

1. Modelos matemáticos nas eleições, na partilha e em finanças

Volume 1

PÁG. 3

1.1 Não votantes: Eleitores inscritos – Votantes: $9\ 085\ 339 - 5\ 590\ 132 = 3\ 495\ 207$

Abstenção: $\frac{3\ 495\ 207}{9\ 085\ 339} \times 100 \approx 38,47\%$

1.2 Votos validamente expressos: Votantes – Votos brancos – Votos nulos:

$$9\ 085\ 339 - (5\ 590\ 132 - 59\ 636 - 43\ 149) = 5\ 487\ 347$$

1.3 O candidato mais votado foi Aníbal António Cavaco Silva.

Não houve necessidade de uma segunda volta, dado que a percentagem de votos validamente expressos que conseguiu foi $\frac{2\ 773\ 431}{5\ 487\ 347} \times 100 \approx 50,54\%$, ou seja, mais de metade.

2.1 Considerando apenas a primeira preferência, as percentagens obtidas por cada sócio foram:

Dias: $25\% + 13\% = 38\%$, Ferreira: $10\% + 24\% = 34\%$, Silva: $7\% + 21\% = 28\%$

Se o método fosse o da maioria simples, ganharia o Dias.

PÁG. 4

2.2

a. Nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta e o Silva foi eliminado.

b. Refazendo a tabela,

1.ª preferência	D	D	F	F	S	S
2.ª preferência	S	F	D	S	D	F
3.ª preferência	F	S	S	D	F	D
Total (%)	25%	13%	10%	24%	7%	21%

as percentagens obtidas por cada sócio foram:

Dias: $25\% + 13\% + 7\% = 45\%$ e Ferreira: $10\% + 24\% + 21\% = 55\%$

O vencedor foi o Ferreira.

2.3 Supondo que são N sócios votantes, os resultados obtidos por cada sócio foram:

Dias: $(0,25N + 0,13N) \times 3 + (0,10N + 0,07N) \times 2 + (0,24N + 0,21N) \times 1 = 1,93N$ pontos

Ferreira: $(0,10N + 0,24N) \times 3 + (0,13N + 0,21N) \times 2 + (0,25N + 0,07N) \times 1 = 2,02N$ pontos

Silva: $(0,07N + 0,21N) \times 3 + (0,25N + 0,24N) \times 2 + (0,13N + 0,10N) \times 1 = 2,05N$ pontos

O vencedor seria o Silva e o Dias ficaria em último.

2.4 Já vimos que o número de pontos do Ferreira, em função do número N , de sócios votantes, é $2,02N$.

Logo, o clube tem $2,02N = 606 \Leftrightarrow N = \frac{606}{2,02} \Leftrightarrow N = 300$ sócios votantes.

300 _____ 60%
 x _____ 100%

O clube tem $x = \frac{300 \times 100}{60} \Leftrightarrow x = 500$ sócios.

3. Começamos por determinar a pontuação obtida por cada candidato:

A: $3 \times 4 + 9 \times 3 + (6 + x + y) \times 2 = 51 + 2(x + y)$

B: $(9 + x) \times 4 + 6 \times 3 + (3 + y) \times 1 = 57 + 4x + y$

C: $6 \times 4 + (x + y) \times 3 + (9 + 3) \times 2 = 48 + 3(x + y)$

D: $y \times 4 + 3 \times 3 + (6 + 9 + x) \times 1 = 24 + x + 4y$

$$\begin{cases} 48 + 3(x + y) = 81 \\ 57 + 4x + y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{81 - 48}{3} \\ 4x + y = 80 - 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ 4x + y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 11 - x \\ 4x + 11 - x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$$

A turma tem $6 + 9 + 4 + 3 + 7 = 29$ alunos.

4.1

Eleições Regionais no Açores - Círculo da Ilha Terceira - 2020											
	PS	PPD/PSD	CDS-PP	CH	BE	IL	PAN	PCP-PEV	A	PPM	L
	10199	7028	2340	1327	783	706	377	290	207	194	97
1	10199	7028	2340	1327	783	706	377	290	207	194	97
2	5099,5	3514	1170	663,5	391,5	353	188,5	145	103,5	97	48,5
3	3399,667	2342,667	780	442,3333	261	235,3333	125,6667	96,66667	69	64,66667	32,33333
4	2549,75	1757	585	331,75	195,75	176,5	94,25	72,5	51,75	48,5	24,25
5	2039,8	1405,6	468	265,4	156,6	141,2	75,4	58	41,4	38,8	19,4
6	1699,833	1171,333	390	221,1667	130,5	117,6667	62,83333	48,33333	34,5	32,33333	16,16667
7	1457	1004	334,2857	189,5714	111,8571	100,8571	53,85714	41,42857	29,57143	27,71429	13,85714
8	1274,875	878,5	292,5	165,875	97,875	88,25	47,125	36,25	25,875	24,25	12,125
9	1133,222	780,8889	260	147,4444	87	78,44444	41,88889	32,22222	23	21,55556	10,77778
10	1019,9	702,8	234	132,7	78,3	70,6	37,7	29	20,7	19,4	9,7

4.2

Eleições Regionais no Açores - Círculo da Ilha Terceira - 2020											
	PS	PPD/PSD	CDS-PP	CH	BE	IL	PAN	PCP-PEV	A	PPM	L
	10199	7028	2340	1327	783	706	377	290	207	194	97
1	10199	7028	2340	1327	783	706	377	290	207	194	97
3	3399,667	2342,667	780	442,3333	261	235,3333	125,6667	96,66667	69	64,66667	32,33333
5	2039,8	1405,6	468	265,4	156,6	141,2	75,4	58	41,4	38,8	19,4
7	1457	1004	334,2857	189,5714	111,8571	100,8571	53,85714	41,42857	29,57143	27,71429	13,85714
9	1133,222	780,8889	260	147,4444	87	78,44444	41,88889	32,22222	23	21,55556	10,77778
11	927,1818	638,9091	212,7273	120,6364	71,18182	64,18182	34,27273	26,36364	18,81818	17,63636	8,818182
13	784,5385	540,6154	180	102,0769	60,23077	54,30769	29	22,30769	15,92308	14,92308	7,461538
15	679,9333	468,5333	156	88,46667	52,2	47,06667	25,13333	19,33333	13,8	12,93333	6,466667
17	599,9412	413,4118	137,6471	78,05882	46,05882	41,52941	22,17647	17,05882	12,17647	11,41176	5,705882
19	536,7895	369,8947	123,1579	69,84211	41,21053	37,15789	19,84211	15,26316	10,89474	10,21053	5,105263

Aplicando o método de St. Laguë, a distribuição não seria a mesma. O PPD/PSD perderia um deputado e o CH ganharia um deputado.

PÁG. 5

4.3

Eleições Regionais no Açores - Círculo da Ilha Terceira - 2024										
	AD	PS	CH	IL	B.E.	PAN	PCP-PEV	ADN	L	JPP
	12099	10304	2249	679	635	270	207	135	103	81
1	12099	10304	2249	679	635	270	207	135	103	81
3	4033	3434,67	749,667	226,333	211,667	90	69	45	34,3333	27
5	2419,8	2060,8	449,8	135,8	127	54	41,4	27	20,6	16,2
7	1728,43	1472	321,286	97	90,7143	38,5714	29,5714	19,2857	14,7143	11,5714
9	1344,33	1144,89	249,889	75,4444	70,5556	30	23	15	11,4444	9
11	1099,91	936,727	204,455	61,7273	57,7273	24,5455	18,8182	12,2727	9,36364	7,36364
13	930,692	792,615	173	52,2308	48,8462	20,7692	15,9231	10,3846	7,92308	6,23077
15	806,6	686,933	149,933	45,2667	42,3333	18	13,8	9	6,86667	5,4
17	711,706	606,118	132,294	39,9412	37,3529	15,8824	12,1765	7,94118	6,05882	4,76471
19	636,789	542,316	118,368	35,7368	33,4211	14,2105	10,8947	7,10526	5,42105	4,26316
	AD é a coligação PPD/PSD, CDS-PP e PPM									

Aplicando o método de St. Lagüë, a distribuição seria a mesma.

5. $a = 0,11 \times 1752,34 \approx 192,76 \text{ €}$

$b = 0,26 \times 1752,34 - 186,66 - 4 \times 21,43 \approx 183 \text{ €}$

$c = 1752,34 + 159,50 = 1911,84 \text{ €}$

$d = a + b \approx 192,76 + 183 = 375,76 \text{ €}$

$e = c - d \approx 1911,84 - 375,76 = 1536,08 \text{ €}$

$f = \frac{b}{1752,34} \times 100 \approx 10,44\%$

PÁG. 6

6.1 $0,18 \times 950 - 0,18 \times 1,4 \times (1385,20 - 950) \approx 61 \text{ €}$

6.2 No quarto escalão, o valor máximo da retenção na fonte é

$0,18 \times 1123,00 - 96,82 - 21,43 \approx 83 \text{ €}$

No quinto escalão, o valor máximo da retenção na fonte é

$0,26 \times 1765,00 - 186,66 - 21,43 \approx 250 \text{ €}$

Como $83,98 < 165 < 250,81$, a remuneração mensal, R , deste trabalhador enquadra-se no quinto escalão. Assim,

$0,26 \times R - 186,66 - 21,43 = 165 \Leftrightarrow R = \frac{165 + 186,66 + 21,43}{0,26} \Leftrightarrow R \approx 1434,96 \text{ €}$

7.1 $TANL = 0,72 \times TANB = 0,72 \times 0,0285 = 0,02052 = 2,052\%$

$C_f = 18500 (1 + 0,02052 \times 2) = 19259,24 \text{ €}$

7.2

a. $C_f = 18500 (1 + 0,02052) = 18879,62 \text{ €}$

b. $C_f = 18500 \left(1 + \frac{0,02052}{12}\right)^{12} \approx 18883,21 \text{ €}$

c. $C_f = 18500 \left(1 + \frac{0,02052}{2}\right)^2 \approx 18881,57 \text{ €}$

d. $C_f = 18500 \left(1 + \frac{0,02052}{4}\right)^4 \approx 18882,55 \text{ €}$

7.3

$$a. C_f = 18500 (1 + 0,02052)^3 = 19662,39 \text{ €}$$

$$b. C_f = 18500 \left(1 + \frac{0,02052}{12}\right)^{12 \times 3} \approx 19673,61 \text{ €}$$

$$c. C_f = 18500 \left(1 + \frac{0,02052}{2}\right)^{2 \times 3} \approx 19668,47 \text{ €}$$

$$d. C_f = 18500 \left(1 + \frac{0,02052}{4}\right)^{4 \times 3} \approx 19671,55 \text{ €}$$

PÁG. 7

$$7.4 \quad 18500 \left(1 + \frac{0,02052}{3}\right)^{3 \times k} = 22000$$

Capital Inicial	18 500,00 €
n	Capital Final
1	18 882,22 €
2	19 272,34 €
3	19 670,52 €
4	20 076,93 €
5	20 491,73 €
6	20 915,10 €
7	21 347,22 €
8	21 788,27 €
9	22 238,43 €

Pelo menos nove anos.

$$7.5 \quad C_i \left(1 + \frac{0,02052}{6}\right)^{6 \times 2} = 20000 \Leftrightarrow C_i = \frac{20000}{1,00342^{12}} \Leftrightarrow C_i \approx 19197,16 \text{ €}$$

8.1

$$\text{Opção 1: } C_f = 5700 (1 + 0,027 \times 5) = 6469,5 \text{ €}$$

$$\text{Opção 2: } C_f = 5700 (1 + 0,0258)^5 \approx 6474,23 \text{ €}$$

$$\text{Opção 3: } C_f = 5700 \left(1 + \frac{0,0255}{2}\right)^{2 \times 5} \approx 6469,90 \text{ €}$$

Deve escolher a opção 2.

8.2

a. No fim dos primeiros três anos, o capital é

$$5700 \left(1 + \frac{0,021}{4}\right)^{4 \times 3} \approx 6069,65 \text{ €}$$

Ao fim de cinco anos, o capital será

$$C_f \approx 6069,65 (1 + 0,035 \times 2) \approx 6494,53 \text{ €} .$$

$$b. \quad 5700(1 + \text{TANL} \times 5) = 6494,53 \Leftrightarrow 1 + \text{TANL} \times 5 = \frac{6494,53}{5700} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{TANL} \approx \frac{1,139 - 1}{5} \Leftrightarrow \text{TANL} \approx 0,0279 = 2,79\%$$

9. Como se pode observar na página 39 do volume 1 do manual, o capital em dívida, C_n , ao fim de n meses é dado por $C_n = C_{n-1} \left(1 + \frac{r}{12}\right) - p$, sendo p o valor da prestação mensal e r a taxa de juro anual (TAN).

Vamos utilizar uma folha de cálculo para calcular os valores do capital em dívida ao longo dos 84 meses de modo a determinar, por tentativa e erro, o valor da prestação mensal que ao fim dos 84 meses torna o capital em dívida o mais próximo possível de zero (valor negativo), idealmente zero.

Na imagem seguinte, é possível observar, na célula B3, a operacionalização da fórmula acima apresentada. Esta fórmula é copiada para todas as células abaixo, até ao mês 84.

Mês	Capital em dívida	Prestação	TAN
0	18 000,00 €	308,00 €	0,11
1	17 712,69 €		
2	17 567,06 €		
3	17 420,09 €		
4	17 271,77 €		
5	17 122,10 €		
6	16 971,05 €		
7	16 818,62 €		
8	16 664,79 €		
9	16 509,55 €		
10	16 352,88 €		
11	16 194,79 €		
12	16 035,24 €		
13	15 874,23 €		
14	15 711,74 €		
15	15 547,77 €		
16	15 382,29 €		
17	15 215,29 €		
18	15 046,77 €		

Introduzindo diversos valores na célula D2 (prestação mensal), vamos observando o valor que se obtém na célula B86 (capital em dívida no mês 84), até atingir o objetivo. Por exemplo, se a prestação mensal for de 308 €, obtém-se:

Mês	Capital em dívida	Prestação	TAN
0	18 000,00 €	308,00 €	0,11
1	17 857,00 €		
...			
83	330,59 €		
84	25,62 €		

Verifica-se que uma prestação mensal de 308 € não permite saldar a dívida em 84 meses.

Se a prestação mensal for de 309 €, obtém-se:

Mês	Capital em dívida	Prestação	TAN
0	18 000,00 €	309,00 €	0,11
1	17 856,00 €		
...			
83	207,03 €		
84	- 100,07 €		

Verifica-se que uma prestação mensal de 309 € é excessiva, já que no 84.º mês o Joaquim teria a receber 100,07 €.

Ao fim de mais algumas tentativas, chega-se ao valor de 308,21 €, sendo a última prestação reduzida de 0,77 €.

Mês	Capital em dívida	Prestação	TAN
0	18 000,00 €	308,21 €	0,11
1	17 856,79 €		
...			
83	304,65 €		
84	- 0,77 €		

Concluindo, o valor de prestação mensal a pagar pelo Joaquim será 308,21 € e valor total do juro será $308,21 \times 84 - 0,77 - 18000 = 7888,87$ €.