

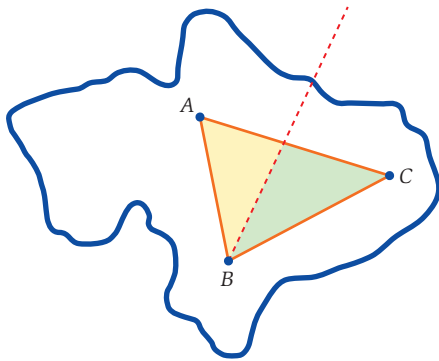
Geometria sintética no plano

Vol. 2 Cap.1

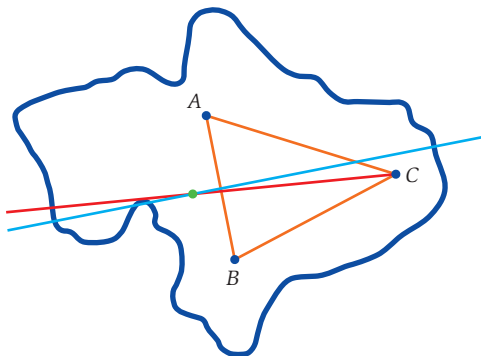
PÁG. 7

Diagnóstico

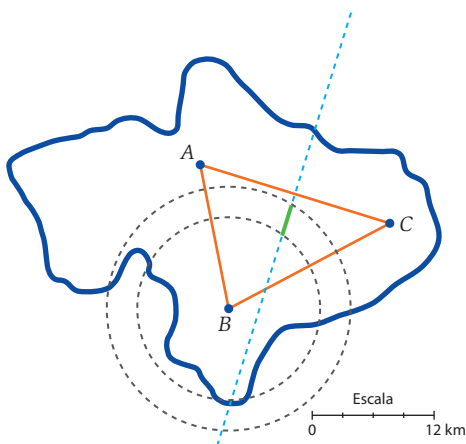
1.1 Solução assinalada a verde: conjunto de pontos interiores ao triângulo $[ABC]$ localizados do lado da bissetriz do ângulo CBA que contém o vértice em C .



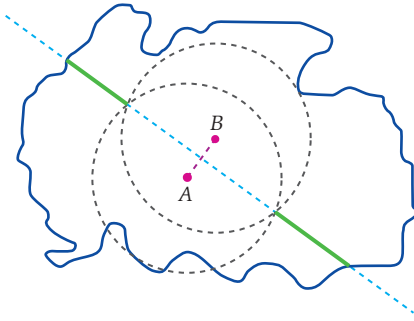
1.2 Solução assinalada a verde: ponto de interseção da bissetriz do ângulo ACB com a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.



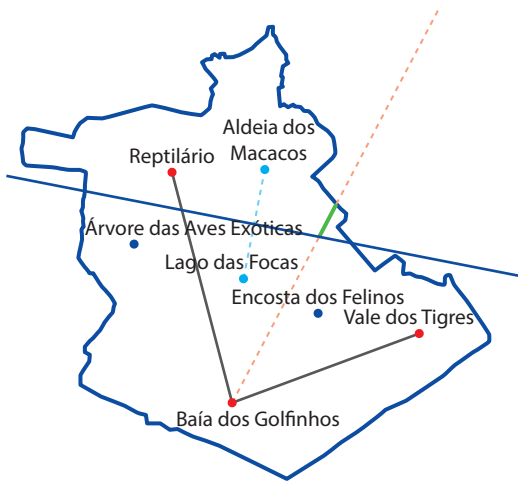
1.3 Solução assinalada a verde: interseção da mediatriz do segmento de reta $[AC]$ com o conjunto de pontos exteriores à circunferência de centro no ponto B e raio 9 e o conjunto de pontos interiores à circunferência de centro no ponto B e raio 12 .



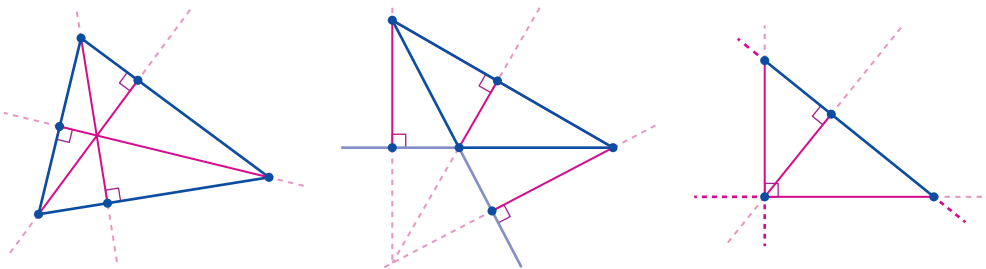
2. Solução assinalada a verde: interseção da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ com o conjunto de pontos exteriores às circunferências de centros nos pontos A e B e raio $2\overline{AB}$ (10 km na realidade).



3. Solução assinalada a verde: interseção da bissetriz do ângulo formado pelo Reptilário, Baía dos Golfinhos e Vale dos Tigres, com o conjunto de pontos da mediatriz do segmento definido pela Aldeia dos Macacos e pelo Lago das Focas e que estão mais próximos da Aldeia dos Macacos do que do Lago das Focas.



4. Por exemplo:



5. Tem-se $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{10 \times 5}{2} = 25$.

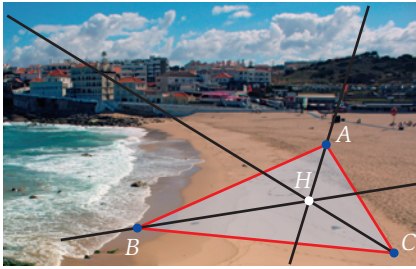
Designando por a a medida da altura do triângulo $[ABC]$ em relação ao lado $[AC]$,

tem-se $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times a}{2} = \frac{6a}{2} = 3a$.

Assim, $3a = 25 \Leftrightarrow a = \frac{25}{3}$.

PÁG. 9

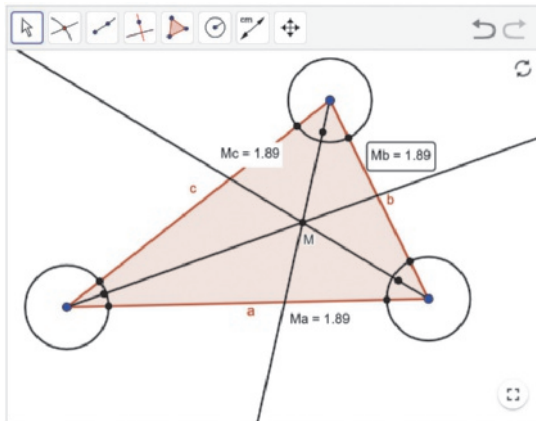
Tarefa 1



O ponto onde se deve localizar a torre do Afonso é a interseção das três bissetrizes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

Tarefa 2

1. a 4.



As três bissetrizes do triângulo interseçam-se no mesmo ponto e a distância desse ponto a cada um dos seus lados é sempre a mesma.

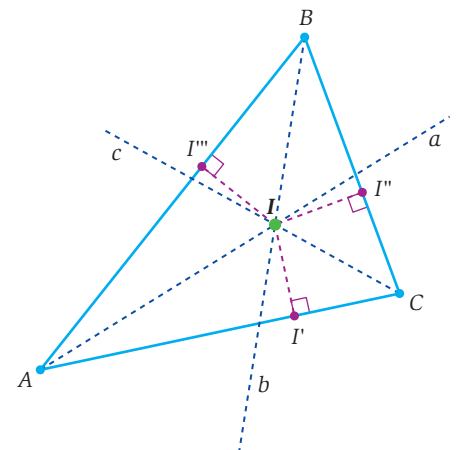
5. As distâncias do ponto de interseção das bissetrizes aos lados do triângulo são, de facto, iguais, dado que a circunferência centrada nesse ponto é tangente aos três lados, sendo que essa distância é a medida do raio da circunferência.

Não poderia ser de outra forma, dado que este ponto pertence simultaneamente às três bissetrizes dos ângulos internos do triângulo, pelo que tem de estar à mesma distância dos lados do triângulo.

6. Sejam $[ABC]$ um triângulo e a , b e c as bissetrizes dos seus ângulos, respetivamente, BAC , ABC e BCA . O ponto de interseção de a e b (que existe e é único, já que as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo não são paralelas nem coincidentes) está à mesma distância dos lados $[AB]$ e $[AC]$, por pertencer à bissetriz a , e à mesma distância dos lados $[AB]$ e $[BC]$, por pertencer a b .

Logo, o ponto de interseção de a e b está, também, à mesma distância dos lados $[AC]$ e $[BC]$, pelo que esse ponto de interseção também pertence à bissetriz c .

Conclui-se, portanto, que as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo têm um único ponto de interseção e ainda que esse ponto de interseção, o incentro, é equidistante dos lados do triângulo.



PÁG. 12
Tarefa 3

1.



O parque de merendas deve ser construído no ponto de interseção das três mediatrizes dos lados do triângulo cujos vértices são os pontos a encarnado. Dessa forma, o parque de merendas ficará fora do concelho de Resende, pelo que os planos do município não estão corretos.

2.

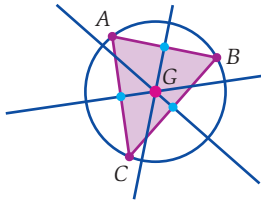


O parque de merendas deve ser construído no ponto de interseção das três mediatrizes dos lados do triângulo cujos vértices são os pontos assinalados nas freguesias de Resende, São Cipriano e Paus. Ao movimentar-se o vértice que representa a igreja matriz de Resende, por todo o território da freguesia, verifica-se que o ponto de interseção das três mediatrizes está sempre no território do concelho de Resende, pelo que é possível construir um parque de merendas nas condições pretendidas.

PÁG. 13

Tarefa 4

1. a 4.



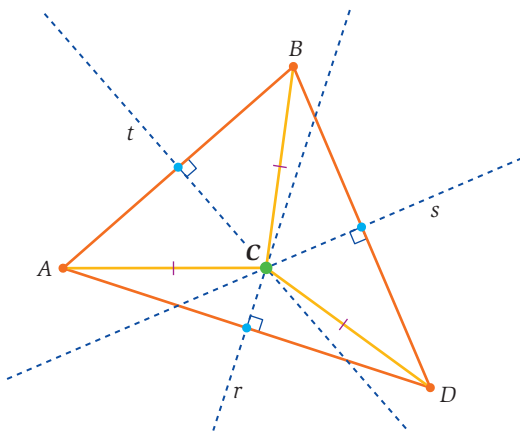
Observa-se que as três mediatrizes se interseçam no mesmo ponto. Verifica-se que o ponto de interseção está à mesma distância de cada um dos vértices do triângulo.

5. As distâncias do ponto de interseção das mediatrizes aos vértices do triângulo são, efetivamente, iguais, dado que os vértices pertencem todos a uma circunferência centrada nesse ponto de interseção. De facto, assim teria de ser visto que este ponto pertence a cada uma das três mediatrizes dos lados do triângulo, pelo que tem de estar à mesma distância dos três vértices.

6. Sejam $[ABD]$ um triângulo e t , s e r as mediatrizes dos lados $[AB]$, $[BD]$ e $[AD]$, respetivamente. O ponto de interseção de t e s (que existe e é único, já que as mediatrizes dos lados de um triângulo não são paralelas nem coincidentes, porque os lados do triângulo não são paralelos nem coincidentes) está à mesma distância dos vértices A e B , por pertencer a t , mediatriz de $[AB]$, e à mesma distância dos vértices B e D , por pertencer a s , mediatriz de $[BD]$.

Assim, o ponto de interseção de t e s está, também, à mesma distância dos vértices A e D , pelo que esse ponto de interseção também pertence a r , mediatriz de $[AD]$.

Conclui-se, portanto, que as mediatrizes dos lados do triângulo têm um único ponto de interseção e ainda que esse ponto de interseção (circuncentro) é equidistante dos vértices do triângulo.



PÁG. 16

Aplicar

2. (C)

Num triângulo equilátero as circunferências inscrita e circunscrita são concêntricas, pelo que o incentro e o circuncentro coincidem.

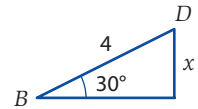
3.1 Incentro

3.2 A distância do ponto D ao lado $[AC]$ é igual à distância do ponto D ao lado $[AB]$.

Designemos por x essa distância.

Tem-se $\frac{x}{4} = \sin 30^\circ \Leftrightarrow x = 4 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$

3.3 $A = \pi \times 2^2 = 4\pi$



4.1 Circuncentro

4.2 Q é o circuncentro do triângulo $[ABC]$, pelo que é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo e, portanto, pertence a mediatriz do lado $[AC]$.

Como M é o ponto médio do lado $[AC]$, M também pertence à mediatriz do lado $[AC]$.

Logo, a reta QM é a mediatriz do lado $[AC]$, pelo que, como P pertence a QM (mediatriz de $[AC]$), conclui-se que $\overline{AP} = \overline{CP}$.

5. Seja $[ABC]$ um triângulo retângulo em que a bissetriz do seu ângulo reto interseja a sua hipotenusa no seu circuncentro.

5.1 Os comprimentos assinalados na figura são iguais porque são raios da circunferência circunscrita.

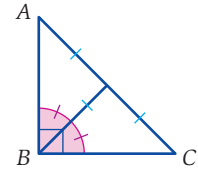
Os ângulos que se opõem aos lados iguais são iguais, logo o triângulo $[ABC]$ fica decomposto em dois triângulos isósceles e o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

Designando por c a medida dos catetos do triângulo $[ABC]$,

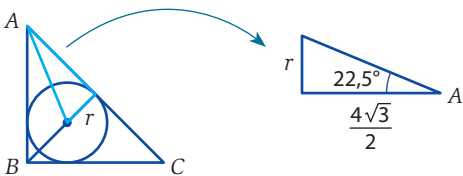
tem-se $\frac{c \times c}{2} = 12 \Leftrightarrow c^2 = 24 \Rightarrow c = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$.

A medida da hipotenusa do triângulo $[ABC]$ é $\sqrt{24 + 24} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$.

Assim, $P_{[ABC]} = 2 \times 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$.



5.2



$$\frac{r}{2\sqrt{3}} = \tan(22,5^\circ) \Leftrightarrow r = 2\sqrt{3} \tan(22,5^\circ) \Leftrightarrow r \approx 1,43$$

OU

Sendo r o raio da circunferência inscrita, a área do triângulo pode ser dada por:

$$2 \times \frac{2\sqrt{6} \times r}{2} + \frac{4\sqrt{3} \times r}{2}. \text{ Assim, tem-se } 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} \times r = 12 \Leftrightarrow r = \frac{12}{2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}.$$

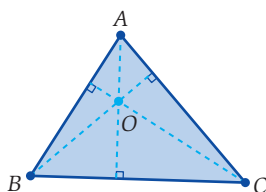
Concluindo $r \approx 1,43$.



PÁG. 17

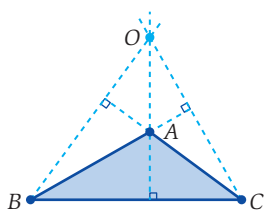
Tarefa 5

2.



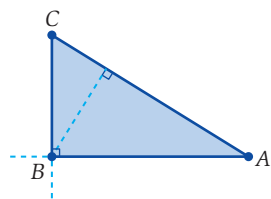
Se o triângulo for acutângulo, o ortocentro está no seu interior.

3.



Se o triângulo for obtusângulo, o ortocentro está no seu exterior.

4.



Se o triângulo for retângulo, o ortocentro é o vértice correspondente ao ângulo reto.

5. As alturas de um triângulo acutângulo estão sempre contidas no seu interior, pelo que a interseção entre essas alturas, o ortocentro, está sempre no interior de um triângulo acutângulo.

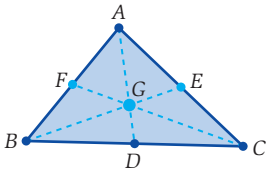
Pelo menos uma das alturas de um triângulo obtusângulo está sempre no seu exterior. Logo, a interseção das suas alturas, o ortocentro, está, necessariamente, no exterior de um triângulo obtusângulo.

Duas das alturas de um triângulo retângulo são os catetos desse triângulo. Assim, a interseção das duas alturas é o vértice correspondente ao ângulo reto.

PÁG. 18

Tarefa 6

1. a 3.

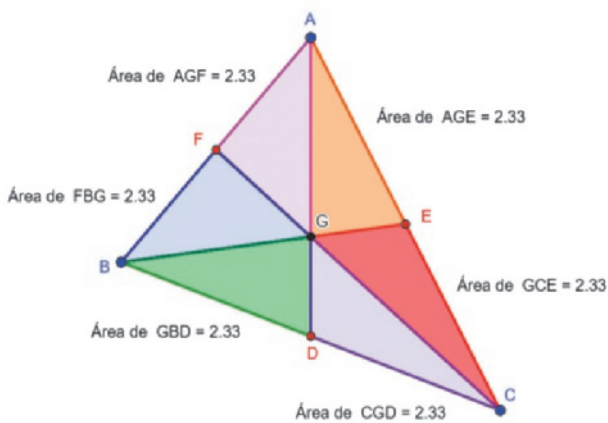
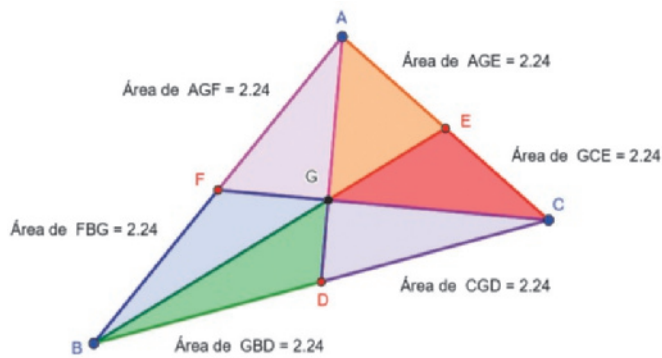
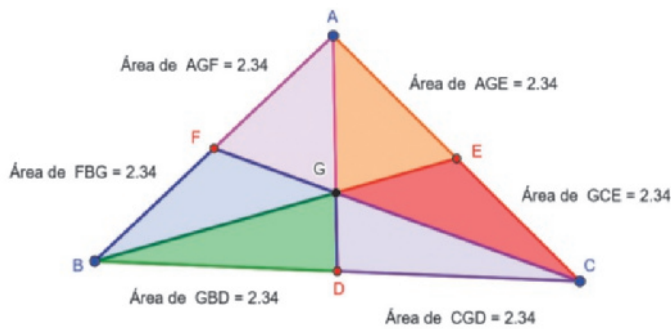


Cada par de medianas intersesta-se no mesmo ponto, pelo que as três medianas se intersestam no mesmo ponto. Movimentando os vértices do triângulo, as três medianas têm sempre apenas um ponto em comum, pelo que se conjectura que as três medianas de qualquer triângulo se intersestam sempre no mesmo ponto.

PÁG. 19

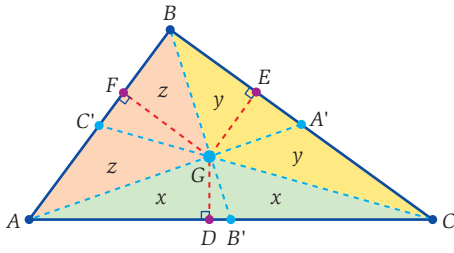
Tarefa 7

1. a 3.



A área de cada um dos seis triângulos é igual. Movimentando os vértices do triângulo, a área de cada um dos seis triângulos mantém-se igual, pelo que se conjectura que as três medianas de um triângulo o dividem em seis triângulos equivalentes, isto é, de igual área.

4. Sejam $[ABC]$ um triângulo e $[AA']$, $[BB']$ e $[CC']$ as suas três medianas.



Como $\overline{AB'} = \overline{CB'}$, dado que B' é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$, os triângulos $[AGB']$ e $[CGB']$ têm a mesma área, uma vez que a medida da altura de ambos é igual a \overline{GD} .

Designemos por x a medida da área dos triângulos $[AGB']$ e $[CGB']$.

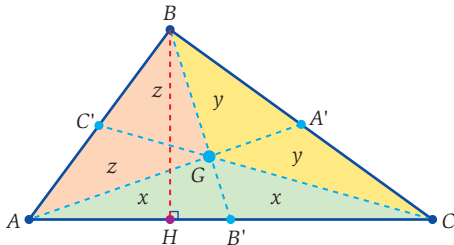
Como $\overline{CA'} = \overline{BA'}$, dado que A' é o ponto médio do segmento de reta $[BC]$, os triângulos $[CGA']$ e $[BGA']$ têm a mesma área, uma vez que a medida da altura de ambos é igual a \overline{GE} .

Designemos por y a medida da área dos triângulos $[CGA']$ e $[BGA']$.

Como $\overline{AC'} = \overline{BC'}$, dado que C' é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, os triângulos $[AGC']$ e $[BGC']$ têm a mesma área, uma vez que a medida da altura de ambos é igual a \overline{GF} .

Designemos por z a medida da área dos triângulos $[AGC']$ e $[BGC']$.

A medida da área dos triângulos $[ABB']$ e $[BCB']$ também é igual, dado que têm a mesma altura, cuja medida é \overline{BH} , e $\overline{AB'} = \overline{CB'}$, como já vimos.



Temos, ainda

$$A_{[ABB']} = A_{[AGB']} + A_{[AGC']} + A_{[BGC']} = x + z + z = x + 2z \quad \text{e} \quad A_{[BCB']} = A_{[CGB']} + A_{[CGA']} + A_{[BGA']} = x + y + y = x + 2y .$$

$$\text{Logo, } A_{[ABB']} = A_{[BCB']} \Leftrightarrow x + 2z = x + 2y \Leftrightarrow 2z = 2y \Leftrightarrow z = y .$$

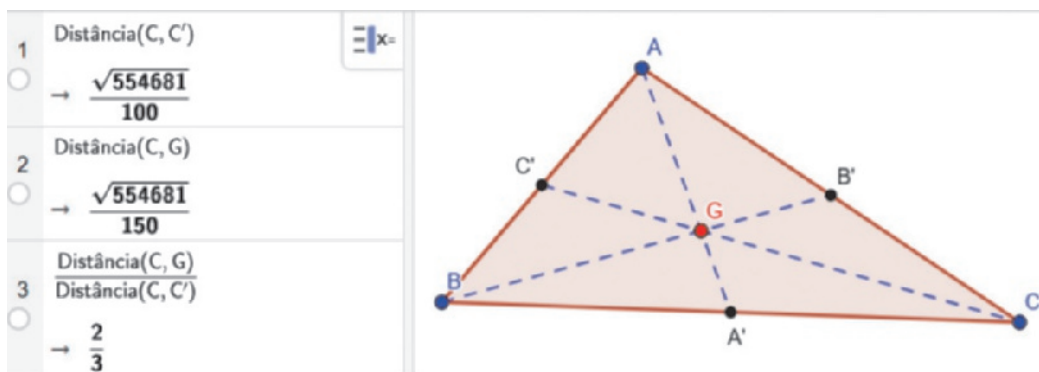
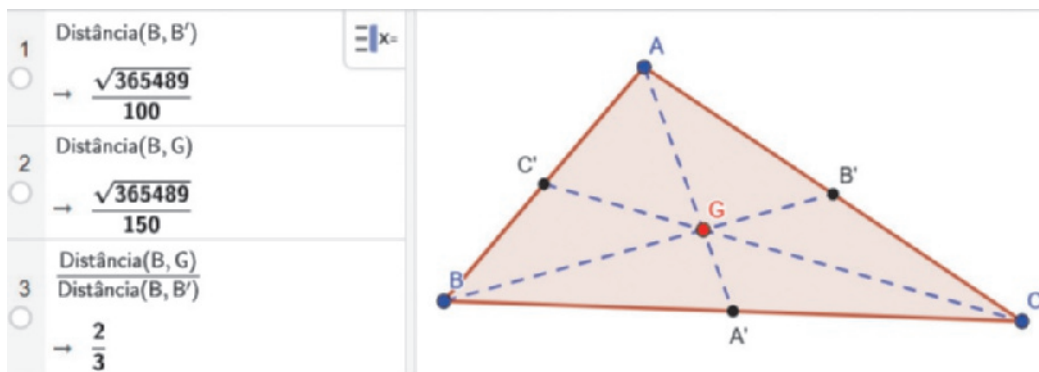
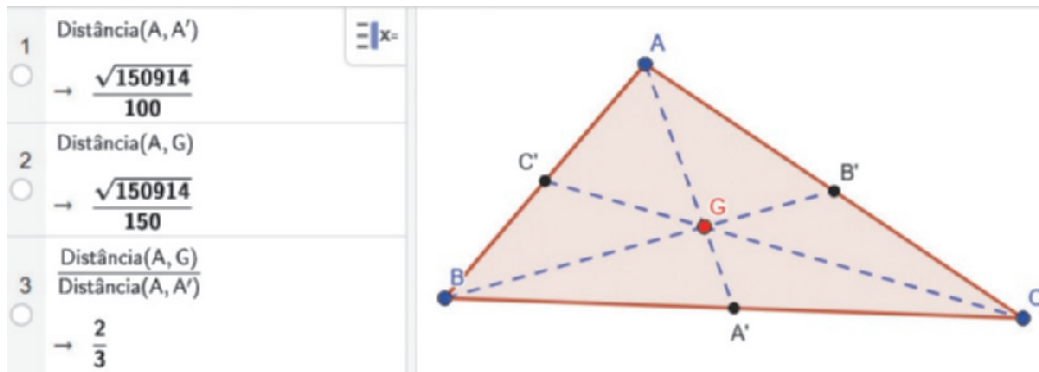
Analogamente se prova que as áreas dos triângulos $[ACA']$ e $[ABA']$ são iguais, pelo que, como $A_{[ACA']} = 2x + y$ e $A_{[ABA']} = 2z + y$, obtém-se $A_{[ACA']} = A_{[ABA']} \Leftrightarrow 2x + y = 2z + y \Leftrightarrow 2x = 2z \Leftrightarrow x = z$.

Portanto, $x = z = y$, ou seja, a área de cada um dos seis triângulos é igual.

PÁG. 20

Tarefa 8

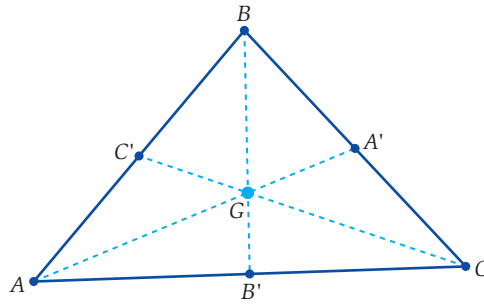
1. a 3.



O quociente entre a distância do baricentro ao vértice do triângulo correspondente a essa mediana e o comprimento da mediana é $\frac{2}{3}$.

Movimentando os vértices do triângulo a relação mantém-se, pelo que se conjectura que a distância entre o baricentro de um triângulo e qualquer um dos seus vértices é $\frac{2}{3}$ da medida do comprimento da mediana correspondente.

4. Sejam $[ABC]$ um triângulo e $[AA']$, $[BB']$ e $[CC']$ as suas três medianas.

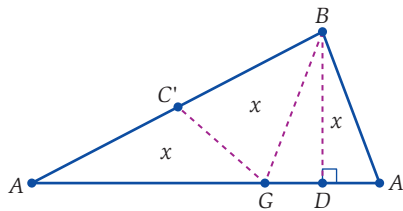


Como mostramos na Tarefa 7, as três medianas de um triângulo dividem-no em seis triângulos de igual área.

Consideremos o triângulo $[ABA']$, que está dividido em três triângulos de igual área, $[AGC']$, $[BGC']$ e $[BGA']$.

Designemos por x a medida da área destes três triângulos.

Vamos mostrar que $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AA'}$.



Os triângulos $[AGB]$ e $[BGA']$ têm a mesma altura, cuja medida é \overline{BD} .

As suas áreas são dadas, respetivamente, por $\frac{\overline{AG} \times \overline{BD}}{2}$ e $\frac{\overline{GA'} \times \overline{BD}}{2}$.

Mas $A_{[AGB]} = A_{[AGC']} + A_{[BGC']} = x + x = 2x$ e $A_{[BGA']} = x$,

peço que $A_{[AGB]} = 2A_{[BGA']} \Leftrightarrow \frac{\overline{AG} \times \overline{BD}}{2} = 2 \frac{\overline{GA'} \times \overline{BD}}{2} \Leftrightarrow \overline{AG} = 2\overline{GA'}$.

De $\overline{AA'} = \overline{AG} + \overline{GA'} = 2\overline{GA'} + \overline{GA'} = 3\overline{GA'}$, obtém-se $\frac{\overline{AG}}{\overline{AA'}} = \frac{2\overline{GA'}}{3\overline{GA'}} = \frac{2}{3}$, ou seja, $\frac{\overline{AG}}{\overline{AA'}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AA'}$.

Analogamente se mostra que $\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BB'}$ e $\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CC'}$.

PÁG. 23

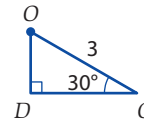
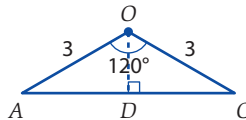
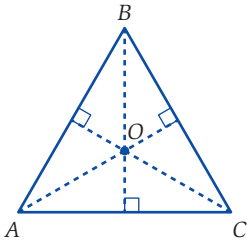
Aplicar

7.1. (B)

O ponto G é ponto de interseção das três medianas do triângulo, pelo que é o seu baricentro.

7.2 $A_{[ACBG]} = \frac{2}{3} A_{[ABC]} \Leftrightarrow A_{[ABC]} = \frac{3}{2} \times 10 \Leftrightarrow A_{[ABC]} = 15$

8.



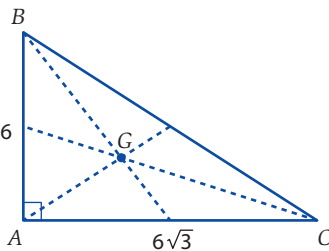
Designando por $x = \overline{CD}$, tem-se $\frac{x}{3} = \cos 30^\circ \Leftrightarrow x = 3 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, $\overline{AC} = 2x = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ e $P = 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

9. O Sr. João poderá dividir o terreno usando as três medianas do triângulo. Dessa forma, os seis triângulos definidos por essas três medianas são equivalentes, ou seja, têm a mesma área.

O ponto onde poderá fazer o furo é no baricentro do triângulo, uma vez que o baricentro é um dos vértices dos seis triângulos e, dessa forma, todos os netos teriam acesso ao furo pelo seu terreno.

10. Consideremos um triângulo retângulo $[ABC]$.



O ortocentro do triângulo coincide com o vértice A . Pretende-se determinar \overline{AG} .

Comecemos por determinar a medida da hipotenusa do triângulo.

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 144 \Rightarrow \overline{BC} = 12$$

Designando por D o ponto médio da hipotenusa, o triângulo $[ABD]$ é isósceles, com $\overline{AB} = \overline{BD} = 6$.

Tem-se $\tan \hat{ABC} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{ABC} = 60^\circ$.

Como, num triângulo, a lados iguais correspondem ângulos iguais, tem-se $\hat{DAB} = \hat{ADB}$ e como $\hat{ABC} = 60^\circ$, conclui-se que o triângulo $[ABD]$ é equilátero.

O comprimento que se pretende determinar é $\frac{2}{3}$ do comprimento da mediana correspondente.

Logo, $\overline{AG} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$.



11.1 O ângulo ACB é comum e $\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = 2$ (D e E são pontos médios dos lados a que pertencem).

Assim, pelo critério LAL, os triângulos $[ABC]$ e $[DEC]$ são semelhantes, pelo que CDE e CAB são ângulos de lados paralelos, concluindo-se que as retas AB e DE são paralelas.

11.2 Os triângulos $[DEG]$ e $[ABG]$ são semelhantes porque têm dois ângulos iguais: os ângulos DGE e AGB são iguais por serem verticalmente opostos; GDE e GBA são iguais por serem alternos-internos.

A razão que transforma $[DEG]$ em $[ABG]$ é 2, pois $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = 2$.

11.3 A razão de semelhança que transforma $[DEG]$ em $[ABG]$ é 2, pelo que:

$$\bullet \frac{\overline{AG}}{\overline{GE}} = 2 \Leftrightarrow \overline{AG} = 2\overline{GE} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AE}$$

$$\bullet \frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = 2 \Leftrightarrow \overline{BG} = 2\overline{GD} \Leftrightarrow \overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BD}$$

Da mesma forma se provava que, sendo F o ponto médio do lado $[AB]$ se tem $\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CF}$, ficando assim demonstrada a propriedade 2 da pág. 10.

PÁG. 24**Aplicar****12.1** Baricentro

Como o triângulo é isósceles, o ponto D é o ponto médio de $[AB]$. Assim, $[CD]$ e $[AE]$ são medianas do triângulo. Sendo G o ponto de interseção de duas das medianas do triângulo, é o seu baricentro.

$$\mathbf{12.2} \quad A_{[ACE]} = \frac{1}{2} A_{[ABC]} \Leftrightarrow A_{[ABC]} = 2 \times 8 \Leftrightarrow A_{[ABC]} = 16 \quad \text{e} \quad A_{[CGE]} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\mathbf{12.3} \quad A_{[ABC]} = 16 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = 16 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \times 2\overline{AB}}{2} = 16 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 16 \Rightarrow \overline{AB} = 4$$

$$\overline{AB} = 4 \Rightarrow \overline{CD} = 8$$

$$\overline{GD} = \frac{1}{3} \overline{CD} = \frac{8}{3}$$

$$\overline{AG}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{GD}^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = \frac{100}{9} \Rightarrow \overline{AG} = \frac{10}{3}$$

$$\overline{GE} = \frac{1}{2} \overline{AG} = \frac{1}{2} \times \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$$

12.4 (C)

$$\mathbf{13.1} \quad \text{Tem-se } A_{[CDH]} = A_{[EBH]} \quad \text{e} \quad A_{[EBG]} = \frac{1}{2} A_{[EBH]} .$$

Como I é o baricentro do triângulo $[EBH]$, $A_{[BFIG]} = \frac{2}{6} A_{[EBH]} \Leftrightarrow A_{[EBH]} = 3A_{[BFIG]}$.

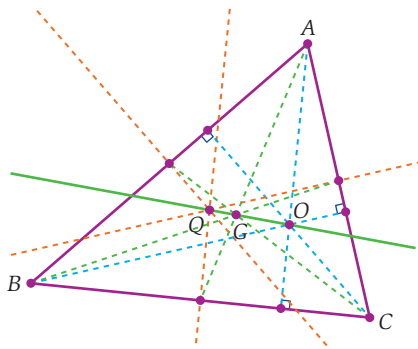
Logo, $A_{[CDH]} = 3A_{[BFIG]}$.

$$\mathbf{13.2} \quad \text{Sabendo que } A_{[BFIG]} = \frac{3}{2} \quad \text{e que } A_{[CDH]} = 3A_{[BFIG]}, \quad \text{conclui-se que } A_{[CDH]} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2} .$$

Por outro lado, como $A_{[CDH]} = \frac{1}{6} A_{[ABC]}$, conclui-se que $A_{[ABC]} = 6 \times A_{[CDH]} = 6 \times \frac{9}{2} = 27$.

PÁG. 25
Tarefa 10

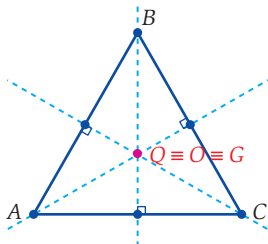
1. a 5.



As duas retas coincidem.

6. Movimentando os vértices do triângulo, as duas retas são sempre coincidentes, o que quer dizer que o circuncentro, o ortocentro e o baricentro de um triângulo são colineares. Portanto, podemos conjecturar que o circuncentro, o ortocentro e o baricentro de um triângulo são colineares e que os três definem uma única reta.

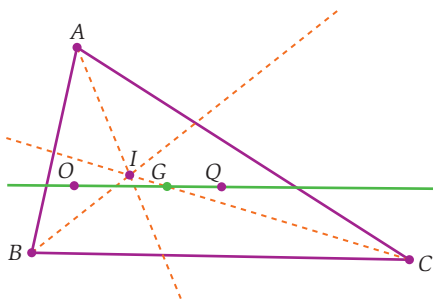
7.



Se o triângulo for equilátero, o circuncentro, o ortocentro e o baricentro coincidem.

PÁG. 26
Tarefa 11

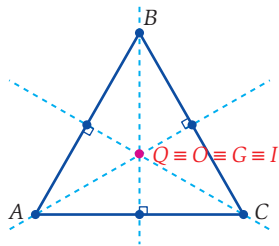
1.



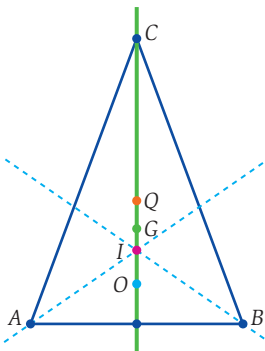
Na figura estão representados um triângulo e a sua reta de Euler (não estão as linhas auxiliares que permitiram determinar o circuncentro Q , o baricentro G e o ortocentro O).

Com esta construção podemos afirmar que o incentro I não pertence à reta de Euler.

2.



Se o triângulo for equilátero, os quatro pontos notáveis do triângulo, incentro, circuncentro, ortocentro e baricentro, coincidem.

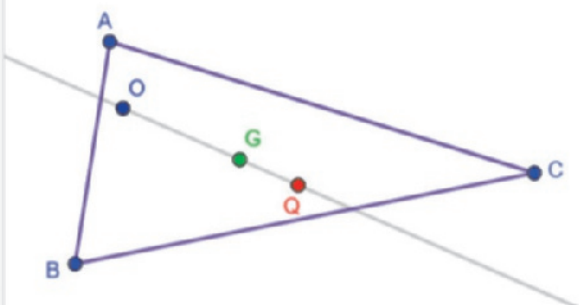


Num triângulo isósceles, o incentro pertence à reta de Euler.

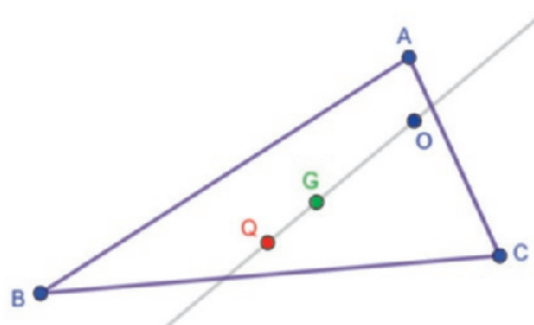
Tarefa 12

1. a 3.

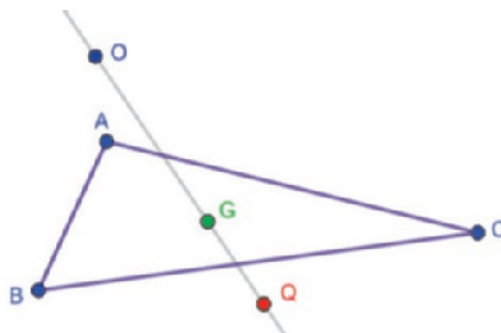
1	Distância(O, G)
<input type="radio"/>	≈ 1.91
2	Distância(G, Q)
<input type="radio"/>	≈ 0.96
3	$\frac{\text{Distância(O, G)}}{\text{Distância(G, Q)}}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow 2$
4	



1	Distância(O, G)
<input type="radio"/>	≈ 1.9
2	Distância(G, Q)
<input type="radio"/>	≈ 0.95
3	$\frac{\text{Distância(O, G)}}{\text{Distância(G, Q)}}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow 2$
4	



1	Distância(O, G)
<input type="radio"/>	≈ 2.98
2	Distância(G, Q)
<input type="radio"/>	≈ 1.49
3	$\frac{\text{Distância(O, G)}}{\text{Distância(G, Q)}}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow 2$
4	

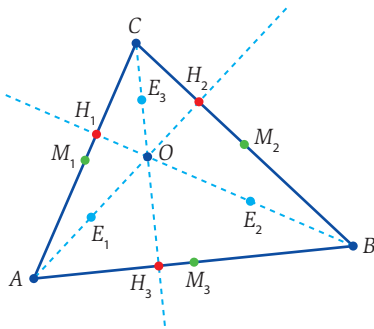


A distância entre o ortocentro e o baricentro é o dobro da distância entre o baricentro e o circuncentro.

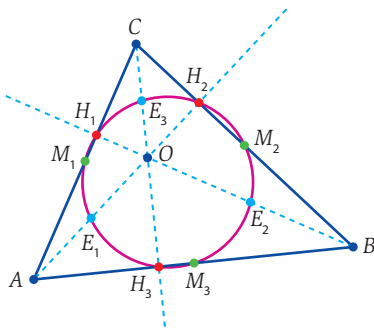
4. Movimentando os vértices do triângulo verifica-se que a relação se mantém, ou seja, a distância entre o ortocentro e o baricentro é sempre o dobro da distância entre o baricentro e o circuncentro.

PÁG. 27
Tarefa 13

1. a 5.

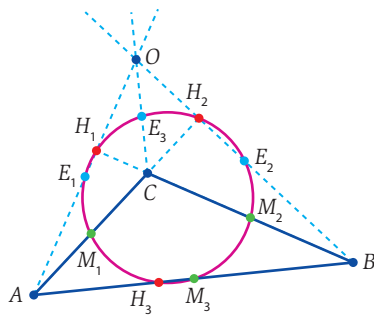


6.



Verifica-se que existe uma circunferência que contém os nove pontos assinalados.

7.



Conjetura-se que existe uma circunferência que contém os nove pontos assinalados, independentemente do triângulo.

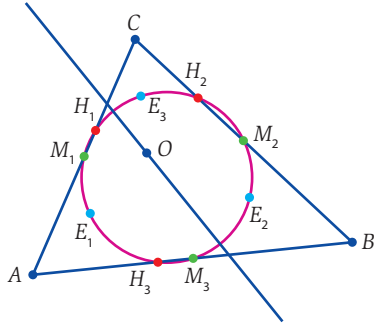


PÁG. 28

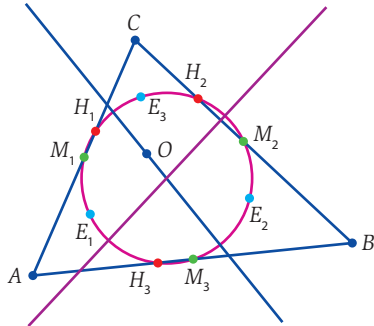
Tarefa 14

1. O centro da circunferência pertence à mediatriz de $[H_1E_3]$, dado que H_1 e E_3 são pontos da circunferência dos nove pontos e, portanto, estão ambos à mesma distância do centro.

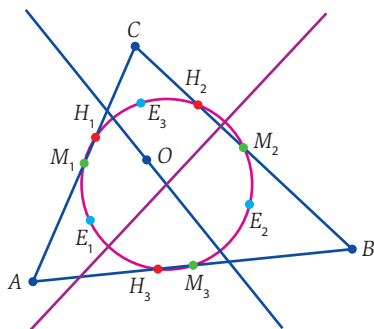
Essa distância é a medida do raio.



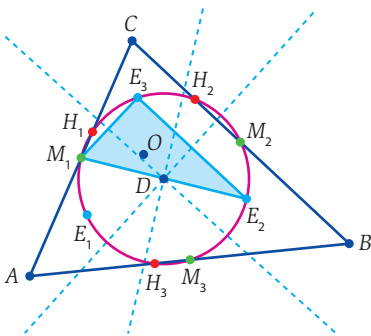
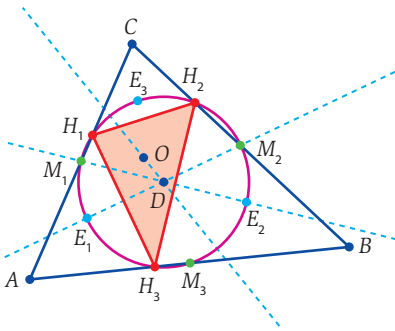
2. Pela mesma razão do item 1., o centro da circunferência pertence à mediatriz de $[H_2M_2]$.



3. Como o centro da circunferência pertence às mediatrizes de $[H_1E_3]$ e de $[H_2M_2]$, o centro é o ponto de interseção das duas mediatrizes.



4. Escolhendo o triângulo de vértices H_1 , H_2 e H_3 verifica-se que o seu circuncentro é o centro da circunferência dos nove pontos. O mesmo ocorre se escolhermos o triângulo de vértices M_1 , E_2 e E_3 .



5. Movimentando vértices de $[ABC]$ verificamos que o centro da circunferência é sempre o circuncentro dos triângulos $[H_1H_2H_3]$ e $[M_1E_2E_3]$.

Conjetura-se que o centro da circunferência dos nove pontos e o circuncentro de qualquer triângulo cujos vértices sejam três dos nove pontos.

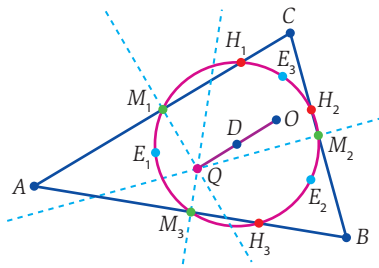
6. Como o nome indica, a circunferência dos nove pontos contém os nove pontos que já identificamos até aqui. Assim, esta circunferência é circunscrita a qualquer triângulo cujos vértices sejam três desses nove pontos.

Portanto, o seu centro é o circuncentro de qualquer triângulo cujos vértices sejam três dos nove pontos.

PÁG. 29

Tarefa 15

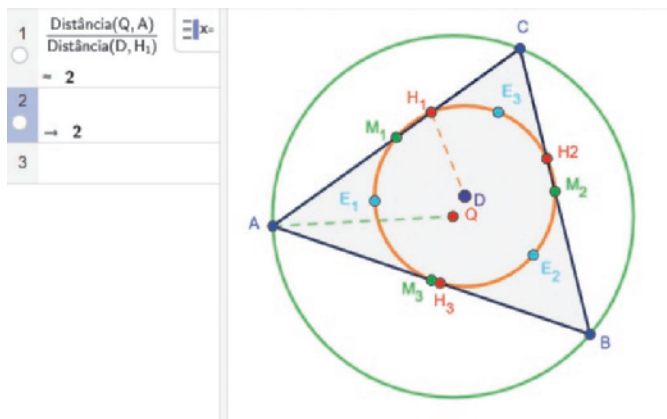
1.1 e 1.2



O ponto médio do segmento de reta $[QO]$ é o centro da circunferência dos nove pontos.

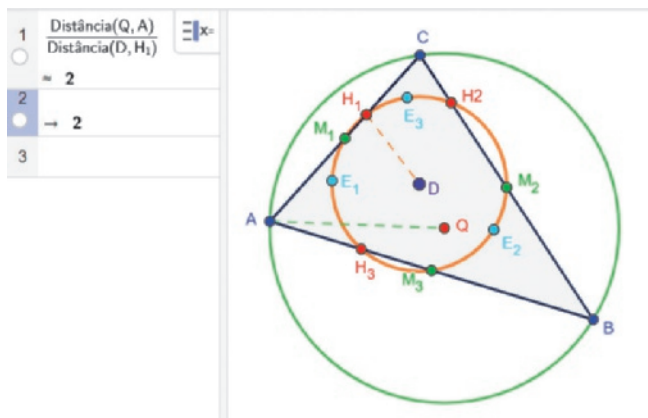
1.3 Movimentando os vértices do triângulo, verifica-se que o ponto médio do segmento de reta $[QO]$ é o centro da circunferência dos nove pontos, pelo que se pode conjecturar que o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são o circuncentro e o ortocentro de um triângulo é o centro da respectiva circunferência dos nove pontos.

2.1 a 2.3



A medida do raio da circunferência circunscrita é o dobro da medida do raio da circunferência dos nove pontos.

2.4



Movimentando os vértices do triângulo, verifica-se que a relação se mantém, pelo que se pode conjecturar que a medida do raio da circunferência circunscrita a um triângulo é o dobro da medida do raio da circunferência dos nove pontos.

PÁG. 32

Aplicar

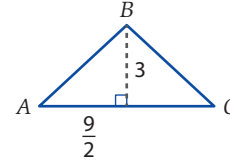
17.1 Seja $[ABC]$ um triângulo. Como o incentro pertence à reta de Euler, o triângulo é isósceles.

$$A_{[ABC]} = \frac{27}{2} \Leftrightarrow \frac{9 \times \text{altura}}{2} = \frac{27}{2} \Leftrightarrow \text{altura} = 3$$

Considerando metade do triângulo $[ABC]$,

$$\text{tem-se } \overline{AB}^2 = 3^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{117}{4} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Logo, } P_{[ABC]} = 9 + 2 \times \frac{3\sqrt{13}}{2} = 9 + 3\sqrt{13}$$

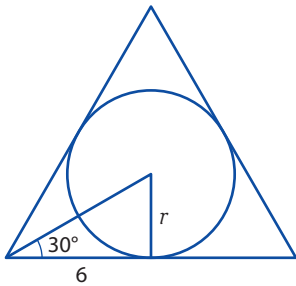


17.2 Estão no exterior do triângulo, pois o triângulo é obtusângulo, já que os lados iguais do triângulo são menores do que o lado diferente.

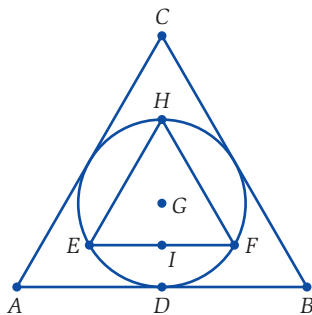
18. (A)

O baricentro tem de pertencer ao interior do triângulo e à reta de Euler, pelo que tem de ser o ponto S .

19.1 Se o triângulo é equilátero, o centro da circunferência dos nove pontos coincide com o incentro do triângulo, pelo que esta é a circunferência inscrita no triângulo.

19.2

$$\frac{r}{6} = \tan 30^\circ \Leftrightarrow r = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow r = 2\sqrt{3} \text{ e } P = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\pi$$

19.3

Os triângulos $[ABC]$ e $[EFH]$ são semelhantes.

$$\overline{CD} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ e } A_{[ABC]} = \frac{12 \times 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$$

$$\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CD} = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\overline{CH} = \frac{1}{2}\overline{CG} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ e } \overline{GI} = \frac{1}{2}\overline{HG} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Assim, $\overline{HI} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

A razão de semelhança entre os triângulos é $\frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 2$ e a razão entre as áreas é $2^2 = 4$.

Logo, $A_{[EFH]} = \frac{A_{[ABC]}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

OU

A circunferência circunscrita ao triângulo cujos vértices são os pontos de Euler, $[EFH]$ é a circunferência dos nove pontos do triângulo equilátero $[ABC]$.

Por outro lado, a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ é o dobro da medida do raio da respectiva circunferência dos nove pontos.

Os triângulos $[ABC]$ e $[EFH]$ são semelhantes.

Conclui-se, portanto, que a razão de semelhança entre os triângulos é 2.

Logo, o lado do triângulo $[EFH]$ mede 6 unidades.

Tem-se:

$$\overline{EH}^2 = \overline{EI}^2 + \overline{HI}^2 \Leftrightarrow 6^2 = 3^2 + \overline{HI}^2 \Leftrightarrow \overline{HI}^2 = 27 ; \text{ logo, } \overline{HI} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} .$$

$$A_{[EFH]} = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

20.1 O centro da circunferência dos nove pontos, o ponto D , é o circuncentro de qualquer triângulo cujos vértices são três dos nove pontos.

Logo, D é o circuncentro do triângulo $[E_3M_3H_3]$, pelo que, como D está no seu exterior, $[E_3M_3H_3]$ é obtusângulo.

20.2 Os pontos O , C e H_3 são colineares (H_3 é a projeção ortogonal do vértice C no lado $[AB]$ e O é o ortocentro).

Como $\overline{OC} = \overline{CH_3}$, a altura do triângulo $[ABO]$ é o dobro da altura do triângulo $[ABC]$, e como a base de ambos é $[AB]$, conclui-se que a área de $[ABO]$ é o dobro da área de $[ABC]$.

PÁG. 33**Aplicar +****1. (B)**

A posição equidistante dos três locais corresponde à interseção das mediatrizes dos lados do triângulo definido por esses locais, ou seja, corresponde ao seu circuncentro.

2.1 (D)

A circunferência inscrita num triângulo tem como centro o seu incentro.

$$2.2 \quad A_{[AFEG]} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \overline{AF}^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{4}$$

$$A = \pi \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \pi \text{ cm}^2$$

3. (C)

(Definição de baricentro)

4. (A)

Os pontos notáveis de um triângulo que pertencem sempre à sua reta de Euler são o ortocentro, o circuncentro e o baricentro.

5. Como a área do círculo limitado pela circunferência dos nove pontos é 2π , conclui-se que o raio dessa circunferência é $\sqrt{2}$.

Como a medida do raio da circunferência circunscrita é o dobro da medida do raio da circunferência dos nove pontos, conclui-se que o raio da circunferência circunscrita é $2\sqrt{2}$ e o comprimento dessa circunferência é $2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$.

PÁG. 34**Aplicar +**

$$6.1 \quad A_{[AGC]} = \frac{2}{6} \times 28 = \frac{28}{3} \text{ cm}^2$$

6.2 Designemos por H a projeção ortogonal do ponto G sobre a reta AC .

$$A_{[AGC]} = \frac{28}{3} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC} \times \overline{GH}}{2} = \frac{28}{3} \Leftrightarrow 10 \times \overline{GH} = 2 \times \frac{28}{3} \Leftrightarrow \overline{GH} = \frac{2 \times 28}{10 \times 3} \Leftrightarrow \overline{GH} = \frac{28}{15} \text{ cm}$$

7.1 $A \rightarrow$ ortocentro, $B \rightarrow$ incentro, $C \rightarrow$ baricentro, $D \rightarrow$ circuncentro

O ponto A é o ortocentro, pois é a interseção das alturas do triângulo.

O ponto B é o incentro, pois é o único dos quatro pontos notáveis que não pertence à reta de Euler.

O ponto C é o baricentro, pois é a interseção das medianas do triângulo.

O ponto D é o circuncentro, pois é a interseção das mediatrizes do triângulo.

7.2 a. $A_{[PQR]} = 6 \times 11 = 66$

b. $A_{[CFH]} = \frac{1}{4} A_{[CFQ]} \Leftrightarrow A_{[CFH]} = \frac{1}{4} \times 11 \Leftrightarrow A_{[CFH]} = \frac{11}{4}$

PÁG. 35

Aplicar +

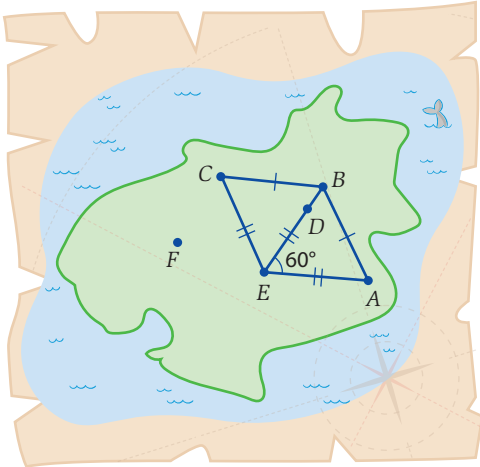
8.1 *D*

(Dos pontos marcados, apenas o ponto *D* está no interior do triângulo e o baricentro tem esta propriedade.)

8.2 *E*

(Dos pontos marcados, apenas o ponto *E* pode ser o que é equidistante de *A*, *B* e *C*.)

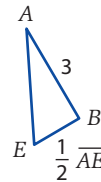
8.3 a. O triângulo $[ABE]$ é equilátero, pelo que os seus quatro pontos notáveis são coincidentes.



O triângulo $[ABE]$ é isósceles e $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$.

Assim, $\widehat{EAB} + \widehat{EBA} + \widehat{BEA} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{EAB} + \widehat{EBA} = 120^\circ$.

Logo, $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} = 60^\circ$ e o triângulo $[ABE]$ é equilátero.



b.

Utilizando um raciocínio ao da alínea **a.**, conclui-se que o triângulo $[BCE]$ é equilátero.

Como $\overline{AC} = 6$, a altura do triângulo $[EAB]$ relativa ao lado $[EB]$ mede 3.

$$\overline{AE}^2 = \left(\frac{1}{2}\overline{AE}\right)^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AE}^2 - \frac{1}{4}\overline{AE}^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\overline{AE}^2 = 9 \Leftrightarrow \overline{AE}^2 = 12 \Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

A distância de cada forasteiro ao tesouro é igual a \overline{AE} , ou seja, $2\sqrt{3}$ km.

9.1 Verdadeiro. O ponto médio do segmento de reta cujos extremos são o circuncentro e o ortocentro do triângulo $[ABC]$ é o centro da circunferência dos nove pontos de $[ABC]$.

Como essa circunferência contém os pontos médios dos lados de $[ABC]$, *D*, *E* e *F*, então essa circunferência é a circunferência circunscrita ao triângulo $[DEF]$, pelo que o referido ponto médio é o circuncentro de $[DEF]$.

9.2 \overline{AQ} é a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo. O raio da circunferência dos nove pontos do triângulo é igual a 4 km, pois é metade da medida do raio da respectiva circunferência circunscrita.

Assim, tem-se:

$$A = \pi \times 4^2 = 16\pi \text{ km}^2$$

10. Verdadeiro. Como o triângulo é isósceles, os seus quatro pontos notáveis pertencem à reta que é perpendicular ao lado $[AB]$ (é o lado com medida diferente dos restantes dois) e contém o seu ponto médio. Portanto, esta reta contém a altura do triângulo em relação ao lado $[AB]$.

Por outro lado, esta reta contém também o circuncentro, o ortocentro e o baricentro do triângulo, pelo que é a reta de Euler. Logo, neste triângulo, a reta de Euler contém a altura em relação ao lado $[AB]$.



PÁG. 36**Aplicar +**

11.1 Não, porque, para que o circuncentro e o incentro coincidam, o triângulo teria de ser equilátero, e não o é.

$$\mathbf{11.2} \quad A_{\text{circ}} = 781,3 \Leftrightarrow \pi r^2 = 781,3 \Leftrightarrow r^2 = \frac{781,3}{\pi} \Rightarrow r \approx 15,77$$

$$A_{\text{parque}} = \frac{50r}{2} + \frac{60r}{2} + \frac{80r}{2} \approx \frac{(50 + 60 + 80)15,77}{2} \approx 1498 \text{ m}^2$$



PÁG. 37**Aplicar +**

12.1 Como $[ABC]$ é equilátero, D , E e F são simultaneamente os pontos médios dos lados do triângulo e as projeções ortogonais dos vértices na respectiva reta suporte do lado oposto.

O ortocentro é o ponto G (os quatro pontos notáveis coincidem) e P , Q e R são os pontos médios dos segmentos de reta $[AG]$, $[BG]$ e $[CG]$, respectivamente.

Logo, a circunferência da figura é a circunferência dos nove pontos do triângulo $[ABC]$.

12.2 $\frac{\overline{AB}}{PQ} = \frac{\overline{BC}}{QR} = \frac{\overline{AC}}{PR} = 2$, pelo que os triângulos $[ABC]$ e $[PQR]$ são semelhantes.

Logo, como $[ABC]$ é equilátero, $[PQR]$ também é equilátero.

12.3 Tem-se $\text{base}_{[DBQ]} = \frac{1}{2} \text{base}_{[ABC]}$ e $\text{altura}_{[DBQ]} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \text{altura}_{[ABC]} = \frac{1}{6} \text{altura}_{[ABC]}$.

$$\text{Assim, } A_{[DBQ]} = \frac{\frac{1}{2} \text{base}_{[ABC]} \times \frac{1}{6} \text{altura}_{[ABC]}}{2} = \frac{1}{12} \frac{\text{base}_{[ABC]} \times \text{altura}_{[ABC]}}{2} = \frac{1}{12} A_{[ABC]}$$

Por outro lado, $A_{[ACE]} = \frac{1}{2} A_{[ABC]} \Leftrightarrow A_{[ABC]} = 2A_{[ACE]}$.

Logo, $A_{[DBQ]} = 2 \times \frac{1}{12} A_{[ACE]} = \frac{1}{6} A_{[ACE]}$ e, portanto, a razão entre as áreas dos triângulos $[DBQ]$ e $[ACE]$ é $\frac{1}{6}$.

OU

Como Q é o ponto médio de $[BG]$, $A_{[DBQ]} = \frac{1}{2} A_{[BDG]}$.

Por outro lado, $A_{[CGE]} = A_{[BDG]}$ e $A_{[ACE]} = 3A_{[CGE]} = 3A_{[BDG]}$.

$$\text{Logo, } \frac{A_{[DBQ]}}{A_{[ACE]}} = \frac{1}{2} \times \frac{A_{[BDG]}}{3A_{[BDG]}} = \frac{1}{6}.$$

Portanto, a razão entre as áreas dos triângulos $[DBQ]$ e $[ACE]$ é $\frac{1}{6}$.

12.4 a. A área da região compreendida entre os triângulos $[ABC]$ e $[PQR]$ é dada pela diferença entre as áreas destes dois triângulos.

A altura do triângulo $[ABC]$ é $\sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$

e a área deste triângulo é $\frac{16 \times 8\sqrt{3}}{2} = 64\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Como os triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é 2, a razão entre as áreas é 4 e a área do triângulo $[PQR]$ é $\frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Logo, a área da região compreendida entre os triângulos é $64\sqrt{3} - 16\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

b. A área da região compreendida entre a circunferência e o triângulo $[PQR]$ é

$$\pi \times \left(\frac{1}{3} \times 8\sqrt{3}\right)^2 - 16\sqrt{3} = \left(\frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$$

13.1 Incentro

(Centro da circunferência inscrita.)

13.2 Como C é o circuncentro do triângulo $[ABD]$ e pertence ao segmento de reta $[AD]$, o triângulo $[ABD]$ é retângulo em B (o ângulo ABD está inscrito numa semicircunferência), pelo que o ponto B é o ortocentro do triângulo.

13.3 C é o ponto médio de $[AD]$, pelo que $[BC]$ é uma mediana do triângulo $[ABD]$.

Logo, o baricentro deste triângulo pertence à reta BC .

Sabendo que o perímetro da circunferência circunscrita centrada no ponto C e que passa em A e em D , é 5π , vem $P = 5\pi \Leftrightarrow 2\pi r = 5\pi \Leftrightarrow r = \frac{5}{2}$

Assim, $\overline{AD} = 5$ e $\overline{BD} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Logo, $A_{[BCD]} = \frac{1}{2}A_{[ABD]} = \frac{1}{2} \times \frac{3 \times 4}{2} = 3$.

13.4 Verdadeiro, pois a circunferência da figura é a circunferência circunscrita nos três triângulos.

13.5 Consideremos o triângulo $[ABD]$ decomposto em três triângulos cujas bases são os lados do triângulo e cuja altura é igual ao raio da circunferência inscrita.

Então, sendo a área do triângulo $[ABD]$, tem-se:

$$\frac{3 \times \text{raio}}{2} + \frac{4 \times \text{raio}}{2} + \frac{5 \times \text{raio}}{2} = 6 \Leftrightarrow 12 \times \text{raio} = 12 \Leftrightarrow \text{raio} = 1$$

13.6 Como o triângulo é retângulo, o ponto B é, por exemplo, a projeção ortogonal do vértice A na reta suporte do lado $[BD]$, pelo que pertence à circunferência dos nove pontos do triângulo $[ABD]$.

O ponto C é o ponto médio do lado $[AD]$, pelo que também pertence à circunferência dos nove pontos do triângulo $[ABD]$.

PÁG. 41**Autoavaliação****1. (B)**

(Definição de incentro.)

2. (C)

O baricentro e o incentro de um triângulo têm de estar obrigatoriamente no seu interior; já os outros dois pontos notáveis podem estar no seu exterior.

3. (A)

$$\overline{BD} = 10 \Rightarrow \overline{AD} = 10, \quad \overline{CD} = 12 \Rightarrow \overline{DG} = \frac{1}{3} \times 12 = 4, \quad \overline{GE} = 6 \Rightarrow \overline{AG} = 2 \times 6 = 12$$

$$P_{[ADG]} = 10 + 4 + 12 = 26$$

4. (A)

Como a distância do ortocentro ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro, e o baricentro está entre o circuncentro e o ortocentro, a distância entre o ortocentro e o circuncentro é tripla da distância entre o baricentro e o circuncentro. Sendo a primeira 10 unidades, a segunda é $\frac{10}{3}$.

5. (B)

Como, num triângulo equilátero, a circunferência dos nove pontos coincide com a circunferência inscrita, a afirmação I é verdadeira. Por outro lado, também considerando um triângulo equilátero, o incentro pertence à sua reta de Euler, logo, a afirmação II é falsa.

6. I. V

Um triângulo retângulo pode ser inscrito numa semicircunferência, sendo a sua hipotenusa o respetivo diâmetro; logo, o centro da circunferência circunscrita, o circuncentro, pertence à hipotenusa do triângulo (é o seu ponto médio).

II. F

Por exemplo, num triângulo retângulo, a interseção das alturas é o vértice do ângulo reto, logo, não pode ser o baricentro, que pertence sempre ao interior do triângulo.

III. V

Em geral, o incentro de um triângulo não pertence à reta de Euler; apenas lhe pertence se o triângulo for isósceles.

IV. V

A circunferência dos nove pontos passa nos três pontos médios dos lados do triângulo, pelo que é a circunferência circunscrita ao triângulo definido por esses três pontos, sendo o seu centro o circuncentro do triângulo.

7.1 Tem-se $A_{[EFC]} = \frac{1}{4}A_{[ABC]}$ e $A_{[ADG]} = \frac{1}{6}A_{[ABC]}$.

Assim, $4A_{[EFC]} = A_{[ABC]}$ e $6A_{[ADG]} = A_{[ABC]}$.

Logo, $4A_{[EFC]} = 6A_{[ADG]} \Leftrightarrow A_{[EFC]} = \frac{6}{4}A_{[ADG]} \Leftrightarrow \frac{A_{[EFC]}}{A_{[ADG]}} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow \frac{A_{[EFC]}}{A_{[ADG]}} = \frac{3}{2}$.

7.2 $\overline{AG} = 5 \Rightarrow \overline{FG} = \frac{5}{2}$

$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AG}} \Leftrightarrow \overline{EF} = 7 \times \frac{5}{5} = \frac{7}{2}$ e $P_{[EFG]} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$.

7.3 Tem-se $A_{[ADG]} = \frac{1}{2}A_{[CEGF]} = \frac{1}{2}(A_{[EFC]} + A_{[EFG]})$

De **7.1**, sabe-se que $\frac{A_{[EFC]}}{A_{[ADG]}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow A_{[EFC]} = \frac{3}{2}A_{[ADG]}$

Assim, $A_{[ADG]} = \frac{1}{2}A_{[EFC]} + \frac{1}{2}A_{[EFG]} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}A_{[ADG]} + \frac{1}{2}A_{[EFG]} = \frac{3}{4}A_{[ADG]} + \frac{1}{2}A_{[EFG]}$, portanto,

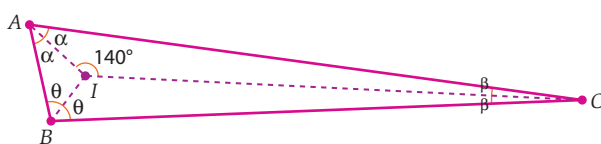
$A_{[ADG]} - \frac{3}{4}A_{[ADG]} = \frac{1}{2}A_{[EFG]} \Leftrightarrow \frac{1}{4}A_{[ADG]} = \frac{1}{2} \times 2 \Leftrightarrow A_{[ADG]} = 4$

Logo, $A_{[ABC]} = 6A_{[ADG]} = 6 \times 4 = 24$

8. O centro da circunferência dos nove pontos é o ponto médio do segmento de reta que tem como extremos o ortocentro e o circuncentro do triângulo.

Logo, como o ortocentro e o circuncentro pertencem à reta de Euler, o centro da circunferência dos nove pontos também pertence à reta de Euler.

9.1 Como I é o incentro do triângulo, a amplitude dos ângulos assinalados com as mesmas letras na figura seguinte (α , β e θ) são iguais.



Logo, $2\alpha + 2\beta + 2\theta = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta + \theta = 90^\circ$.

Como $\alpha + \beta + 140^\circ = 180^\circ$, tem-se que $\alpha + \beta = 40^\circ$.

Assim, substituindo na primeira equação, $40^\circ + \theta = 90^\circ \Leftrightarrow \theta = 50^\circ$.

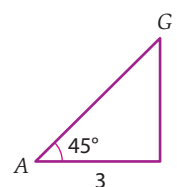
$\therefore \hat{ABC} = 2\theta = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$

9.2 Como o triângulo $[ABC]$ é acutângulo, o seu ortocentro e o seu circuncentro estão no seu exterior.

10.1 Como o incentro pertence à reta de Euler, o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

A altura do triângulo da figura ao lado é $3 \tan 45^\circ = 3$, pelo que, a altura do triângulo $[ABC]$ é $3 \times 3 = 9$.

Logo, a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{6 \times 9}{2} = 27$.



10.2 Seja H o ponto médio de $[AB]$.

Sabemos que a medida do raio da circunferência circunscrita é o dobro da medida do raio da circunferência dos nove pontos.

$$\text{Logo, } \overline{CQ} = 2\overline{DH}.$$

$$\text{Como } D \text{ é o ponto médio de } [QO], \overline{QD} = \overline{DO} = \frac{3}{2}.$$

Por outro lado,

$$\overline{CQ} + \overline{QD} + \overline{DH} = 9 \Leftrightarrow 2\overline{DH} + \frac{\overline{OQ}}{2} + \overline{DH} = 9 \Leftrightarrow 2\overline{DH} + \frac{3}{2} + \overline{DH} = 9 \Leftrightarrow 3\overline{DH} = 9 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \overline{DH} = \frac{5}{2}$$

A área do círculo limitado pela circunferência dos nove pontos é $\pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\pi$.

11.1 Incentro (como o triângulo é equilátero, os quatro pontos notáveis coincidem, pelo que a resposta também pode ser ortocentro, baricentro ou circuncentro).

$$\mathbf{11.2} \quad \frac{r}{4} = \tan 30^\circ \Leftrightarrow r = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } V = \pi \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times 2 = \frac{32}{3}\pi \text{ m}^3$$

$$\frac{32}{3}\pi \times 1000 \approx 33\,510 \text{ litros}$$

