

Funções polinomiais de grau não superior a 2.

Funções definidas por ramos

Vol. 2 Cap.3

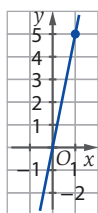
PÁG. 104

Diagnóstico

1.1 $g(10) = 5 \times 10 = 50$

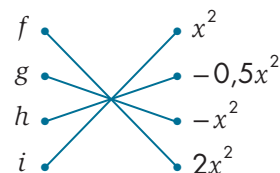
1.2 $g(x) = -3 \Leftrightarrow 5x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$

1.3



2. $a = \frac{5 - (-3)}{2 - (-2)} = \frac{8}{4} = 2$, $5 = 2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 5 - 4 \Leftrightarrow b = 1$ e $f(x) = 2x + 1$

3.



4.1 $f(4) = 24 \Leftrightarrow a(4)^2 = 24 \Leftrightarrow a = \frac{24}{16} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

4.2 $f(3) = -18 \Leftrightarrow a(3)^2 = -18 \Leftrightarrow a = -\frac{18}{9} \Leftrightarrow a = -2$

4.3 $f(2) = -4 \Leftrightarrow a(2)^2 = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{4} \Leftrightarrow a = -1$

5.1 $h(-4) = \frac{1}{4}(-4)^2 = 4$

5.2 $h(x) = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 32 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{32} \Leftrightarrow x = -4\sqrt{2} \vee x = 4\sqrt{2}$

6.1 $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times 5 \times x + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

6.2 $(1 - 2x)(1 + 2x) = 1^2 - (2x)^2 = 1 - 4x^2$

6.3 $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2 \times 3 \times \frac{1}{2}x + 3^2 = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$

6.4 $\left(-\frac{x}{3} + 6\right)\left(\frac{x}{3} + 6\right) = \left(6 - \frac{x}{3}\right)\left(6 + \frac{x}{3}\right) = 6^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 36 - \frac{x^2}{9} = -\frac{1}{9}x^2 + 36$

7.1 (A)

$$(x - 1)^2 + kx - 5 = x^2 - 2x + 1 + kx - 5 = x^2 + (k - 2)x - 4$$

As duas equações são equivalentes se $k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$

7.2 $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$

8. $g(2) = 3(2)^2 = 12$

$f(x) = ax \text{ e } f(2) = g(2) \Leftrightarrow 2a = 12 \Leftrightarrow a = 6$

$f(x) = 6x \text{ e } f(6) = 6 \times 6 = 36$

PÁG. 106

Tarefa 1

1. O gráfico da função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = mx + b$ interseca o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, b)$. O valor de b é a ordenada na origem.

2.

- Se $m > 0$, o declive da reta é igual ao quociente entre a medida do cateto vertical e a do cateto horizontal.
- Se $m < 0$, o declive da reta é igual ao simétrico do quociente entre a medida do cateto vertical e a do cateto horizontal.
- Se o cateto horizontal medir uma unidade, o cateto vertical mede $|m|$ unidades.

3.

a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

c. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

4. Se $m \neq 0$, tem um zero. Se $m = 0$ e $b \neq 0$, não tem zeros. Se $m = 0$ e $b = 0$, tem infinitos zeros.

5. $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}$

6.

a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

c. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6}$

7.

• Se $m > 0$, a função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = mx + b$ é positiva em $\left] -\frac{b}{m}, +\infty \right[$ e negativa em $\left] -\infty, -\frac{b}{m} \right[$.

• Se $m < 0$, a função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = mx + b$ é positiva em $\left] -\infty, -\frac{b}{m} \right[$ e negativa em $\left] -\frac{b}{m}, +\infty \right[$.

• Se $m = 0$ e $b > 0$ a função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = mx + b$ é positiva.

• Se $m = 0$ e $b < 0$ a função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = mx + b$ é negativa.

8.

• Se m for positivo, a função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = mx + b$ é crescente.

• Se m for negativo, a função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = mx + b$ é decrescente.

• Se m for nulo, a função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = mx + b$ é constante.

PÁG. 110

Aplicar

3. Os pontos de coordenadas $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ e $(0, 1)$ pertencem ao gráfico de f ,

$$\text{logo } m = \frac{1-0}{0-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}, \quad b = 1 \quad \text{e} \quad f(x) = -\frac{3}{2}x + 1.$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad D'_f = \mathbb{R}.$$

$$\text{Zero: } f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$f \text{ é positiva em }]-\infty, \frac{2}{3}[\quad \text{e} \quad \text{negativa em }]\frac{2}{3}, +\infty[.$$

f é estritamente decrescente e não tem extremos.

Os pontos de coordenadas $(-1, -4)$ e $(2, 2)$ pertencem ao gráfico de f ,

$$\text{logo } m = \frac{2 - (-4)}{2 - (-1)} = 2.$$

$$2 = 2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -2 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x - 2.$$

$$D_g = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad D'_g = \mathbb{R}.$$

$$\text{Zero: } g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g \text{ é negativa em }]-\infty, 1[\quad \text{e} \quad \text{positiva em }]1, +\infty[.$$

g é estritamente crescente e não tem extremos.

4.1 $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = \mathbb{R}$.

$$\text{Zero: } f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f \text{ é negativa em }]-\infty, -2[\quad \text{e} \quad \text{positiva em }]-2, +\infty[.$$

f é estritamente crescente e não tem extremos.

4.2 $D_g = \mathbb{R}$ e $D'_g = \mathbb{R}$.

$$\text{Zero: } g(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$g \text{ é positiva em }]-\infty, \frac{2}{3}[\quad \text{e} \quad \text{negativa em }]\frac{2}{3}, +\infty[.$$

g é estritamente decrescente e não tem extremos.

5. O gráfico de f interseca o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 2)$.

$$\text{Logo } b = 2 \quad \text{e} \quad \text{tem-se } f(x) = mx + 2.$$

$$\text{Como } f \text{ é uma função afim e é negativa apenas em }]-\infty, -8[, \quad \text{então } f(-8) = 0 \Leftrightarrow m(-8) + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}.$$

PÁG. 111**Tarefa 2**

1. 200

2. $(20, 0)$: Se o dono da loja fixar o preço de modo a ter 20 euros de lucro com a venda de cada auricular, não venderá nenhum.

$(0, 200)$: Se o dono da loja fixar o preço dos auriculares ao preço de custo, venderá 200, mas não terá lucro.

3.

Lucro unitário (euros)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
N.º de auriculares vendidos	200	180	160	140	120	100	80	60	40	20	0
Lucro total das vendas (euros)	0	360	640	840	960	1000	960	840	640	360	0

4. 10 euros

5. $f(x) = -10x^2 + 200x$

A expressão que dá o número de auriculares vendidos em função do lucro unitário é:

$200 - 10x$ ($y = 200 - 10x$ é a equação da reta que contém o gráfico da função apresentada no enunciado.)

Multiplicando o lucro unitário pelo número de auricular vendidos, obtém-se o lucro total, ou seja:

$$f(x) = x(200 - 10x) = 10x^2 + 200x$$

PÁG. 112**Tarefa 3**

$$P = 20 \Leftrightarrow 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow y = 10 - x \text{ e } A = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x .$$

PÁG. 115

Tarefa 4

1.

$$\text{a. } x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1,$$

$$S = \{-1\}$$

$$\text{b. } x^2 - 4x + 4 = 9 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = 2 - 3 \vee x = 2 + 3 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5,$$

$$S = \{-1, 5\}$$

$$\text{2. } x^2 - 4x = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 5 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = 2 - 3 \vee x = 2 + 3 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$$

$$S = \{-1, 5\}$$

OU

$$x^2 - 4x = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 9 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 - 3)(x - 2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2 - 3 = 0 \vee x - 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1,$$

$$S = \{-1, 5\}$$

3.

$$\text{a. } x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x + 3 = -2 \vee x + 3 = 2 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = -1, S = \{-5, -1\}$$

$$\text{b. } x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \vee x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2, S = \{-1, 2\}$$

$$\text{4. } 4x^2 + 8x - 5 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x) - 5 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1 - 1) - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1) - 4 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4(x + 1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 4(x + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow x + 1 = \pm\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -1 - \frac{3}{2} \vee x = -1 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \vee x = \frac{1}{2}, S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

PÁG. 118

Aplicar

$$7.1 \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 0}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4-4}{2} \vee x = \frac{4+4}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

OU

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

$$7.2 \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2-6}{2} \vee x = \frac{2+6}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$$

$$7.3 \quad h(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-3) \times 8}}{2 \times (-3)} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 10}{-6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2-10}{-6} \vee x = \frac{2+10}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = -2$$

$$7.4 \quad i(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} \text{ impossível}$$

$$7.5 \quad j(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1-3}{-2} \vee x = \frac{-1+3}{-2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

$$7.6 \quad k(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 - 2\sqrt{6}}{-2} \vee x = \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{-2} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{6} \vee x = 2 - \sqrt{6}$$

8. f tem dois zeros se $\Delta > 0$:

$$(-4)^2 - 4 \times a \times 5 > 0 \Leftrightarrow 16 - 20a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{16}{20} \Leftrightarrow a < \frac{4}{5} \Leftrightarrow a \in]-\infty, \frac{4}{5}[$$

PÁG. 119

Tarefa 6

1. Todas as parábolas têm vértice de coordenadas $(0, 0)$.

O eixo de simetria destas parábolas é a reta cujos pontos têm abcissa 0 .

As parábolas que têm concavidade voltada para cima são aquelas em que o valor de a é positivo.

Quanto maior é o valor de $|a|$, mais os ramos da parábola se aproximam do eixo de simetria.

2. O gráfico da função definida por $y = (x - 3)^2$ é uma translação do gráfico da função definida por $y = x^2$ associada ao vetor com direção horizontal, orientado da esquerda para a direita, com comprimento 3.

O gráfico da função definida por $y = (x + 4)^2$ é uma translação do gráfico da função definida por $y = x^2$ associada ao vetor com direção horizontal, orientado da direita para a esquerda, com comprimento 4.

O gráfico da função $y = (x + 2)^2$ é uma parábola com vértice de coordenadas $(-2, 0)$.

O mínimo absoluto de todas as funções é 0 e o seu contradomínio é o intervalo $[0, +\infty[$.

3. O gráfico da função definida por $y = x^2 - 4$ é uma translação do gráfico da função definida por $y = x^2$ associada ao vetor com direção vertical, orientado de cima para baixo, com comprimento 4.

O gráfico da função definida por $y = x^2 + 2$ é uma translação do gráfico da função definida por $y = x^2$ associada ao vetor com direção vertical, orientado de baixo para cima, com comprimento 2.

O gráfico da função definida por $y = x^2 + 3$ é uma parábola com vértice de coordenadas $(0, 3)$.

O eixo de simetria destas parábolas é a reta cujos pontos têm abcissa 0 .

4. O gráfico desta função resulta da composição de translações do gráfico da função definida por $y = 3x^2$ associadas aos seguintes vetores:

– com direção horizontal, orientado da esquerda para a direita, com comprimento 1;

– com direção vertical, orientado de baixo para cima, com comprimento 2.

5. O gráfico desta função resulta da composição de translações do gráfico da função definida por $y = 2x^2$ associadas aos seguintes vetores:

– com direção horizontal, orientado da direita para a esquerda, com comprimento 3;

– com direção vertical, orientado de cima para baixo, com comprimento 4.

PÁG. 125**Aplicar****10. (C)**

O gráfico de g é uma parábola de vértice de coordenadas $(3, 0)$.

Em relação ao gráfico de g , o gráfico de f surge deslocado horizontalmente 1 unidade para a direita e verticalmente 4 unidades para cima.

Assim, o gráfico de f é uma parábola de vértice de coordenadas $(4, 4)$.

11. (B)

A parábola que representa a função f tem vértice no ponto de coordenadas $(1, 2)$ e a parábola que representa a função g tem vértice no ponto de coordenadas $(2, -1)$.

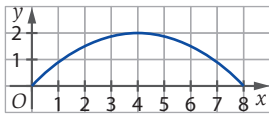
As concavidades das parábolas têm sentidos opostos.

O gráfico de g é o transformado do simétrico do gráfico de f , em relação ao eixo Ox , pela translação associada ao vetor com direção horizontal de comprimento 1, orientado da esquerda para a direita, composta pela translação associada ao vetor com direção vertical de comprimento 1, orientado de baixo para cima.

PÁG. 126

Tarefa 7

1.

2. $D = [0, 8]$ e $D' = [0, 2]$.

3. A bola subiu entre os 0 e os 4 metros, medidos na horizontal; desceu entre os 4 e os 8 metros, medidos na horizontal.

4. 1,90 metros, porque $1,90 + 0,10 = 2$ metros, que foi a altura máxima atingida pela bola.

Com 1,90 metros ou mais, o jogador tocaria na bola.

PÁG. 128

Aplicar

14.

Função	Vértice	Eixo de simetria	Contradomínio
$y = (x + 3)^2 + 1$	$(-3, 1)$	$x = -3$	$[1, +\infty[$
$y = -(x - 3)^2 + 1$	$(3, 1)$	$x = 3$	$] -\infty, 1]$
$y = -4(x + 2)^2 - 3$	$(-2, -3)$	$x = -2$	$] -\infty, -3]$
$y = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 2^{(*)}$	$\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$	$x = -\frac{1}{2}$	$[-2, +\infty[$

$$(*)y = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 2 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2$$

$$15.1 \quad y = a(x - 1)^2 + 3 \text{ e } a(0 - 1)^2 + 3 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1 - 3}{1} \Leftrightarrow a = -2; \text{ logo, } y = -2(x - 1)^2 + 3.$$

$$15.2 \quad y = a(x + 1)^2 - 2 \text{ e } a(-3 + 1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{0 + 2}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}; \text{ logo, } y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2.$$

16.1 -3 e 3 , dado que $h(3) = 0$ e que o gráfico de h é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas.

$$16.2 \quad y = ax^2 + 4 \text{ e } a(-3)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{9}, \text{ logo } h(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4.$$

17.1 Como os pontos de coordenadas $(4, -2)$ e $(8, -2)$ têm a mesma ordenada, são simétricos relativamente ao eixo de simetria da parábola. Assim, uma equação do eixo de simetria é:

$$x = \frac{4 + 8}{2} = 6$$

17.2 Como 3 é o máximo absoluto da função g e a parábola que é o gráfico de g tem eixo de simetria de equação $x = 6$, as coordenadas do vértice da parábola são $(6, 3)$. Assim tem-se:

$$y = a(x - 6)^2 + 3 \text{ e } a(4 - 6)^2 + 3 = -2 \Leftrightarrow a = \frac{-2 - 3}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4};$$

$$\text{logo, } g(x) = -\frac{5}{4}(x - 6)^2 + 3$$

PÁG. 129

Tarefa 8

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x - 1)^2$$

Logo, o vértice da parábola tem coordenadas $(1, 0)$.

PÁG. 130**Aplicar**

$$19.1 \quad f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

$$x_v = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \text{ e } y_v = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}; \text{ logo, } V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

$$19.2 \quad i(x) = -4 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 4 = -4 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$x_v = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ e } y_v = i(1) = -1^2 + 2 \times 1 - 4 = -3; \text{ logo, } V(1, -3).$$

$$19.3 \quad g(x) = 3 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x = 0 \vee -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$x_v = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ e } y_v = g(1) = -2(1)^2 + 4 \times 1 + 3 = -2 + 4 + 3 = 5; \text{ logo, } V(1, 5).$$

$$19.4 \quad h(x) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x = 0 \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

$$x_v = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \text{ e } y_v = h\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \times \left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \frac{18}{4} - \frac{18}{2} + 2 = -\frac{5}{2}; \text{ logo, } V\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right).$$

$$20. \quad f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \quad i(x) = -(x - 1)^2 - 3, \quad g(x) = -2(x - 1)^2 + 5, \quad h(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}.$$

$$21. \quad x_v = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$$

Como $D_f = [3, +\infty[$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Assim, f é decrescente em $]-\infty, \frac{1}{2}]$ e crescente em $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

$$22.1 \quad h(0) = -5 \times 0^2 + 12 \times 0 + 1,25 = 1,25 \text{ m}$$

$$22.2 \quad h(t) = 1,25 \Leftrightarrow -5t^2 + 12t + 1,25 = 1,25 \Leftrightarrow -5t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow t(-5t + 12) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t = 0 \vee -5t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$x_v = \frac{0+2,4}{2} = 1,2 \text{ e } y_v = h(1,2) = -5(1,2)^2 + 12 \times 1,2 + 1,25 = -7,2 + 14,4 + 1,25 = 8,45$$

A altura máxima atingida pela bola foi 8,45 m.

PÁG. 131**Tarefa 9**

$$1. \quad \Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 5 = -24 < 0, \text{ logo a função não tem zeros.}$$

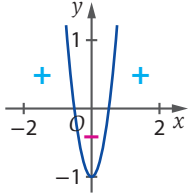
2. A parábola tem a concavidade voltada para cima. A função é positiva em todo o seu domínio.

PÁG. 132

Aplicar

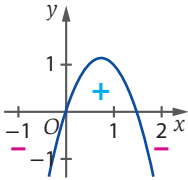
$$24.1 \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

f é positiva em $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$ e negativa em $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.



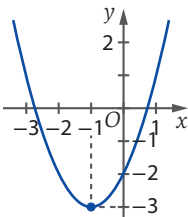
$$24.2 \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(-2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$$

g é positiva em $]0, \frac{3}{2}[$ e negativa em $]-\infty, 0[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$.



$$24.3 \quad h(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x+1 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{3} \vee x = -1 + \sqrt{3}$$

h é positiva em $]-\infty, -1 - \sqrt{3}[\cup]-1 + \sqrt{3}, +\infty[$ e negativa em $]-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}[$.



$$24.4 \quad i(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x+3)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = -\frac{5}{2} \text{ impossível}$$

Como a parábola que é o gráfico da função i tem a concavidade voltada para baixo ($a < 0$) e i não tem zeros, i é negativa em \mathbb{R} .

$$25.1 \quad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -15 < 0, \text{ logo a função não tem zeros.}$$

25.2 A função não tem zeros e a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Logo, a função é positiva em \mathbb{R} e o conjunto-solução da condição $m(x) < 0$ é \emptyset .

26. (C) porque a função tem dois zeros e a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

$$27.1 \quad h(x) = -1,8 \Leftrightarrow -5x^2 + 10x - 1,8 = -1,8 \Leftrightarrow -5x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow 5x(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x = 0 \vee -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$x_v = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ e } y_v = h(1) = -5(1)^2 + 10 \times 1 - 1,8 = 3,2 \text{ m}$$

A altura máxima atingida pelo golfinho foi 3,2 m.

$$27.2 \quad h(x) > 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 10x - 1,8 > 0$$

$$-5x^2 + 10x - 1,8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-5)(-1,8)}}{2(-5)} \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm 8}{-10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 - 8}{-10} \vee x = \frac{-10 + 8}{-10} \Leftrightarrow x = \frac{9}{5} \vee x = \frac{1}{5}$$

O golfinho esteve acima da superfície da água durante $\frac{9}{5} - \frac{1}{5} = \frac{8}{5} = 1,6$ segundos.

$$28. \quad f(x) = a(x+2)^2 + 1, \quad f(3) = 0 \Leftrightarrow a(3+2)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{25}$$

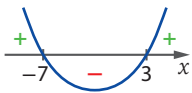
$$f(x) = -\frac{1}{25}(x+2)^2 + 1$$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25}(x+2)^2 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25}(x+2)^2 \leq -1 \Leftrightarrow (x+2)^2 \geq 25 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 25 \geq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$(x+2)^2 = 25 \Leftrightarrow x+2 = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x+2 = \pm 5 \Leftrightarrow x = -5 - 2 \vee x = 5 - 2 \Leftrightarrow x = -7 \vee x = 3$$

$$S =]-\infty, -7] \cup [3, +\infty[$$



29. Como $D'_g =]-\infty, 6]$, a parábola que representa a função tem a concavidade voltada para baixo.

Como $g(0) = 6$ e 6 é o máximo absoluto, a parábola tem eixo de simetria de equação $x = 0$.

Como $g(-4) = 0$ e a parábola é simétrica relativamente ao eixo Oy , vem $g(4) = 0$.

Assim, $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-4, 4]$.

PÁG. 136

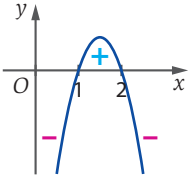
Aplicar

$$32.1 \quad -x^2 + 3x > 2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 > 0$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-3-1}{-2} \vee x = \frac{-3+1}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

$$S =]1, 2[$$

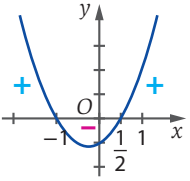


$$32.2 \quad 2x^2 - x \leq 1 - 2x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 \leq 0$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1-3}{4} \vee x = \frac{-1+3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$$

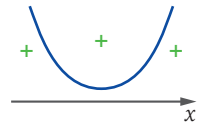
$$S = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$



$$32.3 \quad x - 5 \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 \leq 0$$

$$x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2} \text{ impossível}$$

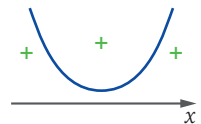
$$S = \emptyset$$



$$32.4 \quad 2x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$2x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} \text{ impossível}$$

$$S = \mathbb{R}$$

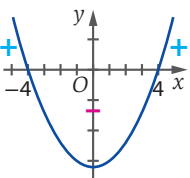


33. (D)

$$x^2 < 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0$$

$$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x = \pm 4$$

$$S =]-4, 4[$$

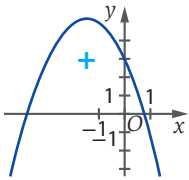


$$34.1 \quad f(x) > 1 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 3 > 1 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$-x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-1)(2)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

$$S = \left] \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right[$$

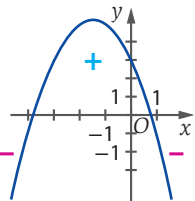


$$34.2 \quad f(x) \leq -1 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 3 \leq -1 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 \leq 0$$

$$-x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-1)(4)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3-5}{-2} \vee x = \frac{3+5}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$$

$$S =]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$$



35.1 (B)

$$(A) \quad f(x) \geq 3 \Leftrightarrow 2(x-3)^2 + 4 \geq 3 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq -\frac{1}{2} \text{ Universal}$$

$$(B) \quad f(x) < 3 \Leftrightarrow 2(x-3)^2 + 4 < 3 \Leftrightarrow (x-3)^2 < -\frac{1}{2} \text{ Impossível}$$

$$(C) \quad f(x) > 4 \Leftrightarrow 2(x-3)^2 + 4 > 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 > 0 \text{ Possível}$$

$$(D) \quad f(x) \leq 4 \Leftrightarrow 2(x-3)^2 + 4 \leq 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 0 \text{ Possível}$$

$$35.2 \quad f(x) > 22 \Leftrightarrow 2(x-3)^2 + 4 > 22 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 > 0$$

$$(x-3)^2 = 9 \Leftrightarrow x-3 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x-3 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 3-3 \vee x = 3+3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

$$S =]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[$$



PÁG. 140

Aplicar

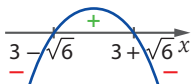
$$\begin{aligned} 39.1 \quad h(t) = 2 &\Leftrightarrow -5t^2 + 30t + 2 = 2 \Leftrightarrow -5t^2 + 30t = 0 \Leftrightarrow 5t(-t + 6) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5t = 0 \vee -t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 6 \end{aligned}$$

O foguete voltou a estar à mesma distância do solo a que estava no instante em que foi lançado 6 segundos após o lançamento.

$$39.2 \quad x_v = \frac{0+6}{2} = 3 \quad \text{e} \quad y_v = h(3) = -5(3)^2 + 30 \times 3 + 2 = 47$$

A altura máxima atingida pelo foguete foi 47 m .

$$39.3 \quad h(t) < 17 \Leftrightarrow -5t^2 + 30t + 2 < 17 \Leftrightarrow -5t^2 + 30t - 15 < 0 \Leftrightarrow -t^2 + 6t - 3 < 0$$

$$\begin{aligned} -t^2 + 6t - 3 = 0 &\Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-3)}}{2(-1)} \Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{-2} \Leftrightarrow t = 3 \pm \sqrt{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t \approx 0,55 \vee t \approx 5,45 \end{aligned}$$


Determinemos os zeros da função h , para determinar o domínio da mesma.

$$\begin{aligned} h(t) = 0 &\Leftrightarrow -5t^2 + 30t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4(-5) \times 2}}{2(-5)} \Leftrightarrow t = \frac{-30 \pm \sqrt{940}}{-10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t \approx -0,066 \vee t \approx 6,066 \end{aligned}$$

$$D_h = [0 ; 6,066]$$

$$S = (]-\infty ; 0,55[\cup]5,45 ; +\infty]) \cap [0 ; 6,066] = [0 ; 0,55[\cup]5,45 ; 6,066]$$

$$(0,55 - 0) + (6,066 - 5,45) = 0,55 + 0,616 = 1,166$$

O foguete esteve a menos de 17 m de altura em relação ao solo durante, aproximadamente, 1,17 segundos.

$$40.1 \quad A_{\Delta [APQ]} = \frac{\overline{AP} \times \overline{AQ}}{2} = \frac{x(16-x)}{2} = -0,5x^2 + 8x, \quad 0 < x < 10$$

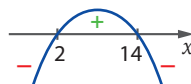
40.2 Para $0 < x < 10$, tem-se:

$$A(x) < 14 \Leftrightarrow -0,5x^2 + 8x < 14 \Leftrightarrow -0,5x^2 + 8x - 14 < 0$$

$$-0,5x^2 + 8x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-0,5)(-14)}}{2(-0,5)} \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm 6}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8+6}{-1} \vee x = \frac{-8-6}{-1} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 14$$

$$S =]0, 10[\cap (]-\infty, 2[\cup]14, +\infty]) =]0, 2[$$



$$40.3 \quad A(x) = -0,5x^2 + 8x = -0,5(x^2 - 16x) = -0,5[(x-8)^2 - 64] = -0,5(x-8)^2 + 32$$

A área máxima é 32 cm^2 , para $x = 8$.

$$41.1 \quad x + x + y = 30 \Leftrightarrow y = 30 - 2x$$

$$A_{\text{horta}} = xy = x(30 - 2x) = -2x^2 + 30x, \quad 0 < x < 15$$

$$41.2 \quad A(x) = -2x^2 + 30x = -2\left(x^2 - 15x\right) = -2\left[\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{225}{4}\right] = -2\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{2}$$

A área máxima é $112,5 \text{ m}^2$ e as dimensões são $7,5 \text{ m}$ e $30 - 2 \times 7,5 = 15 \text{ m}$.

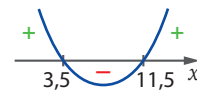
41.3 Para $0 < x < 15$, tem-se:

$$A(x) < 80,5 \Leftrightarrow -2(x - 7,5)^2 + 112,5 < 80,5 \Leftrightarrow (x - 7,5)^2 > \frac{80,5 - 112,5}{-2} \Leftrightarrow (x - 7,5)^2 > 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 7,5)^2 - 16 > 0$$

$$(x - 7,5)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 7,5 = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x - 7,5 = \pm 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 7,5 - 4 \vee x = 7,5 + 4 \Leftrightarrow x = 3,5 \vee x = 11,5$$



$$S =]0, 15[\cap (]-\infty; 3,5[\cup]11,5; +\infty[) =]0; 3,5[\cup]11,5; 15[$$

PÁG. 141**Tarefa 10**

1. O polígono sombreado é um triângulo de altura $\overline{AP} = x$ e cuja base é o comprimento do segmento de reta que une os pontos de interseção da reta vertical que passa em P com os lados $[AB]$ e $[AD]$.

A reta AD tem equação $y = x + 2$ e a reta AB tem equação $y = -x + 2$.

Assim, a base do triângulo é dada por $x + 2 - (-x + 2) = 2x$ e a sua área é $\frac{x \times 2x}{2} = x^2$.

2. A área do polígono sombreado pode ser determinada fazendo a diferença entre a área do quadrado $[ABCD]$ e a área do triângulo de altura $\overline{PC} = 4 - x$ e cuja base é o comprimento do segmento de reta que une os pontos de interseção da reta vertical que passa em P com os lados $[BC]$ e $[CD]$.

A reta BC tem equação $y = x - 2$ e a reta CD tem equação $y = -x + 6$.

Assim, a base do triângulo é dada por $-x + 6 - (x - 2) = -2x + 8$ e a sua área é

$$\frac{(-2x + 8)(4 - x)}{2} = (-x + 4)(4 - x) = (4 - x)^2.$$

Logo, a área do quadrado é $\frac{4 \times 4}{2} = 8$ (encarado como um losango) e a área do polígono sombreado é

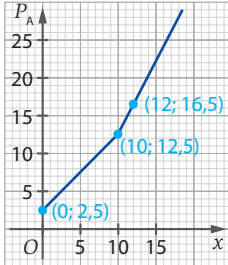
$$8 - (4 - x)^2 = -x^2 + 8x - 8.$$

PÁG. 143

Tarefa 11

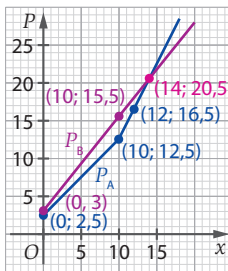
$$1. P_A(x) = \begin{cases} 2,5 + x & \text{se } x \leq 10 \\ (2,5 + 10) + 2(x - 10) & \text{se } x > 10 \end{cases} = \begin{cases} 2,5 + x & \text{se } x \leq 10 \\ 12,5 + 2(x - 10) & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

2.



3. Para consumos inferiores a 14 m^3 , a água é mais barata na localidade A.

Para consumos superiores a 14 m^3 , a água é mais barata na localidade B.

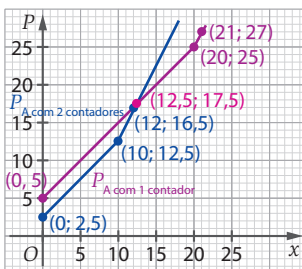


4. Começamos por definir a função que traduz, na localidade A, o preço a pagar, em euros, em função da quantidade de água consumida, x , em metros cúbicos, considerando que se alugam dois contadores.

$$P_{A(2 \text{ contadores})}(x) = \begin{cases} 5 + x & \text{se } x \leq 20 \\ (5 + 20) + 2(x - 20) & \text{se } x > 20 \end{cases} = \begin{cases} 5 + x & \text{se } x \leq 20 \\ 25 + 2(x - 20) & \text{se } x > 20 \end{cases}$$

O número mínimo de metros cúbicos é $12,5$, considerando que, pelo menos até esse valor, o consumo nunca é superior a 10 m^3 em nenhum dos dois contadores.

No modelo da figura, considerou-se que até 20 m^3 não foram excedidos 10 m^3 em nenhum dos dois contadores.

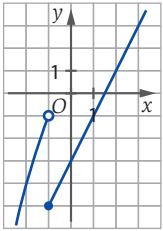


PÁG. 146**Aplicar**

$$45.1 \quad f(0) = 2 \times 0 - 3 = -3, \quad f(-4) = -(-4)^2 = -16, \quad f(-1) = 2 \times (-1) - 3 = -5, \quad f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1.$$

$$45.2 \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow (-x^2 = 0 \wedge x < -1) \vee (2x - 3 = 0 \wedge x \geq -1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \wedge x < -1) \vee \left(x = \frac{3}{2} \wedge x \geq -1\right) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

45.3

$$46.1 \quad \text{Em } [1, +\infty[, \quad y = mx + b.$$

$$m = \frac{4 - 2}{4 - 1} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad 2 = \frac{2}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = 2 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Assim, } y = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$46.2 \quad \text{Em }]-\infty, 0[, \quad y = mx + b.$$

$$m = \frac{3 - 0}{0 + 2} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad b = 3.$$

$$\text{Em } [0, +\infty[, \quad y = a(x - 2)^2 - 3.$$

$$a(0 - 2)^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\text{Assim, } y = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 3 & \text{se } x < 0 \\ \frac{3}{2}(x - 2)^2 - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

PÁG. 147

Aplicar

47.1 $D'_h =]-\infty, 3[$

47.2 Interseção com o eixo Ox : $(-6, 0)$, $(-3, 0)$ e $(5, 0)$;

Interseção com o eixo Oy : $(0, -2)$

47.3

x	$-\infty$	-6		-3		1		5	$+\infty$
Sinal de h	$-$	0	$+$	0	$-$	N. D.	$+$	0	$-$

47.4 Em $]-\infty, -2]$, $h(x) = a\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$.

$h(-3) = 0 \Leftrightarrow a\left(-3 + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{9}{8} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{9}{8} \times \frac{4}{9} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

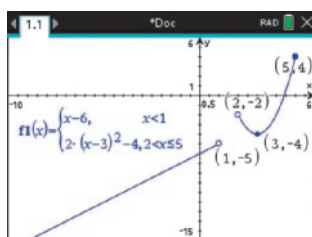
Em $]1, +\infty[$, $h(x) = mx + b$.

$m = \frac{3 - 0}{1 - 5} = -\frac{3}{4}$ e $3 = -\frac{3}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = 3 + \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = \frac{15}{4}$.

Assim, $h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{9}{8} & \text{se } x \leq -2 \\ -2 & \text{se } -2 < x < 1 \\ -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

48.1 $D_f =]-\infty, 1[\cup]2, 5]$

Para determinar o contradomínio, vamos recorrer a uma calculadora para obter uma representação gráfica de f .



$D'_f =]-\infty, -5[\cup]-4, 4]$

48.2 Interseção com o eixo Ox :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 6 = 0 \wedge x < 1) \vee (2(x - 3)^2 - 4 = 0 \wedge 2 < x \leq 5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 6 \wedge x < 1) \vee ((x - 3)^2 = 2 \wedge 2 < x \leq 5) \Leftrightarrow (x - 3 = -\sqrt{2} \vee x - 3 = \sqrt{2}) \wedge 2 < x \leq 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{2}$

$(3 + \sqrt{2}, 0)$

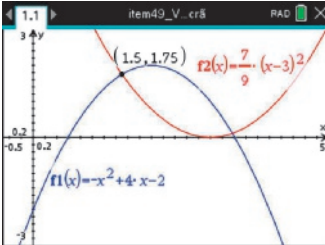
Interseção com o eixo Oy :

$f(0) = 0 - 6 = -6$, $(0, -6)$

$$48.3 \quad f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]3 + \sqrt{2}, 5], \quad f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]2, 3 + \sqrt{2}[.$$

$$49. \quad -x^2 + 4x - 2 = \frac{7}{9}(x-3)^2 \Leftrightarrow 9(-x^2 + 4x - 2) = 7(x^2 - 6x + 9) \Leftrightarrow -16x^2 + 78x - 81 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-78 \pm \sqrt{78^2 - 4(-16)(-81)}}{2(-16)} \Leftrightarrow x = \frac{-78 - 30}{-32} \vee x = \frac{-78 + 30}{-32} \Leftrightarrow x = \frac{27}{8} \vee x = \frac{3}{2}$$



Tendo em conta que os gráficos que representam as expressões dos dois ramos se interseitam em dois pontos e por observação da representação gráfica da função g , conclui-se que $a = \frac{3}{2}$.

PÁG. 148**Aplicar +**

$$1. f(-2) = g(-2) \Leftrightarrow m(-2) - 2 = \frac{3}{-2} \Leftrightarrow m(-2) = -\frac{3}{2} + 2 \Leftrightarrow m = \frac{\frac{1}{2}}{-2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$$

(A) $f(x) = -\frac{1}{4}x - 2$ é decrescente, pois $m < 0$.

Portanto, (A) é verdadeira.

(B) $f(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x - 2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x > 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x < -8 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -8[$

Portanto, (B) é falsa.

(C) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -8$.

Portanto, (C) é verdadeira.

(D) $f(-12) = -\frac{1}{4} \times (-12) - 2 = 1$.

Portanto, (D) é verdadeira.

2. $f(x) = mx + b$, $b < 0$, $f(-3) = 0$.

2.1 A reta que é o gráfico de f passa pelos pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e $(0, b)$

e tem declive $\frac{b - 0}{0 - (-3)} = \frac{b}{3} < 0$, porque $b < 0$.

Logo, f é decrescente.

2.2 (A)

Já vimos que o declive da reta que é o gráfico de f é $\frac{b}{3}$, sendo b a ordenada na origem, pelo que $f(x) = \frac{b}{3}x + b$.

$$f(0) = f(1) + 2 \Leftrightarrow b = \frac{b}{3} \times 1 + b + 2 \Leftrightarrow v = -2 \Leftrightarrow b = -6 \text{ e } m = \frac{-6}{3} = -2$$

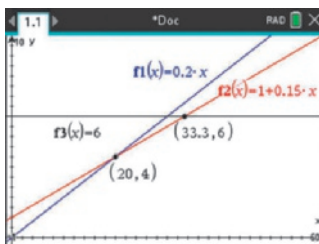
3.1 O melhor tarifário é o Baza.

Acelera: $0,20 \times 30 = 6 \text{ €}$, Baza: $1 + 0,15 \times 30 = 5,5 \text{ €}$, Circula: 6 € .

3.2

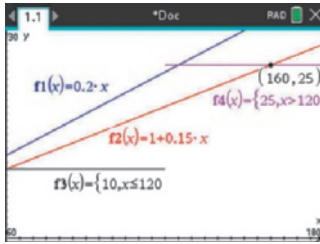
a. Acelera: $P(t) = 0,2t$, Baza: $P(t) = 1 + 0,15t$, Circula: $P(t) = 6$.

b.



Em $[0, 20[$, é mais vantajoso o tarifário Acelera; em $]20; 33,3[$, é mais vantajoso o tarifário Baza; em $]33,3; 60]$, é mais vantajoso o tarifário Circula.

3.3



Em $]60, 120]$, é mais vantajoso o tarifário Circula; em $]120, 160[$, é mais vantajoso o tarifário Baza; em $]160, 180]$, é mais vantajoso o tarifário Circula.

PÁG. 149**Aplicar +**

4.1 $D_T =]0, 8[$

A área do trapézio varia entre a área do triângulo $[ACD]$ e a do retângulo $[ABCD]$, nunca tomando esses dois valores, ou seja, tem-se:

$$D'_T =]16, 32[.$$

4.2 $A_{[AMCD]} = \frac{\overline{CM} + \overline{AD}}{2} \times \overline{CD}$

$$P = 24 \Leftrightarrow 2c + 2l = 24 \Leftrightarrow 2 \times 8 + 2l = 24 \Leftrightarrow l = 4$$

$$A_{[AMCD]} = \frac{(8 - x) + 8}{2} \times 4 = (16 - x) \times 2$$

$T(x) = -2x + 32$ é monótona decrescente.

5.

Parábola	Vértice	Eixo de simetria	Concavidade
$y = -(x + 1)^2 + 5$	$(-1, 5)$	$x = -1$	Voltada para baixo
$y = (x - 3)^2 - 4$	$(3, -4)$	$x = 3$	Voltada para cima
$y = -(x + 2)^2 - 9$	$(-2, -9)$	$x = -2$	Voltada para baixo
$y = (4 - 3x)^2 + 1^{(*)}$	$(\frac{4}{3}, 1)$	$x = \frac{4}{3}$	Voltada para cima

$$(*) y = (4 - 3x)^2 + 1 = (-3x + 4)^2 + 1 = \left(-3\left(x - \frac{4}{3}\right)\right)^2 + 1 = 9\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + 1$$

6.

Parábola	Zeros	Contra-domínio
$y = -(x + 1)^2 + 5$	$\{-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}\}$	$] -\infty, 5]$
$y = (x - 3)^2 - 4$	$\{1, 5\}$	$[-4, +\infty[$
$y = -(x + 2)^2 - 9$	$\{\}$	$] -\infty, -9]$
$y = (4 - 3x)^2 + 1$	$\{\}$	$[1, +\infty[$

$$-(x + 1)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x + 1 = -\sqrt{5} \vee x + 1 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{5} \vee x = -1 + \sqrt{5}$$

$$(x - 3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 3 = -2 \vee x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

$$-(x + 2)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 \text{ Impossível, a função não tem zeros.}$$

$$9\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9} \text{ Impossível, a função não tem zeros.}$$

7. (C)

$$g(x) = -2(x+p)^2 + s, \quad p < 0 \text{ e } s > 0.$$

$$V(-p, s), \quad p < 0 \Leftrightarrow -p > 0$$

(A) $-p < 0$ e $s < 0$.

(B) $-p > 0$ e $s < 0$.

(C) $-p > 0$ e $s > 0$.

(B) $-p < 0$ e $s > 0$.

8.1 $y = a(x-3)^2 + 2$ e $a(1-3)^2 + 2 = -6 \Leftrightarrow 4a = -8 \Leftrightarrow a = \frac{-8}{4} \Leftrightarrow a = -2$

$$y = -2(x-3)^2 + 2$$

8.2 $y = a(x-4)^2 + 1$ e $a(0-4)^2 + 1 = 7,4 \Leftrightarrow 16a = 6,4 \Leftrightarrow a = \frac{6,4}{16} \Leftrightarrow a = 0,4$

$$y = 0,4(x-4)^2 + 1$$

8.3 $x_v = \frac{-6 + (-10)}{2} = -8$, $y = a(x+8)^2 + 2$

$$a(-6+8)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = \frac{-2}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+8)^2 + 2$$

PÁG. 150**Aplicar +**

9. $h(0) = 0,8$ e $h(2) = 0,8$, $x_v = \frac{0+2}{2} = 1$ e $y_v = 5,8$, $h(t) = a(x-1)^2 + 5,8$
 $a(0-1)^2 + 5,8 = 0,8 \Leftrightarrow a = -5$, $h(t) = -5(x-1)^2 + 5,8$

10. f tem dois zeros se

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 4a(3) > 0 \Leftrightarrow -12a > -4 \Leftrightarrow a < \frac{4}{12} \Leftrightarrow a < \frac{1}{3} \Leftrightarrow a \in]-\infty, \frac{1}{3}[$$

11. f não tem zeros se $\Delta < 0 \Leftrightarrow (k-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 < 0 \Leftrightarrow (k-3)^2 - 16 < 0$

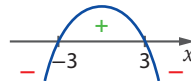
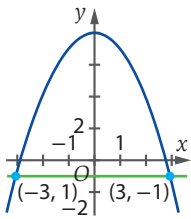
$$(k-3)^2 = 16 \Leftrightarrow k-3 = \pm 4 \Leftrightarrow k = 3-4 \vee k = 3+4 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 7$$

$$(k-3)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow k \in]-1, 7[$$

12.1 $-x^2 + 8 > -1 \Leftrightarrow -x^2 + 9 > 0$

$$-x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

$$-x^2 + 9 > 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 3[$$

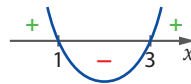
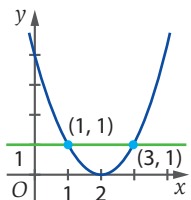
**Resolução gráfica:**

$$S =]-3, 3[$$

12.2 $(x-2)^2 \geq 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 \geq 0$

$$(x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x-2 = -1 \vee x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 2-1 \vee x = 2+1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

$$(x-2)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$$

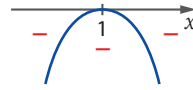
**Resolução gráfica:**

$$S =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$$

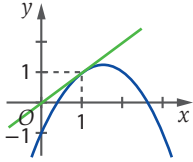
$$12.3 \quad -x^2 + 3x - 1 \geq x \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 \geq 0$$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{-2} \Leftrightarrow x = 1$$

$$-x^2 + 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{1\}$$



Resolução gráfica:



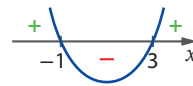
$$S = \{1\}$$

$$12.4 \quad 3 - 3x < x^2 - 5x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$$

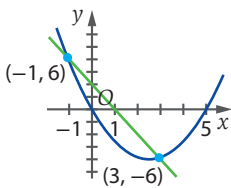
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2-4}{2} \vee x = \frac{2+4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$$



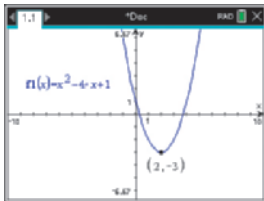
Resolução gráfica:



$$S =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$$

$$13.1 \quad f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 4 + 1 = (x - 2)^2 - 3, \quad D'_f = [-3, +\infty[.$$

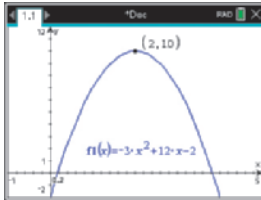
Resolução gráfica:



$$D'_f = [-3, +\infty[$$

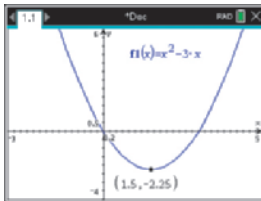
$$\begin{aligned} \mathbf{13.2} \quad g(x) &= -3x^2 + 12x - 2 = -3(x^2 - 4x) - 2 = -3[(x-2)^2 - 4] - 2 = -3(x-2)^2 + 12 - 2 = \\ &= -3(x-2)^2 + 10, \end{aligned}$$

$$D'_g =]-\infty, 10].$$

Resolução gráfica:

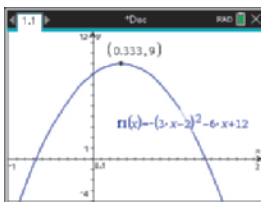
$$D'_g =]-\infty, 10]$$

$$\mathbf{13.3} \quad h(x) = x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, \quad D'_h = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right[.$$

Resolução gráfica:

$$D'_h = \left[\frac{9}{4}, +\infty\right[$$

$$\begin{aligned} \mathbf{13.4} \quad i(x) &= -(3x-2)^2 - 6x + 12 = -9x^2 + 6x + 8 = -9\left(x^2 - \frac{6}{9}x\right) + 8 = \\ &= -9\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] + 8 = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 1 + 8 = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 9, \quad D'_i =]-\infty, 9]. \end{aligned}$$

Resolução gráfica:

$$D'_i =]-\infty, 9]$$

$$\mathbf{14.} \quad x_v = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 3 \times 3 - 8 = 1 \quad \text{e} \quad x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 3 \times \frac{3}{2} - 8 = -\frac{7}{2}.$$

$$f(x) = a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} \quad \text{e} \quad f(3) = 1 \Leftrightarrow a\left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} = 1 \Leftrightarrow a\left(\frac{9}{4}\right) = 1 + \frac{7}{2} \Leftrightarrow a = \frac{9}{2} \times \frac{4}{9} \Leftrightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$$

PÁG. 151**Aplicar +****15.1 (D)**

$$g(x) = mx + \frac{1}{3}, \quad f(-1) = g(-1) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = m(-1) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{15.2} \quad \frac{x^2}{4} = \frac{x}{12} + \frac{1}{3} &\Leftrightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 3(-4)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{4} = \frac{4}{9}, \quad C\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{9}\right).$$

16.1 (A)

Como $f(-2) = f(4)$, o eixo de simetria do gráfico de f é a reta de equação $x = \frac{-2+4}{2} = 1$.

Como $h(x) = f(x+1)$, o gráfico de h é o transformado do gráfico de f pela translação associada ao vetor com direção horizontal de comprimento 1, orientado da direita para a esquerda, o eixo de simetria do gráfico de h é a reta de equação $x = 1 - 1 = 0$, pelo que $h(-4) = h(4)$.

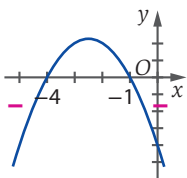
$$\mathbf{16.2} \quad x_v = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{e} \quad y_v = 2 \times 1 - 4 = -2, \quad V(1, -2).$$

$$\mathbf{16.3} \quad f(x) = 2(x-1)^2 - 2$$

$$f(x) - x < 3x^2 + 4 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 - 2 - x < 3x^2 + 4 \Leftrightarrow -x^2 - 5x - 4 < 0$$

$$-x^2 - 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(-1)(-4)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{5-3}{-2} \vee x = \frac{5+3}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -4$$

$$S =]-\infty, -4[\cup]-1, +\infty[$$

**17. (B)**

O gráfico de h é o transformado do gráfico de f pela translação associada ao vetor com direção vertical de comprimento 3, orientado de cima para baixo.

PÁG. 152

Aplicar +

18. Como o gráfico da função definida por $f(x+1)$ é simétrico em relação ao eixo Oy e é o transformado do gráfico de f pela translação associada ao vetor com direção horizontal de comprimento 1, orientado da direita para a esquerda, conclui-se que o gráfico de f é simétrico em relação à reta de equação $x=0+1=1$ e $h=x_v=1$.

Como a função definida por $2-f(x)$ tem valor máximo absoluto 5 e o seu gráfico é o transformado do gráfico de f por reflexão relativamente ao eixo Ox , seguida da translação associada ao vetor com direção vertical de comprimento 2, orientado de baixo para cima, conclui-se que f tem valor mínimo absoluto $-(5-2)=-3$ e $k=y_v=-3$.

$$\text{Assim, } f(x) = a(x-1)^2 - 3.$$

Como um dos zeros da função definida por $2f(x)$ é -7 , tem-se $2f(-7) = 0 \Leftrightarrow f(-7) = 0$.

$$f(-7) = 0 \Leftrightarrow a(-7-1)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{64}$$

19.1 $D = D_g = [-2, +\infty[$ e $D' = [0+2, +\infty[= [2, +\infty[$.

19.2 $D = [-2+2, +\infty[= [0, +\infty[$ e $D' = D'_g = [0, +\infty[$.

19.3 $D = D_g = [-2, +\infty[$ e $D' = [2 \times 0 - 2, +\infty[= [-2, +\infty[$.

19.4 $D = D_g = [-2, +\infty[$ e $D' =]-\infty, 0-1] =]-\infty, -1]$.

19.5 $D = [-2-1, +\infty[= [-3, +\infty[$ e $D' = D'_g = [0, +\infty[$.

19.6 $D = [-2+2, +\infty[= [0, +\infty[$ e $D' =]-\infty, 0]$.

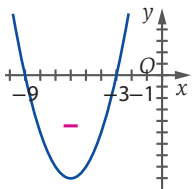
20. $g(x) = a(x+6)^2 + 2$

$$g(-3) = 5 \Leftrightarrow a(-3+6)^2 + 2 = 5 \Leftrightarrow a = \frac{3}{9} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$g(x) \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x+6)^2 + 2 \leq 5 \Leftrightarrow (x+6)^2 - 9 \leq 0$$

$$(x+6)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+6)^2 = 9 \Leftrightarrow x+6 = \pm 3 \Leftrightarrow x = -6-3 \vee x = -6+3 \Leftrightarrow x = -9 \vee x = -3$$

$$S = [-9, -3]$$



21.1 As coordenadas do ponto P são $(x, f(x))$, pelo que $\overline{OB} = x$ e $\overline{OA} = f(x) = -2x + 18$.

Logo, $A_{[OBPA]} = \overline{OB} \times \overline{OA} = x(-2x + 18) = -2x^2 + 18x$.

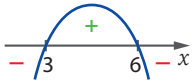
$$\mathbf{21.2} \quad S(x) = -2x^2 + 18x = -2(x^2 - 9x) = -2\left[\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}\right] = -2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{2}$$

A área do retângulo é máxima para $x = \frac{9}{2}$.

$$\mathbf{21.3} \quad S(x) > 36 \Leftrightarrow -2x^2 + 18x > 36 \Leftrightarrow -2x^2 + 18x - 36 > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9x - 18 > 0$$

$$-x^2 + 9x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(-1)(-18)}}{2(-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-9 - 3}{-2} \vee x = \frac{-9 + 3}{-2} \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 3$$



$$S =]3, 6[$$

PÁG. 153**Aplicar +**

$$22.1 \quad A_{[PQRS]} = \overline{PQ} \times \overline{QR}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{CM}} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{\overline{PS}}{9} \Leftrightarrow \overline{PS} = \frac{9x}{6} \Leftrightarrow \overline{PS} = \frac{3x}{2}$$

$$A_{[PQRS]} = (12 - 2x) \times \frac{3x}{2} = 18x - 3x^2$$

$$22.2 \quad L(x) = 18x - 3x^2 = -3(x^2 - 6x) = -3[(x - 3)^2 - 9] = -3(x - 3)^2 + 27$$

As dimensões do retângulo $[PQRS]$ para as quais a respetiva área é máxima são

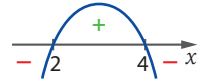
$$12 - 2 \times 3 = 6 \quad \text{e} \quad \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{e o valor dessa área é } 27 \text{ u.a.}$$

22.3 Para $0 < x < 6$, tem-se:

$$L(x) < 24 \Leftrightarrow 18x - 3x^2 < 24 \Leftrightarrow -3x^2 + 18x - 24 < 0 \Leftrightarrow -x^2 + x - 8 < 0$$

$$-x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-6 - 2}{-2} \vee x = \frac{-6 + 2}{-2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$$

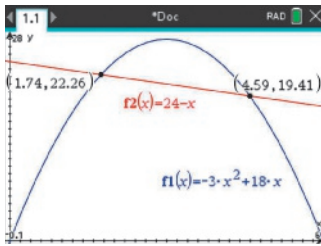
$$S =]0, 2[\cup]4, 6[$$



$$22.4 \quad \text{Se o retângulo } [PQRS] \text{ for um quadrado, } 12 - 2x = \frac{3x}{2} \Leftrightarrow 24 - 4x = 3x \Leftrightarrow x = \frac{24}{7}$$

$$\text{e a área é } \left(12 - 2 \times \frac{24}{7}\right) \left(\frac{3}{2} \times \frac{24}{7}\right) = \left(\frac{36}{7}\right)^2 \approx 26,4 \text{ u.a.}$$

$$22.5 \quad 18x - 3x^2 = 2(12 - 2x) + 2 \times \frac{3x}{2} \Leftrightarrow 18x - 3x^2 = 24 - x \Leftrightarrow -3x^2 + 19x - 24 = 0$$



1,7 e 4,6.

23. Designando por x e y as medidas dos catetos, tem-se $x + y = 24 \Leftrightarrow y = 24 - x$ e a área é dada por

$$A = \frac{x \times y}{2} = \frac{x(24 - x)}{2} = -\frac{x^2}{2} + 12x = -\frac{1}{2}(x^2 - 24x) = -\frac{1}{2}[(x - 12)^2 - 144] = -\frac{1}{2}(x - 12)^2 + 72.$$

Como o gráfico da função A , de domínio $]0, 24[$, é parte de uma parábola com vértice de coordenadas $(12, 72)$ e concavidade voltada para baixo, a função A atinge o valor máximo, 72 , em $x = 12$.

Os catetos do triângulo que tem área máxima medem 12 cm, a hipotenusa

$$\sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2} \text{ cm e a área é } 72 \text{ cm}^2.$$

PÁG. 154**Aplicar +**

$$24.1 \quad 2\overline{AH} + 2\overline{GH} = 100 \Leftrightarrow \overline{GH} = 50 - x$$

$$A = \overline{AH} \times \overline{GH} - 3 \times 5 \times 5 = x(50 - x) - 75 = -x^2 + 50x - 75$$

$$24.2 \quad g(x) = -x^2 + 50x - 75 = -(x^2 - 50x) - 75 = -[(x - 25)^2 - 625] - 75 = -(x - 25)^2 + 550$$

Como o gráfico de g , de domínio $]10, 40[$, é parte de uma parábola com vértice de coordenadas $(25, 550)$ e concavidade voltada para baixo, a função g atinge o valor máximo, 550 , em $x = 25$.

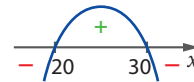
Assim, a área do terreno é máxima se $x = 25$ e o valor dessa área é 550 m^2 .

$$24.3 \quad g(x) \leq 525 \Leftrightarrow -x^2 + 50x - 75 \leq 525 \Leftrightarrow -x^2 + 50x - 600 \leq 0$$

$$-x^2 + 50x - 600 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4(-1)(-600)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-50 - 10}{-2} \vee x = \frac{-50 + 10}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 30 \vee x = 20$$

$$S =]10, 40[\cap (]-\infty, 20[\cup]30, +\infty[) =]10, 20[\cup]30, 40[$$



$$\overline{FG} = x - 10 \in]0, 10[\cup]20, 30[$$

PÁG. 155**Aplicar +**

$$25.1 \quad h(x) = 0 \Leftrightarrow -0,01x^2 + x + 50 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-0,01)(50)}}{2(-0,01)} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{-0,02}$$

Como $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{-0,02} < 0$, então $x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{-0,02} \approx 137$ m.

A distância horizontal entre o ponto onde o projétil atinge a planície e a vertical do ponto de lançamento é aproximadamente 137 metros.

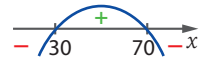
$$25.2 \quad h(x) = -0,01x^2 + x + 50 = -0,01(x^2 - 100x) + 50 = -0,01[(x - 50)^2 - 2500] + 50 = \\ = -0,01(x - 50)^2 + 75$$

A altura máxima do projétil em relação à planície é 75 m.

$$25.3 \quad h(x) \geq 71 \Leftrightarrow -0,01x^2 + x + 50 \geq 71 \Leftrightarrow -0,01x^2 + x - 21 \geq 0$$

$$-0,01x^2 + x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-0,01)(-21)}}{2(-0,01)} \Leftrightarrow x = \frac{-1 - 0,4}{-0,02} \vee x = \frac{-1 + 0,4}{-0,02} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 70 \vee x = 30$$

$$S = [30, 70]$$



A altura do projétil em relação à planície é superior ou igual a 71 metros ao longo de $70 - 30 = 40$ m.

26.1 O esboço do gráfico apresenta-se no final desta resolução, com os elementos referentes a cada uma das alíneas. Em cada alínea, apresenta-se também uma resolução analítica da mesma.

$$a. \quad x(0) = 16 + 4 \times 0 - 2 \times 0^2 = 16 \text{ m}, \quad x(3) = 16 + 4 \times 3 - 2 \times 3^2 = 10 \text{ m},$$

$$x(5) = 16 + 4 \times 5 - 2 \times 5^2 = -14 \text{ m}$$

$$b. \quad x(t) = -2t^2 + 4t + 16 = -2(t^2 - 2t) + 16 = -2[(t - 1)^2 - 1] + 16 = -2(t - 1)^2 + 18$$

A distância máxima do automóvel à origem do referencial é 18 m e ocorreu ao fim de 1 segundo.

$$c. \quad x(t) = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + 4t + 16 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 2t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)8}}{2(-1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t = \frac{-2 - 6}{-2} \vee t = \frac{-2 + 6}{-2} \Leftrightarrow t = 4 \vee t = -2$$

O automóvel está na origem do referencial ao fim de 4 segundos.

d. Para $0 \leq t \leq 5$, automóvel esteve a mais de 11 metros da origem do referencial quando:

$$x(t) > 11 \vee x(t) < -11$$

$$\bullet \quad x(t) > 11 \Leftrightarrow 16 + 4t - 2t^2 > 11 \Leftrightarrow -2t^2 + 4t + 5 > 0$$

$$-2t^2 + 4t + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-2)5}}{2(-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{56}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{4 - \sqrt{56}}{4} \vee x = \frac{4 + \sqrt{56}}{4}$$

Como $\frac{4 - \sqrt{56}}{4} < 0$ e o gráfico da função definida por $y = -2t^2 + 4t + 5$

é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, então,

para $0 \leq t \leq 5$, $x(t) > 11 \Leftrightarrow -2t^2 + 4t + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{4 + \sqrt{56}}{4} \right]$.

• $x(t) < -11 \Leftrightarrow 16 + 4t - 2t^2 < -11 \Leftrightarrow -2t^2 + 4t + 27 < 0$

$$-2t^2 + 4t + 27 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-2)27}}{2(-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{232}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{4 - \sqrt{232}}{4} \vee x = \frac{4 + \sqrt{232}}{4}$$

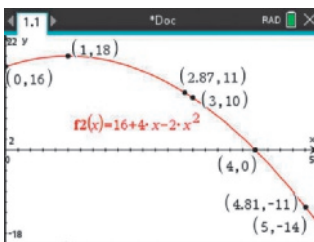
Como $\frac{4 - \sqrt{232}}{4} < 0$, $0 < \frac{4 + \sqrt{232}}{4} < 5$ e o gráfico da função definida por $y = -2t^2 + 4t + 27$

é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, então, para $0 \leq t \leq 5$,

$x(t) < -11 \Leftrightarrow -2t^2 + 4t + 27 < 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4 + \sqrt{232}}{4}, 5 \right]$.

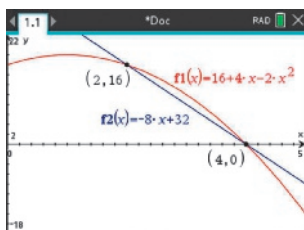
Assim, o automóvel esteve a mais de 11 metros da origem do referencial durante:

$$\left(\frac{4 + \sqrt{56}}{4} - 0 \right) + \left(5 - \frac{4 + \sqrt{232}}{4} \right) \approx 3,1 \text{ segundos.}$$



$$\mathbf{26.2} \quad x(t) = x_2(t) \Leftrightarrow -2t^2 + 4t + 16 = 32 - 8t \Leftrightarrow -2t^2 + 12t - 16 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 6t - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)} \Leftrightarrow t = \frac{-6 - 2}{-2} \vee t = \frac{-6 + 2}{-2} \Leftrightarrow t = 4 \vee t = 2$$



PÁG. 156**Aplicar +**

$$27.1 \quad d_A(0) = 375 - 25 \times 0 = 375 \text{ m}, \quad d_B(0) = 400 - 14 \times 0 - 0,9 \times 0^2 = 400 \text{ m},$$

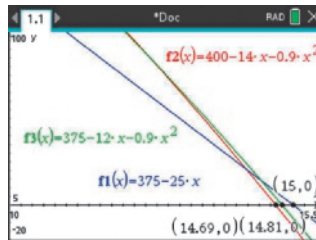
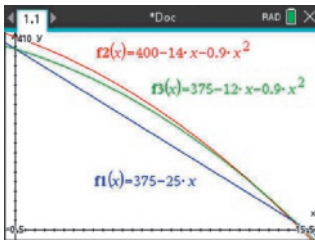
$$d_C(0) = 375 - 12 \times 0 - 0,9 \times 0^2 = 375 \text{ m}$$

Os condutores A e C estavam à mesma distância da meta, à frente do condutor B .

$$27.2 \quad d_A(t) = 0 \Leftrightarrow 375 - 25t = 0 \Leftrightarrow t = 15 \text{ s}$$

$$d_B(t) = 0 \Leftrightarrow 400 - 14t - 0,9t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4(-0,9)400}}{2(-0,9)} \Leftrightarrow t \approx 14,69 \text{ s}$$

$$d_C(t) = 0 \Leftrightarrow 375 - 12t - 0,9t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(-0,9)375}}{2(-0,9)} \Leftrightarrow t \approx 14,81 \text{ s}$$

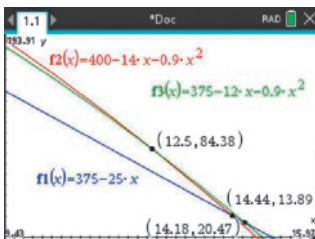


1.º lugar: condutor B , 2.º lugar: condutor C , 3.º lugar: condutor A .

$$27.3 \quad d_A(t) = d_B(t) \Leftrightarrow t \approx 14,18 \text{ s}$$

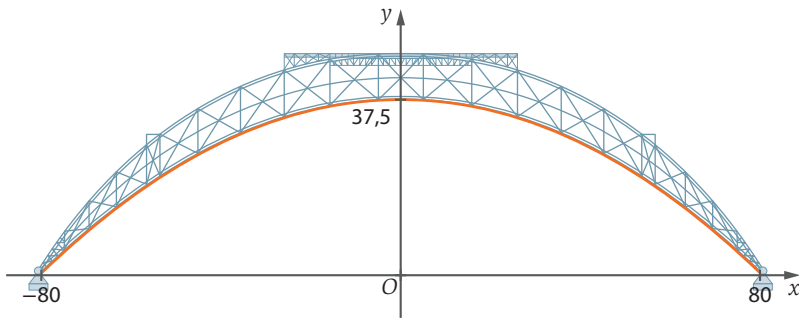
$$d_A(t) = d_C(t) \Leftrightarrow t \approx 14,44 \text{ s}$$

$$d_B(t) = d_C(t) \Leftrightarrow t = 12,5 \text{ s}$$



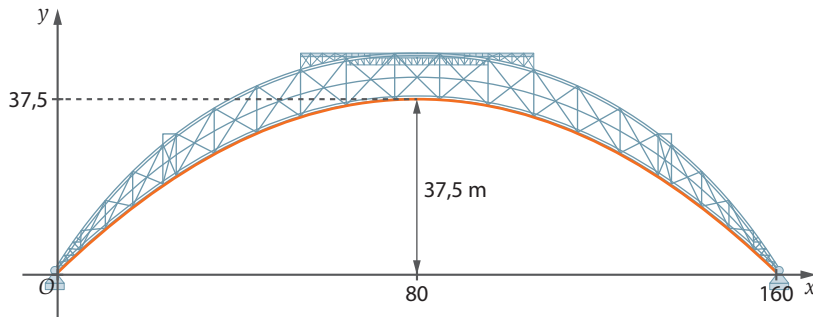
Sim. O condutor B ultrapassou o condutor C , aos $12,5 \text{ s}$, e ultrapassou o condutor A , aproximadamente aos $14,18 \text{ s}$. O condutor C ultrapassou o condutor A , aproximadamente aos $14,44 \text{ s}$.

28.1



$$y = ax^2 + 37,5, \quad a \times 80^2 + 37,5 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{512}, \quad y = -\frac{3}{512}x^2 + 37,5, \quad D = [-80, 80]$$

28.2



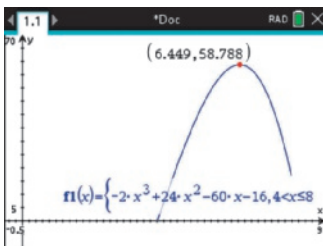
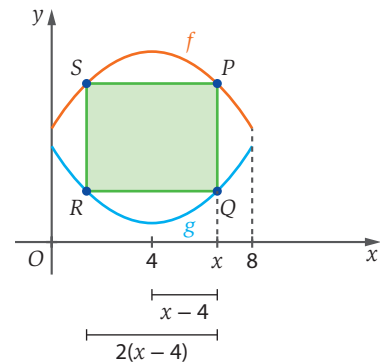
$$y = a(x - 80)^2 + 37,5, \quad a \times (0 - 80)^2 + 37,5 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{512}, \quad y = -\frac{3}{512}(x - 80)^2 + 37,5, \quad D = [0, 160]$$

29. $A_{[PQRS]} = \overline{PQ} \times \overline{QR}$

$$\overline{QR} = 2(x - 4) = 2x - 8,$$

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= f(x) - g(x) = f(x) - [-f(x) + 22] = \\ &= 2(-0,5x^2 + 4x + 12) - 22 = -x^2 + 8x + 2 \end{aligned}$$

$$(2x - 8)(-x^2 + 8x + 2) = -2x^3 + 24x^2 - 60x - 16$$



O valor de x para o qual a área do retângulo $[PQRS]$ é máxima é aproximadamente 6,4.



30.1 $f(-4) = (-4)^2 + 6(-4) + 11 = 3$, $f(-2) = \frac{1}{2}(-2) + 2 = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}(2) + 2 = 3$,
 $f(4) = -4^2 + 6 \times 4 - 7 = 1$.

30.2 $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 11 = 0 \wedge x < -2) \vee \left(\frac{1}{2}x + 2 = 0 \wedge -2 \leq x \leq 2\right) \vee$
 $\vee (-x^2 + 6x - 7 = 0 \wedge x > 2) \Leftrightarrow$

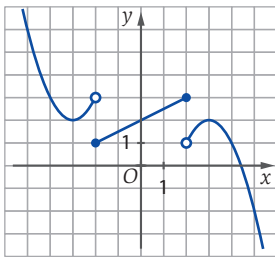
$\Leftrightarrow \left(x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 11}}{2 \times 1} \wedge x < -2\right) \vee (x = -4 \wedge -2 \leq x \leq 2) \vee$

$\vee \left(x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-7)}}{2 \times (-1)} \wedge x > 2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{-6 \pm \sqrt{-8}}{2} \wedge x < -2\right) \vee (x = -4 \wedge -2 \leq x \leq 2) \vee \left(x = \frac{-6 \pm \sqrt{8}}{-2} \wedge x > 2\right) \Leftrightarrow$
 (Impossível) (Impossível)

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{-6 - \sqrt{8}}{-2} \vee x = \frac{-6 + \sqrt{8}}{-2}\right) \wedge x > 2 \Leftrightarrow (x = 3 + \sqrt{2} \vee x = 3 - \sqrt{2}) \wedge x > 2 \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{2}$

30.3



PÁG. 158**Aplicar +**

31.1 f é crescente em $]-1, 3]$ e é decrescente em $[3, 6[$; g é crescente em $[1, 3]$ e em $[4, 6[$ e é decrescente em $[-1, 1]$ e em $[3, 4]$.

31.2 f tem máximo absoluto e relativo 6 , em $x = 3$; f não tem mínimos;

g tem máximo absoluto e relativo 5 , em $]-2, -1]$; g tem máximo relativo 4 , em $x = 3$;

g tem mínimo absoluto -3 , em $x = 1$; g tem mínimo relativo 5 , em $]-2, -1[$, e 1 , em $x = 4$.

31.3 Em $]-2, 1[$, $f(x) = mx + b$

$$(-2, -1) \text{ e } (1, 2), m = \frac{2 - (-1)}{1 - (-2)} = 1$$

$$2 = 1 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 1, y = x + 1$$

Em $[1, 6[$, $f(x) = a(x - h)^2 + k$, $f(x) = a(x - 3)^2 + 6$

$$a(1 - 3)^2 + 6 = 2 \Leftrightarrow a = -1, f(x) = -(x - 3)^2 + 6$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } -2 < x < 1 \\ -(x - 3)^2 + 6 & \text{se } 1 \leq x < 6 \end{cases}$$

Em $]-2, -1[$, $g(x) = 5$

Em $[-1, 2[$, $g(x) = a(x - h)^2 + k$, $g(x) = a(x - 1)^2 - 3$

$$a(-1 - 1)^2 - 3 = 5 \Leftrightarrow a = 2, g(x) = 2(x - 1)^2 - 3$$

Em $[2, 4]$, $g(x) = a(x - h)^2 + k$, $g(x) = a(x - 3)^2 + 4$

$$a(2 - 3)^2 + 4 = 1 \Leftrightarrow a = -3, g(x) = -3(x - 3)^2 + 4$$

Em $]4, 6[$, $g(x) = mx + b$

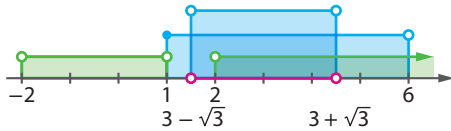
$$(4, 3) \text{ e } (6, 4), m = \frac{4 - 3}{6 - 4} = \frac{1}{2}$$

$$3 = \frac{1}{2} \times 4 + b \Leftrightarrow b = 1, y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$g(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } -2 < x < -1 \\ 2(x - 1)^2 - 3 & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ -3(x - 3)^2 + 4 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{se } 4 < x < 6 \end{cases}$$

31.4

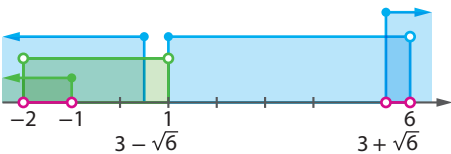
$$\begin{aligned}
 \text{a. } f(x) > 3 &\Leftrightarrow (x+1 > 3 \wedge -2 < x < 1) \vee (-(x-3)^2 + 6 > 3 \wedge 1 \leq x < 6) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x > 2 \wedge -2 < x < 1) \vee ((x-3)^2 < 3 \wedge 1 \leq x < 6) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in]2, +\infty[\cap]-2, 1[\cup (]3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}[\cap [1, 6[) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in]3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}[
 \end{aligned}$$



Cálculo auxiliar:

$$(x-3)^2 = 3 \Leftrightarrow x-3 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{3} \vee x = 3 + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } f(x) \leq 0 &\Leftrightarrow (x+1 \leq 0 \wedge -2 < x < 1) \vee (-(x-3)^2 + 6 \leq 0 \wedge 1 \leq x < 6) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x \leq -1 \wedge -2 < x < 1) \vee ((x-3)^2 \geq 6 \wedge 1 \leq x < 6) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cap]-2, 1[\cup ((]-\infty, 3 - \sqrt{6}] \cup [3 + \sqrt{6}, +\infty[) \cap [1, 6[) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in]-2, -1] \cup [3 + \sqrt{6}, 6[
 \end{aligned}$$



Cálculo auxiliar:

$$(x-3)^2 = 6 \Leftrightarrow x-3 = \pm\sqrt{6} \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{6} \vee x = 3 + \sqrt{6}$$

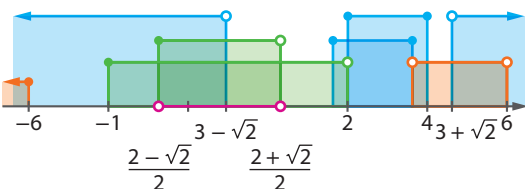
$$\begin{aligned}
 \text{c. } g(x) < -2 &\Leftrightarrow (5 < -2 \wedge -2 < x < -1) \vee (2(x-1)^2 - 3 < -2 \wedge -1 \leq x < 2) \vee \\
 &\quad \text{(Impossível)}
 \end{aligned}$$

$$\vee (-3(x-3)^2 + 4 < -2 \wedge 2 \leq x \leq 4) \vee \left(\frac{1}{2}x + 1 < -2 \wedge 4 < x < 6\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left((x-1)^2 < \frac{1}{2} \wedge -1 \leq x < 2\right) \vee ((x-3)^2 > 2 \wedge 2 \leq x \leq 4) \vee (x < -6 \wedge 4 < x < 6) \Leftrightarrow \\
 &\quad \text{(Impossível)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow x \in \left(\left]\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right[\cap [-1, 2[\cup (]-\infty, 3 - \sqrt{2}[\cup]3 + \sqrt{2}, +\infty[\cap [2, 4] \cup \right. \\
 &\quad \left. \cup]-\infty, -6[\cap]4, 6[\right) \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right[$$



Cálculo auxiliar:

$$(x - 1)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$(x - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow x - 3 = \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{2} \vee x = 3 + \sqrt{2}$$

$$\mathbf{d.} \quad g(x) \geq 4 \Leftrightarrow (5 \geq 4 \wedge -2 < x < -1) \vee (2(x - 1)^2 - 3 \geq 4 \wedge -1 \leq x < 2) \vee$$

(Impossível)

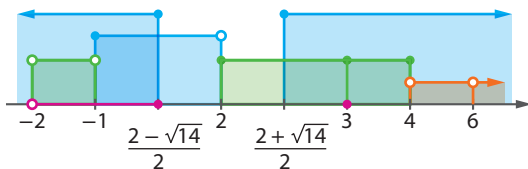
$$\vee (-3(x - 3)^2 + 4 \geq 4 \wedge 2 \leq x \leq 4) \vee \left(\frac{1}{2}x + 1 \geq 4 \wedge 4 < x < 6\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5 \geq 4 \wedge -2 < x < -1) \vee \left((x - 1)^2 \geq \frac{7}{2} \wedge -1 \leq x < 2\right) \vee$$

$$\vee ((x - 3)^2 \leq 0 \wedge 2 \leq x \leq 4) \vee (x \geq 6 \wedge 4 < x < 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-2, -1[\cup \left(]-\infty, \frac{2 - \sqrt{14}}{2}[\cup \left[\frac{2 + \sqrt{14}}{2}, +\infty[\cap]-1, 2[\right) \cup$$

$$\cup (\{3\} \cap [2, 4]) \cup ([6, +\infty[\cap]4, 6[) \Leftrightarrow x \in \left]-2, \frac{2 - \sqrt{14}}{2}\right] \cup \{3\}$$



Cálculo auxiliar:

$$(x - 1)^2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x - 1 = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2} \vee x = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$(x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

OU

a. Por observação do gráfico de f , verifica-se que se tem $f(x) > 3$ apenas no ramo correspondente ao intervalo $[1, 6[$.

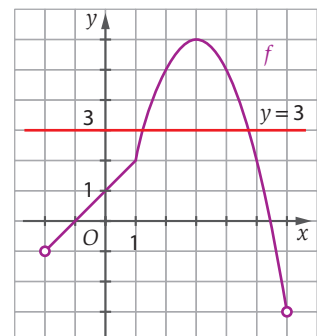
Assim, basta determinarmos a solução da equação $-(x - 3)^2 + 6 = 3$, e observar a representação gráfica, para obtermos o conjunto-solução da condição $f(x) > 3$:

$$-(x - 3)^2 + 6 = 3 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 3 \Leftrightarrow x - 3 = \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{3} \vee x = 3 + \sqrt{3}$$

Logo, o conjunto-solução da condição $f(x) > 3$ é

$$\left]3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}\right[.$$



b. Observando o gráfico de f , basta determinarmos os seus zeros para encontrarmos o conjunto-solução da condição $f(x) \leq 0$.

No ramo definido no intervalo $]-2, 1[$, a função f tem apenas um zero: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

No ramo definido no intervalo $[1, 6[$, a função f tem apenas um zero:

$$-(x-3)^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 6 \Leftrightarrow x-3 = \pm\sqrt{6} \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{6} \vee x = 3 + \sqrt{6}$$

Como $x \in [1, 6[$, vem que $x = 3 + \sqrt{6}$.

Assim, tendo em conta o domínio de f , $]-2, 6[$, o conjunto-solução da condição $f(x) \leq 0$ é $]-2, -1] \cup [3 + \sqrt{6}, 6[$.

c. Por observação do gráfico de g , verifica-se que se tem $g(x) < -2$ apenas no ramo correspondente ao intervalo $[-1, 2[$.

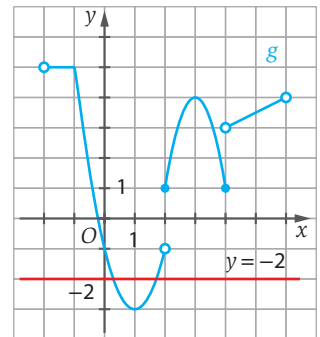
Assim, basta determinarmos a solução da equação $2(x-1)^2 - 3 = -2$ para obtermos o conjunto-solução da condição $g(x) < -2$:

$$2(x-1)^2 - 3 = -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

Logo, o conjunto-solução da condição $g(x) < -2$ é $\left] \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right[$.



d. Por observação do gráfico de g , verifica-se que $g(x) \geq 4$ em $x = 3$ ($g(3) = 4$) e em $]-2, a[$, sendo a um valor pertencente ao intervalo $[-1, 2[$ tal que $g(a) = 4$.

Assim, basta determinarmos a solução da equação $2(x-1)^2 - 3 = 4$ para obtermos o conjunto-solução da condição $g(x) \geq 4$:

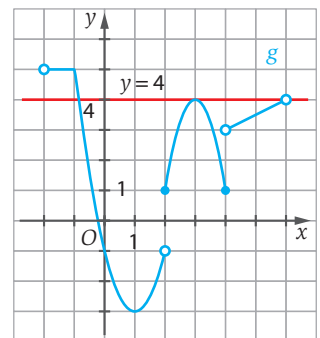
$$2(x-1)^2 - 3 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x-1 = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2} \vee x = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{14}}{2} \vee x = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}$$

Como $\frac{2 + \sqrt{14}}{2} > 2$ e $-1 \leq \frac{2 + \sqrt{14}}{2} < 2$, $a = \frac{2 - \sqrt{14}}{2}$ e o conjunto-solução da condição $g(x) \geq 4$ é

$$\left] -2, \frac{2 - \sqrt{14}}{2} \right] \cup \{3\}.$$



32.1 Começemos por determinar o declive da reta r , que é igual ao da reta s , por serem paralelas.

$$A(4, 1) \text{ e } B(-2, -3), m = \frac{-3 - 1}{-2 - 4} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

A ordenada na origem da reta s é igual à da reta t .

$$\text{Assim, } f(x) = \frac{2}{3}x + 2.$$

32.2

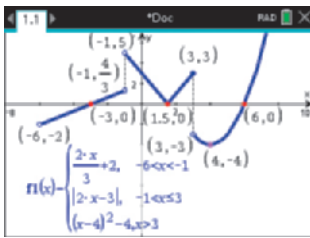
a. (D)

$$g(0) + g(3) - g(5) = |2 \times 0 - 3| + |2 \times 3 - 3| - [(5 - 4)^2 - 4] = 3 + 3 + 3 = 9$$

b. $D_g =]-6, -1[\cup]-1, +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{c. } g(x) = 0 &\Leftrightarrow (f(x) = 0 \wedge -6 < x < -1) \vee (|2x - 3| = 0 \wedge -1 < x \leq 3) \vee ((x - 4)^2 - 4 = 0 \wedge x > 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x + 2 = 0 \wedge -6 < x < -1\right) \vee (2x - 3 = 0 \wedge -1 < x \leq 3) \vee ((x - 4)^2 = 4 \wedge x > 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = -3 \wedge -6 < x < -1) \vee \left(x = \frac{3}{2} \wedge -1 < x \leq 3\right) \vee (x = 2 \vee x = 6 \wedge x > 3) \Leftrightarrow x \in \left\{-3, \frac{3}{2}, 6\right\} \end{aligned}$$

d.



e.

x	-6		-3		-1		$\frac{3}{2}$		3		6	$+\infty$
$g(x)$	N.D.	-	0	+	N.D.	+	0	+	3	-	0	+

f. g é crescente em $]-6, -1[$, em $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ e em $[4, +\infty[$;

g é decrescente em $]-1, \frac{3}{2}]$ e em $[3, 4]$.

g tem mínimo absoluto e relativo -4 em $x = 4$ e mínimo relativo 0 em $x = \frac{3}{2}$;

máximo relativo 3 em $x = 3$ e não tem máximo absoluto.

$$D'_g = [-4, +\infty[$$



PÁG. 159

Aplicar +

33.1 Modalidade A : $35 + 7 \times 6 = 77$, modalidade B : $6 \times 10 = 60$.

Aparentemente, até 6 horas, a modalidade B é mais vantajosa. Confirmemos isto com a resolução de uma inequação.

Seja x o número de horas passadas no ginásio.

$$35 + 7x > 10x \Leftrightarrow 35 > 3x \Leftrightarrow \frac{35}{3} > x \Leftrightarrow x < 11,(\underline{6})$$

Confirma-se que até 6 horas (que é menor do que $11,(\underline{6})$) a modalidade B é mais vantajosa.

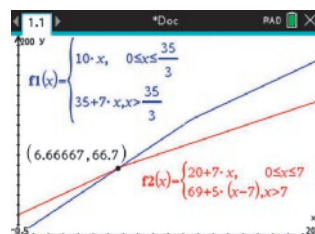
33.2 (B)

$$35 + 7x < 10x \Leftrightarrow x > \frac{35}{3}$$

$$\frac{35}{3} \text{ h} = 11 \text{ h} + \frac{2}{3} \text{ h} = 11 \text{ h} + \frac{2}{3} \times 60 \text{ min} = 11 \text{ h} + 40 \text{ min}$$

33.3

$$\text{a. } C(t) = \begin{cases} 20 + 7t & \text{se } 0 \leq t \leq 7 \\ 7 \times 7 + 20 + 5(t - 7) & \text{se } t > 7 \end{cases}$$

b.

O ponto de interseção dos gráficos das duas funções tem abcissa $6,(\underline{6})$ e

$$6,(\underline{6}) \text{ h} = 6 \text{ h} + 0,(\underline{6}) \text{ h} = 6 \text{ h} + \frac{2}{3} \text{ h} = 6 \text{ h} + \frac{2}{3} \times 60 \text{ min} = 6 \text{ h} + 40 \text{ min} .$$

Até às 6 h 40 min de utilização, a melhor opção é o ginásio *Superfit* na modalidade B .

Após as 6 h 40 min de utilização, a melhor opção é o ginásio *Runningfit*.

PÁG. 164

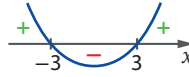
Autoavaliação

1. (B)

$$f(x) = mx + 2, \quad m > 0$$

2. (C)

$$x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \vee x \geq 3$$



3. (C)

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad D'_f = [c, +\infty[$$

(A) Verdadeira porque $D'_f = [c, +\infty[$.

(B) Verdadeira porque $D'_f = [c, +\infty[$.

(C) É falsa, se $c > 0$.

(D) Verdadeira porque sendo $D'_f = [c, +\infty[$, tem-se $b = 0$, e o eixo de simetria do gráfico de f tem equação $x = 0$.

4. (A)

$a > 0$ porque a parábola tem a concavidade voltada para cima; $h > 0$ e $k < 0$, porque o vértice da parábola pertence ao 4.º quadrante.

$$5.1 \quad h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 24,5t + 29,4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-24,5 \pm \sqrt{24,5^2 - 4(-4,9)29,4}}{2(-4,9)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-24,5 - 34,3}{-9,8} \vee t = \frac{-24,5 + 34,3}{-9,8} \Leftrightarrow t = 6 \vee t = -1, \quad D_h = [0, 6]$$

5.2 $h(0) = -4,9 \times 0^2 + 24,5 \times 0 + 29,4 = 29,4$, o projétil foi lançado a 29,4 m do solo.

$h(1) = -4,9 \times 1^2 + 24,5 \times 1 + 29,4 = 49$, 1 s após o lançamento, o projétil estava a 49 m do solo.

$$5.3 \quad h(t) = 55 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 24,5t + 29,4 = 55 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 24,5t - 25,6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-24,5 \pm \sqrt{24,5^2 - 4(-4,9)(-25,6)}}{2(-4,9)} \Leftrightarrow t \approx \frac{-24,5 - 9,92}{-9,8} \vee t \approx \frac{-24,5 + 9,92}{-9,8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \approx 3,51 \vee t \approx 1,49$$

Desde o lançamento, decorreu, aproximadamente, 1,5 s até que o projétil atingisse 55 m de altura relativa ao solo.

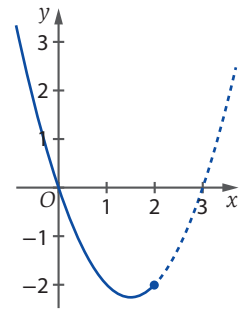
$$5.4 \quad x_v = \frac{-1+6}{2} = 2,5, \quad y_v = h(2,5) = -4,9 \times 2,5^2 + 24,5 \times 2,5 + 29,4 = 60,025$$

A altura máxima atingida pelo projétil foi 60,025 m

$$6.1 \quad \frac{f(0) + f(2)}{f(3)} = \frac{(0^2 - 3 \times 0) + (2^2 - 3 \times 2)}{-3 + 4} = -2$$

6.2 O esboço do gráfico da função em $]-\infty, 2]$ permite responder a este item.

f é positiva em $]-\infty, 0[$ e negativa em $]0, 2]$.



$$7.1 \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2, 4\}$$

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
Sinal de g	+	0	-	0	+	0	-

$$7.2 \quad \text{Em }]-\infty, 2], \quad g(x) = a(x - h)^2 + k, \quad g(x) = a(x - 1)^2 - 2$$

$$a(0 - 1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2, \quad g(x) = 2(x - 1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x$$

Em $]2, +\infty[$, $g(x) = mx + b$

$$(2, 2) \text{ e } (4, 0), \quad m = \frac{0 - 2}{4 - 2} = -1$$

$$0 = -1 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 4, \quad g(x) = -x + 4$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x & \text{se } x \leq 2 \\ -x + 4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$8.1 \quad S(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(-2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$$

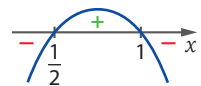
$x_v = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$, pelo que, como o gráfico de S é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e

$\frac{3}{4} \in]0, 3[$, a área do triângulo $[OAP]$ é máxima se $x = \frac{3}{4}$.

$$8.2 \quad S(x) < 1 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x < 1 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 1 < 0$$

$$-2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)(-1)}}{2(-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-3 - 1}{-4} \vee x = \frac{-3 + 1}{-4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left(]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[\right) \cap]0, 3[=]0, \frac{1}{2}[\cup]1, 3[$$



$$8.3 \quad f(x) = mx + b, \quad m < 0$$

$A(x, 0)$, $P(x, mx + b)$

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AP}}{2} = \frac{x(mx + b)}{2} = \frac{m}{2}x^2 + \frac{b}{2}x$$

$$\frac{m}{2}x^2 + \frac{b}{2}x = -2x^2 + 3x \Leftrightarrow \frac{m}{2} = -2 \wedge \frac{b}{2} = 3 \Leftrightarrow m = -4 \wedge b = 6$$

$$f(x) = -4x + 6$$

OU

$P(x, f(x))$ e $A(x, 0)$.

A área do triângulo $[OAP]$ é dada por $\overline{OA} \times \frac{\overline{AP}}{2} = x \frac{f(x)}{2}$.

Logo, $x \frac{f(x)}{2} = -2x^2 + 3x \Leftrightarrow xf(x) = -4x^2 + 6x \Leftrightarrow xf(x) = x(-4x + 6)$

Como x é diferente de zero, então $f(x) = -4x + 6$.



PÁG. 166

Teste global

1. (D)

O ponto A é o circuncentro (equidistante dos três vértices do triângulo, interseção das mediatrizes dos seus lados) e o ponto B é o incentro (interseção das bissetrizes).

2.1 (A)

$$\overline{AC} = 9 \Leftrightarrow \overline{AE} + \overline{EC} = 9 \Leftrightarrow \overline{AE} + 2\overline{AE} = 9 \Leftrightarrow 3\overline{AE} = 9 \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{9}{3} \Leftrightarrow \overline{AE} = 3$$

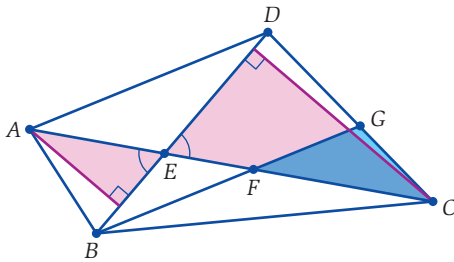
$$\overline{CE} = 2 \times 3 = 6$$

$$\overline{EF} = \frac{1}{3}\overline{EC} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{1}{3} \times 6 \Leftrightarrow \overline{EF} = 2$$

$$2.2 \text{ Tem-se } A_{[CGF]} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}A_{[BCD]} = 2 \Leftrightarrow A_{[BCD]} = 2 \times 6 \Leftrightarrow A_{[BCD]} = 12 \text{ e } A_{[ABCD]} = A_{[BCD]} + A_{[ABD]}.$$

Traçando as alturas dos triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$ relativas ao lado $[BD]$, obtemos dois triângulos retângulos com dois ângulos correspondentes iguais (o ângulo reto e o ângulo de vértice em E) e tais que a hipotenusa do menor é metade da hipotenusa do maior: $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{CE}$.

$$\text{Assim, } A_{[ABD]} = \frac{\text{base}_{[ABD]} \times \text{altura}_{[ABD]}}{2} = \frac{\text{base}_{[BCD]} \times \frac{1}{2}\text{altura}_{[BCD]}}{2} = \frac{1}{2} \frac{\text{base}_{[BCD]} \times \text{altura}_{[BCD]}}{2} = \frac{1}{2}A_{[BCD]}$$



$$\text{Logo, } A_{[ABD]} = \frac{1}{2} \times 12 = 6 \text{ e } A_{[ABCD]} = 12 + 6 = 18.$$

3.1 (C)

(A) Falsa, porque $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(B) Falsa, porque $\exists x > 0 : f(x) > f(0)$.

(C) Verdadeira, porque -2 é mínimo absoluto de f .

(D) Falsa, porque $D_f = [-2, +\infty[\setminus \{0\}$.

$$3.2 \text{ (B) } f(x) \times f(-1) \geq 0 \underset{f(-1) < 0}{\Leftrightarrow} f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 0]$$

4. (D)

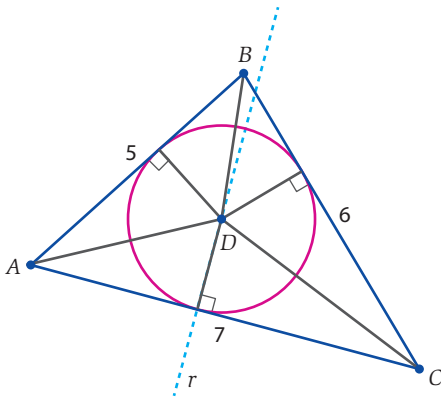
O vértice da parábola que é o gráfico de g tem coordenadas $(-2, -1)$ e as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função f são $(-2 + 3, -(-1) + 3) = (1, 4)$.

5.1 O centro da circunferência inscrita no triângulo $[ABC]$, o ponto D , é o incentro do triângulo.

Como este é escaleno, o seu incentro não pode pertencer à reta de Euler.

Dado que a reta r contém o ponto D , incentro do triângulo, a reta r não é a reta de Euler do triângulo $[ABC]$.

5.2 Consideremos o triângulo $[ABC]$ decomposto em três triângulos, cujas bases são os lados do triângulo $[ABC]$ e cujas alturas são iguais ao raio da circunferência inscrita, tal como se ilustra na figura.



Assim,

$$A_{[ABC]} = a \Leftrightarrow \frac{5 \times \text{raio}}{2} + \frac{6 \times \text{raio}}{2} + \frac{7 \times \text{raio}}{2} = a \Leftrightarrow \frac{18 \times \text{raio}}{2} = a \Leftrightarrow \text{raio} = \frac{2a}{18} \Leftrightarrow \text{raio} = \frac{a}{9}$$

6.1 $g(x) + k = 0 \Leftrightarrow g(x) = -k$

Assim, temos de verificar que retas horizontais, com equação do tipo $y = -k$, intersectam o gráfico da função em exatamente dois pontos. Conclui-se que isso acontece para:

$$k \in [-6, -4[\cup]-4, -\frac{8}{3}] \cup \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

6.2

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		0		3	$+\infty$
Monotonia de g	\searrow	$-\frac{3}{2}$	\nearrow	4	\rightarrow	6	\searrow

g é decrescente em $[-\infty, -\frac{5}{2}]$ e em $[3, +\infty[$, é crescente em $[-\frac{5}{2}, 0]$ e é constante em $[0, 3[$.

g tem mínimo relativo $-\frac{3}{2}$, em $x = -\frac{5}{2}$, e 4, em $]0, 3[$.

g tem máximo relativo 4, em $[0, 3[$, e 6, em $x = 3$.

6.3 $g(x) \leq 8 \Leftrightarrow g(x) \leq \frac{8}{3}$

Tendo em conta o gráfico, conclui-se que o conjunto-solução da condição é $[a, 0[\cup]c, +\infty[$, em que:

- a é a abcissa do outro ponto da parábola que é o gráfico de g para $x < 0$, cuja ordenada é $\frac{8}{3}$.

Como $(0, \frac{8}{3})$ pertence a essa parábola e a reta de equação $x = -\frac{5}{2}$ é o eixo de simetria da parábola,

então $a = 0 - 2 \times \frac{5}{2} = -5$.

- c é a abcissa da semirreta que é o gráfico de g para $x \geq 3$ e cuja ordenada é $\frac{8}{3}$.

O declive desta semirreta é $m = \frac{6-0}{3-5} = -3$, pelo que, como $(3, 6)$ pertence à semirreta, vem,

$$6 = -3 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 15$$

$$\text{Logo, } \frac{8}{3} = -3c + 15 \Leftrightarrow -\frac{37}{3} = -3c \Leftrightarrow c = \frac{37}{9}.$$

$$\text{Portanto, } S = [-5, 0[\cup \left[\frac{37}{9}, +\infty[.$$

6.4 Para $x < 0$, $g(x) = a \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$

$$a \left(0 + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{25}{4}a = \frac{8}{3} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{25}{6} \times \frac{4}{25} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$g(x) = \frac{2}{3} \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

Para $x \geq 3$, $g(x) = mx + b$

$$(3, 6) \text{ e } (5, 0), m = \frac{6-0}{3-5} = -3$$

$$6 = -3 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 15, y = -3x + 15$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} & \text{se } x < 0 \\ 4 & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ -3x + 15 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

7. Como o hexágono é regular, então $\overline{DC} = \overline{DE} = \overline{DO}$.

Como D é o circuncentro do triângulo $[ABC]$, então D é o centro da circunferência circunscrita.

Assim, $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$, pelo que $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = \overline{DE} = \overline{DO}$ e, portanto, os pontos E e O pertencem à circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.

8.1 Como o ponto S tem abcissa -2 e pertence ao gráfico de f , tem coordenadas $(-2, |-2|)$, ou seja, $(-2, 2)$.

$$R(-2, 5) \text{ e } S(-2, 2) \Rightarrow \overline{RS} = 3$$

A ordenada do ponto P é $|x| = x$, pois $x > 0$ e a ordenada do ponto Q , com abcissa igual à do ponto P , é $-\frac{x}{2} + 9$.

Assim, tem-se:

$$\overline{QP} = -\frac{x}{2} + 9 - x = -\frac{3}{2}x + 9; \text{ A altura do trapézio é } x_p - x_s = x + 2.$$

Logo, a área do trapézio $[PQRS]$ é dada por

$$\frac{\overline{RS} + \overline{QP}}{2} \times \text{altura} = \frac{3 - \frac{3}{2}x + 9}{2} \times (x + 2) = \left(-\frac{3}{4}x + 6\right)(x + 2) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 12 = A(x)$$

$$8.2 \quad A(x) = -\frac{3}{4} \left(x^2 - \frac{2}{3}x \right) + 12 = -\frac{3}{4}(x^2 - 6x) + 12 = -\frac{3}{4}[(x-3)^2 - 9] + 12 = -\frac{3}{4}(x-3)^2 + \frac{75}{4}$$

A área do trapézio $[PQRS]$ é máxima se $x = 3$ e o valor da área máxima é $A(3) = \frac{75}{4}$.

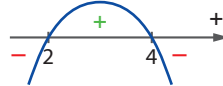
$$8.3 \quad A(x) < 18 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 12 < 18 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 18x - 24 < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8 < 0$$

Zeros de $-x^2 + 6x - 8$:

$$-x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-6 - 2}{-2} \vee x = \frac{-6 + 2}{-2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$$



$$S =]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[\cap]0, 6[= [0, 2[\cup]4, 6[$$

8.4

I. Para $x \leq -1$, $f(x) = -x$ e a distância entre A e B é dada por $-x - (x+2) = -2x - 2$ (é nula, precisamente em $x = -1$), que é a expressão analítica de uma função afim decrescente. Portanto, **I.** é verdadeira.

II. Para $x < 0$, $f(x) = -x$ e $f(x) = x+2 \Leftrightarrow -x = x+2 \Leftrightarrow x = -1$

Assim, o gráfico de f e a reta interseitam-se no ponto de abscissa -1 , ou seja, nesse ponto a distância entre A e B é nula.

Por outras palavras, $h(-1) = 0$, pelo que -1 é um zero de h e, portanto, **II.** é falsa.

III. Para $x \geq 0$, $f(x) = x$ e a distância entre A e B é constante (igual a 2), dado que a reta e o gráfico de f são paralelos.

Assim, para $x \geq 0$, h é constante, neste caso, $h(x) = 2$, pelo que 2 é máximo (relativo) de h e, portanto, **III.** é falsa.