

# 5. Funções polinomiais de grau não superior a 2.

## Funções definidas por ramos

### Volume 2

#### PÁG. 39

##### 1. (B)

$$y = -(x - 2)^2 + (-3), \quad V(2, -3).$$

##### 2. (D)

Como as coordenadas do vértice desta parábola são  $(-4, 2)$ , a equação do seu eixo de simetria é  $x = -4$ .

$$3.1 \quad y = 3x^2 + 1, \quad V(0, 1), \quad x = 0, \quad D' = [1, +\infty[.$$

$$3.2 \quad y = -(x - 2)^2 + (-2), \quad V(2, -2), \quad x = 2, \quad D' = ]-\infty, -2].$$

$$3.3 \quad y = 2(x - 1)^2 + 1, \quad V(1, 1), \quad x = 1, \quad D' = [1, +\infty[.$$

$$3.4 \quad y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + (-3), \quad V(4, -3), \quad x = 4, \quad D' = ]-\infty, -3].$$

$$3.5 \quad y = (2x + 4)^2 + 8 = 4(x - (-2))^2 + 8, \quad V(-2, 8), \quad x = -2, \quad D' = [8, +\infty[.$$

$$3.6 \quad y = 2(3x - 4)^2 + (-5) = 18\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + (-5), \quad V\left(\frac{4}{3}, -5\right), \quad x = \frac{4}{3}, \quad D' = [-5, +\infty[.$$

##### 4. (D)

$$f(x) = a(x - (-1))^2 + k \quad \text{e} \quad D' = [-4, +\infty[.$$

Logo,  $k = -4$  e  $a > 0$ .

##### 5. (A)

$$y = -(3x + h)^2 + 1 = -\left[3\left(x - \left(-\frac{h}{3}\right)\right)\right]^2 + 1$$

A parábola tem eixo de simetria de equação  $x = -\frac{2}{9}$  se  $-\frac{h}{3} = -\frac{2}{9}$ , ou seja,  $h = \frac{2}{3}$ .

#### PÁG. 40

##### 6. (B)

$$\begin{cases} 0 = a(-2 + h)^2 + k \\ 0 = a(4 + h)^2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -a(-2 + h)^2 \\ k = -a(4 + h)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a(-2 + h)^2 = -a(4 + h)^2 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h^2 - 4h + 4 = h^2 + 8h + 16 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = -1 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

7. e 8.

**7.1 e 8.1**  $f(x) = 2x^2 - 4x = 2(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) = 2((x-1)^2 - 1) = 2(x-1)^2 - 2$ ,  
 $V(1, -2)$ .

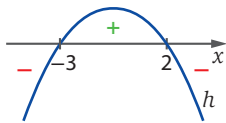
**7.2 e 8.2**  $g(x) = -x^2 + 6x - 4 = -(x^2 - 6x) - 4 = -[(x-3)^2 - 9] - 4 = -(x-3)^2 + 5$ ,  
 $V(3, 5)$ .

**7.3 e 8.3**  $h(x) = -x^2 - x + 1 = -(x^2 + x) + 1 = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 1 = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$ ,  
 $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ .

**7.4 e 8.4**  $i(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) - 1 = 3\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] - 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$ ,  
 $V\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ .

**9.1**  $h(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1) \times 6}}{2(-1)} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{-2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$

$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-3, 2[$  e  $h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -3[ \cup ]2, +\infty[$



**9.2** A abscissa do vértice da parábola é  $-\frac{3+2}{2} = -\frac{1}{2}$ , pelo que  $h$  é crescente em  $]-\infty, -\frac{1}{2}[$  e é decrescente em  $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ .

**9.3**  $h$  tem máximo absoluto em  $x = -\frac{1}{2}$ .

O valor desse máximo é  $h\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$ .

$D'_h = ]-\infty, \frac{25}{4}]$

**10.1**  $V(2, -3)$ , pelo que  $f(x) = a(x-2)^2 + (-3)$ .

$f(4) = 1 \Leftrightarrow a(4-2)^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow a = 1$ ,  $f(x) = (x-2)^2 - 3$

**10.2**  $V(-2, 3)$ , pelo que  $g(x) = a(x - (-2))^2 + 3$ .

$g(-4) = 1 \Leftrightarrow a(-4+2)^2 + 3 = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$ ,  $g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$

**10.3**  $V(3, 1)$ , pelo que  $h(x) = a(x-3)^2 + 1$ .

$h(4) = 3 \Leftrightarrow a(4-3)^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow a = 2$ ,  $h(x) = 2(x-3)^2 + 1$

## PÁG. 41

**10.4**  $V(1, 4)$ , pelo que  $i(x) = a(x-1)^2 + 4$ .

$$i(2) = 2 \Leftrightarrow a(2-1)^2 + 4 = 2 \Leftrightarrow a = -2, \quad i(x) = -2(x-1)^2 + 4.$$

**10.5**  $V(0, -1)$ , pelo que  $j(x) = ax^2 + (-1)$ .

$$j(-3) = 2 \Leftrightarrow a(-3)^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}, \quad i(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1.$$

**10.6**  $V(-1, -1)$ , pelo que  $k(x) = a(x+1)^2 - 1$ .

$$k(-4) = -3 \Leftrightarrow a(-4+1)^2 - 1 = -3 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{9}, \quad k(x) = -\frac{2}{9}(x+1)^2 - 1.$$

**11.1**  $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 = (x-1)^2 - 1 + 3 = (x-1)^2 + 2$ ,  $V(1, 2)$ .

**11.2**  $g(x) = x^2 + 6x + 6 = (x+3)^2 - 9 + 6 = (x+3)^2 - 3$ ,  $V(-3, -3)$ .

**11.3**  $h(x) = 4x^2 + 4x + 1 = 4(x^2 + x) + 1 = 4\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ ,  $V\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

**11.4**  $i(x) = 9x^2 - 6x = 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) = 9\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 1$ ,  $V\left(\frac{1}{3}, -1\right)$ .

**12.1**  $V(-1, 3)$

**12.2** Como a reta de equação  $x = -1$  é o eixo de simetria do gráfico de  $f$  e  $f(0) = -1$ , conclui-se que  $f(-2) = -1$ . Logo, o conjunto-solução da equação  $f(x) = -1$  é  $\{-2, 0\}$ .

**12.3**  $V(-1, 3)$ , pelo que  $f(x) = a(x+1)^2 + 3$ .

$$f(0) = -1 \Leftrightarrow a(0+1)^2 + 3 = -1 \Leftrightarrow a = -4, \quad f(x) = -4(x+1)^2 + 3.$$

**13.1** Como  $g$  tem um mínimo absoluto em  $x = 3$ , a equação do eixo de simetria é  $x = 3$ .

**13.2**  $(5, 0)$  e  $(3-2, 0) = (1, 0)$

**13.3**  $g(x) = a(x-3)^2 + k$

$$g(7) = 6 \Leftrightarrow a(7-3)^2 + k = 6 \Leftrightarrow 16a + k = 6 \quad \text{(I)}$$

$$g(5) = 0 \Leftrightarrow a(5-3)^2 + k = 0 \Leftrightarrow 4a + k = 0 \Leftrightarrow k = -4a \quad \text{(II)}$$

$$\text{De (I) e (II) resulta } 16a - 4a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e } k = -4 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -2$$

$$\text{Assim, } g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2.$$

$$\text{14.1 } x = \frac{0 + (-2)}{2} = -1$$

**14.2**  $h(x) = a(x+1)^2 + k$

$$h(0) = 2 \Leftrightarrow a(0+1)^2 + k = 2 \Leftrightarrow a + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 - a \quad \text{(I)}$$

$$h(3) = 7h(1) \Leftrightarrow a(3+1)^2 + k = 7[a(1+1)^2 + k] \Leftrightarrow 16a + k = 28a + 7k \Leftrightarrow 12a + 6k = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a + k = 0 \quad \text{(II)}$$

$$\text{De (I) e (II), resulta } 2a + 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = -2 \text{ e } k = 2 - (-2) = 4.$$

$$\text{Assim, } h(x) = -2(x+1)^2 + 4.$$

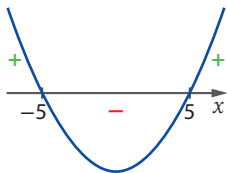
## PÁG. 42

## 15.

- A.** Falsa, dado que o contradomínio é  $[0, +\infty[$ , pelo que a função tem um único zero.
- B.** Verdadeira, a abcissa do vértice da parábola que é o gráfico de  $f$  é  $\frac{-2+6}{2} = 2$ , e tem a concavidade voltada para cima, visto que  $D_f = [0, +\infty[$ .  
Logo,  $f$  é crescente em  $[2, +\infty[$ .
- C.** Falsa, é positiva em  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .
- D.** Falsa, o eixo de simetria é a reta de equação  $x = 2$ .
- E.** Verdadeira
- F.** Falsa,  $f(-2) = f(6)$ , pelo que  $f(2) \neq f(6)$ .
- G.** Verdadeira

## 16. (B)

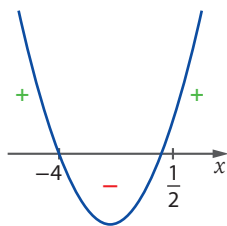
$$x^2 \geq 25 \Leftrightarrow x^2 - 5^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$$



$$17.1 \quad 2x^2 + 7x - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -4[ \cup \left] \frac{1}{2}, +\infty[$$

Cálculo auxiliar:

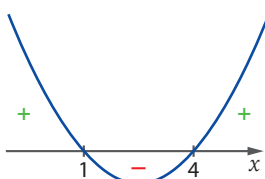
$$2x^2 + 7x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 9}{4} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = \frac{1}{2}$$



$$17.2 \quad x^2 - 5x + 1 < -3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow x \in ]1, 4[$$

Cálculo auxiliar:

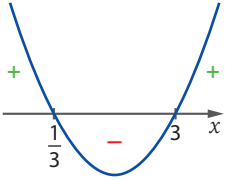
$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$$



$$17.3 \quad 3x(x-1)+3 \leq 7x \Leftrightarrow 3x^2-3x+3-7x \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2-10x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{1}{3}, 3 \right]$$

**Cálculo auxiliar:**

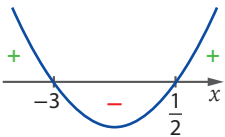
$$3x^2-10x+3=0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 3 \times 3}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm 8}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 3$$



$$17.4 \quad 2(x+2)^2 \geq 3x+11 \Leftrightarrow 2(x^2+4x+4)-3x-11 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2+8x+8-3x-11 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2+5x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -3] \cup \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

**Cálculo auxiliar:**

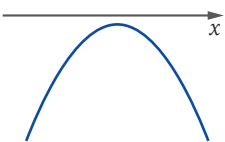
$$2x^2+5x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{4} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{1}{2}$$



$$17.5 \quad -x(x+1)+2(x-1) < -1 \Leftrightarrow -x^2-x+2x-2+1 < 0 \Leftrightarrow -x^2+x-1 < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

**Cálculo auxiliar:**

$$-x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{-2} \text{ impossível}$$

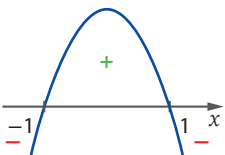


$$17.6 \quad (x-3)^2 > 2x^2+4x-2 \Leftrightarrow x^2-6x+9-2x^2-4x+2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2-10x+11 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-11, 1[$$

**Cálculo auxiliar:**

$$-x^2-10x+11=0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(-1) \times 11}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm 12}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -11$$



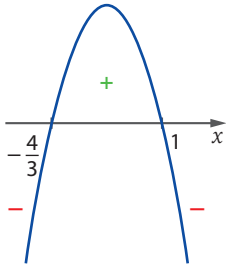
$$18.1 \quad f(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-3)\times 2}}{2(-3)} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm 5}{-6} \Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \vee x=-1$$

## 18.2

$$a. \quad f(x) < -2 \Leftrightarrow -3x^2-x+2 < -2 \Leftrightarrow -3x^2-x+4 < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -\frac{4}{3}[ \cup ]1, +\infty[$$

Cálculo auxiliar:

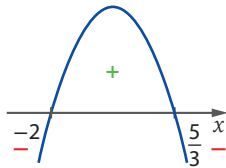
$$-3x^2-x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-3)4}}{2(-3)} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm 7}{-6} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{4}{3}$$



$$b. \quad f(x) \geq -8 \Leftrightarrow -3x^2-x+2 \geq -8 \Leftrightarrow -3x^2-x+10 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, \frac{5}{3}]$$

Cálculo auxiliar:

$$-3x^2-x+10=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-3)10}}{2(-3)} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm 11}{-6} \Leftrightarrow x=\frac{5}{3} \vee x=-2$$



## 19. (A)

Como a função tem máximo absoluto, concluímos que a parábola que a representa tem a concavidade voltada para baixo.

Como o eixo de simetria do gráfico tem equação  $x = -1$  e  $g(-3) = -4$ , concluímos que  $g(1) = -4$ .

Assim,  $g(x) < -4 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -3[ \cup ]1, +\infty[$ .

## PÁG. 43

## 20.1 (D)

Para que a função  $g(x) - k$  tenha exatamente um zero, o gráfico de  $g$  tem de se deslocar verticalmente para baixo 2 unidades.

## 20.2 (A)

Para que a função  $f(x+k)$  seja crescente em  $]1, +\infty[$  e o seu gráfico tenha eixo de simetria com equação  $x = 1$ , o gráfico de  $f$  tem de se deslocar horizontalmente para 3 unidades para a direita.

## 20.3 (D)

$$\mathbf{20.4} \quad g(x) = a(x+2)^2 + 2, \quad g(0) = 6 \Leftrightarrow a(0+2)^2 + 2 = 6 \Leftrightarrow a = 1$$

$$g(x) = (x+2)^2 + 2, \quad g(x-1) = (x-1+2)^2 + 2 = (x+1)^2 + 2.$$

$$h(x) = a(x-3)^2, \quad h(1) = -2 \Leftrightarrow a(1-3)^2 = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}, \quad h(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2.$$

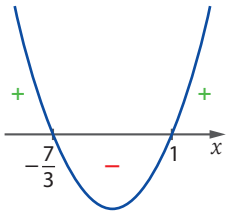
$$g(x-1) - 4 \geq h(x) - 3x + 7 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2 - 4 \geq -\frac{1}{2}(x-3)^2 - 3x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2 - 4 \geq -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) - 3x + 7 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 \geq -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} - 3x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 7 \geq 0$$

**Cálculo auxiliar:**

$$3x^2 + 4x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 3 \times (-7)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 10}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{3} \vee x = 1$$



$$3x^2 + 4x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{7}{3} \right] \cup [1, +\infty[$$

### 21.1 (C)

$$g(x) = 2f(x+1) - 1 = 2[-2(x+1-1)^2 + 3] - 1 = -4x^2 + 5, \quad V(0, 5).$$

### 21.2 (A)

$$h(x) = -f(x-5) - 1 = -[-2(x-5-1)^2 + 3] - 1 = 2(x-6)^2 - 4, \quad D' = [-4, +\infty[.$$

### 21.3

$$(A) \quad f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow -2(x-1)^2 + 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{2} \text{ equação possível}$$

$$(B) \quad 4 - f(x-1) = 0 \Leftrightarrow -2(x-1-1)^2 + 3 = 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 = -\frac{1}{2} \text{ equação impossível}$$

$$(C) \quad 3 - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \text{ equação possível}$$

$$(D) \quad f(x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow -2(x-1-1)^2 + 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow -2(x-2)^2 = -2 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \text{ equação possível}$$

## PÁG. 44

### 22.1 (B)

$$g(x) = a(x-1)^2 - 2, \quad f(x) = g(x) + 2 = a(x-1)^2 - 2 + 2 = a(x-1)^2$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x-1)^2 = 0 \underset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

**OU**

Como  $D'_g = [-2, +\infty[$  e o gráfico de  $f$  obtém-se a partir do gráfico de  $g$ , fazendo um deslocamento vertical de duas unidades para cima, o contradomínio de  $f$  é  $[0, +\infty[$ , pelo que  $g$  tem apenas um zero.

**22.2**  $a > 0$  porque  $D'_g = [-2, +\infty[$ ;

$b = 1$  porque a reta de equação  $x = 1$  é eixo de simetria do gráfico de  $g$ ;

$c = -2$  porque  $D'_g = [-2, +\infty[$ .

**23.1**  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = a$ , com  $a \in [-1, 2]$ .

(A) A função  $g(x + 2)$  tem um zero pertencente ao intervalo  $[-1 - 2, 2 - 2] = [-3, 0]$ .

(B) A função  $g(x) - 4$  tem um zero pertencente ao intervalo  $[-1, 2]$ .

(C) A função  $g(x - 2)$  tem um zero pertencente ao intervalo  $[-1 + 2, 2 + 2] = [1, 4]$ .

(D) A função  $-g(x + 4)$  tem um zero pertencente ao intervalo  $[-1 - 4, 2 - 4] = [-5, -2]$ .

### 23.2 (D)

$$g(x) = x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

O eixo de simetria do gráfico de  $g$  tem equação  $x = a$ .

Como o eixo de simetria do gráfico de  $h$  tem equação  $x = -6$  e o gráfico de  $h$  se obtém do gráfico de  $g$  deslocando o gráfico 4 unidades para a esquerda e 4 unidades para baixo, conclui-se que  $a - 4 = -6 \Leftrightarrow a = -2$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{24.1} \quad h(x) &= x \left( a - \frac{x}{a} \right) + b = -\frac{x^2}{a} + ax + b = -\frac{1}{a}(x^2 - a^2x) + b = \\ &= -\frac{1}{a} \left[ \left( x - \frac{a^2}{2} \right)^2 - \frac{a^4}{4} \right] + b = -\frac{1}{a} \left( x - \frac{a^2}{2} \right)^2 + \frac{a^3}{4} + b \end{aligned}$$

Como  $h$  tem máximo igual a 5 e maximizante igual a 2, tem-se  $\frac{a^2}{2} = 2$  e  $\frac{a^3}{4} + b = 5$ .

Como o gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada para baixo, tem-se  $-\frac{1}{a} < 0$ , ou seja,  $a > 0$ .

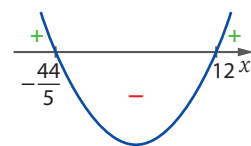
Assim,  $\frac{a^2}{2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow_{a > 0} a = 2$  e  $\frac{2^3}{4} + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - 2 \Leftrightarrow b = 3$ .

$$\mathbf{24.2} \quad h(x) + 129 \leq x \left( \frac{3x}{4} - 2 \right) \Leftrightarrow x \left( 2 - \frac{x}{2} \right) + 3 + 129 \leq x \left( \frac{3x}{4} - 2 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{x^2}{2} + 132 \leq \frac{3x^2}{4} - 2x \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} + \frac{x^2}{2} - 4x - 132 \geq 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 16x - 528 \geq 0$$

**Cálculo auxiliar:**

$$5x^2 - 16x - 528 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 5 \times (-528)}}{2 \times 5} \Leftrightarrow x = \frac{16 \pm 104}{10} \Leftrightarrow x = -\frac{44}{5} \vee x = 12$$



$$5x^2 - 16x - 528 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{44}{5} \right] \cup [12, +\infty[$$

**25.1** Se  $b = 3$ ,  $g(x) = ((2k^2 - 6k - 8)x + 3k + 3)x + c = (2k^2 - 6k - 8)x^2 + (3k + 3)x + c$ .

$g$  é crescente se o coeficiente de  $x^2$  for nulo e o coeficiente de  $x$  for positivo (neste caso,  $g$  seria uma função afim crescente).

Assim:

$$2k^2 - 6k - 8 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 3k - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 4$$

Por outro lado,

$$3k + 3 > 0 \Leftrightarrow k > -1.$$

Logo,  $k = 4$ .

## 25.2

**a.**  $g(x) = (-8x + b)x + c - 8x^2 + bx = c - 8\left(x^2 - \frac{b}{8}x\right) + c =$

$$= -8\left[\left(x - \frac{b}{16}\right)^2 - \left(\frac{b}{16}\right)^2\right] + c = -8\left(x - \frac{b}{16}\right)^2 + 8\left(\frac{b}{16}\right)^2 + c$$

$$\frac{b}{16} = 2 \Leftrightarrow b = 32 \text{ e } 8\left(\frac{32}{16}\right)^2 + c = 24 \Leftrightarrow c = 24 - 32 \Leftrightarrow c = -8.$$

**b.**  $g(x) = (-8x + 32)x - 8 = -8x^2 + 32x - 8$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -8x^2 + 32x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

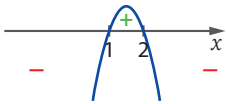
$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} \vee x = 2 + \sqrt{3}$$

**c.**  $g(x) < 8(x + 1) \Leftrightarrow -8x^2 + 32x - 8 < 8x + 8 \Leftrightarrow -8x^2 + 24x - 16 < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$

**Cálculo auxiliar:**

$$-8x^2 + 24x - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$



## PÁG. 45

**26.**  $f(x) \geq c \Leftrightarrow ax^2 + x + c \geq c \Leftrightarrow ax^2 + x \geq 0$

$$ax^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(ax + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{a}$$

Como o conjunto-solução da inequação  $f(x) \geq c$  é  $[0, 2]$ , concluímos que a parábola que é o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo e  $-\frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$ .

Assim,  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + c = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x) + c = -\frac{1}{2}[(x - 1)^2 - 1] + c = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2} + c$  e o contradomínio da função  $f$  é  $]-\infty, \frac{1}{2} + c]$ .

**27.1** A parábola que é o gráfico da função definida por  $h_1(x) = f(x+5)$  surge deslocada horizontalmente cinco unidades para a esquerda em relação à parábola que é o gráfico de  $f$ .

A parábola que é o gráfico da função definida por  $h_2(x) = \frac{1}{2}h_1(x) = \frac{1}{2}f(x+5)$  obtém-se da parábola que é o gráfico de  $h_1$  fazendo uma contração vertical de coeficiente  $\frac{1}{2}$ , isto é, as ordenadas dos pontos da parábola que é o gráfico de  $h_1$  são multiplicadas por  $\frac{1}{2}$  obtendo-se, assim, a parábola que é o gráfico da função  $h_2$ .

Finalmente, a parábola que é o gráfico da função  $h(x) = -h_2(x) = -\frac{1}{2}f(x+5)$  obtém-se da parábola que é o gráfico de  $h_2$  por uma reflexão em relação ao eixo das abcissas.

$$\begin{aligned} \mathbf{27.2} \quad h(x) &= -\frac{1}{2}f(x+5) = -\frac{1}{2}[-2(x+5)^2 + 8(x+5) - 4] = (x+5)^2 - 4(x+5) + 2 = \\ &= x^2 + 10x + 25 - 4x - 20 + 2 = x^2 + 6x + 7 = (x+3)^2 - 9 + 7 = (x+3)^2 - 2 \end{aligned}$$

Logo,  $a = 1$ ,  $h = -3$  e  $k = -2$ .

$$\mathbf{27.3} \quad h(x) > f(x) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 7 > -2x^2 + 8x - 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 11 > 0$$

**Cálculo auxiliar:**

$$3x^2 - 2x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times 11}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-128}}{6} \text{ impossível}$$



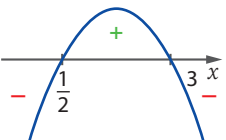
$$3x^2 - 2x + 11 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

**27.4**

$$\mathbf{a.} \quad f(x) + 1 \geq x \Leftrightarrow -2x^2 + 8x - 4 + 1 \geq x \Leftrightarrow -2x^2 + 7x - 3 \geq 0$$

**Cálculo auxiliar:**

$$-2x^2 + 7x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(-2)(-3)}}{2(-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 5}{-4} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{1}{2}$$

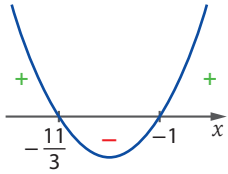


$$-2x^2 + 7x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{1}{2}, 3 \right]$$

$$b. h(x) > f(-x) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 7 > -2x^2 - 8x - 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 14x + 11 > 0$$

**Cálculo auxiliar:**

$$3x^2 + 14x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \times 3 \times 11}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm 8}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{3} \vee x = -1$$



$$3x^2 + 14x + 11 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -\frac{11}{3}[ \cup ]-1, +\infty[$$

$$27.5 \quad f(x) = -2x^2 + 8x - 4 = -2(x^2 - 4x) - 4 = -2[(x-2)^2 - 4] - 4 = -2(x-2)^2 + 4$$

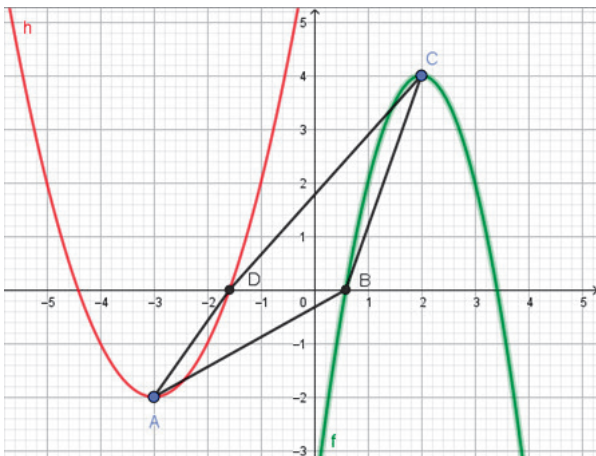
$$C(2, 4), A(-3, -2)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x-2)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 2 \Leftrightarrow x-2 = -\sqrt{2} \vee x-2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \vee x = 2 + \sqrt{2}$$

$$B(2 - \sqrt{2}, 0)$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 2 \Leftrightarrow x+3 = -\sqrt{2} \vee x+3 = \sqrt{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -3 - \sqrt{2} \vee x = -3 + \sqrt{2}$$

$$D(-3 + \sqrt{2}, 0)$$



$$A_{[ABCD]} = A_{[ABD]} + A_{[BCD]} = \frac{\overline{BD} \times |y_A|}{2} + \frac{\overline{BD} \times y_C}{2} = \\ = \frac{(2 - \sqrt{2} - (-3 + \sqrt{2})) \times 2}{2} + \frac{(2 - \sqrt{2} - (-3 + \sqrt{2})) \times 4}{2} = \frac{(5 - 2\sqrt{2}) \times (2 + 4)}{2} = 15 - 6\sqrt{2}$$

**28.1** Se  $a = b = c$ , então  $g(x) = ax^2 + ax + a = a(x^2 + x + 1) = a\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1\right) = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3a}{4}$ , pelo que as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico de  $g$  são  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3a}{4}\right)$ .

**A.** Falsa.

Se  $a < 0$ , o gráfico de  $g$  tem a concavidade voltada para baixo, pelo que  $g$  é crescente em  $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ .

**B.** Verdadeira.

$V\left(-\frac{1}{2}, \frac{3a}{4}\right)$ , pelo que  $\frac{3a}{4}$  é extremo absoluto e relativo de  $g$ .

**C.** Verdadeira.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow a(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \text{ Equação impossível}$$

## PÁG. 46

**28.2**  $g(x) = -4x^2 + 4x + 7$

**a.**  $g(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 4x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-4)7}}{2(-4)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{128}}{-8} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 8\sqrt{2}}{-8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \vee x = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$$

**b.**  $g(x) = 1 - x \Leftrightarrow -4x^2 + 4x + 7 = 1 - x \Leftrightarrow -4x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-4)6}}{2(-4)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 11}{-8} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{3}{4}$$

$$y = 1 - 2 = -1, (2, -1).$$

$$y = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}, \left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right).$$

**c.**  $g(x) = -4x^2 + 4x + 7 = -4\left(x^2 - x\right) + 7 = -4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 7 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 8$

$g$  é crescente em  $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ , é decrescente em  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$  e tem máximo absoluto igual a 8 em  $x = \frac{1}{2}$ .

**d.** Dilatação vertical de coeficiente 4; reflexão em relação ao eixo das abcissas; deslocamento horizontal de meia unidade para a direita; deslocamento vertical de oito unidades para cima.

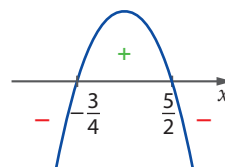
**e.**  $2g(x) + 1 < -6x \Leftrightarrow 2(-4x^2 + 4x + 7) + 1 < -6x \Leftrightarrow -8x^2 + 14x + 15 < 0$

**Cálculo auxiliar:**

$$-8x^2 + 14x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4(-8)15}}{2(-8)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm 26}{-16} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = -\frac{3}{4}$$

$$-8x^2 + 14x + 15 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right[ \cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$$



**29.1 (D)**

Como o eixo de simetria do gráfico de  $f$  é o eixo  $Oy$ , o eixo de simetria do gráfico da função  $h$  é  $x = 1$ . Como o contradomínio  $h$  se mantém,  $]-\infty, -1]$ , o gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada para baixo, pelo que  $h$  é crescente em  $]-\infty, 1]$  e decrescente em  $[1, +\infty[$ .

**29.2 (B)**

Tem-se que o vértice do gráfico de  $f$  tem coordenadas  $(0, -1)$ , pelo que  $f(x) = ax^2 - 1$ , como  $a < 0$ , dado que a concavidade do gráfico está voltada para baixo.

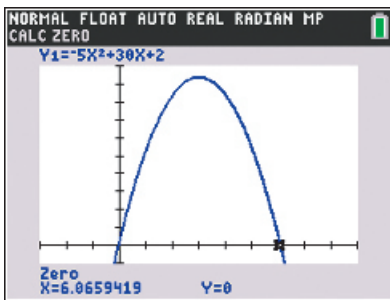
Assim,  $h(x) = -f(x+3) - 3 = -(a(x+3)^2 - 1) - 3 = -a(x+3)^2 - 2$ .

As coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico de  $h$  são  $(-3, -2)$  e a concavidade está voltada para cima, dado que  $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$ .

**PÁG. 47**

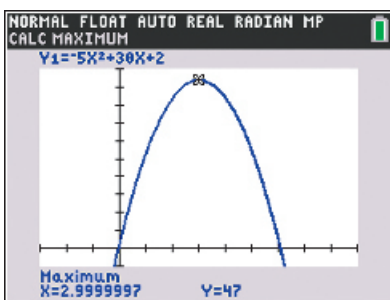
**30.1**  $a(0) = 2$  metros

**30.2**  $a(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 30t + 2 = 0$



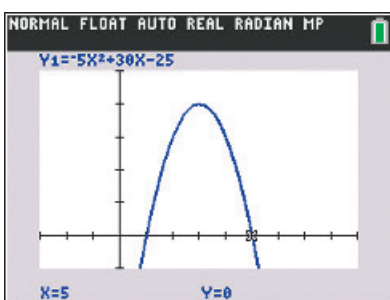
$t \approx 6,07$  segundos

**30.3**



A altura máxima da bola, em relação ao solo, foi 47 metros, atingida 3 segundos após o lançamento.

**30.4**  $a(t) > 27 \Leftrightarrow -5t^2 + 30t + 2 > 27 \Leftrightarrow -5t^2 + 30t - 25 > 0$



A bola esteve a mais de 27 metros do solo durante 4 segundos.

$$\begin{aligned} 31.1 \quad h(t) = h(0) &\Leftrightarrow -5t^2 + 14t + 1 = 1 \Leftrightarrow -5t^2 + 14t = 0 \Leftrightarrow t(-5t + 14) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee -5t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{14}{5} \end{aligned}$$

Ao fim de 2,8 segundos .

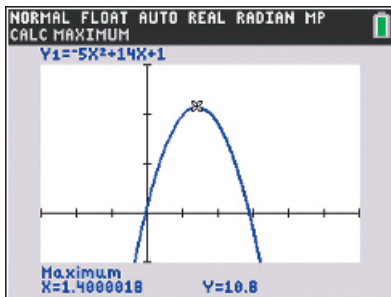
### 31.2

$$\begin{aligned} h(t) = 1 &\Leftrightarrow -5t^2 + 14t = 0 \Leftrightarrow t(-5t + 14) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee -5t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{14}{5} \end{aligned}$$

A abscissa do vértice é  $\frac{0 + \frac{14}{5}}{2} = \frac{7}{5}$ .

A ordenada do vértice é  $h\left(\frac{7}{5}\right) = -5\left(\frac{7}{5}\right)^2 + 14 \times \frac{7}{5} + 1 = 10,8$ .

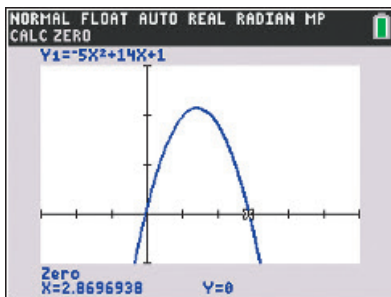
Graficamente:



A altura máxima atingida pela bola foi 10,8 metros.

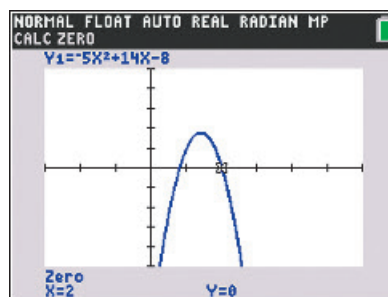
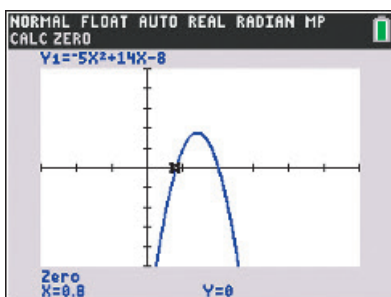
$$31.3 \quad h(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 14t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \times (-5) \times 1}}{2 \times (-5)} \Leftrightarrow t \approx -0,07 \vee t \approx 2,9$$

Graficamente:



Durante 2,9 segundos .

$$31.4 \quad h(t) \geq 9 \Leftrightarrow -5t^2 + 14t + 1 \geq 9 \Leftrightarrow -5t^2 + 14t - 8 \geq 0$$



Durante  $2 - 0,8 = 1,2$  segundos .

## PÁG. 48

**32.1**  $T(-2) = -7 \text{ °C}$

**32.2** Quando o Sr. João ligou a energia da arca, a temperatura deixou de aumentar e passou a diminuir, pelo que vamos determinar o máximo da função  $T$ .

$$T(t) = 0 \Leftrightarrow -0,05t^2 + 1,15t - 4,5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1,15 \pm \sqrt{1,15^2 - 4(-0,05)(-4,5)}}{2(-0,05)} \Leftrightarrow t = \frac{-1,15 \pm 0,65}{-0,1} \Leftrightarrow t = 18 \vee t = 5$$

$$\frac{18+5}{2} = 11,5 \text{ e } T(11,5) = 2,1125$$

O Sr. João chegou ao restaurante às 11h 30m e a temperatura no interior da arca era  $2 \text{ °C}$ .

**32.3**  $T(t) \leq -1,5 \Leftrightarrow -0,05t^2 + 1,15t - 4,5 \leq -1,5 \Leftrightarrow -0,05t^2 + 1,15t - 3 \leq 0$

$$-0,05t^2 + 1,15t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1,15 \pm \sqrt{1,15^2 - 4(-0,05)(-3)}}{2(-0,05)} \Leftrightarrow t = \frac{-1,15 \pm 0,85}{-0,1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 20 \vee t = 3$$

$$-0,05t^2 + 1,15t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow t \in ]-\infty, 3] \cup [20, +\infty[$$

$$]-\infty, 3] \cup [20, +\infty[ \cap ]-2, 24] = [-2, 3] \cup [20, 24]$$

Entre as 22 horas e as 3 horas e entre as 20 horas e as 24 horas.

**33.1**  $A_{[DPSQ]} = A_{[ABCD]} - A_{[PBQS]} - 2A_{[APD]} =$

$$= 10^2 - (10 - x)^2 - 2 \frac{10x}{2} = 20x - x^2 - 10x = 10x - x^2$$

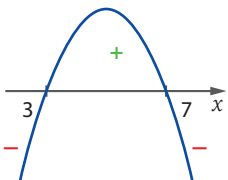
**33.2**  $-x^2 + 10x = -(x^2 - 10x) = -[(x - 5)^2 - 25] = -(x - 5)^2 + 25$

A área máxima do quadrilátero  $[DPSQ]$  é 25.

**33.3**  $-(x - 5)^2 + 25 > 21 \Leftrightarrow -(x - 5)^2 + 4 > 0$

**Cálculo auxiliar:**

$$-(x - 5)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 5 = -2 \vee x - 5 = 2 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 7$$



$$-(x - 5)^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in ]3, 7[$$

**PÁG. 49**

**34.1** A outra dimensão do jardim é  $\frac{36-2x}{2} = 18-x$  e a área da zona relvada é

$$(x-4)(18-x-4) = (x-4)(14-x) = -x^2 + 18x - 56.$$

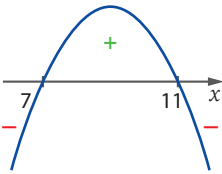
**34.2**  $-x^2 + 18x - 56 = -(x^2 - 18x) - 56 = -\left[\left(x - \frac{18}{2}\right)^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2\right] - 56 = -(x-9)^2 + 25$

O valor máximo da área da zona relvada é  $25 \text{ m}^2$ .

**34.3**  $A(x) < 21 \Leftrightarrow -x^2 + 18x - 56 < 21 \Leftrightarrow -x^2 + 18x - 77 < 0$

**Cálculo auxiliar:**

$$-x^2 + 18x - 77 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4(-1)(-77)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow x = 11 \vee x = 7$$



$$-x^2 + 18x - 77 < 0 \Leftrightarrow_{x \in ]4, 14[} x \in ]4, 7[ \cup ]7, 11[$$

**35.1**  $g(x) = 2\left(2x - \frac{1}{4}(x-4)(x+4) + 5\right) = 4x - \frac{1}{2}(x^2 - 16) + 10 = 4x - \frac{1}{2}x^2 + 8 + 10 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 18$

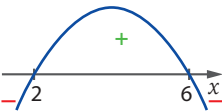
**35.2**  $-\frac{1}{2}x^2 + 4x + 18 = -\frac{1}{2}(x^2 - 8x) + 18 = -\frac{1}{2}[(x^2 - 8x)] + 18 =$   
 $= -\frac{1}{2}[(x-4)^2 - 16] + 18 = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 26$

O perímetro máximo é  $26$ , em  $x=4$ .

**35.3**  $g(x) \geq 24 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 18 \geq 24 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 \geq 0$

**Cálculo auxiliar:**

$$-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6$$



$$-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow_{x \in ]0, 6[} x \in [2, 6[$$

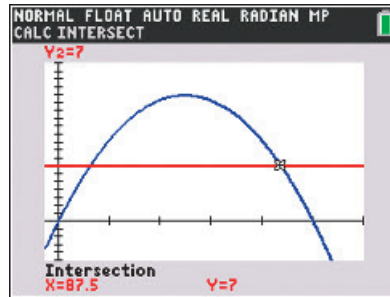
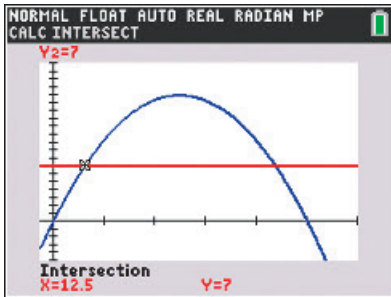
**PÁG. 50**

**36.1**  $y = a(x-50)^2 + 16$  e  $a(100-50)^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{16}{2500} \Leftrightarrow a = -0,0064$

$$y = -0,0064(x^2 - 100x + 2500) + 16 = -0,0064x^2 + 0,64x$$

**36.2**  $-0,0064 \times 16^2 + 0,64 \times 16 = 8,6016$  ,  $16 - 8,6016 = 7,3984 \approx 7,4$  m

**36.3**  $-0,0064x^2 + 0,64x \geq 7$



$S = [12,5 ; 87,5]$  ;  $87,5 - 12,5 = 75$  metros

### PÁG. 51

**37.1**  $a(6)^2 + b(6) + c = 10,4 \Leftrightarrow 36a + 6b + c = 10,4$  (I)

$a(11)^2 + b(11) + c = 19,4 \Leftrightarrow 121a + 11b + c = 19,4$  (II)

$a(26)^2 + b(26) + c = 10,4 \Leftrightarrow 676a + 26b + c = 10,4$  (III)

De (I) e (III), resulta

$$36a + 6b + c = 676a + 26b + c \Leftrightarrow 640a + 20b = 0 \Leftrightarrow 32a + b = 0 \Leftrightarrow b = -32a$$

Substituindo em (II), vem  $121a + 11(-32a) + c = 19,4 \Leftrightarrow c = 19,4 + 231a$

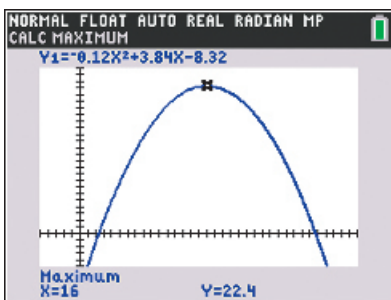
Substituindo em (I), vem  $36a + 6(-32a) + 19,4 + 231a = 10,4 \Leftrightarrow 75a = -9 \Leftrightarrow a = -0,12$

Assim,  $b = -32(-0,12) = 3,84$  e  $c = 19,4 + 231(-0,12) = -8,32$ .

Logo,  $y = -0,12x^2 + 3,84x - 8,32$ .

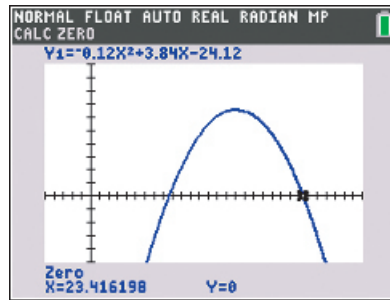
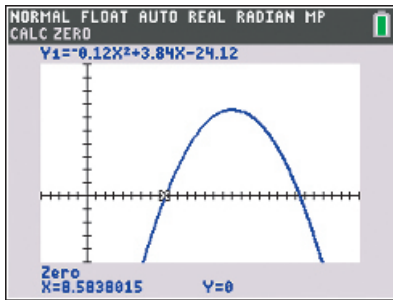
### 37.2

a.



22,4 cm

$$b. y \geq 15,8 \Leftrightarrow -0,12x^2 + 3,84x - 8,32 \geq 15,8 \Leftrightarrow -0,12x^2 + 3,84x - 24,12 \geq 0$$



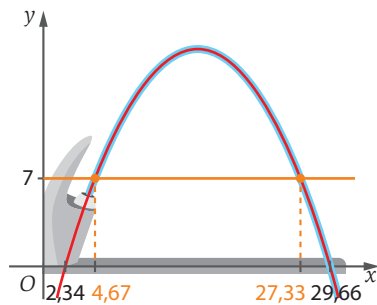
$$23,4 - 8,6 = 14,8 \text{ cm}$$

$$c. y=0 \Leftrightarrow -0,12x^2 + 3,84x - 8,32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3,84 \pm \sqrt{3,84^2 - 4(-0,12)(-8,32)}}{2(-0,12)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \approx \frac{-3,84 \pm 3,279}{-0,24} \Leftrightarrow x \approx 29,66 \vee x \approx 2,34$$

$$y=7 \Leftrightarrow -0,12x^2 + 3,84x - 8,32 = 7 \Leftrightarrow -0,12x^2 + 3,84x - 15,32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3,84 \pm \sqrt{3,84^2 - 4(-0,12)(-15,32)}}{2(-0,12)} \Leftrightarrow x \approx \frac{-3,84 \pm 2,72}{-0,24} \Leftrightarrow x \approx 27,33 \vee x \approx 4,67$$



$$29,66 - 4,67 = 24,99 \approx 25 \text{ cm}$$

$$38. A(x) = 1 - x^2 - \pi \left( \frac{1-x}{2} \right)^2 = 1 - x^2 - \pi \left( \frac{1-2x+x^2}{4} \right) =$$

$$= 1 - x^2 - \pi \frac{1}{4} + \pi \frac{2x}{4} - \pi \frac{x^2}{4} = \left( -1 - \frac{\pi}{4} \right) x^2 + \frac{\pi}{2} x + 1 - \frac{\pi}{4} = -\frac{4+\pi}{4} x^2 + \frac{\pi}{2} x + \frac{4-\pi}{4} =$$

$$= -\frac{4+\pi}{4} \left( x^2 - \frac{4\pi}{8+2\pi} x \right) + \frac{4-\pi}{4} = -\frac{4+\pi}{4} \left[ \left( x - \frac{4\pi}{16+4\pi} \right)^2 - \left( \frac{4\pi}{16+4\pi} \right)^2 \right] + \frac{4-\pi}{4} =$$

$$= -\frac{4+\pi}{4} \left( x - \frac{\pi}{4+\pi} \right)^2 + \frac{4+\pi}{4} \left( \frac{\pi}{4+\pi} \right)^2 + \frac{4-\pi}{4} = -\frac{4+\pi}{4} \left( x - \frac{\pi}{4+\pi} \right)^2 + \frac{4}{4+\pi}$$

$$\text{A área é máxima em } x = \frac{\pi}{\pi+4}.$$

## PÁG. 52

$$39.1 A(x) = 4x^2 + 2 \frac{(14-2x) \left( \frac{10-2x}{2} \right)}{2} = 4x^2 + (14-2x)(5-x) = 6x^2 - 24x + 70$$

$$39.2 \quad A(x) = 6x^2 - 24x + 70 = 6(x^2 - 4x) + 70 = 6[(x-2)^2 - 4] + 70 = 6(x-2)^2 + 46$$

A área é máxima em  $x=2$  e o valor máximo dessa área é  $46 \text{ cm}^2$ .

$$39.3 \quad 6x^2 - 24x + 70 = 140 - (6x^2 - 24x + 70) \Leftrightarrow 12x^2 - 48x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x(x-4) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

$$40.1 \quad A_{[PQR]} = \frac{|y_Q - y_P| \times |x_R - x_P|}{2}$$

$$y_Q = -\frac{3}{4}x_Q + 7, \quad y_P = \frac{1}{4}x_P - 1, \quad x_P = x_Q = x, \quad -2 = \frac{1}{4}x_R - 1 \Leftrightarrow x_R = -4.$$

$$\begin{aligned} A_{[PQR]} &= \frac{\left[ \left( -\frac{3}{4}x_Q + 7 \right) - \left( \frac{1}{4}x_P - 1 \right) \right] \times |-4 - x_P|}{2} = \\ &= \frac{\left( -\frac{3}{4}x_P - \frac{1}{4}x_P + 8 \right) \times (4 + x_P)}{2} \underset{x_P=x}{=} = \frac{(-x+8) \times (4+x)}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x + 16 \end{aligned}$$

$$40.2 \quad A(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 16 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x) + 16 = -\frac{1}{2}[(x-2)^2 - 4] + 16 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 18$$

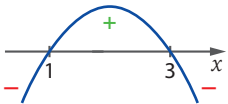
A área máxima do triângulo  $[PQR]$  é 18 em  $x=2$ .

$$40.3 \quad A(x) < 17,5 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 2x + 16 < 17,5 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 2x - 1,5 < 0$$

**Cálculo auxiliar:**

$$-\frac{x^2}{2} + 2x - 1,5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$



$$-\frac{x^2}{2} + 2x - 1,5 < 0 \Leftrightarrow x \in ]0, 1[ \cup ]3, 8[$$

### PÁG. 53

$$41.1 \quad g(x) = \frac{x \times 2x}{2} + \frac{(a-x)^2}{2} = x^2 + \frac{a^2 - 2ax + x^2}{2} = \frac{3}{2}x^2 - ax + \frac{a^2}{2}$$

Se  $x=0$ , a expressão  $\frac{3}{2}x^2 - ax + \frac{a^2}{2}$  é igual a  $\frac{a^2}{2}$ .

Se  $x=a$ , a expressão  $\frac{3}{2}x^2 - ax + \frac{a^2}{2}$  é igual a  $a^2$ .

$$\text{Por outro lado, } g(x) = \frac{3}{2}x^2 - ax + \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}ax\right) + \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(x - \frac{1}{3}a\right)^2 - \left(\frac{1}{3}a\right)^2\right] + \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}a\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}a\right)^2 + \frac{a^2}{3}.$$

Assim,  $\forall x \in ]0, a[$ ,  $g(x) \geq \frac{a^2}{3}$  e é sempre inferior a  $a^2$ .

$$\text{Logo, } D'_g = \left[ \frac{a^2}{3}, a^2 \right].$$

$$41.2 \quad \frac{a^2}{3} = 48 \Leftrightarrow a^2 = 144 \xrightarrow{a>0} a = 12$$

A área dos dois triângulos é mínima em  $x = \frac{1}{3}a = \frac{1}{3} \times 12 = 4$

( $\frac{1}{3}a$  é a abscissa do vértice da parte da parábola que é o gráfico de  $g$ ,  $0 < \frac{1}{3}a < a$ ).

$$42.1 \quad f(-1) = -2(-1) + 1 = 3; \quad f(-1) = -2 \times 1 + 1 = -1; \quad f(2) = 2^2 - 3 \times 2 = -2$$

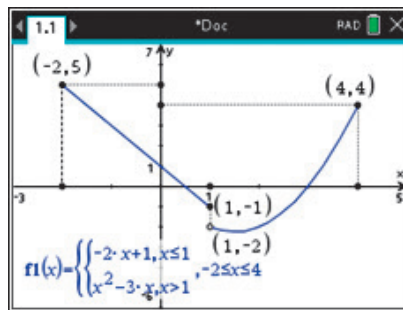
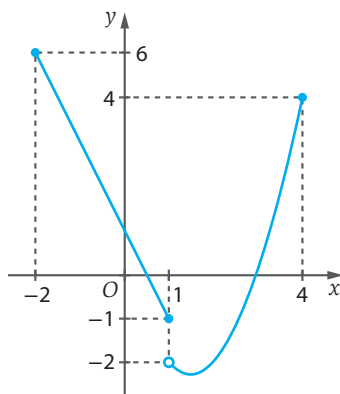
$$42.2 \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x + 1 = 0 \wedge x \leq 1) \vee (x^2 - 3x = 0 \wedge x > 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} \wedge x \leq 1\right) \vee (x = 0 \vee x = 3 \wedge x > 1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 3$$

$$42.3 \quad f(x) = -2 \Leftrightarrow (-2x + 1 = -2 \wedge x \leq 1) \vee (x^2 - 3x = -2 \wedge x > 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x = \frac{3}{2} \wedge x \leq 1\right) \vee (x^2 - 3x + 2 = 0 \wedge x > 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x = \frac{3}{2} \wedge x \leq 1\right) \vee (x = 1 \vee x = 2 \wedge x > 1) \Leftrightarrow x = 2$$

**Cálculo auxiliar:**

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

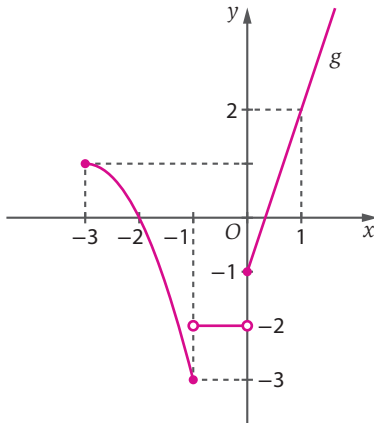
#### 42.4



$$43.1 \quad g(-3) = -(-3+3)^2 + 1 = 1; \quad g\left(-\frac{1}{2}\right) = -2; \quad g(0) = 3 \times 0 - 1 = -1; \quad g(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$$

$$43.2 \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow (-(x+3)^2 + 1 = 0 \wedge -3 \leq x \leq -1) \vee (-2 = 0 \wedge -1 < x < 0) \vee (3x - 1 = 0 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = -4 \vee x = -2 \wedge -3 \leq x \leq -1) \vee \left(x = \frac{1}{3} \wedge x \geq 0\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{3}$$

## 43.3



## PÁG. 54

**44.1** Em  $[0, 3[$ ,  $m = \frac{-1-2}{0-3} = 1$ ,  $2 = 1 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -1$  e  $y = x - 1$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ x - 1 & \text{se } 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

**44.2** Em  $[-2, 1]$ ,  $m = \frac{3+3}{-2-1} = -2$ ,  $3 = -2 \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -1$  e  $y = -2x - 1$ .

Em  $]1, 3]$ ,  $m = \frac{2+1}{3-1} = \frac{3}{2}$ ,  $2 = \frac{3}{2} \times 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{5}{2}$  e  $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ .

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

**44.3** Em  $[2, 4]$ ,  $m = \frac{1+1}{4-2} = 1$ ,  $1 = 1 \times 4 + b \Leftrightarrow b = -3$  e  $y = x - 3$ .

Em  $[-3, 2[$ ,  $y = a(x-0)^2 + 2$ ,  $a(-3-0)^2 + 2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$  e  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ .

$$h(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}x^2 & \text{se } -3 \leq x < 2 \\ x - 3 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

**44.4** Em  $[-4, 1[$ ,  $a(-4)^2 + b(-4) - 1 = -1 \Leftrightarrow 4a - b = 0 \Leftrightarrow b = 4a$

e  $a(1)^2 + b(1) - 1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a + b = \frac{5}{2}$ .

Logo,  $a + 4a = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$  e  $b = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ . Portanto  $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ .

Em  $[2, +\infty[$ , a abscissa do vértice da parábola é  $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ , pelo que  $y = a\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + k$ .

Assim,  $0 = a\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 + k \Leftrightarrow k = -\frac{a}{4}$  e  $2 = a\left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 + k \Leftrightarrow 2 = -\frac{9a}{4} + k$ .

Substituindo  $2 = \frac{9a}{4} - \frac{a}{4} \Leftrightarrow 2 = 2a \Leftrightarrow a = 1$  e  $k = -\frac{1}{4}$

Portanto,  $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = x^2 - 5x + 6$ .

$$i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & \text{se } -4 \leq x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ x^2 - 5x + 6 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

**45.** Em  $[-4, -2[$ ,  $y = a(x+4)^2 - 5$ ,  $a(-2+4)^2 - 5 = -3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ .

Em  $[-2, -1]$ ,  $m = \frac{2-0}{-1+2} = 2$ ,  $2 = 2(-1) + b \Leftrightarrow b = 4$  e  $y = 2x + 4$ .

Em  $[-1, 1[$ ,  $m = \frac{2-0}{-1-1} = -1$ ,  $2 = -1(-1) + b \Leftrightarrow b = 1$  e  $y = -x + 1$ .

Em  $[1, +\infty[$ ,  $m = \frac{-4-0}{1-3} = 2$ ,  $-4 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -6$  e  $y = 2x - 6$ .

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+4)^2 - 5 & \text{se } -4 \leq x < -2 \\ 2x + 4 & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ -x + 1 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2x - 6 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

**46.1**  $h(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

**a.**  $h(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x - 1 = 0 \wedge x < 1) \vee (x^2 - 3x \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \wedge x < 1\right) \vee (x = 0 \vee x = 3 \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 3$

**b.** Para  $x < 1$ , o gráfico de  $h$  é parte de uma reta de declive negativo que intersesta  $Ox$  no ponto de abscissa  $-\frac{1}{2}$ , pelo que  $h$  é positiva em  $]-\infty, -\frac{1}{2}[$  e negativa em  $]-\frac{1}{2}, 1[$ .

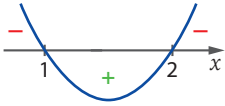
Para  $x \geq 1$ , o gráfico de  $h$  é parte de uma parábola com concavidade voltada para cima que intersesta  $Ox$  nos pontos de abscissa 0 e 3, pelo que  $h$  é negativa em  $[1, 3[$  e positiva em  $]3, +\infty[$ .

|        |           |                |   |   |           |
|--------|-----------|----------------|---|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ |   | 3 | $+\infty$ |
| $h(x)$ | +         | 0              | - | 0 | +         |

$$\begin{aligned} \text{c. } h(x) < -2 &\Leftrightarrow (-2x - 1 < -2 \wedge x < 1) \vee (x^2 - 3x < -2 \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x > \frac{1}{2} \wedge x < 1\right) \vee (x^2 - 3x + 2 < 0 \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow \\ &\left(x > \frac{1}{2} \wedge x < 1\right) \vee (1 < x < 2 \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[ \cup ] 1, 2[ \end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar:**

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$



$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in ] 1, 2[$$

$$\begin{aligned} \text{46.2 } h(x) = 1 &\Leftrightarrow (kx - 1 = 1 \wedge x < 1) \vee (x^2 - 3x = 1 \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (kx = 2 \wedge x < 1) \vee (x^2 - 3x - 1 = 0 \wedge x \geq 1) \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{2}{k} \wedge x < 1\right) \vee \left(x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \wedge x \geq 1\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{2}{k} \wedge x < 1\right) \vee \left(x = \underbrace{\frac{3 - \sqrt{13}}{2}}_{< 1} \vee x = \underbrace{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}}_{> 1} \wedge x \geq 1\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{2}{k} \wedge x < 1\right) \vee x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

Uma das soluções da equação é  $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ .

Para que  $\frac{2}{k}$  seja solução da equação, terá de ser inferior a 1.

Assim, para todo  $k < 0$ ,  $\frac{2}{k} < 1$ , dado que  $\frac{2}{k} < 0$ .

Se  $k > 0$ , então  $\frac{2}{k} < 1 \Leftrightarrow k > 2$ .

Portanto, a equação  $h(x) = 1$  tem exatamente duas soluções,  $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$  e  $\frac{2}{k}$ , se, e só se,  $k < 0 \vee k > 2$ .

## PÁG. 55

### 47.1 (D)

Se  $x = 3$ , então  $2x = 2 \times 3 = 6$  e  $-x^2 + 4x = -3^2 + 4 \times 3 = 3$ , pelo que perto de 3 e à sua esquerda há objetos com imagem inferior à de  $f(x)$ .

Logo, se  $g(x) = 2x$ , 3 não é minimizante de  $f$ .

### 47.2 (B)

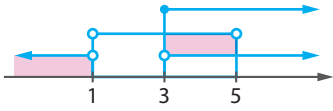
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (-x^2 + 4x = 0 \wedge x < 3) \vee (x + 1 = 0 \wedge x \geq 3) \Leftrightarrow (x(-x + 4) = 0 \wedge x < 3) \vee (x = -1) \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 4 \wedge x < 3) \vee (x = -1 \wedge x \geq 3) \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{47.3 } f(x) < 3 &\Leftrightarrow (-x^2 + 4x < 3 \wedge x < 3) \vee (2(x - 4)^2 + 1 < 3 \wedge x \geq 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-x^2 + 4x - 3 < 0 \wedge x < 3) \vee ((x - 4)^2 < 1 \wedge x \geq 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x < 1 \vee x > 3) \wedge x < 3) \vee (1 < x < 5 \wedge x \geq 3) \Leftrightarrow x \in ] -\infty, 1[ \cup ] 3, 5[ \end{aligned}$$

**Cálculos auxiliares:**

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-3)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{-2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$

$$(x - 4)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 4 = -1 \vee x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 5$$



#### 47.4

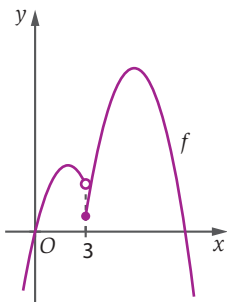
**a.**  $f$  tem um zero para  $x < 3$  ( $-x^2 + 4x = 0 \wedge x < 3 \Leftrightarrow x = 0$ ).

Atendendo a que a função  $g$  é quadrática, crescente para  $x \leq 6$  e decrescente para  $x \geq 6$ ,  $g$  tem o seu máximo absoluto em  $x = 6$ .

Como  $f(3)$  é positivo, então  $f$  não pode ter zero em  $[3, 6]$ .  $f$  tem, portanto, apenas mais um zero, para  $x \geq 6$ , que é o zero de maior valor da função quadrática  $g$ .

Logo,  $f$  tem exatamente dois zeros.

**b.** Por exemplo,  $g(x) = -(x - 6)^2 + 10$ .



#### 48.1

**a.** Não, no trajeto de  $A$  para  $B$  a distância de  $P$  a  $A$  aumenta, e no trajeto de  $C$  para  $D$  a distância de  $P$  a  $A$  diminui.

**b.** A função  $d$  é crescente em  $[0, 2]$  e em  $[3, +\infty[$  e é decrescente em  $[2, 3]$ .

|                  |   |            |                 |            |                 |            |
|------------------|---|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|
| $x$              | 0 |            | 2               |            | 3               | $+\infty$  |
| Monotonia de $d$ | 0 | $\nearrow$ | $\overline{AC}$ | $\searrow$ | $\overline{AD}$ | $\nearrow$ |

#### PÁG. 56

#### 48.2

**a.** O comprimento do arco  $BD$  é  $\frac{1}{4} \times 2\pi \times 2 = \pi$ .

Se o ponto demora 1 segundo a percorrer 2 unidades de comprimento, então percorre  $\pi$  unidades de comprimento em  $\frac{\pi}{2}$  segundos.

Assim, o ponto  $P$  demora  $2 + \frac{\pi}{2}$  segundos a regressar a  $A$ .

$$b. g(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq t < 1 + \frac{\pi}{2} \\ 2 - 2 \left[ t - \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) \right] & \text{se } 1 + \frac{\pi}{2} \leq t \leq 2 + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq t < 1 + \frac{\pi}{2} \\ 4 + \pi - 2t & \text{se } 1 + \frac{\pi}{2} \leq t \leq 2 + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

**49.1** Modalidade A:  $35 + 7 \times 6 = 77$  euros, modalidade B:  $10 \times 6 = 60$  euros.

A modalidade B é a mais vantajosa.

### 49.2 (B)

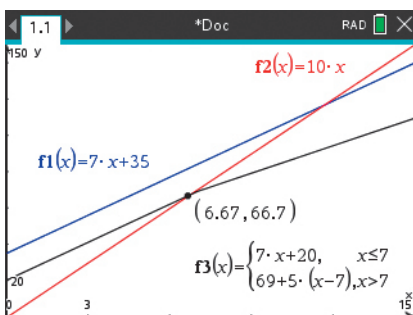
$$35 + 7x \leq 10x \Leftrightarrow 35 \leq 3x \Leftrightarrow x \geq \frac{35}{3}$$

$$\frac{35}{3} \text{ h} = 11 \text{ h} + \frac{2}{3} \text{ h} = 11 \text{ h} + \frac{2}{3} \times 60 \text{ min} = 11 \text{ h } 40 \text{ min}$$

### 49.3

$$a. C(t) = \begin{cases} 20 + 7t & \text{se } 0 \leq t \leq 7 \\ 7 \times 7 + 20 + 5(t - 7) & \text{se } t > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 + 7t & \text{se } 0 \leq t \leq 7 \\ 69 + 5(t - 7) & \text{se } t > 7 \end{cases}$$

b.



O ponto de interseção dos gráficos das duas funções tem abcissa  $6,67$

$$\text{e } 6,67 \text{ h} = 6 \text{ h} + 0,67 \text{ h} = 6 \text{ h} + \frac{2}{3} \text{ h} = 6 \text{ h} + \frac{2}{3} \times 60 \text{ min} = 6 \text{ h } 40 \text{ min}.$$

Até às  $6 \text{ h } 40 \text{ min}$  de utilização, a melhor opção é o ginásio *Superfit* na modalidade  $B$ .

Após as  $6 \text{ h } 40 \text{ min}$  de utilização, a melhor opção é o ginásio *Runningfit*.

**PÁG. 57**

**50.1** 1,55 km são 15,5 centenas de metros.

$$g(15,5) = f(15,5 - 7) = f(8,5) = -0,8 \times 8,5^2 + 16,8 \times 8,5 - 78,4 = 6,6$$

6,6 dezenas de metros, ou seja, 66 metros.

**50.2**  $g(x) = 8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f(x+7) = 8 \wedge 0 \leq x < 7) \vee (f(x) = 8 \wedge 7 \leq x \leq 14) \vee (f(x-7) = 8 \wedge 14 < x \leq 21)$$

**Cálculos auxiliares:**

$$f(x+7) = 8 \wedge 0 \leq x < 7 \Leftrightarrow -0,8(x+7)^2 + 16,8(x+7) - 78,4 = 8 \wedge 0 \leq x < 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,8x^2 + 5,6x - 8 = 0 \wedge 0 \leq x < 7 \Leftrightarrow x = \frac{-5,6 \pm \sqrt{5,6^2 - 4(-0,8)(-8)}}{2(-0,8)} \wedge 0 \leq x < 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5,6 \pm 2,4}{-1,6} \wedge 0 \leq x < 7 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 2 \wedge 0 \leq x < 7 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 2$$

$$f(x) = 8 \wedge 7 \leq x \leq 14 \Leftrightarrow -0,8x^2 + 16,8x - 78,4 = 8 \wedge 7 \leq x \leq 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,8x^2 + 16,8x - 86,4 = 0 \wedge 7 \leq x \leq 14 \Leftrightarrow x = \frac{-16,8 \pm \sqrt{16,8^2 - 4(-0,8)(-86,4)}}{2(-0,8)} \wedge 7 \leq x \leq 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-16,8 \pm 2,4}{-1,6} \wedge 7 \leq x \leq 14 \Leftrightarrow x = 12 \vee x = 9 \wedge 7 \leq x \leq 14 \Leftrightarrow x = 12 \vee x = 9$$

$$f(x-7) = 8 \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow -0,8(x-7)^2 + 16,8(x-7) - 78,4 = 8 \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,8x^2 + 28x - 243,2 = 0 \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow x = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4(-0,8)(-243,2)}}{2(-0,8)} \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-28 \pm 2,4}{-1,6} \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow x = 19 \vee x = 16 \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow x = 19 \vee x = 16$$

2, 5, 9, 12, 16 e 19 centenas de metros.

**50.3**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow -0,8x^2 + 16,8x - 78,4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-16,8 \pm \sqrt{16,8^2 - 4(-0,8)(-78,4)}}{2(-0,8)} \Leftrightarrow x = \frac{-16,8 \pm 5,6}{-1,6} \Leftrightarrow x = 14 \vee x = 7$$

$$\frac{14+7}{2} = 10,5, \quad f(10,5) = 9,8 \quad \text{e} \quad 9,8 + 0,6 = 10,4 \quad \text{dezenas de metros, ou seja, 104 metros.}$$

O ponto do arco central cuja altura é máxima está a 1050 metros do pilar  $[AE]$  e, portanto, também a 1050 metros do pilar  $[DF]$  ( $2100 \div 2 = 1050$ ).

**50.4**  $g(x) < 2,6 \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow f(x-7) < 2,6 \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -0,8(x-7)^2 + 16,8(x-7) - 78,4 < 2,6 \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,8x^2 + 11,2x - 39,2 + 16,8x - 117,6 - 78,4 - 2,6 < 0 \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,8x^2 + 28x - 237,8 < 0 \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow -x^2 + 35x - 297,25 < 0 \wedge 14 < x \leq 21$$

**Cálculo auxiliar:**

$$-x^2 + 35x - 297,25 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 - 4(-1)(-297,25)}}{2(-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-35 \pm 6}{-2} \Leftrightarrow x = 20,5 \vee x = 14,5$$

$$-x^2 + 35x - 297,25 < 0 \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow x < 14,5 \vee x > 20,5 \wedge 14 < x \leq 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in ]14; 14,5[ \cup ]20,5; 21]$$

Os pontos do terceiro arco cuja altura é inferior a 26 metros estão a mais de 1400 metros e a menos de 1450 metros do pilar [AE] ou a mais de 2050 metros do pilar [AE].

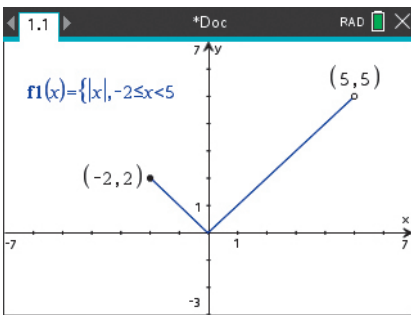
**50.5** Sim, é possível verificar se o navio pode passar sob a ponte. Considerando que o navio passará centrado num dos arcos, basta calcular, por exemplo,  $f(10,5 - 0,325)$  e verificar se é superior a 4.

E, sim, o navio pode passar sob a ponte,

$$\text{pois } f(10,5 - 0,325) = f(10,175) = -0,8 \times 10,175^2 + 16,8 \times 10,175 - 78,4 = 9,7155.$$

## PÁG. 58

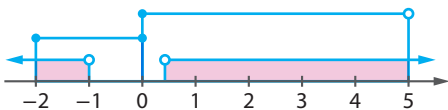
$$\mathbf{51.1} \quad f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 5 \end{cases}$$



## 51.2

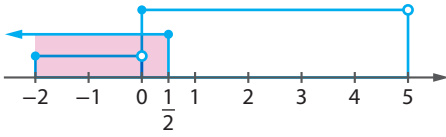
$$\begin{aligned} \mathbf{a.} \quad f(x) = 4 &\Leftrightarrow (-x = 4 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x = 4 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = -4 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x = 4 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b.} \quad f(x) > 1 &\Leftrightarrow (-x > 1 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x > 1 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x < -1 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x > 1 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow x \in [-2, -1[ \cup ]1, 5[ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{c.} \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 2 &\Leftrightarrow \left(-x = \frac{1}{2}x + 2 \wedge -2 \leq x < 0\right) \vee \left(x = \frac{1}{2}x + 2 \wedge 0 \leq x < 5\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x = -\frac{4}{3} \wedge -2 \leq x < 0\right) \vee (x = 4 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{4}{3}, 4\right\} \end{aligned}$$

d.  $f(x) \leq -x+1 \Leftrightarrow (-x \leq -x+1 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x \leq -x+1 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (0 \leq 1 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x \leq \frac{1}{2} \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow x \in [-2, \frac{1}{2}]$



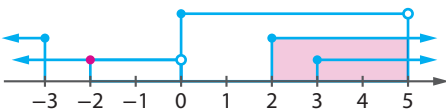
e.  $f(x) = x^2 \Leftrightarrow (-x = x^2 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x = x^2 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x^2 + x = 0 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x^2 - x = 0 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -1 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x = 0 \vee x = 1 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$

f.  $f(x) \geq -x^2 + 6 \Leftrightarrow (-x \geq -x^2 + 6 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x \geq -x^2 + 6 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x^2 - x - 6 \geq 0 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x^2 + x - 6 \geq 0 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x \leq -2 \wedge x \geq 3 \wedge -2 \leq x < 0) \vee (x \leq -3 \vee x \geq 2 \wedge 0 \leq x < 5) \Leftrightarrow x \in \{-2\} \cup [2, 5[$

Cálculos auxiliares:

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-6)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-6)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$



### 51.3 (C)

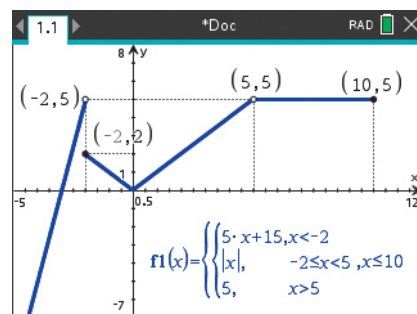
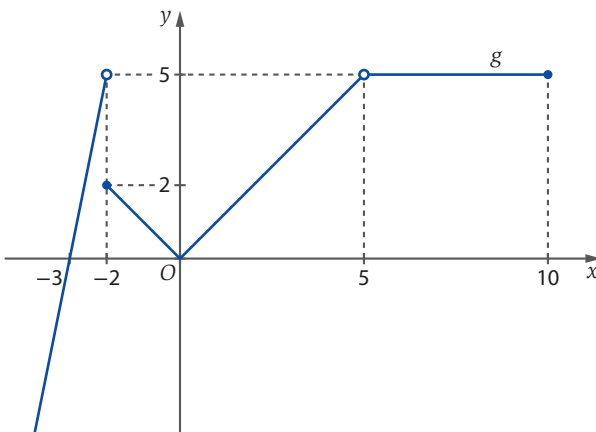
$g(10) = 5$ , logo  $k = 5$

a.  $g(-2) + g(6) = f(-2) + 5 = 2 + 5 = 7$

b.  $D_g = ]-\infty, 10] \setminus \{5\}$

c.  $g(x) = 0 \Leftrightarrow (5x + 15 = 0 \wedge x < -2) \vee (f(x) = 0 \wedge -2 \leq x < 5) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x = -3 \wedge x < -2) \vee (x = 0 \wedge -2 \leq x < 5) \Leftrightarrow x \in \{-3, 0\}$

d.



e.  $g$  é positiva em  $] -3, 10] \setminus \{0, 5\}$  e é negativa em  $] -\infty, -3[$ .

f.  $g$  é crescente em  $] -\infty, -2[$  e em  $[0, 5[$ , é decrescente em  $[-2, 0]$  e é constante em  $]5, 10]$ .

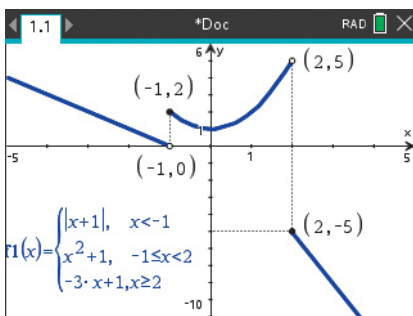
$g$  tem mínimo relativo igual a 0 em  $x=0$  e igual a 5 em  $x \in ]5, 10]$  e tem máximo relativo (e absoluto) igual a 5 em  $x \in ]5, 10]$ .

g.  $D'_g = ] -\infty, 5]$

**PÁG. 59**

**52.1**  $g(x)=0 \Leftrightarrow (|x+1|=0 \wedge x < -1) \vee (x^2+1=0 \wedge -1 \leq x < 2) \vee (-3x+1=0 \wedge x \geq 2) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x=-1 \vee x=1 \wedge x < -1) \vee (x=\frac{1}{3} \wedge x \geq 2) \Leftrightarrow x \in \{ \}$   $g$  não tem zeros.

**52.2**



**52.3**

|        |           |      |     |      |           |
|--------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-1$ |     | $2$  | $+\infty$ |
| $g(x)$ | $+$       | $2$  | $+$ | $-5$ | $-$       |

**52.4**

|        |            |      |            |     |            |      |            |
|--------|------------|------|------------|-----|------------|------|------------|
| $x$    | $-\infty$  | $-1$ |            | $0$ |            | $2$  | $+\infty$  |
| $g(x)$ | $\searrow$ | $2$  | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $-5$ | $\searrow$ |

$g$  é decrescente em  $] -\infty, -1[$ , em  $[-1, 0]$  e em  $[2, +\infty[$  e é crescente em  $[0, 2[$ .

$g$  tem mínimo relativo igual a 1 em  $x=0$  e tem máximo relativo igual a 2 em  $x=-1$ .

**52.5**  $D'_g = ] -\infty, -5] \cup ]0, +\infty[$

## 52.6

$$\begin{aligned}
 \text{a. } g(x) - 1 = x &\Leftrightarrow (|x+1| - 1 = x \wedge x < -1) \vee \\
 &\vee (x^2 + 1 - 1 = x \wedge -1 \leq x < 2) \vee (-3x + 1 - 1 = x \wedge x \geq 2) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (|x+1| = x+1 \wedge x < -1) \vee (x^2 - x = 0 \wedge -1 \leq x < 2) \vee (-3x - x = 0 \wedge x \geq 2) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x \geq -1 \wedge x < -1) \vee (x=0 \vee x=1 \wedge -1 \leq x < 2) \vee (x=0 \wedge x \geq 2) \Leftrightarrow \\
 &\quad (\text{porque } |x+1| = x+1 \Leftrightarrow x \geq -1) \\
 &\Leftrightarrow (x=0 \vee x=1 \wedge -1 \leq x < 2) \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } g(x) < 2 &\Leftrightarrow (|x+1| < 2 \wedge x < -1) \vee (x^2 + 1 < 2 \wedge -1 \leq x < 2) \vee (-3x + 1 < 2 \wedge x \geq 2) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x+1 < 2 \wedge x+1 > -2 \wedge x < -1) \vee (x^2 < 1 \wedge -1 \leq x < 2) \vee \left(x > -\frac{1}{3} \wedge x \geq 2\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x \geq -1 \wedge x < -1) \vee (-1 < x < 1 \wedge -1 \leq x < 2) \vee \left(x > -\frac{1}{3} \wedge x \geq 2\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (-3 < x < -1) \vee (-1 < x < 1) \vee x \geq 2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in ]-3, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup [2, +\infty[
 \end{aligned}$$