

4. Generalidades acerca de funções

Volume 2

1. II. e III.

I. e IV. não podem ser porque há pelo menos uma reta vertical que intersesta o gráfico em mais do que um ponto.

2. O conjunto de pontos (III) é o gráfico de uma função $x \rightarrow y$ de domínio $[-3, 3]$.

O conjunto de pontos (I) não pode ser o gráfico de uma função pois tem dois pontos com abcissa -1 ; o conjunto de pontos (II) é o gráfico de uma função de domínio $[-3, 3] \setminus \{1\}$, não sendo, portanto, o de uma função de domínio $[-3, 3]$;

o conjunto de pontos (IV) também não pode ser o gráfico de uma função pois tem uma infinidade de pontos com abcissa -3 .

$$3.1 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$3.2 \quad f(-1) = \frac{1}{2}$$

$$3.3 \quad D_f = \left\{-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

$$3.4 \quad D'_f = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right\}$$

3.5 Como para aumentos constantes dos objetos se verificam aumentos, também constantes, das respectivas imagens (aumentando $\frac{1}{2}$ o valor de um objeto, a respetiva imagem também aumenta $\frac{1}{2}$), trata-se de uma função afim.

A ordenada na origem da reta que representa a função f é $\frac{3}{2}$, porque $f(0) = \frac{3}{2}$.

O declive da reta é $\frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{1 - 0} = 1$.

Assim, uma expressão analítica de f é $f(x) = x + \frac{3}{2}$.

PÁG. 24

$$4.1 \quad h(-1) = -2(-1) + 1 = 3 \quad \text{e} \quad h(0) = -2 \times 0 + 1 = 1.$$

$$4.2 \quad h(x) = -5 \Leftrightarrow -2x + 1 = -5 \Leftrightarrow x = 3$$

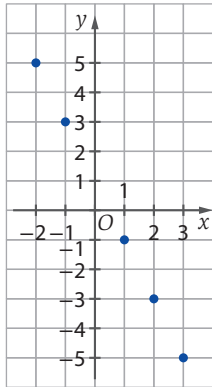
$$4.3 \quad D'_h = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\},$$

pois $h(-2) = -2 \times (-2) + 1 = 5$, $h(-1) = -2 \times (-1) + 1 = 3$, $h(0) = 1$,

$h(1) = -2 \times 1 + 1 = -1$, $h(2) = -2 \times 2 + 1 = -3$ e $h(3) = -2 \times 3 + 1 = -5$

4.4 O ponto de coordenadas $(-5, 3)$ não pertence ao gráfico de h , porque $h(-5) = -2(-5) + 1 = 11$; o ponto de coordenadas $(-1, 3)$ pertence, porque $h(-1) = 3$.

4.5



5.1 $D_g = [-4, -2[\cup \{-1\} \cup]0, 5]$ e $D'_g = \{-3\} \cup]-2, 2]$.

5.2 $g(-4) = 2$, $g(1) = -3$ e $g(4) = -1$.

5.3 $g(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{7}{2}, -1\right\}$

5.4 $g(3) = -3$, $(3, -3)$.

5.5 $(-3, 0)$ e $(5, 0)$.

6.1 $D_h = [-4, -2[\cup]-2, +\infty[$ e $D'_h =]-\infty, 3]$.

6.2

a. 0 e 4 pois $h(0) = -3$ e $h(4) = -3$.

b. -4 e 2 $h(-4) = 3$ e $h(2) = 3$.

c. $h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -1, 1, 3\}$

6.3 $h\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

Como os segmentos de reta e a semirreta são paralelos, as retas suporte têm o mesmo declive.

$(2, 3)$ e $(3, 0)$: $m = \frac{0-3}{3-2} = -3$ e $3 = -3 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 9$, $y = -3x + 9$.

$h(10) = -3 \times 10 + 9 = -21$

PÁG. 25

7.1 $f(0) = a \times 0^2 = 0$ e $f(2) = f(-2) = 5$.

7.2 (C)

$f(-2) = 5 \Leftrightarrow a \times (-2)^2 = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4}$

8.1 $D_f = \mathbb{R}$

8.2 $D_g = \mathbb{R}$

8.3 $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$$8.4 \quad D_i = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$x^2 + 4x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$$

$$8.5 \quad D_j = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \geq 0\} = [-2, +\infty[$$

$$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

$$8.6 \quad D_k = \mathbb{R}$$

$$8.7 \quad D_l = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3-x} \neq 0 \wedge 3-x \geq 0\} =]-\infty, 3[$$

$$\sqrt{3-x} \neq 0 \wedge 3-x \geq 0 \Leftrightarrow 3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3$$

$$8.8 \quad D_m = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x^2-1} \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$\sqrt[3]{x^2-1} \neq 0 \Leftrightarrow x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 1$$

$$8.9 \quad D_n = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0 \wedge x+2 \geq 0\} = [-2, +\infty[\setminus \{1\}$$

$$x-1 \neq 0 \wedge x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \wedge x \geq -2$$

$$8.10 \quad D_o = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 12x + 16 \neq 0 \wedge 4x + 4 \geq 0 \wedge 3 - x \geq 0\} = [-1, 3] \setminus \{2\}$$

$$2x^2 - 12x + 16 \neq 0 \wedge 4x + 4 \geq 0 \wedge 3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \neq 0 \wedge x \geq -1 \wedge x \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \wedge x \geq -1 \wedge x \leq 3$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow x-3 = -1 \vee x-3 = 1 \Leftrightarrow x=2 \vee x=4$$

$$9.1 \quad f(1) = -\frac{1}{2} \times 1 - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$9.2 \quad f(x) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = -4$$

9.3 (B)

$f(-6) = -\frac{1}{2} \times (-6) - 1 = 2$ e substituindo x por 6 na equação $y = -\frac{1}{2}x - 1$ da reta que contém o gráfico de f , tem-se $y = -\frac{1}{2} \times 6 - 1 = -4$.

Logo, o contradomínio de f é $]-4, 2]$.

$$10.1 \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$10.2 \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3 \text{ impossível}$$

$$10.3 \quad h(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$10.4 \quad i(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + \frac{4x}{3} + \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2x + \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$$

PÁG. 26

$$11.1 \quad f(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -1, 1\}; \quad g(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2\}; \quad h(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1, 4\}.$$

11.2

x	-4		-3		-2		-1		1		3
$f(x)$	-2	-	0	+	2	-	0	+	0	+	N.D.

x	-4		1		2		4
$g(x)$	-1	-	0	+	0	+	1

x	-3		-2		1		2		4
$h(x)$	1	+	0	-	0	+	N.D.	+	0

$$12. \quad m = \frac{-1-3}{3+2} = -\frac{4}{5} \text{ e } 3 = -\frac{4}{5} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{5}, \quad h(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{7}{5}.$$

$$h(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}x + \frac{7}{5} = 0 \Leftrightarrow -4x + 7 = 0 \Leftrightarrow -4x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$$

$$13.1 \quad D_f = [-6, 5[\text{ e } D'_f =]-2, 2].$$

$$13.2 \quad f(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{-6, 0, 4\}$$

13.3

x	-6		0		4		6
$g(x)$	-1	+	0	-	0	+	N.D.

13.4

$$a. \quad f(x) = -2 \Leftrightarrow x \in \{ \}$$

$$b. \quad f(x) = -1 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3\}$$

$$c. \quad f(x) = f(-1) \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{-4, -1\}$$

$$d. \quad f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, 4[$$

$$e. \quad f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \in [-4, -1]$$

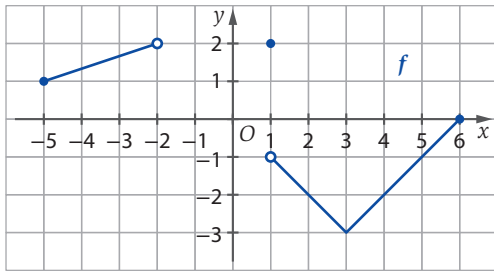
$$f. \quad f(x) \leq -1 \Leftrightarrow x \in [1, 3]$$

13.5 (D)

$f(x) = k$ tem apenas uma solução se $k = 2$, pois a única reta horizontal que interseca o gráfico de f num único ponto é a reta de equação $y = 2$.

PÁG. 27

14.1 $D_f = [-5, -2[\cup [1, 6]$ e $D'_f = [-3, 0] \cup [1, 2]$.



14.2

- a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{6\}$
 b. $f(x) = -1 \Leftrightarrow x \in \{5\}$
 c. $f(x) > 2 \Leftrightarrow x \in \{ \}$
 d. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1, 6[$
 e. $f(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [-5, -2[\cup \{1\}$
 f. $f(x) \leq -1 \Leftrightarrow x \in \{-5\} \cup]1, 6]$

14.3 (C)

São os únicos valores inteiros de k tais que a reta de equação $y = k$ interseca o gráfico de f num único ponto.

15.1 $D_g =]-3, 5]$ e $D'_g = [-1, 2]$.

15.2

x	-3		0		3		5
$g(x)$	N.D.	-	1	+	0	+	2

15.3

- a. $g(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{0, 2, 4\}$
 b. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{3\}$
 c. $g(x) = -1 \Leftrightarrow x \in [-2, 0[$
 d. $g(x) < 1 \Leftrightarrow x \in]-3, 0[\cup]2, 4[$
 e. $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 0[\cup \{3\}$
 f. $g(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \in \{1, 5\}$

15.4 (B)

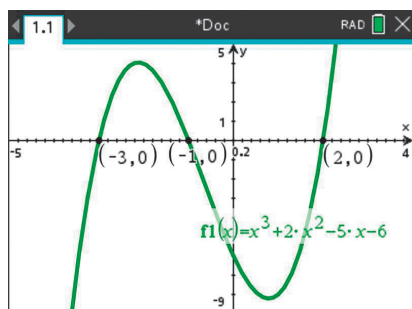
$g(0) = 1$, pelo que 0 apenas não é solução da condição $g(x) > 1$.

15.5

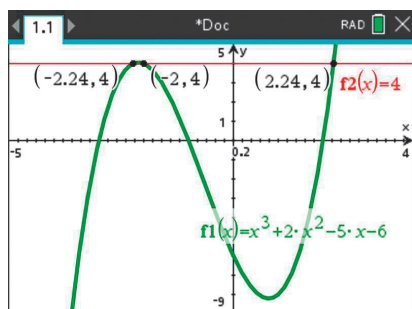
- a. $]-1, 0]$
 b. $]0, 1[\cup \{2\}$
 c. $\{-1\}$

PÁG. 28

16.1 $h(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -1, 2\}$

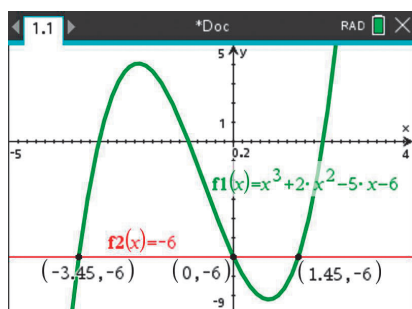


16.2 $h(x)=4 \Leftrightarrow x \in \{-2,24; -2; 2,24\}$



16.3

- a. $h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-5, -3[\cup]-1, 2[$
 b. $h(x) \geq -6 \Leftrightarrow x \in [-3,45; 0] \cup [1,45; 4]$



17.1 $D_f = D'_f =]-\infty, 1]$

17.2 $m = \frac{-1-1}{-4-1} = \frac{2}{5}$ e $1 = \frac{2}{5} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{5}$, $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$.

17.3 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x + \frac{3}{5} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

17.4

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x) = -3 &\Leftrightarrow \frac{2}{5}x + \frac{3}{5} = -3 \wedge x \in]-\infty, 1] \Leftrightarrow 2x + 3 = -15 \wedge x \in]-\infty, 1] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -9 \wedge x \in]-\infty, 1] \Leftrightarrow x = -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f(x) \geq -2 &\Leftrightarrow \frac{2}{5}x + \frac{3}{5} \geq -2 \wedge x \in]-\infty, 1] \Leftrightarrow 2x + 3 \geq -10 \wedge x \in]-\infty, 1] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \geq -\frac{13}{2} \wedge x \in]-\infty, 1] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{13}{2}, 1\right] \end{aligned}$$

18. (B)

O gráfico da opção (A) não representa uma função crescente, pois $f(2) = f(3) = 3$;
o da opção (C) também não representa uma função crescente, pois $f(0) = f(1) = 1$;
o da opção (D) também não representa uma função crescente pois, por exemplo, $f(0) = f(3) = 2$.

Finalmente, o da opção (B) representa o gráfico de uma função crescente, dado que
 $\forall x_1, x_2 \in D_f$, com $x_1 < x_2$ vem $f(x_1) < f(x_2)$.

PÁG. 29

19.1 Não. Por exemplo, é decrescente em $[-3, -2]$ e é crescente em $[-2, 0]$.

19.2

x	-3		-2		0		6
Monotonia de g	4	\searrow	0	\nearrow	2	\searrow	N.D.

h é decrescente em $[-3, -2]$ e em $[0, 6[$; h é crescente em $[-2, 0]$.

19.3 h tem mínimo relativo 0 em $x = -2$; h tem máximo relativo 4 em $x = -3$ e 2 em $x = 0$.

19.4 h não tem mínimo absoluto e tem máximo absoluto igual a 4 .

20.1

A. Verdadeira.

B. Falsa, pois existem valores $a \in [1, 3[$ tais que $g(a) < g(3)$.

C. Verdadeira.

D. Falsa, pois não existe um valor $m \in D_g$ tal que, para todo $x \in D_g$, se tenha $g(x) \leq g(m)$.

E. Verdadeira.

20.2

x	-4		-3		-1		0		1		3
Monotonia de g	-1	\nearrow	1	\rightarrow	1	\searrow	0	\nearrow	2	\searrow	-2

20.3 g tem mínimo relativo -1 em $x = -4$, 1 em $x \in]-3, -1[$ e 0 em $x = 0$; h tem máximo relativo 1 em $x \in]-3, -1]$, 2 em $x = 1$ e -2 em $x = 3$.

20.4 $a = 1$, $g(a)$ é o máximo absoluto de g .

PÁG. 30**21.1**

- a. $[0, 2]$
 b. $[-2, 0]$
 c. $[-3, -2]$ e $[0, 3]$.
 d. $[-3, 0]$ e $[2, 3]$.
 e. $[-3, -2]$ e $[2, 3]$.

21.2

- a. 4 em $x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$
 b. 0 em $x = 0$
 c. Máximo relativo: 4 em $x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$.
 Mínimos relativos: 0 em $x = 0$ e 4 em $x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$.

22.1 (A)

f não é constante em $[-3, -2] \cup [2, 3]$ pois, por exemplo, $f(-3) = 2 \neq -2 = f(3)$.

22.2

- A. Verdadeira.
 B. Falsa. Perto de 0, à sua esquerda, existem objetos com imagem maior do que $f(0)$ e à sua esquerda com imagem inferior a $f(0)$.
 C. Verdadeira.

22.3 (B)

-2 não é minimizante de f porque perto de -2 , à sua direita, existem objetos com imagem inferior a $f(-2)$.

PÁG. 31

23.1 $g: 3$ em $x = 3$; $h: 2$ em $x = 2$ e $x = 3$; $i: 2$ em $x = 2$.

23.2 $f: 0$ em $x = 0$ e $x = 3$; $g: 0$ em $x = 0$; $i: 0$ em $x = 3$.

23.3 f e g .

24.1 $D_f = [-5, 5]$ e $D_f' = [-3, 1] \cup [1, 2] \cup \{4\}$.

24.2 $f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in [-3, -1] \cup \{5\}$

24.3 Um.

24.4

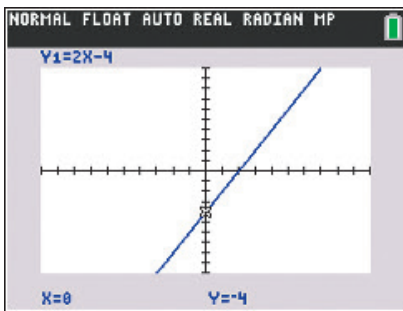
- A. Verdadeira.
- B. Verdadeira.
- C. Falsa.
- D. Verdadeira.
- E. Falsa.
- F. Falsa.
- G. Falsa.

24.5

x	-5		-3		-1		1		2		5
Monotonia de f	4	→	4	→	2	↘	-3	↗	-2	↗	2

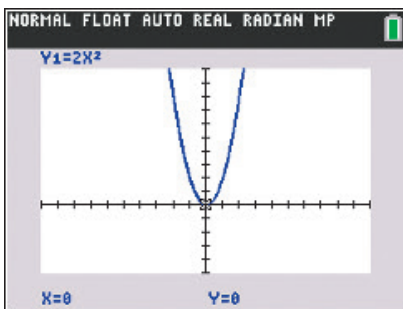
PÁG. 32

25.1



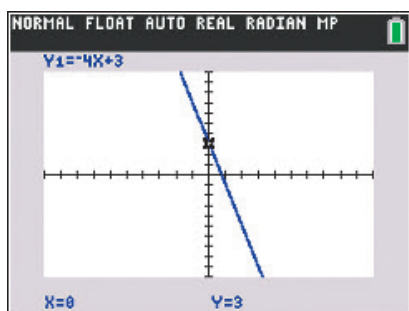
f é crescente.

25.2



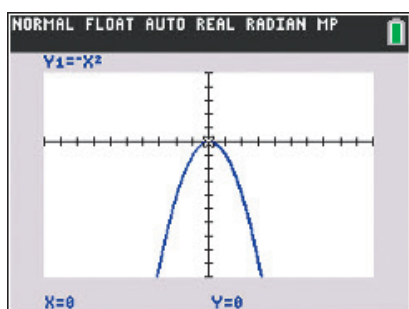
h é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.

25.3



g é decrescente.

25.4



h é crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

26.1 $D_g = [-3, +\infty[$ e $D'_g =]-\infty, 2]$.

26.2

x	-3		0		2		6	$+\infty$
$g(x)$	-2	-	0	+	-1	+	0	-

26.3

x	-3		-1		1		2		5	$+\infty$
Monotonia de g	-2	\rightarrow	-2	\nearrow	2	\searrow	-1	\nearrow	1	\searrow

26.4 g é crescente em $[-1, 1]$ e em $[2, 5[$; g é decrescente em $[1, 2]$ e em $[5, +\infty[$; g é constante em $[-3, -1]$.

26.5 Mínimos relativos: -2 em $x \in [-3, -1]$ e -1 em $x = 2$.

Máximos relativos: -2 , em $x \in [-3, -1[$ e 2 em $x = 1$.

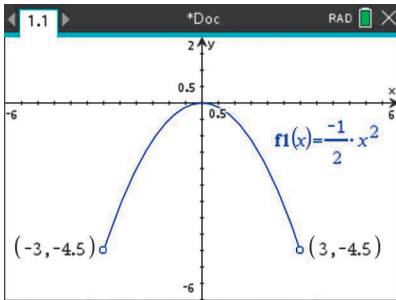
26.6

- A.** Verdadeira.
- B.** Verdadeira.
- C.** Falsa. Por exemplo, $g(4,5) > g(5)$.
- D.** Falsa. Por exemplo, $g(9) < g(-2)$.

$$26.7 \quad g(x) = 2 \times g(2) \Leftrightarrow g(x) = 2 \times (-1) \Leftrightarrow g(x) = -2 \Leftrightarrow x \in [-3, -1] \cup \{8\}$$

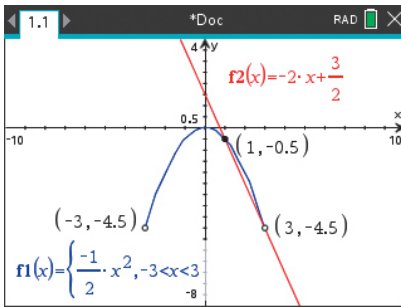
PÁG. 33

27.1



$$27.2 \quad D'_g =]-4,5; 0]$$

27.3

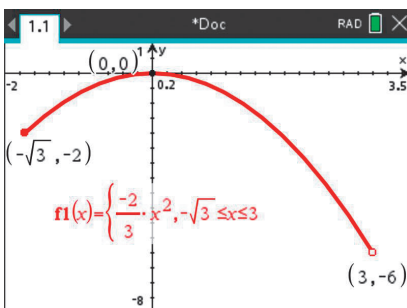


As coordenadas do (único) ponto de interseção da reta com o gráfico de g são $(1; -0,5)$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 &= -2x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 1 &= 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = -1 \vee x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Como $D'_g =]-3, 3[$, $g(x) = -2x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1$.

28.

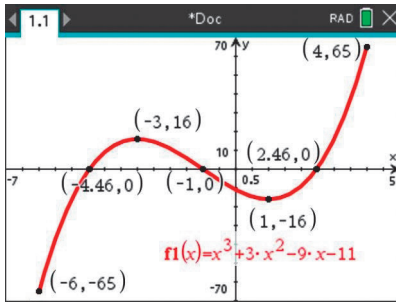


h é crescente em $[-\sqrt{3}, 0]$; h é decrescente em $[0, 3[$.

Máximo relativo: 0 (absoluto), em $x = 0$.

Mínimo relativo: -2 , em $x = -\sqrt{3}$.

29.



Zeros: $-4,46$, -1 e $2,46$;

Sinal: a função f é positiva em $]-4,46; -1[\cup]2,26; 4]$

e é negativa em $[-6; -4,46[\cup]-1; 2,46[$;

Máximos relativos: 16 , em $x = -3$, e 65 (absoluto), em $x = 4$;

Mínimos relativos: -65 (absoluto), em $x = -6$, e -16 , em $x = 1$;

Intervalos de monotonia: a função f é crescente em $[-6, -3]$

e em $[1, 4]$ e é decrescente em $[-3, 1]$.

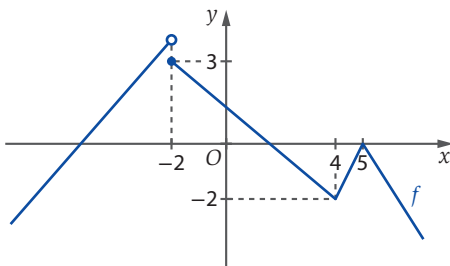
PÁG. 34

30.1 (D)

Um em $]-\infty, -2]$, outro em $[2, 4]$ e o 5 .

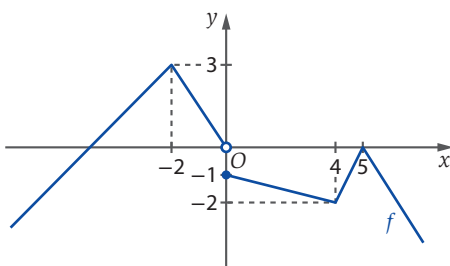
Na solução do item **30.2** está um possível gráfico com três zeros.

30.2



Falsa. A função f cujo gráfico está acima, satisfaz as condições do enunciado, mas $f(-2)$ não é máximo.

30.3 Por exemplo,



30.4

$$\text{a. } g(4) \times g(x) \geq 0 \underset{g(4) < 0}{\Leftrightarrow} g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -5] \cup \left[\frac{8}{5}, \frac{9}{2}\right] \cup \{5\}$$

Em $[-2, 4]$,

$$m = \frac{-2-3}{4+2} = -\frac{5}{6} \text{ e } 3 = -\frac{5}{6} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 3 - \frac{5}{3} \Leftrightarrow b = \frac{4}{3}, y = -\frac{5}{6}x + \frac{4}{3}.$$

$$-\frac{5}{6}x + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow -5x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$$

b. g é crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[4, 5[$;

g é decrescente em $[-2, 4]$ e em $]5, +\infty[$;

g tem máximo relativo (e absoluto), igual a 3, em $x = -2$;

tem mínimo relativo, igual a -2 , em $x = 4$; e tem mínimo relativo, igual a 0, em $x = 5$.

c. $[0, 2[$

d. Em $]-\infty, -2]$,

$$m = \frac{0-3}{-5+2} = 1 \text{ e } 3 = 1 \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 3 + 2 \Leftrightarrow b = 5, y = x + 5.$$

$$x + 5 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq -3$$

Em $[-2, 4]$:

$$-\frac{5}{6}x + \frac{4}{3} \leq 2 \Leftrightarrow -5x + 8 \leq 12 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{5}$$

$$g(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup \left[-\frac{4}{5}, +\infty\right[$$

$$\text{e. } D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \neq 0 \wedge g(x) \geq 0\}$$

$$x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3 \wedge x \neq 3$$

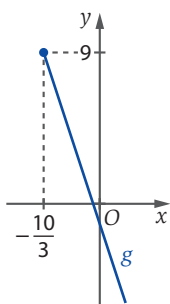
$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-5, \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right[$$

$$D_h = \left[-5, \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right[\setminus \{-3\}$$

PÁG. 35

$$\text{31.1 } m = \frac{-4-5}{1-(-2)} = \frac{-9}{3} = -3 \text{ e } 5 = -3 \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -1,$$

$$g(x) = -3x - 1, g(x) = 9 \Leftrightarrow -3x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = -\frac{10}{3}.$$



31.2 $D_g = \left[-\frac{10}{3}, +\infty\right[$ e $D'_g =]-\infty, 9]$.

31.3 $g(x) - g(1) < g(0) \Leftrightarrow -3x - 1 - (-4) < -1 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$

31.4 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : g(x) - 2 \geq 0 \wedge x \in D_g\}$

$g(x) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -3x - 1 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -1$

$D_f = \left[-\frac{10}{3}, +\infty\right[\cap]-\infty, -1] = \left[-\frac{10}{3}, -1\right]$

31.5

a. h é decrescente em $]-\infty, -7]$ e em $\left[-\frac{10}{3}, +\infty\right[$ e é constante em $\left[-7, -\frac{10}{3}\right[$.

Tem mínimo relativo igual a 10 em $x \in \left[-7, -\frac{10}{3}\right[$

e máximo relativo igual a 10 em $x \in \left]-7, -\frac{10}{3}\right[$.

b. Em sentido lato, h é decrescente em \mathbb{R} .

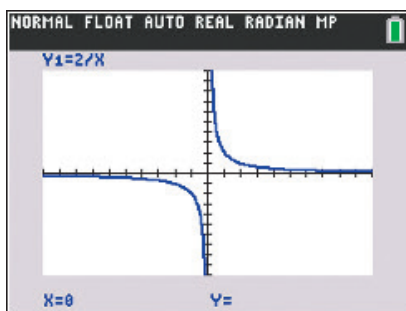
c. $h(x) = 0 \Leftrightarrow -3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$h(x)$	+	0	-

32.1 $f(2) = g(2) \Leftrightarrow \frac{k}{2} = 2k - 3 \Leftrightarrow k = 4k - 6 \Leftrightarrow -3k = -6 \Leftrightarrow k = 2$

Logo, o gráfico de g é uma reta de declive positivo, pelo que g é crescente em \mathbb{R} .

32.2



Tendo em conta a representação gráfica de f , verifica-se que f é decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$.

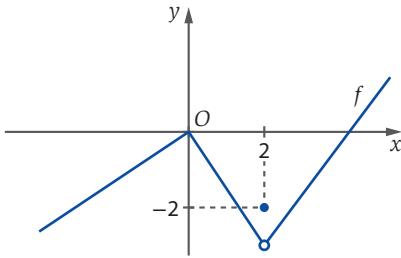
32.3 Já vimos que f é decrescente em $]-\infty, 0[$, pelo que não pode ser crescente no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Também não é decrescente em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pois $-1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $-1 < 1$, mas $f(-1) = -2 < 2 = f(1)$.

PÁG. 36

33. (C)

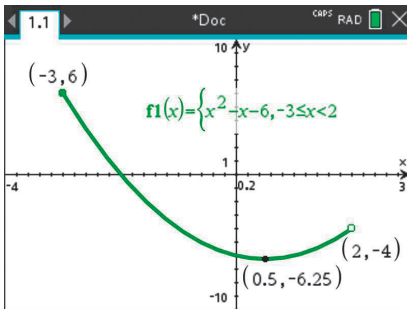
Exemplo do gráfico de uma função que satisfaz as condições do enunciado mas em que $f(-2)$ não é mínimo.



34. (C)

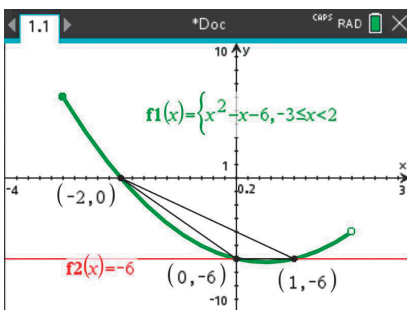
g tem um mínimo relativo em $x = a$ e h tem um máximo relativo em $x = a$.

35.



35.1 $D'_f = [-6, 25 ; 6]$

35.2



Área = $\frac{1 \times 6}{2} = 3$



PÁG. 37**36.1** $D'_h =]-\infty, 3[$. Não.

36.2 $8h(x) - 9 \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq \frac{9}{8} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{9}{2}\right\} \cup \left]1, \frac{7}{2}\right]$

Em $]1, +\infty[$,

$$m = \frac{0-3}{5-1} = -\frac{3}{4} \text{ e } 3 = -\frac{3}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = 3 + \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = \frac{15}{4}, y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

$$-\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} = \frac{9}{8} \Leftrightarrow -6x + 30 = 9 \Leftrightarrow -6x = -21 \Leftrightarrow x = \frac{21}{6} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

36.3

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$		-2		1	$+\infty$
Monotonia de h	\nearrow	$\frac{9}{8}$	\searrow	-2	\rightarrow	n.d.	\searrow

h é crescente em $]-\infty, -\frac{9}{2}]$, é decrescente em $[-\frac{9}{2}, -2]$ e em $]1, +\infty[$ e é constante em $[-2, 1[$.

h tem máximo relativo igual a $\frac{9}{8}$ em $x = -\frac{9}{2}$ e igual a -2 em $x \in]-2, 1[$ e tem mínimo relativo igual a -2 em $x \in [-2, 1[$.

36.4 $]-\infty, -2[\cup \left\{\frac{9}{8}\right\}$

Correspondem aos valores de k para os quais a reta de equação $y = k$ interseca o gráfico de h em exatamente dois pontos.

36.5 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : h(x) - 2 \neq 0 \wedge h(x) \geq 0\}$

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-6, -3] \cup]1, 5]$$

$$h(x) - 2 \neq 0 \Leftrightarrow h(x) \neq 2 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} \neq 2 \Leftrightarrow -3x + 15 \neq 8 \Leftrightarrow x \neq \frac{7}{3}$$

$$D_f = [-6, -3] \cup]1, 5] \setminus \left\{\frac{7}{3}\right\}$$

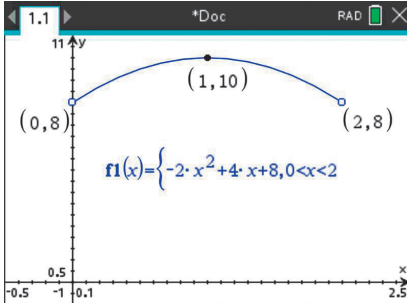
37.1 Para $a = 1$, $\overline{CD} = 2$ e $A(1, f(1))$, ou seja, $A(1, 3)$, pelo que $\overline{AD} = 3$.Portanto, Perímetro = $2 \times 2 + 2 \times 3 = 10$ e Área = $2 \times 3 = 6$.

37.2

a. $A(a, f(a))$, pelo que $\overline{AD} = f(a) = 4 - a^2$; $\overline{CD} = 2a$.

Logo, $g(a) = 2\overline{CD} + 2\overline{AD} = 2a + 2(4 - a^2) = 2a + 8 - 2a^2 = -2a^2 + 4a + 8$.

b.



$$D'_g =]8, 10]$$

g é crescente em $]0, 1]$ e é decrescente em $[1, 2[$, atingindo o valor máximo 10 em $a = 1$.

Interpretação: o perímetro do retângulo aumenta à medida que a varia de 0 até 1, atingindo aí o seu valor máximo, 10, e diminui à medida que a varia de 1 até 2.

O perímetro aproxima-se de 8 nas proximidades de $a=0$ e $a=2$, situações em que \overline{CD} ou \overline{AB} tendem para zero e o perímetro do retângulo tende para o dobro do comprimento do segmento $[BC]$ ou $[CD]$, respetivamente.

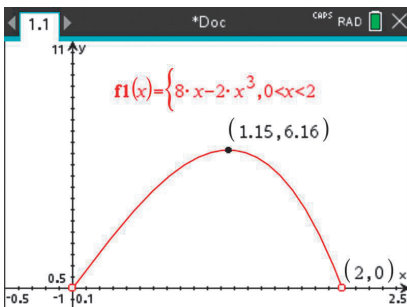
Geometricamente, nestas situações, o retângulo «tende» para um segmento de reta com 4 unidades de comprimento, que é contabilizado duas vezes.

PÁG. 38

37.3

a. $h(a) = \overline{CD} \times \overline{AD} = 2a \times (4 - a^2) = 8a - 2a^3$

b.



$$D'_h =]0; 6,16]$$

h é crescente em $]0; 1,15]$ e é decrescente em $[1,15; 2[$, atingindo o valor máximo aproximado de 6,16 em $a \approx 1,15$.

Interpretação: a área do retângulo aumenta à medida que a varia de 0 até 1,15, atingindo aí o seu valor máximo, aproximadamente 6,16, e diminui à medida que a varia de 1,15 até 2.

A área aproxima-se de 0 nas proximidades de $a=0$ e $a=2$, situações em que o retângulo deixa de existir.

38. (C)

O gráfico (A) não pode ser, pois a distância máxima do ponto P ao ponto Q é 2.

O gráfico (B) não pode ser, dado que quando o ponto P percorre os arcos AB e CD a distância ao ponto Q é constante (igual a 2), o que não é traduzido neste gráfico.

O gráfico (D) não pode ser, dado que os arcos AB e CD têm o mesmo comprimento do raio da circunferência, pelo que o tempo que o ponto P demora a percorrê-los é igual ao tempo que demora a percorrer cada um dos raios, o que não é traduzido neste gráfico.