igualdade da alínea anterior, vem

$P(B|A)+P(A|\bar{B})=1 \Leftrightarrow P(A|\bar{B})=1-\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A|\bar{B})=\frac{2}{3}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

12. Vamos definir os acontecimentos B : «O aluno está inscrito em ballet clássico» e C : «O aluno está inscrito em dança contemporânea».

Sabe-se que $P(B)=0{,}6$, $P(C\cap\overline{B})=0{,}25$ e $P(B|C)=0{,}5$.

Com a informação dada pelo enunciado, podemos construir a seguinte tabela de contingência:

	B	$\overline{B}$	Total
C		0,25	
$\overline{C}$		$0{,}4-0{,}25=0{,}15$	
Total	0,6	$1-0{,}6=0{,}4$	1

Considerando $P(C)=k$, obtém-se $P(B\cap C)=P(B|C)\times P(C)=0{,}5k$.

	B	$\overline{B}$	Total
C	$0{,}5k$	0,25	k
$\overline{C}$		0,15	
Total	0,6	0,4	1

Vamos determinar o valor de k .

$P(C)=k \iff P(B\cap C)+P(\overline{B}\cap C)=k \iff 0{,}5k+0{,}25=k \iff k=0{,}5$

$P(\overline{C})=1-P(C)=1-k=1-0{,}5=0{,}5$

$P(\overline{B}\cap C)=P(B)-P(B\cap C)=0{,}6-0{,}5k=0{,}6-0{,}5\times 0{,}5=0{,}35$

Logo, $P(B|\overline{C})=\dfrac{P(B\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}=\dfrac{0{,}35}{0{,}5}=0{,}7$.

PÁG. 226

Preparar o exame

13. Vamos definir os acontecimentos A : «O funcionário pode trabalhar na produção do trem de aterragem» e B : «O funcionário pode trabalhar na produção do leme».

Sabe-se que $P(A)=0{,}45$, $P(B\cap A)=\dfrac{2}{9}\times 0{,}45=0{,}1$ e $P(A|\overline{B})=0{,}5$.

Queremos determinar $P(B)$.

Como $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$, então $0{,}45=0{,}1+P(A\cap\overline{B}) \iff P(A\cap\overline{B})=0{,}35$.

Como $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}$, então $0{,}5=\dfrac{0{,}35}{P(\overline{B})} \iff P(\overline{B})=0{,}7$.

Logo, $P(\overline{B})=0{,}7 \iff 1-P(B)=0{,}7 \iff P(B)=0{,}3 \iff P(B)=\dfrac{3}{10}$.

14. Vamos definir os acontecimentos F : «O aluno frequenta a disciplina de Filosofia» e E : «O aluno frequenta a disciplina de Economia A».

Sabe-se que $P(F)=2P(E) \iff P(E)=\dfrac{1}{2}P(F)$ e $P(F\cup E)=3P(F\cap E)$.

Queremos determinar $P(\overline{E}|F)$.

Assim,

$P(F\cup E)=P(F)+P(E)-P(F\cap E) \iff 3P(F\cap E)=P(F)+\dfrac{1}{2}P(F)-P(F\cap E) \iff$

$\iff 4P(F\cap E)+P(F\cap E)=\dfrac{3}{2}P(F) \iff P(F\cap E)=\dfrac{3}{8}P(F)$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

$P(\overline{E} \cap F) = P(F) - P(F \cap E) = P(F) - \frac{3}{8}P(F) = \frac{5}{8}P(F)$

Logo, $P(\overline{E}|F) = \frac{P(\overline{E} \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{5}{8}P(F)}{P(F)} = \frac{5}{8}$.

15. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{A}) - P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow 3P(B) - P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}P(B)$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}P(B)}{P(B)} = \frac{1}{4}$

PÁG. 227

Preparar o exame

16.1 Caixa A: três bolas brancas (B) e cinco bolas pretas (P), num total de oito bolas.

Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, três bolas da caixa A.

Sabendo que saiu pelo menos uma bola preta, para garantir que as três bolas são da mesma cor, as três bolas têm de ser pretas.

Queremos determinar $P(\text{3 bolas da mesma cor} | \text{pelo menos 1 preta})$.

Número total de formas de escolher 3 bolas entre 8 : ${}^{8}C_{3} = 56$

Casos possíveis:

1.° caso: três bolas da mesma cor: 3 bolas brancas: ${}^{3}C_{3} = 1$ ou 3 bolas pretas: ${}^{5}C_{3} = 10$

Total: $1 + 10 = 11$

2.° caso: pelo menos uma bola preta

Vamos pelo complementar: nenhuma bola preta, todas as bolas brancas: ${}^{3}C_{3} = 1$

Pelo menos uma bola preta: $56 - 1 = 55$

Interseção dos dois casos: três bolas da mesma cor e pelo menos uma bola preta: as três bolas são pretas: 10

Logo,

$$P(\text{3 bolas da mesma cor} | \text{pelo menos 1 preta}) = \frac{P(\text{3 bolas da mesma cor e pelo menos 1 preta})}{P(\text{pelo menos 1 preta})} =$$

$$= \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$

16.2 $P(Y|\overline{X})$ é a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca, sabendo que a primeira bola retirada é preta.

Depois da primeira experiência, em que foram transferidas três bolas, verificou-se que exatamente uma era preta. Assim, a caixa B tem duas bolas brancas e uma bola preta. Acrescentaram-se n bolas brancas.

$\overline{X}$: «a primeira bola retirada é preta»

Se isso acontecer, a bola preta é reposta na caixa e acrescentam-se $2n$ bolas pretas.

Antes de retirar a segunda bola, a caixa B tem $2 + n$ bolas brancas e $1 + 2n$ bolas pretas, total:

$2 + n + 1 + 2n = 3 + 3n$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

$$P(Y|\bar{X}) = 0{,}35 \iff \frac{2+n}{3+3n} = 0{,}35 \iff \frac{2+n}{3+3n} = \frac{7}{20} \iff$$

$$\iff 20(2+n) = 7(3+3n) \iff 40+20n = 21+21n \iff n = 19$$

17. Vamos definir os acontecimentos I : «O funcionário é licenciado em Engenharia Informática» e T : «O funcionário é licenciado em Engenharia de Telecomunicações».

Sabe-se que $P(I \cup T) = 5P(I)$ e $P(T|\bar{I}) = \frac{4}{11}$.

Queremos determinar $P(I)$.

Assim,

$$P(I \cup T) = 5P(I) \iff P(I) + P(T) - P(I \cap T) = 5P(I) \iff P(T) - P(I \cap T) = 4P(I)$$

$$P(T|\bar{I}) = \frac{4}{11} \iff \frac{P(T \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{4}{11} \iff \frac{P(T) - P(T \cap I)}{1 - P(I)} = \frac{4}{11} \iff \frac{4P(I)}{1 - P(I)} = \frac{4}{11} \iff$$

$$\iff 11 \times 4P(I) = 4(1 - P(I)) \iff 44P(I) = 4 - 4P(I) \iff P(I) = \frac{1}{12} \approx 8\%$$

PÁG. 228

Preparar o exame

18. Vamos definir os acontecimentos A : «O habitante mede menos de 160 cm » e B : «O habitante tem olhos castanhos».

Sabe-se que $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cup B) = 0{,}8$ e que os acontecimentos A e B são independentes.

18.1 $P(A \cup B) = 0{,}8 \iff P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 \iff$

$$\iff 0{,}4 + P(B) - P(A) \times P(B) = 0{,}8 \iff P(B) - 0{,}4 \times P(B) = 0{,}4 \iff P(B) = \frac{2}{3}$$

18.2 O número de maneiras de escolher duas pessoas de quatro é ${}^{4}C_{2} = 6$.

Probabilidade: $6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$

Opção correta: **(D)**

19. Como A e B são acontecimentos independentes e equiprováveis, tem-se que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ e $P(A) = P(B)$.

Assim,

$$P(A \cup B) = 0{,}64 \iff P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}64 \iff$$

$$\iff P(A) + P(A) - P(A) \times P(A) = 0{,}64 \iff (P(A))^2 - 2P(A) + 0{,}64 = 0 \iff$$

$$\iff P(A) = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 0{,}64}}{2} \iff P(A) = \frac{2 \pm \sqrt{1{,}44}}{2} \iff$$

$$\iff P(A) = \frac{2 - 1{,}2}{2} \vee P(A) = \frac{2 + 1{,}2}{2} \iff P(A) = 0{,}4 \vee \underbrace{P(A) = 1{,}6}_{\text{imp.}}$$

Opção correta: **(B)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

20. Como A e B são acontecimentos equiprováveis e independentes, tem-se que $P(A)=P(B)$ e $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Assim,

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{8}{9} \Leftrightarrow P(\overline{A\cap B})=\frac{8}{9} \Leftrightarrow 1-P(A\cap B)=\frac{8}{9} \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)\times P(B)=\frac{1}{9} \Leftrightarrow P(A)\times P(A)=\frac{1}{9} \Leftrightarrow (P(A))^2=\frac{1}{9} \underset{P(A)>0}{\Leftrightarrow} P(A)=\frac{1}{3}$$

Opção correta: **(B)**

21. Como A e B são acontecimentos independentes, tem-se que $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Como A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis, tem-se que $P(A)=P(\overline{A})$ e, portanto,

$P(A)=1-P(A) \Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{2}$.

Assim, $2P(A\cup B)=2\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)=2P(A)+2P(B)-2P(A\cap B)=$

$$=2P(A)+2P(B)-2P(A)\times P(B)=2\times\frac{1}{2}+2P(B)-2\times\frac{1}{2}\times P(B)=1+P(B)$$

PÁG. 229

Preparar o exame

22.1 A peça de roupa estar disponível em apenas uma das duas lojas significa estar disponível numa ou noutra loja, mas não em ambas.

Probabilidade: 9% + 49% = 58%

22.2 Tem-se $P(A)=30\%=0{,}30$ e $P(\text{apenas } A)=9\%=0{,}09$.

A peça de roupa estar disponível na loja A não depende de a peça de roupa estar disponível na loja B.

$$P(\text{apenas } A)=P(A)\cdot(1-P(B)) \Leftrightarrow 0{,}09=0{,}30(1-P(B)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-P(B)=\frac{0{,}09}{0{,}30} \Leftrightarrow P(B)=0{,}7=70\%$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=$$

$$=0{,}30+0{,}70-0{,}30\times0{,}70=0{,}79=79\%$$

23. Como a soma das probabilidades dos valores que a variável aleatória X toma é igual a 1, isto é, $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=6)=1$, tem-se:

$$\frac{1}{6}+a^2+a+\frac{1}{12}=1 \Leftrightarrow a^2+a-\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times\left(-\frac{3}{4}\right)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow a=\frac{-1-2}{2}\vee a=\frac{-1+2}{2} \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}\vee a=\frac{1}{2}$$

Como $a=P(X=3)$, $0<a<1$, pelo que $a=\frac{1}{2}$.

Logo, $P(X>2)=P(X=3)+P(X=6)=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$.

Opção correta: **(C)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

24. Vamos determinar todos os valores possíveis para as somas.

+	−1	1	1	1	1	1
−1	−2	0	0	0	0	0
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2

Tem-se:

$P(X=-2)=\frac{1}{36}$, $P(X=0)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$ e $P(X=2)=\frac{25}{36}$.

Logo, $P(X=k)=\frac{5}{18}$ para $k=0$.

Opção correta: **(A)**

25. A caixa contém duas bolas brancas e três bolas pretas, num total de cinco bolas.

Retiram-se, ao acaso e em simultâneo, duas bolas da caixa.

Sendo X a variável aleatória «Número de bolas brancas retiradas», os valores que X pode tomar são 0 (retiram-se duas bolas pretas), 1 (retira-se uma bola branca e uma bola preta) e 2 (retiram-se duas bolas brancas) e as respetivas probabilidades são

$P(X=0)=\frac{{}^{3}C_{2}}{{}^{5}C_{2}}=\frac{3}{10}$, $P(X=1)=\frac{{}^{3}C_{1}\times{}^{2}C_{1}}{{}^{5}C_{2}}=\frac{3}{5}$ e $P(X=2)=\frac{{}^{2}C_{2}}{{}^{5}C_{2}}=\frac{1}{10}$.

Logo, o valor médio da variável aleatória X é $\mu=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}=0{,}8$.

Opção correta: **(B)**

PÁG. 230

Preparar o exame

26. Tem-se $b^3+a+2a=1 \iff b^3+3a=1 \iff b^3=1-3a$.

Como o valor médio da variável aleatória X é $\frac{35}{24}$, tem-se $0\times b^3+1\times a+2\times 2a=\frac{35}{24} \iff a=\frac{7}{24}$.

Logo, $b^3=1-3\times\frac{7}{24} \iff b^3=\frac{3}{24} \iff b^3=\frac{1}{8} \iff b=\frac{1}{2}$.

Opção correta: **(C)**

27.1 Designando por n o número de bolas numeradas com o número 0, o número de bolas numeradas com o número 1 é $10-n$.

A probabilidade de não retirar nenhuma bola com o número 1 é a probabilidade de retirar duas bolas com o número 0: $\frac{n}{10}\times\frac{n}{10}=\frac{n^2}{100}$.

Da tabela, $P(X=0)=\frac{4}{25}$. Portanto, $\frac{n^2}{100}=\frac{4}{25} \iff n^2=\frac{400}{25} \underset{n>0}{\iff} n=\frac{20}{5}=4$.

No saco estão quatro bolas com o número 0 e seis bolas com o número 1.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Y : «Soma dos números das três bolas retiradas»

Como algumas bolas têm o número 0 e outras têm o número 1, a variável Y pode tomar os valores 0, 1, 2, 3.

A soma dos números das três bolas retiradas é 0 se as três bolas têm o número 0:

$$P(Y=0)=\frac{^4C_3}{^{10}C_3}=\frac{1}{30}$$

A soma dos números das três bolas retiradas é 1 se uma bola tem o número 1 e duas bolas têm o número 0:

$$P(Y=1)=\frac{^4C_2\times{}^6C_1}{^{10}C_3}=\frac{3}{10}$$

A soma dos números das três bolas retiradas é 2 se uma bola tem o número 0 e duas bolas têm o número 1:

$$P(Y=2)=\frac{^4C_1\times{}^6C_2}{^{10}C_3}=\frac{1}{2}$$

A soma dos números das três bolas retiradas é 3 se as três bolas têm o número 1:

$$P(Y=3)=\frac{^6C_3}{^{10}C_3}=\frac{1}{6}$$

y_i	0	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

27.2 Como algumas bolas têm o número 0 e outras têm o número 1, a variável Z pode tomar os valores 0, 1.

O produto dos números das três bolas retiradas é 0 se pelo menos uma bola tem o número 0, o que elimina o caso em que as três bolas têm o número 1.

Casos possíveis: $^{10}C_3-{}^6C_3=120-20=100$

Casos favoráveis: $^4C_1\times{}^6C_2=4\times15=60$

Probabilidade: $P(Y=2|Z=0)=\frac{60}{100}=0{,}6$

28. $P(\text{par}|\text{primo})=0{,}6$

Sejam p a probabilidade de cada face par e q a probabilidade de cada face ímpar.

$3p+3q=1 \iff p+q=\frac{1}{3}$

$P(\text{par}|\text{primo})=\frac{p}{p+2q}$

$\frac{p}{p+2q}=0{,}6 \iff p=0{,}6(p+2q) \iff p=0{,}6p+1{,}2q \iff p=3q$

Então, $3q+q=\frac{1}{3} \iff q=\frac{1}{12}$ e $p=3\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

$$\mu=1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{12}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{12}+6\times\frac{1}{4}=3{,}75$$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

$\sigma=\sqrt{\frac{1}{12}\times(1-3{,}75)^2+\frac{1}{4}\times(2-3{,}75)^2+\frac{1}{12}\times(3-3{,}75)^2+\frac{1}{4}\times(4-3{,}75)^2+\frac{1}{12}\times(5-3{,}75)^2+\frac{1}{4}\times(6-3{,}75)^2}\approx$

$\approx 1{,}69$

$\mu<X<\mu+\sigma: 3{,}75<X<3{,}75+1{,}69 \iff 3{,}75<X<5{,}44$

Valores possíveis de X: 4 e 5

$P(X=4)+P(X=5)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $P(\mu<X<\mu+\sigma)=\frac{1}{3}$

Interpretação: A probabilidade de a variável aleatória X tomar um valor entre o seu valor médio e a soma do seu valor médio e o respetivo desvio-padrão é igual a $\frac{1}{3}$.

PÁG. 231

Preparar o exame

29.1 Começamos por retirar duas fichas da caixa A. Há ${}^3C_2=3$ maneiras de escolher as fichas a retirar. Há duas possibilidades: as duas fichas têm o número 0 ou uma ficha tem o número 0 e a outra tem o número 1.

O acontecimento C apenas se verifica se as duas fichas retiradas da caixa A tiverem o número 0.

Assim, $P(C)=\frac{{}^2C_2}{{}^3C_2}=\frac{1}{3}$.

Se as duas fichas retiradas da caixa A tiverem o número 0, a caixa B fica com duas fichas com o número 0, três fichas com o número 2 e duas fichas com o número 3.

Se uma das fichas retiradas da caixa A tiver o número 0 e a outra tiver o número 1, a caixa B fica com uma ficha com o número 0, uma ficha com o número 1, três fichas com o número 2 e duas fichas com o número 3.

O acontecimento D verifica-se se pelo menos uma das fichas retiradas da caixa A tiverem o número ${}^3C_2$.

$P(\text{pelo menos 1 zero})=1-P(\text{nenhum zero})=1-\frac{{}^5C_3}{{}^7C_3}=\frac{2}{7}$

Logo, $P(D|C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$.

29.2 As somas possíveis são:

- $0+2+2=4$, que ocorre de ${}^2C_1\times{}^3C_2=6$ maneiras, e o resto da divisão inteira de 4 por 4 é 0;
- $0+2+3=5$, que ocorre de ${}^2C_1\times 3\times 2=12$ maneiras, e o resto da divisão inteira de 5 por 4 é 1;
- $0+3+3=6$, que ocorre de ${}^2C_1\times{}^2C_2=2$ maneiras, e o resto da divisão inteira de 6 por 4 é 2;
- $1+2+2=5$, que ocorre de $1\times{}^3C_2=3$ maneiras, e o resto da divisão inteira de 5 por 4 é 1;
- $1+2+3=6$, que ocorre de $1\times 3\times 2=6$ maneiras, e o resto da divisão inteira de 6 por 4 é 2;
- $1+3+3=7$, que ocorre de $1\times{}^2C_2=1$ maneira, e o resto da divisão inteira de 7 por 4 é 3.

Logo, $X\in\{0,1,2,3\}$ e, para todas as probabilidades, o número de casos possíveis é ${}^3C_1\times{}^5C_2=30$.

$P(X=0)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$; $P(X=1)=\frac{12+3}{30}=\frac{1}{2}$; $P(X=2)=\frac{2+6}{30}=\frac{4}{15}$; $P(X=3)=\frac{1}{30}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

30. Sabe-se que $X \sim N(45, 1)$. Queremos determinar $P(43 \leqslant X \leqslant 47)$.

Seja $Z = \frac{X - 45}{1}$. Para $X = 43$, $Z = -2$; para $X = 47$, $Z = 2$.

$P(43 \leqslant X \leqslant 47) = P(-2 \leqslant Z \leqslant 2)$

Como $P(Z \leqslant 2) \approx 0{,}9772$, então $P(-2 \leqslant Z \leqslant 2) = 2 \times 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$.

Opção correta: **(C)**

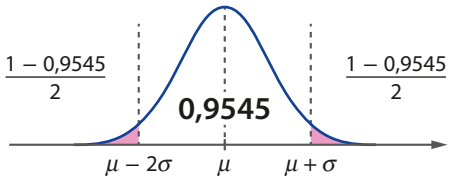
PÁG. 232

Preparar o exame

31. Como $\mu = 5$ e $\sigma = \frac{1}{2}$, então $P(X > 6) = P\left(X > 5 + 2 \times \frac{1}{2}\right) = P(X > \mu + 2\sigma)$.

Assim, tem-se $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$.

Como $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$, tem-se $P(X > 6) = P(X > \mu + 2\sigma) \approx \frac{1 - 0{,}9545}{2} \approx 0{,}023$.



Opção correta: **(C)**

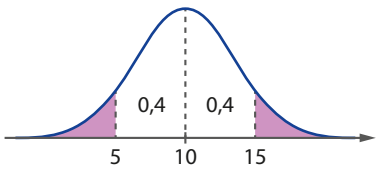
32. Como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio, tem-se $P(\mu < X < \mu + k) = P(\mu - k < X < \mu)$.

Assim:

$P(5 < X < 10) = P(10 < X < 15) = 0{,}4$

$P(5 < X < 15) = P(5 < X < 10) + P(10 < X < 15) = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$

$P(X < 5 \vee X > 15) = 1 - P(5 < X < 15) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$



Opção correta: **(B)**

33. Tem-se $X \sim N(10, \sigma)$ e $P(X < 14) \approx 0{,}97725$.

Seja $Z = \frac{X - 10}{\sigma}$. Então, $P\left(Z < \frac{14 - 10}{\sigma}\right) = 0{,}97725 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{4}{\sigma}\right) = 0{,}97725$.

Sabemos que $P(Z < 2) \approx 0{,}97725$. Logo, $\frac{4}{\sigma} = 2 \Leftrightarrow \sigma = 2$.

Opção correta: **(A)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

34. Como $P(4-\sigma<X<4)\approx 0{,}34$, $4-\sigma>3{,}5$ e como $P(4-2\sigma<X<4)\approx 0{,}48$, $4-2\sigma<3{,}5$.

Logo, $4-\sigma>3{,}5 \iff \sigma<0{,}5$ e $4-2\sigma<3{,}5 \iff \sigma>0{,}25$, pelo que $\sigma\in]0{,}25\,;\,0{,}5[$.

Recorrendo a uma calculadora , $\sigma\approx 0{,}39$.

35. (A) $P(X>180)=P(X>\mu+10)$, probabilidade pequena

(B) $P(X<180)=1-P(X>180)$, probabilidade grande

(C) $P(X>155)=P(X>\mu-15)$, probabilidade muito grande

$P(X>155)>P(X<180)$, 155 está mais longe da média (em valor absoluto) do que 180

(D) probabilidade muito pequena

Opção correta: **(C)**

PÁG. 233

Teste global

1. $z=2i-2i^{43}=2i-2i^{3}=2i+2i=4i$

Opção correta: **(C)**

2. $z-w=2\cos\theta \iff w=e^{i\theta}-2\cos\theta \iff$

$\iff w=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta-2\cos\theta \iff w=-\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$

$\overline{w}=\overline{-\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}=-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta=$

$=\cos(\pi+\theta)+i\operatorname{sen}(\pi+\theta)=e^{i(\theta+\pi)}$

Opção correta: **(A)**

3. Seja n o número de bolas que estão na caixa. Na caixa, estão $\frac{n}{2}$ bolas brancas e $\frac{n}{2}$ bolas pretas.

Podemos começar por retirar uma bola branca e, de seguida, uma preta ou ao contrário.

$$P=\frac{8}{15} \iff \frac{\frac{\not n}{2}}{\not n}\times\frac{\frac{n}{2}}{n-1}\times 2=\frac{8}{15} \iff$$

$$\iff \frac{n}{2(n-1)}=\frac{8}{15} \iff 15n=16n-16 \iff n=16$$

Opção correta: **(B)**

4. $\mu=45$

$P(39<X<45)=45\%$ significa que $P(X<39)=5\%$.

Como a distribuição normal é simétrica relativamente ao seu valor médio, $P(X>45+(45-39))=P(X>51)=5\%$.

Opção correta: **(D)**

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

5. A equação $x^2+\sqrt{b}\,x+\frac{c}{4}=0$ tem duas soluções em $\mathbb{C}$ se o binómio discriminante for negativo, ou seja, $(\sqrt{b})^2-4\times1\times\frac{c}{4}<0 \Leftrightarrow b-c<0 \Leftrightarrow b<c$.

Façamos uma tabela de dupla entrada para ajudar a visualizar os valores possíveis.

c \ b	1	2	3	4
1				
2	×			
3	×	×		
4	×	×	×	
5	×	×	×	×
6	×	×	×	×

$P=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$

Opção correta: **(C)**

PÁG. 234

Teste global

6.1 $(z_2)^5=\left(2e^{i\frac{29\pi}{30}}\right)^5=2^5e^{i\frac{29\pi}{30}\times5}=$

$=32e^{i\frac{29\pi}{6}}=32e^{i\frac{5\pi}{6}}=32\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)=$

$=32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-16\sqrt{3}+16i$

6.2 As cinco raízes têm o mesmo módulo e os seus argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{5}$. Então, $z_1=2e^{i\left(\frac{29\pi}{30}-2\times\frac{2\pi}{5}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$\frac{{z_1}^3-1}{2+4i}=\frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3-1}{2+4i}=\frac{8e^{i\frac{\pi}{2}}-1}{2+4i}=$

$=\frac{8i-1}{2+4i}=\frac{(8i-1)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=$

$=\frac{16i+32-2+4i}{4+16}=\frac{30+20i}{20}=\frac{3}{2}+i$

6.3 O ponto B é o afixo de um número complexo z_3; um argumento de z_3 é $\frac{29\pi}{30}-\frac{2\pi}{5}=\frac{17\pi}{30}$.

A semirreta $\dot{OB}$ pode ser definida por $\text{Arg}(z)=\frac{17\pi}{30}$.

Comecemos por escrever $-1+i$ na forma trigonométrica.

$|-1+i|=\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta=-1 \wedge \theta\in2.^\circ\,\text{Q} \Leftrightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}$

$-1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Seja $z=(-1+i)^n\times e^{i\frac{\pi}{15}}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^n\times e^{i\frac{\pi}{15}}=(\sqrt{2})^n e^{i\frac{3\pi n}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{15}}=(\sqrt{2})^n e^{i\frac{3\pi n}{4}+\frac{\pi}{15}}$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

Para que z pertença à semirreta $\dot{OB}$,

$\frac{3\pi n}{4}+\frac{\pi}{15}=\frac{17\pi}{30}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3n}{4}+\frac{1}{15}=\frac{17}{30}+2k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3n}{4}=\frac{1}{2}+2k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k,\ k\in\mathbb{Z}$

Para encontrar o menor n temos de atribuir valores a k.

Se $k=0 \longrightarrow n=\frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$;

se $k=1 \longrightarrow n=\frac{10}{3}\notin\mathbb{N}$;

se $k=2 \longrightarrow n=6\in\mathbb{N}$.

6.4 O ponto E é o afixo de um número complexo z_4; um argumento de z_4 é $\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{5}=-\frac{7\pi}{30}$.

O ponto D é o afixo de um número complexo z_5; um argumento de z_5 é $-\frac{7\pi}{30}-\frac{2\pi}{5}=-\frac{19\pi}{30}$.

A condição que define o setor circular DOE, excluindo os raios é:

$|z|\leqslant 2 \wedge -\frac{19\pi}{30}<\text{Arg}(z)<-\frac{7\pi}{30}$.

7.1 $P(A|B)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}P(B)$

$P(A\cup B)=\frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{15}+P(B)-\frac{1}{3}P(B)=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{3}P(B)=\frac{2}{15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{5} \Leftrightarrow P(B)=0{,}2$

7.2 $P(A\cap B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5} \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{15}\neq 0$, pelo que o rei de copas está em cima da mesa.

Como só existe um rei de copas no baralho, significa que em cima da mesa estão 15 cartas.

8. Seja E o acontecimento «A bola é encarnada» e P o acontecimento «A bola tem número par».

$P(E)=\frac{3}{10}$

$P(P|E)=\frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{P(P\cap E)}{P(E)}=\frac{5}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(P\cap E)=\frac{5}{12}\times\frac{3}{10} \Leftrightarrow P(P\cap E)=\frac{1}{8}$

$P(\overline{E}\cap P)=52{,}5\%$

$P(P)=P(P\cap E)+P(P\cap\overline{E})=\frac{1}{8}+0{,}525=\frac{13}{20}$

$P(E|P)=\frac{P(E\cap P)}{P(P)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{13}{20}}=\frac{5}{26}$

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

PÁG. 235

Teste global

9.1 $P(B|A)$ é a probabilidade de as duas pessoas escolherem um cartão com a mesma letra desenhada, mas não necessariamente o mesmo cartão, sabendo que ambos escolheram um cartão com uma vogal desenhada.

Existem quatro cartões com vogais: três letras O e uma letra A.

O número de casos possíveis é 4^2, que é o número de maneiras de as duas pessoas escolherem um cartão com uma vogal desenhada.

Existem 3^2 maneiras diferentes das duas pessoas escolherem um cartão com a letra O e existe uma única maneira de ambas tirarem a letra A. O número de casos favoráveis é 3^2+1^2.

$$P(B|A)=\frac{3^2+1}{4^2}=\frac{5}{8}=62{,}5\%$$

Para calcular a $P(B)$, vamos determinar o número de casos possíveis e número de casos favoráveis. Como a extração é feita com reposição, o número de casos possíveis é 10^2.

Existem diferentes maneiras das duas pessoas escolherem um cartão com a mesma letra: pode sair duas vezes o cartão com a letra C, 1^2 ;podem sair dois cartões com a letra O, 3^2 ; podem sair dois cartões com a letra R, 4^2 ; pode sair duas vezes o cartão com a letra B, 1^2e, ainda, pode sair duas vezes o cartão com a letra A, 1^2.

O número de casos favoráveis é $1+3^2+4^2+1+1$.

$$P(B)=\frac{1+3^2+4^2+1+1}{10^2}=\frac{28}{100}=28\%$$

Como $P(B|A)\neq P(B)$, os acontecimentos A e B não são independentes.

9.2 Só existe um cartão com a letra C, pelo que a variável X só pode tomar os valores 0 e 1, $X\in\{0,1\}$.

$$P(X=0)=\frac{{}^9C_3}{{}^{10}C_3}=\frac{7}{10}\ ;\ P(X=1)=\frac{1\times{}^9C_2}{{}^{10}C_3}=\frac{3}{10}$$

A função massa de probabilidade da variável aleatória X é dada pela tabela seguinte.

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$\mu=0\times\frac{7}{10}+1\times\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$$

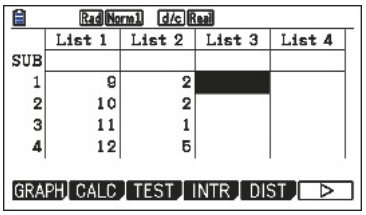
Em cada dez extrações, é de esperar que o cartão com a letra C desenhada fique em cima da mesa três vezes.

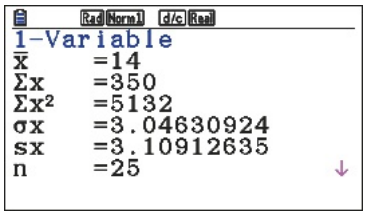
M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA

10. A turma do João tem 25 alunos.

Classificações	Frequência relativa acumulada %	Frequência relativa %	Frequência absoluta
9	8	8	2
10	16	8	2
11	20	4	1
12	40	20	5
14	60	20	5
15	68	8	2
16	76	8	2
17	84	8	2
18	92	8	2
19	96	4	1
20	100	4	1

Com a ajuda da calculadora gráfica vamos calcular o valor médio e o desvio-padrão.





O valor médio é 14 e o desvio-padrão é 3,1 .

11. Seja $z=\rho e^{i\theta}$.

$z^2=|z|\bar{z} \iff \left(\rho e^{i\theta}\right)^2=\rho\times\overline{\rho e^{i\theta}} \iff \rho^2 e^{i2\theta}=\rho^2 e^{i(-\theta)} \iff$

$\iff \rho^2=\rho^2 \wedge 2\theta=-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

$\theta\in 3.^{o}\text{Q}$

Para $k=2\longrightarrow\theta=\frac{4\pi}{3}$.

Significa que $z=\rho e^{i\frac{4\pi}{3}}=\rho\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)=\rho\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\rho}{2}-i\frac{\sqrt{3}\rho}{2}$.

A mediatriz do segmento de reta $[AO]$ pode ser definida pela condição

$|z-(-1-\sqrt{12}\,i)|=|z|$. Como z pertence à mediatriz, vem

$\left|-\frac{\rho}{2}-i\frac{\sqrt{3}\rho}{2}-(-1-\sqrt{12}\,i)\right|=\left|-\frac{\rho}{2}-i\frac{\sqrt{3}\rho}{2}\right| \iff \left|-\frac{\rho}{2}+1+i\left(-\frac{\sqrt{3}\rho}{2}+2\sqrt{3}\right)\right|=\left|-\frac{\rho}{2}-i\frac{\sqrt{3}\rho}{2}\right| \iff$

$\iff \sqrt{\left(-\frac{\rho}{2}+1\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}\rho}{2}+2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{\rho}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}\rho}{2}\right)^2} \iff$

$\iff \frac{\rho^2}{4}-\rho+1+\frac{3\rho^2}{4}-6\rho+12=\frac{\rho^2}{4}+\frac{3\rho^2}{4} \iff$

$\iff -7\rho+13=0 \iff \rho=\frac{13}{7}$.

Obtemos, então $z=-\frac{\frac{13}{7}}{2}-i\frac{\sqrt{3}\times\frac{13}{7}}{2}=-\frac{13}{14}-\frac{13\sqrt{3}}{14}i$.

M36012_TXTRESVOLNCOMP © RAIZ EDITORA