3. Geometria sintética no plano

Volume 2

PÁG. 19

1.1 (A)

É o centro da circunferência inscrita no triângulo.

1.2 (C)

É o centro da circunferência circunscrita no triângulo.

2.1 É obtusângulo porque o ortocentro está no seu exterior.

2.2 Como o triângulo é isósceles e obtusângulo, a reta que contém a altura relativa ao vértice correspondente ao ângulo obtuso contém também, além deste vértice, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro do triângulo, pelo que é a reta de Euler.

2.3 Como a distância do baricentro ao lado oposto ao ângulo obtuso é 4 e essa distância é $\frac{1}{3}$ da mediana correspondente, concluímos que a distância do vértice do ângulo obtuso ao lado oposto é 12 .

Assim, a medida de cada um dos lados iguais é $\sqrt{12^2+3^2}=\sqrt{153}=3\sqrt{17}$ e o perímetro do triângulo é $6+2\times3\sqrt{17}=6+6\sqrt{17}$.

PÁG. 20

3.1 Baricentro, dado que é a interseção de duas das medianas do triângulo.

3.2 $A_{[BCF]}=a \Leftrightarrow \frac{2}{6}A_{[ABC]}=a \Leftrightarrow A_{[ABC]}=3a$ e $A_{[ACD]}=\frac{1}{2}A_{[ABC]}=\frac{3a}{2}$

3.3 $P_{[BCF]}=8 \Leftrightarrow \overline{BC}+\overline{CF}+\overline{FB}=8 \Leftrightarrow \frac{x}{3}+3+2\overline{DF}+\frac{2}{3}\overline{EB}=8 \Leftrightarrow \frac{x}{3}+3+2x+\frac{2}{3}(2x+2)=8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{3}+3+2x+\frac{4x}{3}+\frac{4}{3}=8 \Leftrightarrow x+9+6x+4x+4=24 \Leftrightarrow x=1$

Assim, $\overline{DF}=1$, $\overline{EB}=2+2=4$, $\overline{BC}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$, $\overline{CF}=2\overline{DF}=2\times1=2$ e $\overline{FB}=\frac{2}{3}\overline{EB}=\frac{2}{3}\times4=\frac{8}{3}$.

$\overline{BC}^2=\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{100}{9}$ e $2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2=4+\frac{64}{9}=\frac{100}{9}$

Logo, o triângulo $[BCF]$ é retângulo.

4. (B)

$2\pi r=\frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow r=\frac{5\pi}{6}$, logo, a área da circunferência circunscrita, cuja medida do raio é o dobro da medida do raio da circunferência dos nove pontos, é $A=\pi\left(2\times\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{9}\pi$.

M36010CAD_RESOLUÇÕES © RAIZ EDITORA

5. Seja l a medida do lado do triângulo. A altura do triângulo é $\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}l$.

Como a área do triângulo é $2\sqrt{3}$, vem

$$\frac{l\times\frac{\sqrt{3}}{2}l}{2}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow l\times\frac{\sqrt{3}}{2}l=4\sqrt{3} \Leftrightarrow l^2=8 \Rightarrow l=2\sqrt{2}$$

Logo, a altura do triângulo é $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{6}$.

Sejam r a medida do raio da circunferência inscrita e R a medida do raio da circunferência circunscrita.

O centro das duas circunferências é o baricentro (num triângulo equilátero, o baricentro, o circuncentro, o ortocentro e o incentro coincidem).

Logo, $r=\frac{\sqrt{6}}{3}$ e $R=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Portanto, a área da coroa circular é $\pi\times\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2-\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-\pi\frac{4\times 6}{9}-\pi\times\frac{6}{9}=\pi\times\frac{18}{9}=2\pi$.

6.1 Como $\overline{BD}=\overline{CD}=15$, tem-se $D\hat{B}C=D\hat{C}B$. Assim, tem-se:

$$D\hat{B}C+D\hat{C}B+B\hat{D}C=180° \Leftrightarrow 2\times D\hat{B}C+60°=180° \Leftrightarrow 2\times D\hat{B}C=120° \Leftrightarrow D\hat{B}C=60°.$$

Logo, o triângulo $[BCD]$ é equilátero, pelo que os quatro pontos notáveis são coincidentes.

6.2 Falsa, porque não é a interseção das medianas do triângulo.

6.3

a. Como o triângulo $[BCD]$ é equilátero, e $\overline{BD}=\overline{CD}=15$, tem-se $\overline{BC}=15$.

Como $\overline{AB}=\overline{BC}$, $[BD]$ é uma mediana do triângulo $[ACD]$. Como F é o ponto médio do lado $[CD]$, $[AF]$ é também uma mediana do triângulo $[ACD]$.

Sendo E o ponto de interseção destas duas medianas, é o baricentro do triângulo $[ACD]$.

Como $\overline{BD}=15$ e E é o baricentro do triângulo $[ACD]$, $\overline{DE}=\frac{2}{3}\times\overline{BD}$, ou seja, $\overline{DE}=10$.

b. Como $D\hat{B}C=60°$, $D\hat{B}A=180°-D\hat{B}C=120°$.

Como $[BG]$ é uma altura do triângulo $[ABD]$, $A\hat{G}B=90°$.

Como $[ABD]$ é isósceles, $A\hat{B}G=60°$.

Assim, tem-se $\cos 60°=\frac{\overline{BG}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BG}=15\times\cos 60° \Leftrightarrow \overline{BG}=15\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{BG}=\frac{15}{2}$.

Como o triângulo $[ABD]$ é isósceles, $A\hat{D}B=\frac{180°-120°}{2}=30°$; logo, $A\hat{D}C=60°+30°=90°$.

Pelo critério AA, os triângulos $[ADC]$ e $[AGB]$ são semelhantes.

Assim, H é o ponto médio do lado $[BG]$ (tal como F é o ponto médio do lado $[CD]$).

Conclui-se, portanto, que $\overline{BH}=\frac{\overline{BG}}{2}=\frac{\frac{15}{2}}{2}=\frac{15}{4}$.

PÁG. 21

7. $A\hat{D}E = 60°$ e $[ADE]$ é retângulo, logo (aplicando trigonometria do triângulo retângulo)
$\overline{EA} = \sqrt{3}$ e $\overline{DE} = 1$.

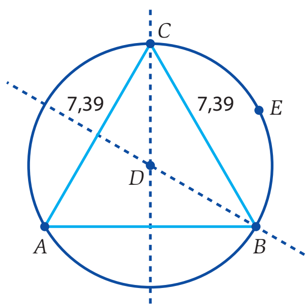
$\overline{DC} = \overline{DE} = 1$, o triângulo $[EDC]$ é isósceles e $D\hat{E}C = E\hat{C}D = 30°$, uma vez que $B\hat{D}C = 180° - 60° = 120°$.

Logo, $\overline{EC} = 2\cos(30°) = \sqrt{3}$.

Finalmente $D\hat{B}C = 180° - B\hat{D}C - A\hat{C}B$, $\hat{B} = 180° - 120° - 45° = 15°$ e
$E\hat{C}B = A\hat{C}B - E\hat{C}D = 45° - 30° = 15°$, pelo que $[BCD]$ é isósceles e, portanto, $\overline{EB} = \overline{EC}$.

Portanto, $\overline{EB} = \overline{EC} = \overline{EA} = \sqrt{3}$, donde se conclui que E é o centro da circunferência que contém os três vértices do triângulo $[ABC]$ $\left(\text{cujo raio é } \sqrt{3}\right)$, o que significa que E é o seu circuncentro.

8.



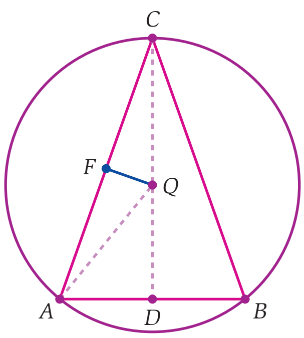
Conjetura-se que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

Se D e E coincidirem, o triângulo é retângulo (e escaleno); se não coincidirem, o triângulo é isósceles.

9.1 Pertence, porque o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

9.2 Como Q é o circuncentro do triângulo $[ABC]$, tem-se $\overline{AQ} = \overline{CQ}$.

Marquemos na figura o triângulo $[FQC]$, em que F é o ponto médio de $[AC]$.



Pelo critério AA, os triângulos $[ADC]$ e $[FQC]$ são semelhantes (têm um ângulo em comum, de vértice C , e um ângulo reto, pois $[EQ]$ e $[AD]$ são alturas de triângulos isósceles, $[ABC]$ e $[AQC]$.

Assim, para determinar $\overline{CQ}$, a medida do raio da circunferência circunscrita, vamos utilizar a seguinte igualdade (decorrente da semelhança dos triângulos $[ADC]$ e $[FQC]$) : $\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{CF}}{\overline{CD}}$

Vamos, entretanto, determinar $\overline{CD}$, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ADC]$.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow 6^2 = 2^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 32$$

$$\overline{CD} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Concluindo:

$$\frac{\overline{CQ}}{6} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{CQ} = \frac{3 \times 6}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

Racionalizando o denominador da expressão anterior, obtém-se:

$$\overline{CQ} = \frac{9 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

PÁG. 22

10.

- $[CH_3]$ é perpendicular a $[AB]$, pois H_3 é a projeção ortogonal do vértice C sobre a reta suporte do lado $[AB]$.
- Os triângulos $[E_1E_2O]$ e $[ABO]$ são semelhantes, pelo critério LAL, pois E_1 e E_2 são os pontos médios dos lados $[AO]$ e $[BO]$. Assim, $[E_1E_2]$ e $[AB]$ são paralelos.
- Como $[CH_3]$ é perpendicular a $[AB]$, e $[E_1E_2]$ e $[AB]$ são paralelos, $[CH_3]$ e $[E_1E_2]$ são perpendiculares.
- Como M_1 é o ponto médio de $[AC]$ e E_1 é o ponto médio de $[AO]$, os triângulos $[ACO]$ e $[AM_1E_1]$ são semelhantes (critério LAL), e, portanto, $[M_1E_1]$ e $[OC]$ são paralelos. Assim, conclui-se que $[M_1E_1]$ e $[CH_3]$ também são paralelos.
- Como $[CH_3]$ e $[E_1E_2]$ são perpendiculares e $[M_1E_1]$ e $[CH_3]$ são paralelos, $[M_1E_1]$ é perpendicular a $[E_1E_2]$, e portanto, o triângulo $[M_1E_1E_2]$ é retângulo em E_1.
- Assim, como o triângulo $[M_1E_1E_2]$ é retângulo em E_1 e está inscrito na circunferência dos nove pontos, conclui-se que $[M_1E_2]$ é um diâmetro dessa circunferência.