

Modelos matemáticos para a cidadania

Vol. 1 Cap. 1

PÁG. 10

Tarefa 1

1. PS, pois foi o partido que obteve mais votos validamente expressos.
2. Não obteve mais de 50% dos votos validamente expressos, obteve apenas 33,01% dos votos validamente expressos.

PÁG. 11

Tarefa 2

1. 4 740 558 votantes, 58 714 votos em branco, 43 778 votos nulos.
 $4\,740\,558 - 58\,714 - 43\,778 = 4\,638\,066$ votos validamente expressos.
2. 48,66% votantes, logo, a percentagem de abstenção é $100\% - 48,66\% = 51,34\%$.
3. 2 411 925 votos em Marcelo Rebelo de Sousa.

Percentagem de votos relativamente ao número de eleitores inscritos:

$$\frac{2\,411\,925}{9\,741\,377} \times 100 \approx 24,76\%$$

Percentagem de votos relativamente ao número de votos validamente expressos:

$$\frac{2\,411\,925}{4\,638\,066} \times 100 \approx 52\%$$

4. Por exemplo: Marcelo Rebelo de Sousa foi eleito com cerca de 52% dos votos validamente expressos, isto é, dos eleitores que foram votar e depositaram um voto válido.
Tendo em conta a abstenção, apenas cerca de $\frac{1}{4}$ dos eleitores inscritos (uma minoria) votaram efetivamente em Marcelo Rebelo de Sousa. Os restantes ou votaram noutros candidatos ou não manifestaram qualquer intenção de voto.
É impossível saber qual teria sido o resultado se todos os eleitores inscritos tivessem ido votar.

5. Para que Marcelo Rebelo de Sousa não tivesse maioria absoluta na primeira volta, teria de ter, no máximo, metade dos votos validamente expressos.

$$2\,411\,925 \times 2 = 4\,823\,850 \quad \text{e} \quad 4\,823\,850 - 4\,638\,066 = 185\,784$$

Se houvesse, pelo menos, 185 784 abstencionistas, votando em quaisquer outros candidatos, Marcelo Rebelo de Sousa teria de disputar a eleição numa segunda volta.

PÁG. 12**Aplicar**

- 1.1.** Diogo Freitas do Amaral com 2 629 597 votos.
 - 1.2.** Mário Soares, pois obteve mais de metade dos votos validamente expressos.
 - 1.3.** Os votantes dos restantes candidatos na primeira volta votaram em massa em Mário Soares, daí ele ter saído vencedor destas eleições.
-
- 2.1.** 39,24% votantes, logo, a percentagem de abstenção é $100\% - 39,24\% = 60,76\%$.
 - 2.2.** Não foi necessário proceder a uma segunda volta, dado que o candidato mais votado na primeira volta obteve mais de metade dos votos validamente expressos. Marcelo Rebelo de Sousa foi eleito presidente.

PÁG. 13**Tarefa 3**

1. Contabilizemos a pontuação total de cada um dos candidatos:

$$\text{António} = 3 \times 25 + 3 \times 81 + 2 \times 18 + 2 \times 22 + 1 \times 66 + 1 \times 35 = 499$$

$$\text{Bernardo} = 3 \times 18 + 3 \times 66 + 2 \times 25 + 2 \times 35 + 1 \times 81 + 1 \times 22 = 475$$

$$\text{Carla} = 3 \times 22 + 3 \times 35 + 2 \times 81 + 2 \times 66 + 1 \times 25 + 1 \times 18 = 508$$

Carla é a vencedora, usando o método eleitoral descrito.

2. Se o método usado fosse o da maioria simples, considerando as primeiras preferências expressas pelos eleitores,

$$\text{António} = 25 + 81 = 106$$

$$\text{Bernardo} = 18 + 66 = 84$$

$$\text{Carla} = 22 + 35 = 57$$

O António ganharia por maioria simples.

3. Uma vez que 106 é menor do que metade dos votos (total de votos, $106 + 84 + 57 = 247$; $247 \div 2 = 123,5$), teria de se realizar uma segunda volta, com os candidatos António e Bernardo que foram os mais votados.

PÁG. 14**Tarefa 4**

1. Contabilizemos a pontuação total de cada um dos candidatos:

$$A = 5 \times 4 + 4 \times 4 + 7 \times 2 + 3 \times 2 + 3 \times 1 + 3 \times 1 = 62$$

$$B = 7 \times 4 + 3 \times 2 + 3 \times 2 + 5 \times 1 + 4 \times 1 + 3 \times 1 = 52$$

$$C = 3 \times 4 + 5 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 7 \times 1 = 60$$

$$D = 3 \times 4 + 3 \times 4 + 7 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 + 5 \times 2 = 76$$

O vencedor é o candidato D.

2. Considerando as primeiras preferências expressas pelos eleitores,

$$A = 5 + 4 = 9$$

$$B = 7$$

$$C = 3$$

$$D = 3 + 3 = 6$$

por maioria simples ganharia o candidato A.

3. Por maioria absoluta não haveria vencedor na primeira volta, teria de se proceder a uma segunda volta com os candidatos mais votados, neste caso, A e B. Se as preferências se mantivessem para a segunda volta,

$$A = 5 + 4 + 3 = 12$$

$$B = 7 + 3 + 3 = 13$$

o vencedor seria o candidato B.

PÁG. 15**Aplicar**

3.1. $17 + 15 + 5 + 23 = 60$ votos validamente expressos

Taxa de abstenção 25%, ou seja, os 60 sócios que votaram correspondem a 75% do total de sócios.

Portanto, o número de sócios da associação é $60 \times \frac{100}{75} = 80$.

3.2. Contabilizemos o número total de votos de cada uma das listas:

$$A = 17 \times 3 + 5 \times 2 + 23 \times 2 + 15 \times 1 = 122$$

$$B = 15 \times 3 + 5 \times 3 + 17 \times 2 + 23 \times 1 = 117$$

$$C = 23 \times 3 + 15 \times 2 + 17 \times 1 + 5 \times 1 = 121$$

Lista A.

3.3. A troca de 17 com 15, dá a vitória à lista C.

PÁG. 17**Tarefa 5**

Não respeita dado que:

$$\text{PS: } 42,06\% \times 6 \approx 2,52$$

$$\text{PSD: } 34,17\% \times 6 \approx 2,05$$

$$\text{CH: } 6,06\% \times 6 \approx 0,36$$

Aplicando o método ficaria um deputado por atribuir.

PÁG. 23

Tarefa 6

1.1.



Diário da República, 1.ª série

N.º 235

6 de dezembro de 2021

Pág. 55-(2)

COMISSÃO NACIONAL DE ELEIÇÕES

Mapa Oficial n.º 1-C/2021

Sumário: Número de deputados a eleger para a Assembleia da República e a sua distribuição pelos círculos eleitorais.

Mapa com o número de deputados a eleger para a Assembleia da República e a sua distribuição pelos círculos eleitorais (n.º 4 do artigo 13.º da Lei n.º 14/79, de 16 de maio, com a redação conferida pela Lei Orgânica n.º 1/99, de 22 de junho)

Círculos Eleitorais	Número de eleitores (*)	Número de deputados
Aveiro	642 696	16
Beja	120 904	3
Braga	776 638	19
Bragança	137 581	3
Castelo Branco	166 307	4
Coimbra	374 980	9
Évora	134 861	3
Faro	380 415	9
Guarda	145 869	3
Leiria	413 127	10
Lisboa	1 920 128	48
Portalegre	94 393	2
Porto	1 592 758	40
Santarém	378 044	9
Setúbal	745 669	18
Viana do Castelo	236 069	6
Vila Real	213 124	5
Viseu	340 384	8
Madeira	256 463	6
Açores	229 044	5
Europa	926 312	2
Fora da Europa	595 478	2
Total	10 821 244	230

(*) Fonte: Informação prestada pela Secretaria-Geral do Ministério da Administração Interna, relativa a 6 de dezembro de 2021.

a. Castelo Branco: $\frac{166\,307}{10\,821\,244} \times 100 \approx 2\%$

Lisboa: $\frac{1\,920\,128}{10\,821\,244} \times 100 \approx 18\%$

Porto: $\frac{1\,592\,758}{10\,821\,244} \times 100 \approx 15\%$

b. Castelo Branco: $\frac{4}{230} \times 100 \approx 2\%$

Lisboa: $\frac{48}{230} \times 100 \approx 21\%$

Porto: $\frac{40}{230} \times 100 \approx 17\%$

1.2. Idealmente, a percentagem de eleitores e de mandatos, em cada círculo eleitoral, deveria ser a mesma. No entanto, o método aplicado para determinar o número de mandatos, em função do número de eleitores (método de Hondt), introduz diferenças. De uma forma geral, os círculos maiores ficam favorecidos relativamente ao número de mandatos.

O círculo eleitoral de Lisboa é representado por 21% dos mandatos, sendo o número de eleitores 18% do número total de eleitores. Esta tendência também se verifica no círculo eleitoral do Porto.

2.

	Partidos						
Divisores	PS	PPD/PSD	CH	B.E.	PCP-PEV	IL	CDS-PP
1	45 622	26 237	7 958	4 069	2 784	2 443	1 497
2	22 811	13118,50	3979	2034,50	1392,00	1221,50	748,50
3	15 207,33	8745,67	2652,67	1356,33	928,00	814,33	499,00
4	11 405,50	6559,25	1989,50	1017,25	696,00	610,75	374,25

3. 7250 votos

$15\ 208 - 7958 = 7250$, 15 208 é o menor número inteiro superior ao quociente do número de votos do PS por 3 .

4.

	Partidos						
Divisores	PS	PPD/PSD	CH	B.E.	PCP-PEV	IL	CDS-PP
1	45 622	26 237	7 958	4 069	2 784	2 443	1 497
3	15 207	8745,67	2653	1356,33	928,00	814,33	499,00
5	9 124,40	5247,40	1591,60	813,80	556,80	488,60	299,40
7	6 517,43	3748,14	1136,86	581,29	397,71	349,00	213,86

A distribuição seria a mesma.

5.

	Partidos					
Divisores	PPD/PSD	PD	CDS-PP	B.E.	PCP-PEV	PAN
1	116872	51503	31819	13351	12349	3009
3	38957,33	17167,67	10606,33	4450,333	4116,333	1003
5	23374,4	10300,6	6363,8	2670,2	2469,8	601,8
7	16696	7357,571	4545,571	1907,286	1764,143	429,8571
9	12985,78	5722,556	3535,444	1483,444	1372,111	334,3333
11	10624,73	4682,091	2892,636	1213,727	1122,636	273,5455

O BE e o PCP-PEV passariam a ter 1 voto cada, perdendo o PPD/PSD e o PS, cada um, 1 voto.

PÁG. 27**Tarefa 7**

1. 59 € ; 1829 €
2. $0,11 \times 1829 \text{ €} = 201,19 \text{ €}$
3. $\frac{36,58}{1829} \times 100 = 2\%$
4. Taxa: 17,6% ; Retenção na fonte: $0,176 \times 1829 \text{ €} \approx 321,90 \text{ €}$
5. $(1829 + 240) - (36,58 + 40,00 + 1,83 + 201,19 + 321,90) = 1467,50 \text{ €}$
6. O salário líquido é o salário base, acrescentado do subsídio de alimentação e subtraído dos descontos.
7. Somando o valor total de todas as retenções na fonte até março, neste caso $3 \times 321,90 \text{ €} = 965,71 \text{ €}$.

PÁG. 28**Tarefa 8**

1.
 - a. 2228,11 €
 - b. 1556,54 € (total líquido)
2. $0,2006 \times 2228,11 \text{ €} \approx 447 \text{ €}$
3. $2336,11 - 779,57$

PÁG. 29**Tarefa 9****1.**

Rendimentos	Escalões	Taxas de IRS
20 600 €	4.º	28,5%
20 800 €	5.º	35%

2. $7479 \times 0,145 + (11\,284 - 7479) \times 0,21 + (15\,992 - 11\,284) \times 0,265 + (20\,700 - 15\,992) \times 0,285 + (20\,800 - 20\,700) \times 0,35 \approx 4507,91 \text{ €}$

3. O rendimento coletável de 20 800 € enquadra-se no 5.º escalão, cuja taxa é de 35% e cuja parcela a abater é de 2772,14 €

$$\text{Coleta total} = 20800 \times 0,35 - 2772,14 = 7280 - 2772,14 = 4507,86 \text{ €}$$

Este valor difere do calculado pelo outro método em 5 cêntimos.

4. $200 - (4507,91 - 4444,41) = 136,5 \text{ €}$

Outra forma:

$$200 - (100 \times 0,285 + 100 \times 0,35) = 200 - 63,5 = 136,5 \text{ €}$$

PÁG. 32**Tarefa 10**

1. $0,02 \times 1000 \text{ €} = 20 \text{ €}$

2. 40 € ; 60 € ; 200 € .

Em cada ano o valor do juro recebido é sempre igual, neste caso, 20 € , portanto, ao fim de dois anos o juro recebido é $2 \times 20 \text{ €} = 40 \text{ €}$, ao fim de três anos é $3 \times 20 \text{ €} = 60 \text{ €}$ e ao fim de dez anos é $10 \times 20 = 200 \text{ €}$.

3. $j = 20n$

4.

a. $j = C_i \times r \times n$

b. $C_f = C_i + j = C_i + C_i \times r \times n = C_i(1 + r \times n)$

PÁG. 33

Tarefa 11

1.

a. O valor do juro no final do primeiro ano é $0,02 \times 1000 \text{ €} = 20 \text{ €}$, portanto para o segundo ano acumulará $1000 + 20 = 1020 \text{ €}$.

b. O valor do juro no final do segundo ano é $0,02 \times 1020 \text{ €} = 20,40 \text{ €}$, portanto para o terceiro ano acumulará $1020 + 20,40 = 1040,40 \text{ €}$.

c. O valor do juro no final do terceiro ano é $0,02 \times 1040,40 \text{ €} \approx 20,81 \text{ €}$, portanto no final do terceiro ano terá $1040,40 + 20,81 = 1061,21 \text{ €}$.

2. 1218,99 €

	A	B	C	D
1		n		
2	Capital inicial	0	1 000,00 €	
3	Final do 1.º Ano	1	1 020,00 €	
4	Final do 2.º Ano	2	1 040,40 €	
5	Final do 3.º Ano	3	1 061,21 €	
6	Final do 4.º Ano	4	1 082,43 €	
7	Final do 5.º Ano	5	1 104,08 €	
8	Final do 6.º Ano	6	1 126,16 €	
9	Final do 7.º Ano	7	1 148,69 €	
10	Final do 8.º Ano	8	1 171,66 €	
11	Final do 9.º Ano	9	1 195,09 €	
12	Final do 10.º Ano	10	1 218,99 €	

Final do 1.º ano:

$$1000 + 1000 \times 0,02 = 1000 \times (1 + 0,02) = 1000 \times 1,02$$

Final do 2.º ano:

$$1000 \times 1,02 + 1000 \times 1,02 \times 0,02 = 1000 \times 1,02 \times (1 + 0,02) = 1000 \times 1,02 \times 1,02 = 1000 \times (1,02)^2$$

Final do 3.º ano:

$$1000 \times (1,02)^2 + 1000 \times (1,02)^2 \times 0,02 = 1000 \times (1,02)^2 \times (1 + 0,02) = \\ = 1000 \times (1,02)^2 \times 1,02 = 1000 \times (1,02)^3$$

...

Final do 10.º ano:

$$1000 \times (1,02)^{10} \approx 1218,99 \text{ €}$$

$$3. C_f = C_i(1 + r)^n$$

PÁG. 35**Tarefa 12****1.**

a. $1000 \times \left(1 + \frac{0,018}{12}\right)^{12} \approx 1018,15 \text{ €}$

b. $1000 \times \left(1 + \frac{0,018}{12}\right)^{2 \times 12} \approx 1036,63 \text{ €}$

2. $C_f = C_i \left(1 + \frac{r}{12}\right)^n$

PÁG. 36**Tarefa 13**

1. A taxa de juro anual é igual nas duas opções, mas na opção 3 as capitalizações são mensais, pelo que esta opção é a mais rentável.

2.

Opção 1: $1000 \times (1 + 0,031 \times 3) = 1093 \text{ €}$

Opção 2: $1000 \times (1 + 0,029)^3 \approx 1089,55 \text{ €}$

Opção 3: $1000 \times \left(1 + \frac{0,029}{12}\right)^{3 \times 12} \approx 1090,78 \text{ €}$

A melhor opção é a 1.

3.

	n	Opção 1	Opção 2	Opção 3
Capital inicial	0	1 000,00 €	1 000,00 €	1 000,00 €
Final do 1.º Ano	1	1 031,00 €	1 029,00 €	1 029,39 €
Final do 2.º Ano	2	1 062,00 €	1 058,84 €	1 059,64 €
Final do 3.º Ano	3	1 093,00 €	1 089,55 €	1 090,78 €
Final do 4.º Ano	4	1 124,00 €	1 121,14 €	1 122,84 €
Final do 5.º Ano	5	1 155,00 €	1 153,66 €	1 155,84 €
Final do 6.º Ano	6	1 186,00 €	1 187,11 €	1 189,81 €

A opção 2 é mais rentável do que a opção 1 ao fim de seis anos; a opção 3 é a mais rentável ao fim de cinco anos.

PÁG. 37**Tarefa 14**

1.1. $C_f = 1000 \times \left(1 + \frac{0,025}{6}\right)^6 \approx 1025,26 \text{ €}$ (se as capitalizações são bimestrais, isto é, de dois em dois meses, então existem seis capitalizações por ano.)

1.2. $C_f = 1000 \times \left(1 + \frac{0,025}{2}\right)^2 \approx 1025,16 \text{ €}$ (se as capitalizações são semestrais, isto é, de seis em seis meses, então existem duas capitalizações por ano.)

2. $C_f = C_i \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$

3. $C_f = 1000 \times \left(1 + \frac{0,025}{4}\right)^{4 \times 3} \approx 1077,63 \text{ €}$ (se as capitalizações são trimestrais, isto é, de três em três meses, então existem quatro capitalizações por ano, e, portanto, 4×3 capitalizações nos três anos.)

4. $C_f = C_i \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \times k}$

PÁG. 38**Tarefa 15**

1. $TANL = 0,72 \times TANB = 0,72 \times 0,03 = 0,0216 = 2,16\%$

2.1. $3000 \times (1 + 0,0216 \times 3) = 3194,4 \text{ €}$

2.2. $3000 \times (1 + 0,0216)^3 = 3198,63 \text{ €}$

2.3. $3000 \times \left(1 + \frac{0,0216}{12}\right)^{12 \times 3} = 3200,65 \text{ €}$

Tarefa 16

1.1. O valor do juro é $0,11 \times 5000 \text{ €} = 550 \text{ €}$, portanto terá de devolver $5000 + 550 = 5550 \text{ €}$.

1.2. O valor do juro ao fim de 2 anos é (no final do primeiro ano acumulou 500 € em juros) $0,11 \times 5550 \text{ €} = 610,5 \text{ €}$, portanto terá de devolver $5550 + 610,5 = 6160,5 \text{ €}$.

Nota: podíamos ter usado a fórmula $C_f = C_i (1 + r)^n$, sendo C_f o capital final em dívida, C_i o valor do empréstimo, r a taxa anual e n o prazo.

1.3. $5000 \times 1,11^n$.

2.1.

a. Ao fim de seis meses, o capital em dívida é $4544,68 \text{ €}$.

	A	B	C	D	E
1	Capital emprestado	5 000,00 €		Mês	Capital em dívida
2				1	4 925,83 €
3	TAN	11,00%		2	4 850,99 €
4				3	4 775,45 €
5	Prestação	120,00 €		4	4 699,23 €
6				5	4 622,31 €
7				6	4 544,68 €

b. 53 meses

				48	553,25 €
Capital emprestado	5 000,00 €			49	438,32 €
				50	322,34 €
TAN	11,00%			51	205,30 €
				52	87,18 €
Prestação	120,00 €			53	-32,02 €
				54	-152,32 €

2.2. Se a prestação mensal for de 163 €, ,

				31	821,17 €
Capital emprestado	5 000,00 €			32	665,70 €
				33	508,80 €
TAN	11,00%			34	350,46 €
				35	190,68 €
Prestação	163,00 €			36	-29,42 €
				37	-133,31 €

Se a prestação mensal for de 164 €, ,

				31	785,50 €
Capital emprestado	5 000,00 €			32	628,70 €
				33	470,47 €
TAN	11,00%			34	310,78 €
				35	149,63 €
Prestação	164,00 €			36	-13,00 €
				37	-177,12 €

Se a prestação mensal for de 163,70 €, ,

				31	796,20 €
Capital emprestado	5 000,00 €			32	639,80 €
				33	481,97 €
TAN	11,00%			34	322,69 €
				35	161,94 €
Prestação	163,70 €			36	-0,27 €
				37	-163,97 €

2.3.

a. A TAN é 7,11% .

			30	2 042,41 €
			31	1 934,51 €
Capital emprestado	5 000,00 €		32	1 825,97 €
			33	1 716,79 €
TAN	7,11%		34	1 606,96 €
			35	1 496,48 €
Prestação	120,00 €		36	1 385,35 €
			37	1 273,56 €
			38	1 161,10 €
			39	1 047,98 €
			40	934,19 €
			41	819,73 €
			42	704,58 €
			43	588,76 €
			44	472,25 €
			45	355,05 €
			46	237,15 €
			47	118,55 €
			48	-0,74 €
			49	-120,75 €

b. A última prestação é de $118,55 \times \left(1 + \frac{0,0711}{12}\right) = 119,25 \text{ €}$

Na penúltima prestação ficaram a faltar pagar 118,55 €, sobre os quais ainda incide o juro, pelo que o valor que a Laura irá pagar são 47 prestações iguais a 120 € e a última igual a 119,25 € .

Na totalidade irá pagar 5759,25 € e desses 759,25 € é o valor do juro, que corresponde a 15,19% do valor do empréstimo.

PÁG. 41**Aplicar**

8.1. $TANL = 0,72 \times TANB = 0,72 \times 0,0306 = 0,022032 \approx 2,2\%$

8.2. $6000 \times (1 + 0,022)^6 \approx 6836,86 \text{ €}$

8.3.

a. $6000 \times \left(1 + \frac{0,022}{12}\right)^{3,5 \times 12} \approx 6479,80 \text{ €}$

b. $6000 \times \left(1 + \frac{0,022}{12}\right)^n > 7000$

Podemos agora usar uma folha de cálculo para determinar o número mínimo de meses necessários para atingir o objetivo.

E86					
=B\$1*(1+B\$3/12)^D86					
	A	B	C	D	E
1	Capital inicial	6 000,00 €		Mês	Capital acumulado
2				1	6 011,00 €
3	TANL	2,20%		2	6 022,02 €
4				3	6 033,06 €
5				4	6 044,12 €
6				5	6 055,20 €
83			
84				83	6 985,15 €
85				84	6 997,96 €
86				85	7 010,79 €
87				86	7 023,64 €

São necessários 85 meses.

8.4. $6000 \times \left(1 + \frac{0,022}{4}\right)^4 \approx 6133,09 \text{ €}$

PÁG. 42

Aplicar

9.1.

a. $2070 = 2000(1 + 2r) \Leftrightarrow 1 + 2r = \frac{2070}{2000} \Leftrightarrow 1 + 2r = 1,035 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow r = \frac{1,035 - 1}{2} \Leftrightarrow r = 0,0175 \Leftrightarrow r = 1,75\%$

b. $2070 = 2000(1 + r)^2 \Leftrightarrow (1 + r)^2 = \frac{2070}{2000} \Rightarrow 1 + r = \sqrt{1,035} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow r \approx 0,0173 \Leftrightarrow r \approx 1,73\%$

9.2.

a. $\frac{0,018}{12} = 0,0015 = 0,15\%$

b. $2000 \times (1 + 0,0015)^{12 \times 2,5} \approx 2091,99 \text{ €}$

10.

Opção 1:

$5000 \times (1 + 2 \times 0,015) = 5150 \text{ €} ; 5150 \times (1 + 0,013)^2 \approx 5284,77 \text{ €} .$

Opção 2:

$5000 \times \left(1 + \frac{0,014}{2}\right)^{2 \times 4} \approx 5286,96 \text{ €}$

A Fátima deverá escolher a opção 2.

11.1. $TANL = 0,72 \times TANB = 0,72 \times 0,03 = 0,0216 = 2,16\%$

A taxa mensal líquida é $\frac{2,16\%}{12} = 0,18\%$

11.2. $1583,15 = C_i(1 + 0,0018)^{30} \Leftrightarrow C_i = \frac{1583,15}{(1 + 0,0018)^{30}} \Leftrightarrow C_i = 1499,99995$, ou seja, 1500 € .

11.3. $1500(1 + 0,0018)^n > 1600$

Podemos agora usar uma folha de cálculo para determinar o número mínimo de meses necessários para atingir o objetivo.

			Mês	Capital final líquido
Capital inicial	1 500,00 €		30	1 583,15 €
Taxa mensal	0,18%		31	1 586,00 €
			32	1 588,85 €
			33	1 591,71 €
			34	1 594,58 €
			35	1 597,45 €
			36	1 600,33 €

O depósito deverá durar, no mínimo, 36 meses.

12.1. Ao fim de 4 anos a Sofia teria de pagar ao banco $20\,000 \times 1,09^4 = 28\,231,6322 \text{ €}$
 $28\,231,6322 - 20\,000 = 8231,6322 \text{ €}$, ou seja, o total de juros que pagaria é 8231,63 € .

12.2. Recorrendo a uma folha de cálculo:

		55	3 057,79 €
Capital emprestado	20 000,00 €	56	2 680,72 €
		57	2 300,83 €
TAN	9,00%	58	1 918,09 €
		59	1 532,47 €
Prestação	321,90 €	60	1 143,97 €
		61	752,55 €
		62	358,19 €
		63	-39,12 €

Irá demorar 63 meses. Sendo que a última prestação será de 360,88 € (no mês 62 ficam por pagar 358,19 €, sobre os quais ainda incide o juro. Assim, o valor do juro na última prestação é $358,19 \times 0,09/12 = 2,69$ €. Portanto, o valor da última prestação é de $358,19 € + 2,69 € = 360,88 €$).

12.3. Se a prestação mensal for de 415,17 €,

E61					
=E60*(1+B\$3/12)-B\$5					
	A	B	C	D	E
1	Capital emprestado	20 000,00 €		Mês	Capital em dívida
2				1	19 734,83 €
3	TAN	9,00%		2	19 467,67 €
4				3	19 198,51 €
5	Prestação	415,17 €		4	18 927,33 €
6				5	18 654,11 €
7				6	18 378,85 €
56			
57			
58			
59				58	820,87 €
60				59	411,86 €
61				60	-0,22 €
62				61	-415,39 €

A última prestação será de 414,95 € (no mês 59 ficam por pagar 411,86 €, sobre os quais ainda incide o juro. Assim, o valor do juro na última prestação é $411,86 \times 0,09/12 = 3,09$ €. Portanto, o valor da última prestação é de $411,86 € + 3,09 € = 414,95 €$).

PÁG. 43**Aplicar+****1.1.**

- a.** Maioria absoluta, pois houve dois sufrágios, sendo candidatos ao segundo apenas os que foram mais votados no primeiro sufrágio.
- b.** Lista F, pois é a lista mais votada (no primeiro sufrágio).
- c.** Lista F, pois é a lista mais votada no segundo sufrágio, após ter sido uma das duas mais votadas no primeiro sufrágio.

1.2.

- a.** Lista C, pois foi a mais votada.
- b.** Não, porque a Lista C não obteve mais de metade dos votos.

PÁG. 44**Aplicar+**

2.1. *Ai Coração*, com $5 + 12 + 12 + 10 + 3 + 12 + 12 = 66$ pontos e *A Festa* com $8 + 10 + 8 + 12 + 10 + 8 + 10 = 66$ votos.

2.2. *Ai Coração*, com quatro votos em sete.

3.1. $30 + 45 + 90 + 62 + 31 = 258$

3.2. Ganharia B com 90 votos, correspondendo a $\frac{90}{258} \times 100 \approx 34,88\%$.

3.3. Não haveria vencedor à primeira volta. Por outro lado, nada sendo dito, não sabemos se as preferências se manteriam. No caso de se manterem, A seria o vencedor, com $30 + 45 + 62 = 137$ votos, contra os $90 + 31 = 121$ de B.

A e B passariam à segunda volta por terem sido os mais votados na primeira volta.

3.4. Contabilizemos a pontuação total de cada um dos candidatos:

$$A = 4 \times 30 + 4 \times 45 + 3 \times 62 + 90 + 31 = 607$$

$$B = 4 \times 90 + 3 \times 30 + 3 \times 45 + 3 \times 31 + 2 \times 62 = 802$$

$$C = 4 \times 62 + 3 \times 90 + 2 \times 30 + 2 \times 31 + 45 = 685$$

$$D = 4 \times 31 + 2 \times 45 + 2 \times 90 + 30 + 62 = 486$$

O vencedor foi B.

3.5.

30	45	90	62	31
A	A	C	C	D
C	D	D	A	C
D	C	A	D	A

$$A = 3 \times 30 + 3 \times 45 + 2 \times 62 + 90 + 31 = 470$$

$$C = 3 \times 90 + 3 \times 62 + 2 \times 30 + 2 \times 31 + 45 = 623$$

$$D = 3 \times 31 + 2 \times 45 + 2 \times 90 + 30 + 62 = 455$$

O vencedor seria C.

PÁG. 45

Aplicar+

4.1. PS

4.2.

Divisores	Partidos			
	PS	PPD/PSD	CH	PCP-PEV
		CDS-PP		
1	3421	3013	103	35
2	1710,50	1506,50	51,50	17,50
3	1140,33	1004,33	34,33	11,67
4	855	753,25	25,75	8,75
5	684,20	602,60	20,60	7,00

O PS elegeu três vereadores e a coligação PPD/PSD.CDS-PP elegeu dois vereadores.

4.3.

Divisores	Partidos			
	PS	PPD/PSD	CH	PCP-PEV
		CDS-PP		
1	3421	3013	103	35
2	1710,50	1506,50	51,50	17,50
3	1140,33	1004,33	34,33	11,67
4	855	753,25	25,75	8,75
5	684,20	602,60	20,60	7,00
6	570,17	502,17	17,17	5,83
7	488,71	430,43	14,71	5,00
8	427,63	376,63	12,88	4,38
9	380,11	334,78	11,44	3,89
10	342,10	301,30	10,30	3,50
11	311,00	273,91	9,36	3,18
12	285,08	251,08	8,58	2,92
13	263,15	231,77	7,92	2,69
14	244,36	215,21	7,36	2,50

O PS elegeu 14 deputados e a coligação PPD/PSD.CDS-PP elegeu 13 deputados.

5.1.

Divisores	Partidos		
	PPD/PSD	CDS-PP	PS
1	218	158	54
2	109,00	79,00	27,00
3	72,67	52,67	18,00
4	54,50	39,50	13,50
5	43,60	31,60	10,80

Quatro mandatos para o PPD/PSD, dois para o CDS-PP e um para o PS.

5.2.

Divisores	Partidos		
	PPD/PSD	CDS-PP	PS
1	218	158	54
3	72,67	52,67	18,00
5	43,60	31,60	10,80
7	31,14	22,57	7,71
9	24,22	17,56	6,00

Três mandatos para o PPD/PSD, três para o CDS-PP e um para o PS.

PÁG. 46**Aplicar+**

6. Rendimento bruto anual: 35 000 €

Rendimento considerado para o apuramento do IRS a pagar: $0,75 \times 35\,000 \text{ €} = 26\,250 \text{ €}$

Este valor enquadra-se no 5.º escalão, cuja taxa é de 35% e cuja parcela a abater é de 2772,14 €

Coleta total $26\,250 \times 0,35 - 2772,14 = 6415,36 \text{ €}$

Imposto a pagar: $6415,36 - 2347,52 = 4067,84 \text{ €}$ e $3850 + 4067,84 = 7917,84 \text{ €}$ (o valor total das contribuições para a Segurança Social é $0,11 \times 35\,000 = 3850 \text{ €}$.)

Rendimento líquido anual: $35\,000 - 7917,84 = 27082,16 \text{ €}$

Salário líquido mensal: $27082,16 \div 12 \approx 2256,85 \text{ €}$

7.1. Tem-se $\text{TANL} = 0,72 \times \text{TANB}$, logo $\text{TANB} = \frac{3}{72} \times 100 \approx 4,17\%$

7.2. Juro simples: $25000(1 + 0,03 \times 1) = 25750 \text{ €}$

Juro composto: $25000(1 + 0,03)^1 = 25750 \text{ €}$

Logo, não era relevante. Poderíamos justificar sem os cálculos, uma vez que a taxa é aplicada uma única vez, não acumulando para o ano seguinte. Assim, se o prazo for de 1 ano, é irrelevante o juro ser simples ou composto.

7.3.

a. $25000(1 + 0,03 \times 3) = 27\,250 \text{ €}$

b. $25000(1 + 0,03)^3 \approx 27\,318,18 \text{ €}$

c. $25000\left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{3 \times 12} \approx 27\,351,29 \text{ €}$

d. $25000\left(1 + \frac{0,03}{6}\right)^{3 \times 6} \approx 27\,348,22 \text{ €}$

7.4.

a. $28000 = C_i(1 + 0,03 \times 3) \Leftrightarrow C_i = \frac{28000}{1,09} \Leftrightarrow C_i \approx 25\,688,07 \text{ €}$

b. $28000 = C_i(1 + 0,03)^3 \Leftrightarrow C_i = \frac{28000}{1,03^3} \Leftrightarrow C_i \approx 25\,623,97 \text{ €}$

c. $28000 = C_i\left(1 + \frac{0,03}{3}\right)^{3 \times 3} \Leftrightarrow C_i = \frac{28000}{\left(1 + \frac{0,03}{3}\right)^9} \Leftrightarrow C_i \approx 25\,601,52 \text{ €}$

7.5. $25000(1 + 0,03)^n > 30\,000$

		Ano	Capital final líquido
Capital inicial	25 000,00 €	1	25 750,00 €
Taxa mensal	3,00%	2	26 522,50 €
		3	27 318,18 €
		4	28 137,72 €
		5	28 981,85 €
		6	29 851,31 €
		7	30 746,85 €

Pelo menos durante 7 anos.

8.1. $\text{TANL} = 0,72 \times \text{TANB} = 0,72 \times 0,035 = 0,0252 = 2,52\%$

8.2.

a. $7500 \times 0,0252 \times 2 = 378 \text{ €}$

b. $C_i \times 0,0252 \times 2 > 500 \Leftrightarrow C_i > \frac{500}{0,0504} \Leftrightarrow C_i > 9920,63 \text{ €}$

Deveria ter depositado pelo menos 9920,63 €.

PÁG. 47

Aplicar+

$$c. 7500 \times (1 + 0,0252 \times 2) = 7878 \text{ €} ; 7878 \times 1,015^{n-2} .$$

$$8.3. 4000(1 + 0,0252 \times n) > 5000 \Leftrightarrow 1 + 0,0252 \times n > \frac{5000}{4000} \Leftrightarrow n > \frac{1,25 - 1}{0,0252} \Leftrightarrow n > 9,92$$

Pelo menos dez anos.

9.1.

		Ano	Capital final líquido Juro Simples	Capital final líquido Juro Composto	Capital final líquido Juro Composto/CM
Capital inicial	2 000,00 €	1	2 060,00 €	2 058,00 €	2 057,75 €
Taxa Anual/JS	3,00%	2	2 120,00 €	2 117,68 €	2 117,17 €
Taxa Anual/JC	2,90%	3	2 180,00 €	2 179,09 €	2 178,30 €
Taxa Anual/JCCM	2,85%	4	2 240,00 €	2 242,29 €	2 241,20 €
		5	2 300,00 €	2 307,31 €	2 305,92 €
		6	2 360,00 €	2 374,23 €	2 372,50 €
JS - juro simples		7	2 420,00 €	2 443,08 €	2 441,01 €
JC - juro composto		8	2 480,00 €	2 513,93 €	2 511,49 €
JCCM - juro composto com capitalização mensal		9	2 540,00 €	2 586,83 €	2 584,01 €
		10	2 600,00 €	2 661,85 €	2 658,63 €
		11	2 660,00 €	2 739,04 €	2 735,39 €
		12	2 720,00 €	2 818,48 €	2 814,38 €
		13	2 780,00 €	2 900,21 €	2 895,65 €

Até ao final do terceiro ano, a melhor opção é a 1. Se o prazo for superior a três anos, a melhor opção passa a ser a 2, que é sempre melhor do que a 3, independentemente do prazo.

9.2.

		Ano	Capital final líquido Juro Simples	Capital final líquido Juro Composto	Capital final líquido Juro Composto/CM
Capital inicial	2 000,00 €	1	2 060,00 €	2 058,00 €	2 060,01 €
Taxa Anual/JS	3,00%	2	2 120,00 €	2 117,68 €	2 121,82 €
Taxa Anual/JC	2,90%	3	2 180,00 €	2 179,09 €	2 185,49 €
Taxa Anual/JCCM	2,96%	4	2 240,00 €	2 242,29 €	2 251,06 €
		5	2 300,00 €	2 307,31 €	2 318,60 €
		6	2 360,00 €	2 374,23 €	2 388,17 €
JS - juro simples		7	2 420,00 €	2 443,08 €	2 459,83 €
JC - juro composto		8	2 480,00 €	2 513,93 €	2 533,64 €
JCCM - juro composto com capitalização mensal		9	2 540,00 €	2 586,83 €	2 609,66 €
		10	2 600,00 €	2 661,85 €	2 687,96 €
		11	2 660,00 €	2 739,04 €	2 768,61 €
		12	2 720,00 €	2 818,48 €	2 851,68 €
		13	2 780,00 €	2 900,21 €	2 937,25 €

A TANL mínima para que a opção 3 seja a melhor em qualquer prazo é 2,96 % .

10.1.

		Ano	Capital final líquido
Capital inicial	1 000,00 €	1	1 023,24 €
TANL	2,30%	2	1 047,03 €
TANB	3,19%		

A TANB deverá ser de 3,19 % .

10.2. $5700,47 = C_i(1 + 0,03)^8 \Leftrightarrow C_i \approx \frac{5700,47}{1,03^8} \Leftrightarrow C_i \approx 4500 \text{ €}$

E10					
=B\$1/(1+B\$3)^(8-D10)					
	A	B	C	D	E
1	Capital Final	5 700,47 €		Ano	Capital em dívida
2				8	5 700,47 €
3	TANL	3,00%		7	5 534,44 €
4				6	5 373,24 €
5				5	5 216,74 €
6				4	5 064,79 €
7				3	4 917,28 €
8				2	4 774,05 €
9				1	4 635,00 €
10				0	4 500,00 €

10.3. Pretende-se o menor valor de n de modo que:

$C_i \left(1 + \frac{0,0175}{12}\right)^{12n} > 1,15C_i \Leftrightarrow \left(1 + \frac{0,0175}{12}\right)^{12n} > 1,15$

$n = 8$

		Ano (n)	$(1+0,0175/12)^{12n}$
		1	1,0176
TANL	1,75%	2	1,0356
		3	1,0539
		4	1,0725
		5	1,0914
		6	1,1106
		7	1,1302
		8	1,1502

11.1. 30 anos e 11 meses, sendo a última prestação de 260,15 € (0,97 € de juro).

Pagaria no total 259 260,15 €, correspondendo a 370 prestações de 700 € e uma de 260,15 €.

		365	3 715,34 €
		366	3 029,28 €
Capital emprestado	140 000,00 €	367	2 340,64 €
		368	1 649,41 €
TAN	4,50%	369	955,60 €
		370	259,18 €
Prestação	700,00 €	371	-439,85 €
		372	-1 141,50 €

11.2. Iria precisar de 556 meses, sendo que a última prestação seria de 334,37 € (1,25 € de juro).

Pagaria no total 333 934,12 € mais 74 674,22 € em relação à prestação de 700 €.

		549	3 878,94 €
Capital emprestado	140 000,00 €	550	3 293,48 €
		551	2 705,84 €
TAN	4,50%	552	2 115,98 €
		553	1 523,92 €
Prestação	600,00 €	554	929,63 €
		555	333,12 €
		556	-265,63 €

PÁG. 50**Autoavaliação**

1.1. (A) $35 + 28 + 19 + 43 + 70 + 37 = 232$

1.2.

$$A = 35 + 28 = 63$$

$$J = 19 + 43 = 62$$

$$C = 70$$

$$H = 37$$

Ganharia a Carlota com $\frac{70}{232} \times 100 \approx 30,17\%$ dos votos.

1.3.

a. A Carlota obteve o maior número de votos em primeira preferência, mas só obteve 30,17% dos votos, sem maioria absoluta. Os dois candidatos eliminados são o Joaquim e a Helena.

b.

$$A = 35 + 28 + 19 + 43 = 125$$

$$C = 70 + 37 = 107$$

O vencedor foi o António com $\frac{125}{232} \times 100 \approx 53,88\%$ dos votos.

1.4. (C) Número de sócios que não votaram: $589 - 232 - 3 - 2 = 352$

Abstenção: $\frac{352}{589} \times 100 \approx 59,76\%$

1.5.

$$A = 4 \times 35 + 4 \times 28 + 3 \times 19 + 2 \times 43 + 2 \times 70 + 37 = 572$$

$$J = 4 \times 19 + 4 \times 43 + 3 \times 35 + 2 \times 28 + 2 \times 37 + 70 = 553$$

$$C = 4 \times 70 + 3 \times 37 + 2 \times 35 + 28 + 19 + 43 = 551$$

$$H = 4 \times 37 + 3 \times 28 + 3 \times 43 + 3 \times 70 + 2 \times 19 + 35 = 644$$

A vencedora foi a Helena com 644 pontos.

2. (C) $\frac{2534745}{10864327} \times 100 \approx 23,33\%$

PÁG. 51

3.1. Número total de votos: $\frac{76642}{0,41553} \approx 184\,444$

$$\frac{14373}{184444} \times 100 \approx 7,79\%$$

3.2. Votos validamente expressos: $184444 - 2144 - 1907 = 180\,393$

3.3.

	PS	PPD/PSD	CH
Divisores	76642	67888	14373
1	76642,00	67888,00	14373,00
3	25547,33	22629,33	4791,00
5	15328,40	13577,60	2874,60
7	10948,86	9698,29	2053,29
9	8515,78	7543,11	1597,00

O PSD perderia um mandato para o CH.

4.1. (B) $0,11 \times 2424 \text{ €} = 266,64 \text{ €}$

PÁG. 52

4.2. $0,37 \times 2424 \text{ €} = 896,88 \text{ €}$

Retenção na fonte: $896,88 - 334,48 - 2 \times 21,43 = 519,54 \text{ €}$ (parte inteira: $519,00 \text{ €}$)

Total líquido que o trabalhador recebeu: $2424 + 108 - 519 - 266,64 = 1746,36 \text{ €}$

Taxa efetiva de IRS que reteve na fonte: $\frac{519}{2424} \times 100 \approx 21,41\%$

PÁG. 53

5.1. (B) $187,5 = 2500 \times r \times 3 \Leftrightarrow r = \frac{187,5}{7500} \Leftrightarrow r = 0,025 \Leftrightarrow r = 2,5\%$

5.2. $2500 + 187,5 = 2687,5 \text{ €}$

$TANL = 0,72 \times TANB = 0,72 \times 0,04 = 0,0288 = 2,88\%$

$2687,5(1 + 0,0288)^2 \approx 2844,53 \text{ €}$

6. $10000 \left(1 + \frac{0,02}{12}\right)^n > 10\ 500$

	A	B	C	D	E
1	Capital inicial	10 000,00 €		Mês	Capital em dívida
2				1	10 016,67 €
3	TANL	2,00%		2	10 033,36 €
4				3	10 050,08 €
5				4	10 066,83 €
6				5	10 083,61 €
26			
27			
28			
29				28	10 477,32 €
30				29	10 494,78 €
31				30	10 512,27 €

No mínimo 30 meses.