

Geometria analítica no plano

Vol. 3 Cap. 1

PÁG. 12

Diagnóstico

$$1.1 \quad x^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 + 9 \Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = \sqrt{18} \quad (x > 0)$$

$$1.2 \quad 8^2 = 4^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 8^2 - 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 64 - 16 \Leftrightarrow x^2 = 48 \Leftrightarrow x = \sqrt{48} \quad (x > 0)$$

$$1.3 \quad 4^2 = 3^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4^2 - 3^2 \Leftrightarrow x^2 = 16 - 9 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7} \quad (x > 0)$$

2.1 B e C , por exemplo.

2.2 $A(2, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(0, 3)$, $D(-1, 0)$, $E(4, 3)$, $F(-2, -3)$, $G(1, -3)$, $H(0, -2)$.

2.3 A reta BC é a reta horizontal que intersesta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 3)$. Assim, uma equação da reta BC é $y = 3$.

A reta BD é a reta vertical que intersesta o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-1, 0)$. Assim, uma equação da reta BD é $x = -1$.

2.4 A reta paralela ao eixo Ox e que passa no ponto $A(2, 2)$ é a reta horizontal de equação $y = 2$.

2.5 A reta AE é uma reta não vertical, pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = mx + b$.

O declive da reta AE é $\frac{3-2}{4-2} = \frac{1}{2}$.

Substituindo as coordenadas do ponto E na equação, obtemos a ordenada na origem: $3 = \frac{1}{2} \times 4 + b \Leftrightarrow b = 3 - 2 \Leftrightarrow b = 1$.

Assim, a equação reduzida da reta AE é $y = \frac{1}{2}x + 1$.

3.1 O declive da reta é 3.

3.2 A ordenada na origem da reta é -1 . Assim, o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas tem coordenadas $(0, -1)$.

3.3 Substituindo as coordenadas do ponto dado na equação da reta, obtém-se $4 = 3 \times 2 - 1 \Leftrightarrow 4 = 5$, que é uma proposição falsa. Logo, o ponto não pertence à reta.

3.4 A abcissa do ponto da reta cuja ordenada é 15 é $3x - 1 = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15+1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{16}{3}$.

4. Designemos por r a reta que contém os pontos de coordenadas $(-1, -1)$ e $(0, 1)$.

O declive da reta r é $\frac{-1-1}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$ e a equação reduzida da reta r é $y = 2x + 1$.

Designemos por s a reta que contém os pontos de coordenadas $(3, 0)$ e $(0, 3)$.

O declive da reta s é $\frac{3-0}{0-3} = \frac{3}{-3} = -1$ e a equação reduzida da reta s é $y = -x + 3$.

O ponto I é o ponto de interseção das retas r e s .

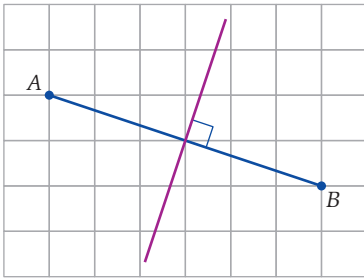
$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = -x + 3 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x = 3 - 1 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Logo, o ponto I tem coordenadas $(\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$.

PÁG. 13

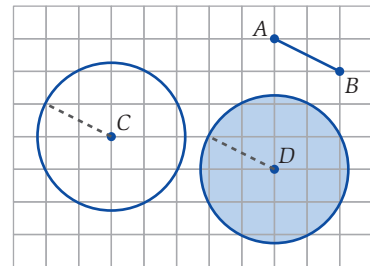
Diagnóstico

5. O conjunto de pontos do plano equidistantes dos pontos A e B é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.



6.1 O conjunto de pontos do plano cuja distância ao ponto C é igual ao comprimento do segmento de reta $[AB]$ é a circunferência de centro no ponto C e cujo raio é igual ao comprimento de $[AB]$.

6.2 O conjunto de pontos do plano cuja distância ao ponto D é inferior ou igual ao comprimento do segmento de reta $[AB]$ é o círculo de centro no ponto D e cujo raio é igual ao comprimento de $[AB]$.



7.1 $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, pois os pontos A e B são vértices consecutivos de um pentágono regular inscrito na circunferência.

7.2 a. C

b. E

c. C

7.3 B

8.1 a. $-2x > 6 \Leftrightarrow x < \frac{6}{-2} \Leftrightarrow x < -3$, $A =]-\infty, -3[$

b. $3x - 1 \leq 2x + 3 \Leftrightarrow 3x - 2x \leq 3 + 1 \Leftrightarrow x \leq 4$, $B =]-\infty, 4]$

c. $C = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$

d. $A \cup B =]-\infty, -3[\cup]-\infty, 4] =]-\infty, 4]$

e. $A \cap B =]-\infty, -3[\cap]-\infty, 4] =]-\infty, -3[$

f. $B \cap C =]-\infty, 4] \cap]0, +\infty[=]0, 4]$

8.2 $A \cap C =]-\infty, -3[\cap]0, +\infty[= \emptyset$ (D)

8.3 $B \cup C =]-\infty, 4] \cup]0, +\infty[= \mathbb{R}$ (C)

PÁG. 15**Aplicar**

2.1 Todos os pontos da reta BD têm abscissa -1 . Todos os pontos da reta BE têm ordenada 3 .

2.2 O José não está correto. Todos os pontos da reta FG têm a mesma ordenada: -3 .

2.3 Reta HC : $x = 0$; reta BD : $x = -1$; reta BE : $y = 3$; reta FG : $y = -3$.

PÁG. 16**Tarefa 2**

1. A e B ; C e D .

2. A e D ; B e C .

3. Pontos simétricos relativamente ao eixo Ox têm a mesma abscissa e ordenadas simétricas. Pontos simétricos relativamente ao eixo Oy têm a mesma ordenada e abscissas simétricas.

PÁG. 16**Tarefa 3**

5. a. $(a, -b)$

b. $(-a, b)$

PÁG. 17**Tarefa 4**

Simétrico de A relativamente à reta r : $(2, 3)$

Simétrico de A relativamente à reta s : $(-4, 1)$

PÁG. 18**Tarefa 5**

1. $A(1, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(-2, -1)$, $D(3, -2)$.
2. $A'(-1, -2)$, $B'(1, -1)$, $C'(2, 1)$, $D'(-3, 2)$.
3. As coordenadas de um ponto e do seu transformado por uma meia-volta de centro na origem do referencial são simétricas.

PÁG. 19**Aplicar**

- 4.1 $A(1, 2)$, $B(0, 3)$, $C(-2, 2)$, $D(-3, 0)$, $E(-1, -2)$, $F(0, -2)$, $G(2, -1)$.
- 4.2 **a.** $A'(1, -2)$, $B'(0, -3)$, $C'(-2, -2)$, $D'(-3, 0)$, $E'(-1, 2)$, $F'(0, 2)$, $G'(2, 1)$.
- b.** $A''(-1, 2)$, $B''(0, 3)$, $C''(2, 2)$, $D''(3, 0)$, $E''(1, -2)$, $F''(0, -2)$, $G''(-2, -1)$.
- c.** $A'''(-1, -2)$, $B'''(0, -3)$, $C'''(2, -2)$, $D'''(3, 0)$, $E'''(1, 2)$, $F'''(0, 2)$, $G'''(-2, 1)$.
- 4.3 **a.** $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 0)$, $(3, -2)$, $(2, -2)$, $(0, -1)$, respectivamente.
- b.** $(1, -4)$, $(0, -5)$, $(-2, -4)$, $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(2, -1)$, respectivamente.



PÁG. 20**Tarefa 6**

$$\overline{AB} = 3, \overline{AC} = 4.$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 9 + 16 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 25 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{BC} = 5$$

$\overline{BC} > 0$

$$\text{Perímetro} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 3 + 4 + 5 = 12$$

PÁG. 23

Aplicar

$$7.1 \quad d(A, B) = \sqrt{(2-5)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$7.2 \quad d(C, D) = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$7.3 \quad d(E, F) = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$7.4 \quad d(G, H) = \sqrt{(5-(-3))^2 + (\sqrt{2}-(-\sqrt{8}))^2} = \sqrt{8^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{8})^2} = \\ = \sqrt{64 + 2 + 8 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{8}} = \sqrt{82}$$

$$8. \quad \overline{AB} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

O triângulo é escaleno, pois as medidas dos comprimentos dos lados são diferentes.

$$9. \quad d(A, B) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(k-2)^2 + (k-(-1))^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 - 4k + 4 + k^2 + 2k + 1} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2k^2 - 2k + 5} = 3 \Leftrightarrow 2k^2 - 2k + 5 = 9 \Leftrightarrow 2k^2 - 2k - 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1-3}{2} \vee k = \frac{1+3}{2} \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 2$$

10. A área do trapézio é dada por $\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB}$.

$$\overline{AD} = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(0-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Assim, } \text{Área} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 5.$$

$$11. \quad \overline{AB} = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$$

$$\sqrt{45}^2 = 45, \text{ mas } \sqrt{18}^2 + \sqrt{9}^2 = 18 + 9 = 27 \neq 45$$

Logo, o triângulo não é retângulo.



12. Designando por h a altura do triângulo, tem-se

$$\text{Área} = 15 \Leftrightarrow \frac{5 \times h}{2} = 15 \Leftrightarrow h = \frac{15 \times 2}{5} \Leftrightarrow h = 6$$

Por outro lado,

$$\overline{BC}^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = \frac{25}{4} + 36 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = \frac{169}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{\frac{169}{4}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{13}{2}$$

$$\text{Assim, Perímetro} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 5 + \frac{13}{2} + \frac{13}{2} = 18.$$

PÁG. 25**Tarefa 8**

Dado que $C(4, 1)$, a abscissa do ponto médio de $[AC]$ é $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ e a ordenada do ponto médio de $[BC]$ é $\frac{3+1}{2} = 2$.

Pelo critério LAL, os triângulos $[AMM_1]$, $[MBM_2]$ e $[ABC]$ são semelhantes.

Assim, o ponto M tem abscissa igual à do ponto M_1 e ordenada igual à do ponto M_2 , ou seja, tem coordenadas (x_{M_1}, y_{M_2}) .

PÁG. 26**Aplicar**

$$14. A(1, 3), B(3, 1), M_{[AB]}\left(\frac{1+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = M_{[AB]}(2, 2)$$

$$C(-1, 2), D(-3, -1), M_{[CD]}\left(\frac{-1+(-3)}{2}, \frac{2+(-1)}{2}\right) = M_{[CD]}\left(-2, \frac{1}{2}\right)$$

$$E(0, -2), F(5, 0), M_{[EF]}\left(\frac{0+5}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = M_{[EF]}\left(\frac{5}{2}, -1\right)$$

$$15.1 M_{[AB]}\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = M_{[AB]}(1, 1)$$

$$15.2 M_{[AC]}\left(\frac{-2+x_C}{2}, \frac{0+y_C}{2}\right) = (4, 2) \Leftrightarrow \frac{-2+x_C}{2} = 4 \wedge \frac{0+y_C}{2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_C = 4 \times 2 + 2 \wedge y_C = 2 \times 2 \Leftrightarrow x_C = 10 \wedge y_C = 4$$

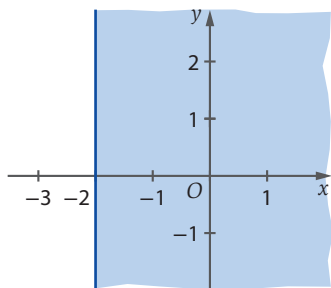
$$C(10, 4)$$



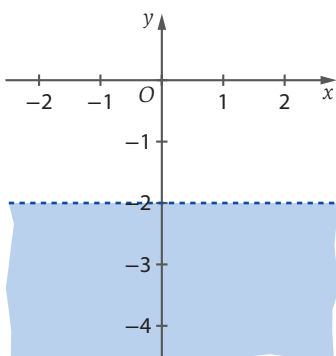
PÁG. 29

Aplicar

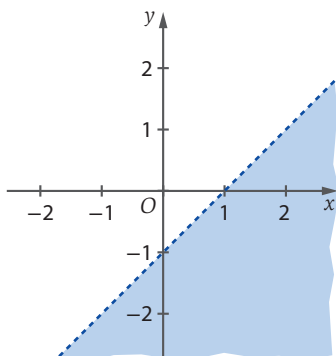
17.1



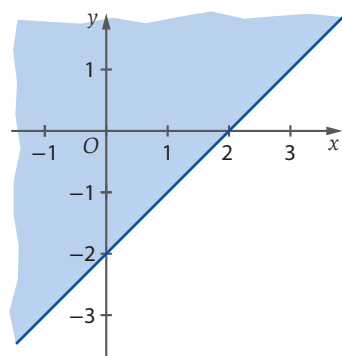
17.2



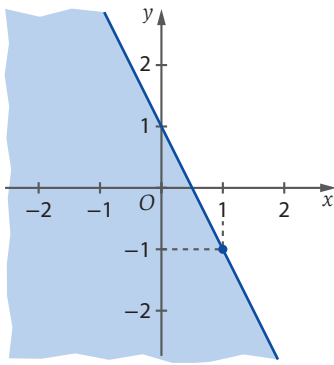
17.3



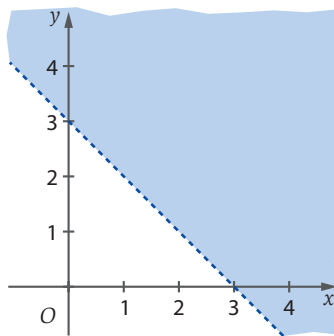
17.4



17.5



17.6



18. Começando por determinar uma equação que defina cada reta, temos:

18.1 $x < -1$ (semiplano aberto à esquerda da reta de equação $x = -1$)

18.2 $y < x - 1$ (semiplano aberto inferior à reta de equação $y = x - 1$)

19. Como o ponto B pertence à bissetriz do 4.º quadrante, as suas coordenadas são do tipo $(x, -x)$.

$$d(A, B) = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(x - (-2))^2 + (-x - 1)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (-x - 1)^2 = 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x + 1 = 13 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$$

Logo, $B(1, -1)$.

Vamos determinar uma equação que defina a reta AB .

$$\text{O declive da reta } AB \text{ é } \frac{-1 - 1}{1 - (-2)} = -\frac{2}{3}.$$

Substituindo as coordenadas do ponto B na equação, obtemos a ordenada na origem:

$$-1 = -\frac{2}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}.$$

Assim, a equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ e uma condição cartesiana do semiplano fechado

representado a sombreado é $y \geq -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

PÁG. 32**Aplicar**

$$21.1 \quad E = M_{[AD]} \left(\frac{0+1}{2}, \frac{1+(-2)}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right); \quad F = M_{[AB]} \left(\frac{0+3}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$G = M_{[BC]} \left(\frac{3+4}{2}, \frac{2+(-1)}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2} \right); \quad H = M_{[CD]} \left(\frac{4+1}{2}, \frac{-1+(-2)}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

21.2 A medida do comprimento do lado do quadrado $[EFGH]$ é

$$\overline{EF} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Logo, Perímetro = $4\sqrt{5}$ e Área = $\sqrt{5}^2 = 5$.

21.3 Sendo (x, y) as coordenadas de um ponto qualquer da mediatriz de $[DF]$, tem-se:

$$(x-1)^2 + (y-(-2))^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 - 3y + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow -2x + 3x + 4y + 3y + 5 - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x + 7y + \frac{1}{2} = 0$$

Substituindo as coordenadas da origem na equação da mediatriz, obtém-se $0 + 7 \times 0 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0$, que é uma proposição falsa. Logo, a origem não pertence à mediatriz de $[DF]$.

$$22.1 \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + y^2 \Leftrightarrow (x-(-1))^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-0)^2$$

A equação dada representa a mediatriz, por exemplo, do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(-1, 2)$ e $(3, 0)$.

$$22.2 \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 6x - 4y + 1 + 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow 8x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

23. Mediatriz de $[AB]$:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 6x - 6y + 2y + 1 + 9 - 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x - 4y = 0 \Leftrightarrow y = x$$

Mediatriz de $[CD]$:

$$(x-(-1))^2 + (y-2)^2 = (x-(-3))^2 + (y-(-1))^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6x - 4y - 2y + 1 + 4 - 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow -4x - 6y - 5 = 0 \Leftrightarrow -6y = 4x + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$$

Mediatriz de $[EF]$:

$$(x-0)^2 + (y-(-2))^2 = (x-5)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x + 4y + 4 - 25 = 0 \Leftrightarrow 4y = -10x + 21 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{21}{4}$$

24.1 As coordenadas dos vértices do paralelogramo são:

$A(2, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, -2)$ e $D(1, -2)$.

$$M_{[AC]} \left(\frac{2 + (-3)}{2}, \frac{2 + (-2)}{2} \right) = M_{[AC]} \left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$M_{[BD]} \left(\frac{-2 + 1}{2}, \frac{2 + (-2)}{2} \right) = M_{[BD]} \left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$$

As diagonais do paralelogramo bissetam-se, pois os pontos médios das diagonais têm as mesmas coordenadas.

24.2 Equação da mediatriz de $[AB]$: $x = 0$; equação da mediatriz de $[CD]$: $x = -1$

24.3 Equação da mediatriz de $[AD]$:

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 &= (x - 1)^2 + (y - (-2))^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x + 2x - 4y - 4y + 4 + 4 - 1 - 4 &= 0 \Leftrightarrow -2x - 8y + 3 = 0 \Leftrightarrow -8y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

A equação pedida é $y = -\frac{1}{4}x + 2$.



PÁG. 33**Tarefa 10**

a. $d(C, P) = 2$

b. $d(C, P) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

PÁG. 37

Aplicar

$$27.1 \quad (x + 10)^2 + (y - 9)^2 = 4 \Leftrightarrow (x - (-10))^2 + (y - 9)^2 = 4$$

$$\text{Centro: } (-10, 9); \text{ raio: } r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$27.2 \quad (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 20 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = 20$$

$$\text{Centro: } (2, -1); \text{ raio: } r^2 = 20 \Rightarrow r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$27.3 \quad (x + 7)^2 + (y - 4)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (x - (-7))^2 + (y - 4)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{Centro: } (-7, 4); \text{ raio: } r^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$27.4 \quad (x + 3)^2 + (y + 6)^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (x - (-3))^2 + (y - (-6))^2 = \frac{4}{3}$$

$$\text{Centro: } (-3, -6); \text{ raio: } r^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$28.1 \quad (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 25$$

$$28.2 \quad (x - (-2))^2 + (y - (-3))^2 \leq 1^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 1$$

$$28.3 \quad (x - 3)^2 + (y - 2)^2 > 10^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 > 100$$

$$28.4 \quad (x - 0)^2 + (y - 0)^2 < 6^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 36$$

$$29.1 \quad \begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 20 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (3 + 1)^2 = 20 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 = 4 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -2 \vee x - 2 = 2 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$(0, 3)$ e $(4, 3)$.

$$29.2 \quad \begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 20 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0 - 2)^2 + (y + 1)^2 = 20 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + 1)^2 = 16 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 = -4 \vee y + 1 = 4 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \vee y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$(0, -5)$ e $(0, 3)$.

$$30.1 \quad \text{Raio: } d(C, P) = \sqrt{(1 - 1)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$(x - 1)^2 + (y - (-1))^2 = 4^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

$$30.2 \quad \text{Raio: } d(C, O) = \sqrt{(0 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{5}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

$$30.3 \quad \text{Raio: } \frac{d(A, B)}{2} = \frac{\sqrt{(0 - (-4))^2 + (3 - 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Centro: } M_{[AB]} \left(\frac{-4 + 0}{2}, \frac{1 + 3}{2} \right) = M_{[AB]}(-2, 2)$$

$$(x - (-2))^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

PÁG. 37**Tarefa 12**

1. Para determinar as coordenadas do baricentro,

– determinar as coordenadas dos pontos médios de dois lados do triângulo:

$$M_{[OA]} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ e } M_{[OB]} = (2, 1)$$

– determinar equações das retas que passam nesses pontos médios e nos vértices opostos:

Equação da reta que passa em $M_{[OA]}$ e em B

$$m = \frac{2 - \frac{3}{2}}{4 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{7}, \quad 2 = \frac{1}{7} \times 4 + b \Leftrightarrow b = 2 - \frac{4}{7} \Leftrightarrow b = \frac{10}{7} \text{ e } y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$$

Equação da reta que passa em $M_{[OB]}$ e em A

$$m = \frac{3 - 1}{1 - 2} = -2, \quad 3 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 3 + 2 \Leftrightarrow b = 5 \text{ e } y = -2x + 5$$

– determinar as coordenadas do ponto de interseção dessas retas (resolvendo o sistema de equações):

$$\begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = -2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} = -2x + 5 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 10 = -14x + 35 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x = 25 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -2 \times \frac{5}{3} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Coordenadas do baricentro: $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

2. Para determinar as coordenadas do circuncentro,

– determinar equações das mediatrizes de dois lados do triângulo:

Equação da mediatriz de $[OA]$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \Leftrightarrow -2x + 1 - 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow -6y = 2x - 10 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

Equação da mediatriz de $[OB]$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow -8x + 16 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow -4y = 8x - 20 \Leftrightarrow y = -2x + 5$$

– determinar as coordenadas do ponto de interseção das mediatrizes (resolvendo o sistema de equações):

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \\ y = -2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = -2x + 5 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5 = -6x + 15 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \times 2 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Coordenadas do circuncentro: $(2, 1)$

Para determinar a equação reduzida da circunferência circunscrita, o centro da circunferência é o circuncentro e o raio é a distância do circuncentro a um dos vértices,

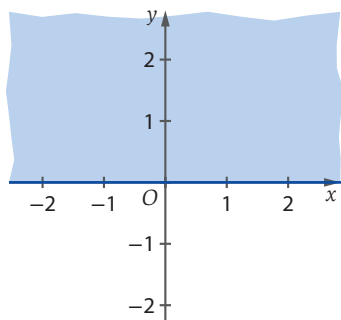
$$\sqrt{(2 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5}$$

Equação reduzida da circunferência circunscrita: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

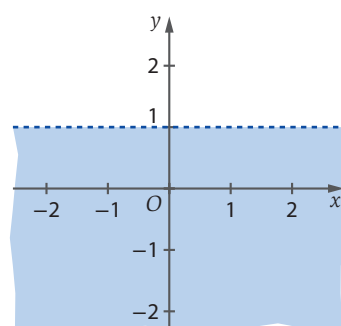
PÁG. 41

Aplicar

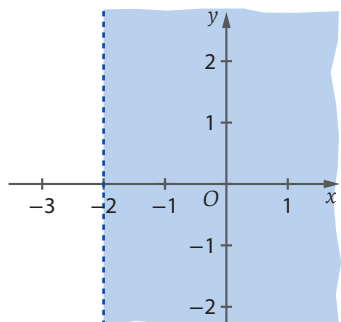
34.1



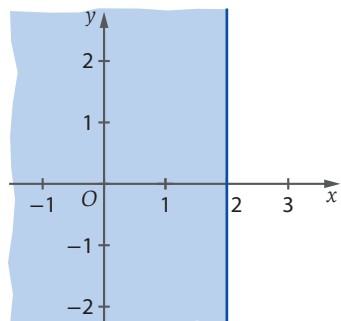
34.2



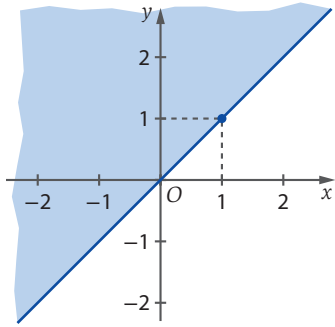
34.3



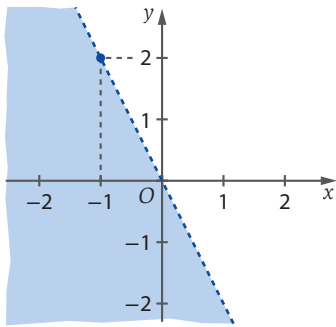
34.4



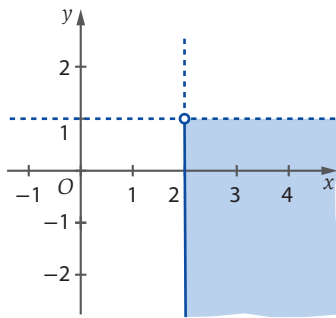
34.5



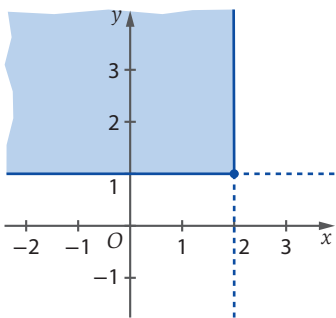
34.6



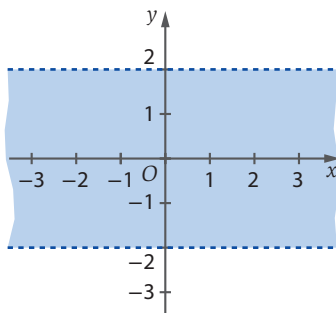
35.1



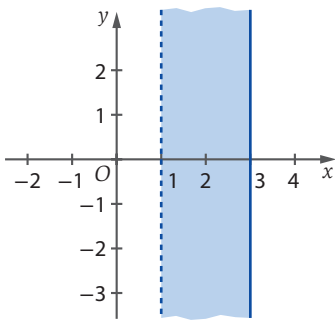
35.2



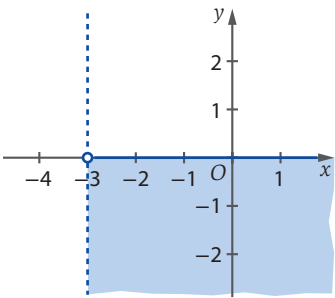
35.3



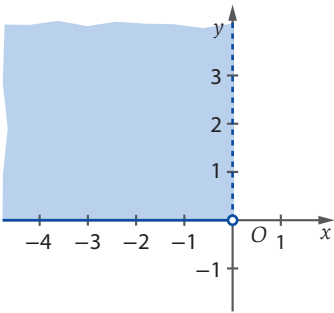
35.4



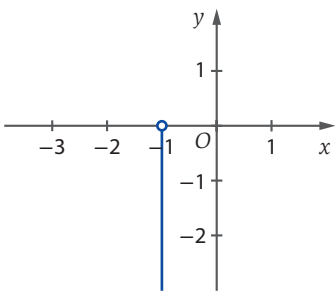
35.5



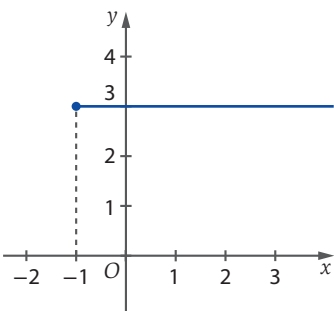
35.6



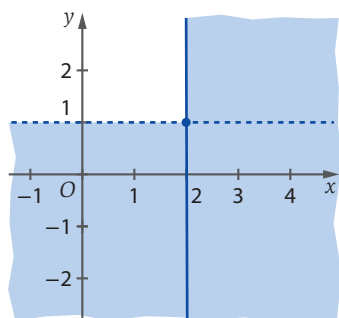
35.7



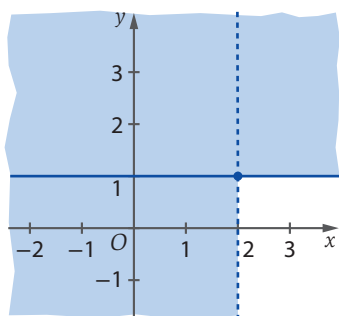
35.8



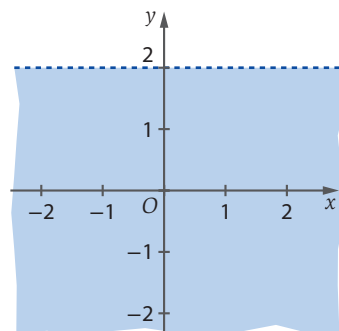
36.1



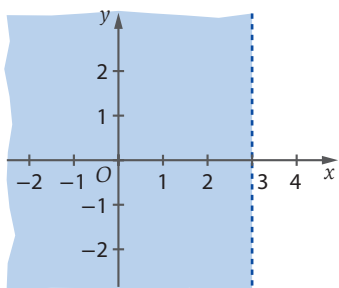
36.2



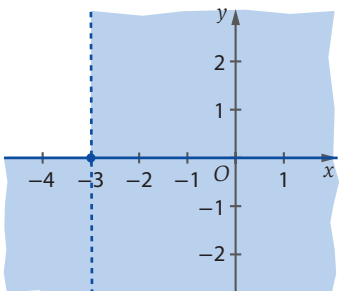
36.3



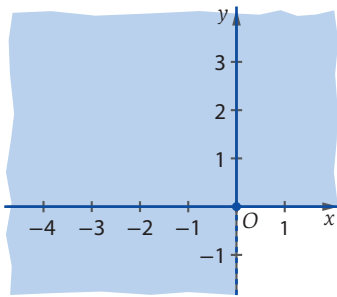
36.4



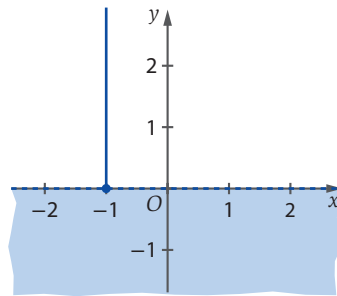
36.5



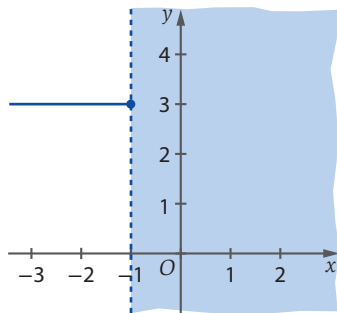
36.6



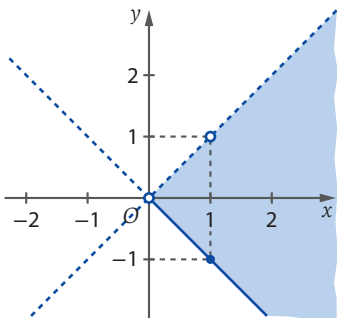
36.7



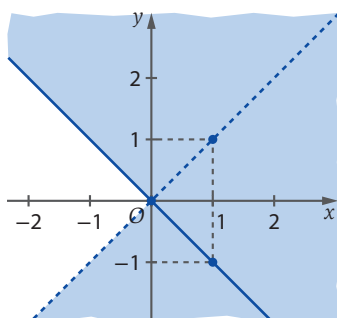
36.8



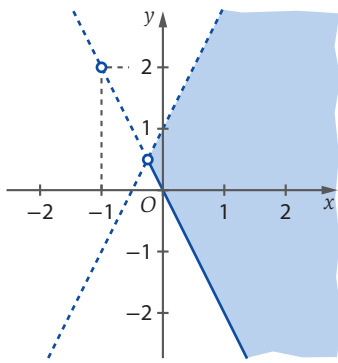
37.1



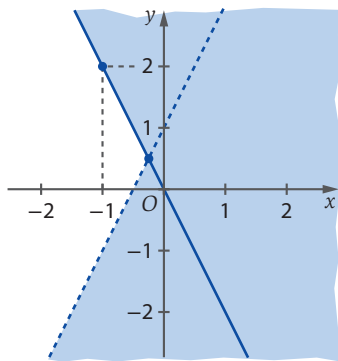
37.2



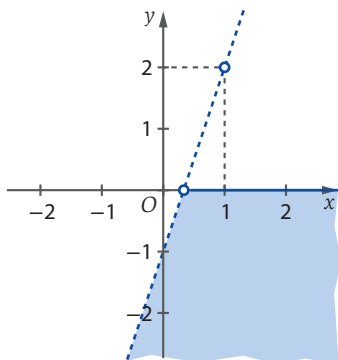
37.3



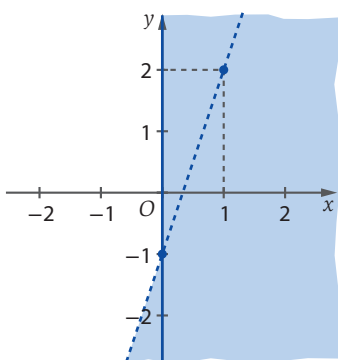
37.4



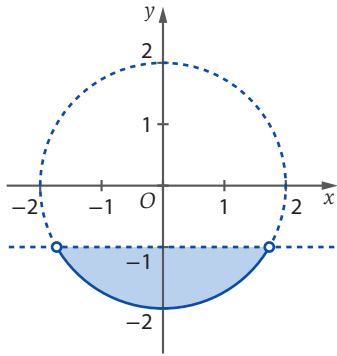
37.5



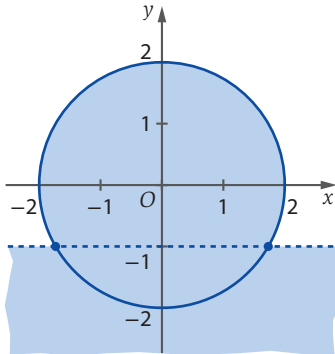
37.6



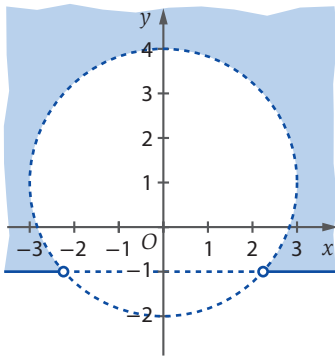
38.1



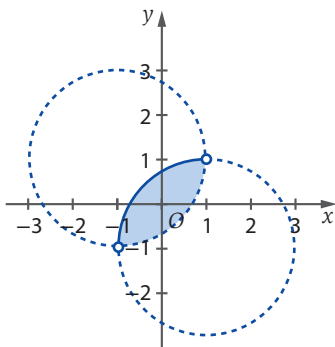
38.2



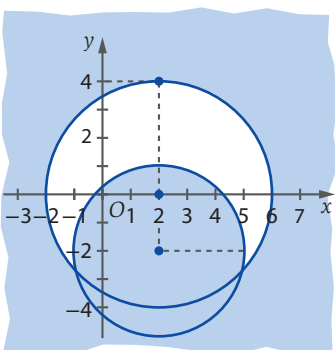
38.3



38.4



38.5



PÁG. 42**Aplicar**

39.1 Trata-se da interseção do semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 3$ com o semiplano aberto à direita da reta de equação $x = -2$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $x > -2 \wedge y \leq 3$.

39.2 Trata-se da interseção do semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 3$ com o semiplano aberto superior à reta de equação $y = -2$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $y > -2 \wedge y \leq 3$.

39.3 Trata-se da reunião do semiplano fechado à esquerda da reta de equação $x = -1$ com o semiplano aberto superior à reta de equação $y = x$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $x \leq -1 \vee y > x$.

39.4 Trata-se da interseção do semiplano aberto superior à reta de equação $y = -2$ com o semiplano fechado inferior a uma reta de equação $y = mx + b$.

A reta não vertical passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -2)$, pelo que o seu declive é $\frac{-2 - 0}{0 - 1} = 2$ e a sua equação reduzida é $y = 2x - 2$.

Assim, uma condição que define o conjunto de pontos representado é $y > -2 \wedge y \leq 2x - 2$.

40.1 Trata-se da interseção do semiplano aberto inferior à reta de equação $y = -1$ com a circunferência de centro $(1, -1)$ e raio 1 e o seu interior.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 1 \wedge y < -1$.

40.2 Trata-se da interseção do semiplano aberto à direita da reta de equação $x = -3$ com o semiplano fechado superior à reta de equação $y = 0$ e o semiplano fechado superior à reta de equação $y = x$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $x > -3 \wedge y \geq 0 \wedge y \geq x$.

40.3 Trata-se da interseção do semiplano aberto inferior à reta de equação $y = -x + 2$ com o exterior da circunferência de centro $(2, -1)$ e raio 2 .

Uma condição que define este conjunto de pontos é $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 > 4 \wedge y < -x + 2$.

40.4 $(0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq -x) \vee (y \leq 0 \wedge y \geq -x)$

41. • Determinemos uma equação da reta BC .

O declive da reta BC é $\frac{1 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{3}{4}$.

Substituindo as coordenadas do ponto C , a ordenada na origem da reta BC é

$$1 = \frac{3}{4} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 1 - \frac{9}{4} \Leftrightarrow b = -\frac{5}{4}.$$

A equação reduzida da reta BC é $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

- O centro da circunferência é o circuncentro do triângulo $[ABC]$; logo, o centro é a interseção das mediatrizes dos lados do triângulo, por exemplo, de $[AB]$ e $[BC]$.

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+2)^2 \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 16 - 2y = 2x + 4y + 4 \\ 2x + 4y + 4 = -6x + 9 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 2x - 2y - 4y = 4 - 16 \\ 2x + 6x + 4y + 2y = 9 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 6y = -12 \\ 8x + 6y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y = 6x + 12 \\ 8x + 6x + 12 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y = 6x + 12 \\ 14x + 12 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} + 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, o centro da circunferência é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

e o raio da circunferência é $\sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$.

A região sombreada da figura resulta da interseção do semiplano fechado inferior à reta de equação

$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ com a circunferência de centro $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e raio $\sqrt{\frac{25}{2}}$ e o seu interior.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{2} \wedge y \leq \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

PÁG. 43**Aplicar+**

$$1. \text{Área} = \frac{(8-5) \times (3-1)}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(4-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(4-8)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Perímetro} = \overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{QR} = 3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3 + 3\sqrt{5}$$

$$2. \text{Área} = \frac{\overline{BD} \times \overline{AC}}{2}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(-1 - (-4))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{3^2 + (-9)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{10} \times 3\sqrt{10}}{2} = \frac{3 \times 10}{2} = 3 \times 5 = 15$$

$$3. d(A, B) = d(A, C) \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(3-a)^2 + (0-2)^2}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado,

$$(1-a)^2 + (-1-2)^2 = (3-a)^2 + (0-2)^2 \Leftrightarrow 1 - 2a + a^2 + 9 = 9 - 6a + a^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a + 6a = 4 - 1 \Leftrightarrow 4a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$4. \text{O valor de } \overline{AB} \text{ é o dobro da distância do ponto } A \text{ à mediatriz de } [AB]: 2 \times 5 = 10 \text{ (D)}$$

5. Substituindo as coordenadas do ponto M nas equações dadas, obtém-se:

$$3 = -2 \times (-2) + 3 \Leftrightarrow 3 = 7 \text{ proposição falsa}$$

$$3 = 3 \times (-2) - 2 \Leftrightarrow 3 = -8 \text{ proposição falsa}$$

$$3 = -2 \times (-2) - 1 \Leftrightarrow 3 = 3 \text{ proposição verdadeira (C)}$$

$$3 = 3 \times (-2) - 1 \Leftrightarrow 3 = -7 \text{ proposição falsa}$$

$$6. M_{[AB]} \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{2+k}{2} \right) = M_{[AB]} \left(1, \frac{2+k}{2} \right)$$

Como este ponto pertence à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes pares, tem-se

$$\frac{2+k}{2} = -1 \Leftrightarrow k = -1 \times 2 - 2 \Leftrightarrow k = -4 \text{ e } B(-1, -4).$$

Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-(-1))^2 + (y-(-4))^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16$$

$$\Leftrightarrow -6x - 2x - 4y - 8y = 1 + 16 - 9 - 4 \Leftrightarrow -8x - 12y = 4 \Leftrightarrow -12y = 8x + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

7. O conjunto de pontos P que verificam a condição $\overline{AP} = \overline{BP}$ é o conjunto de pontos que está à mesma distância dos pontos A e B ; logo, é a mediatriz de $[AB]$. **(C)**

$$\mathbf{8.1} \quad (x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - (-2))^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2x - 4y - 4y = 1 + 4 - 9 - 4 \Leftrightarrow 8x - 8y = -8 \Leftrightarrow x - y = -1 \Leftrightarrow y = x + 1$$

8.2 Substituindo as coordenadas do ponto A na equação da mediatriz de $[DE]$, obtém-se

$$4 = \frac{5}{2} + 1 \Leftrightarrow 4 = \frac{7}{2}, \text{ que é uma proposição falsa.}$$

Logo, o ponto A não é equidistante dos pontos D e E .

8.3 Substituindo as coordenadas do ponto B na equação da mediatriz de $[DE]$, obtém-se

$$-\frac{1}{3} = k + 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3} - 1 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}.$$

$$\mathbf{9.1} \quad (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - (-1))^2 = 4^2$$

$$\text{Centro: } (1, -1); \text{ raio: } r^2 = 4^2 \Rightarrow r = 4$$

$$\mathbf{9.2} \quad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

$$\text{Centro: } (2, 2); \text{ raio: } r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

$$\mathbf{9.3} \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 7 \Leftrightarrow \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (y - 0)^2 = 7$$

$$\text{Centro: } \left(-\frac{1}{2}, 0\right); \text{ raio: } r^2 = 7 \Rightarrow r = \sqrt{7}$$

$$\mathbf{9.4} \quad (x - \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{3})^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 + (y - (-\sqrt{3}))^2 = 1$$

$$\text{Centro: } (\sqrt{2}, -\sqrt{3}); \text{ raio: } r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$$

PÁG. 44**Aplicar+**

10. $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 \leq 3 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - (-3))^2 \leq 3$

Centro: $(3, -3)$; raio: $r^2 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3}$ **(B)**

11. A condição dada é impossível. **(D)**

12. A condição $(x - a)^2 + (y + b)^2 > k \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - (-b))^2 > k$ define o exterior de uma circunferência centrada em $(a, -b)$ e raio \sqrt{k} . **(C)**

13. Substituindo as coordenadas dos pontos na equação, obtém-se:

$$(1 - 3)^2 + (-3 + 2)^2 = (-2)^2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5 > 4$$

O ponto de coordenadas $(1, -3)$ é exterior à circunferência.

$$(3 - 3)^2 + (-4 + 2)^2 = (-2)^2 = 4$$

O ponto de coordenadas $(3, -4)$ pertence à circunferência.

$$(2 - 3)^2 + (-1 + 2)^2 = (-1)^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 < 4$$

O ponto de coordenadas $(2, -1)$ é interior à circunferência.

14.1 Centro: $(2, 2)$

14.2 $r^2 = 20 \Rightarrow r = \sqrt{20}$, $d = 2r = 2\sqrt{20} = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

14.3 $(4 - 2)^2 + (6 - 2)^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

14.4 Interseção com Ox :

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 20 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (0 - 2)^2 = 20 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 = 16 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \pm\sqrt{16} \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \pm 4 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 2 \vee x = 4 + 2 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \vee x = 6 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(-2, 0)$ e $(6, 0)$.

Interseção com Oy :

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 20 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0 - 2)^2 + (y - 2)^2 = 20 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 2)^2 = 16 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = \pm\sqrt{16} \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = \pm 4 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 + 2 \vee y = 4 + 2 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \vee y = 6 \\ x = 0 \end{cases}$$

$(0, -2)$ e $(0, 6)$.

14.5 Interseção com $y = x$:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (x-2)^2 = 20 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2)^2 = 20 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 10 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \pm\sqrt{10} \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{10} \vee x = 2 + \sqrt{10} \\ y = x \end{cases}$$

$$(2 - \sqrt{10}, 2 - \sqrt{10}) \text{ e } (2 + \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}).$$

Interseção com $y = -x$:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (-x-2)^2 = 20 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x + 4 = 20 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 8 = 20 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \text{_____} \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{6} \\ y = -x \end{cases}$$

$$(-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \text{ e } (\sqrt{6}, -\sqrt{6}).$$

15.1 Área = $\frac{\overline{BC} \times \overline{AM}_{[BC]}}{2}$

$$M_{[BC]} \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{-4-6}{2} \right) = (0, -5)$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1+1)^2 + (-6+4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\overline{AM}_{[BC]} = \sqrt{(0-2)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{8}}{2} = 4$$

15.2 Equação da mediatriz de $[AB]$:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y+3)^2 &= (x+1)^2 + (y+4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x - 2x + 6y - 8y + 4 + 9 - 1 - 16 &= 0 \Leftrightarrow -6x - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow -2y = 6x + 4 \Leftrightarrow y = -3x - 2 \end{aligned}$$

Equação da mediatriz de $[AC]$:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y+3)^2 &= (x-1)^2 + (y+6)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 12y + 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x + 2x + 6y - 12y + 4 + 9 - 1 - 36 &= 0 \Leftrightarrow -2x - 6y - 24 = 0 \Leftrightarrow -6y = 2x + 24 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - 4 \end{aligned}$$

Ponto de interseção das mediatrizes:

$$\begin{cases} y = -3x - 2 \\ y = -\frac{1}{3}x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 2 = -\frac{1}{3}x - 4 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + \frac{1}{3}x = -4 + 2 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{8}{3}x = -2 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow$$

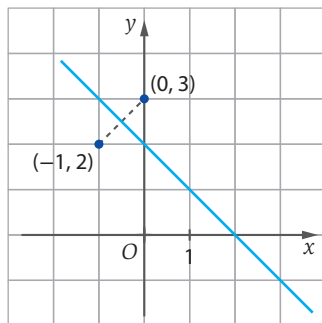
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{4} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{17}{4} \end{cases}$$

$$\text{Centro: } \left(\frac{3}{4}, -\frac{17}{4} \right)$$

$$\text{Raio: } \sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(-6 + \frac{17}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{50}{16}} = \sqrt{\frac{25}{8}} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Equação da circunferência circunscrita: } \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{17}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

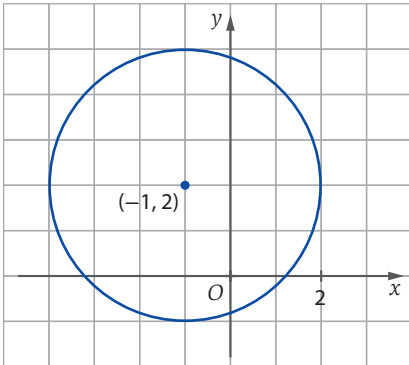
$$\mathbf{16.1} \quad (x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = (x - 0)^2 + (y - 3)^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + (y - 3)^2$$



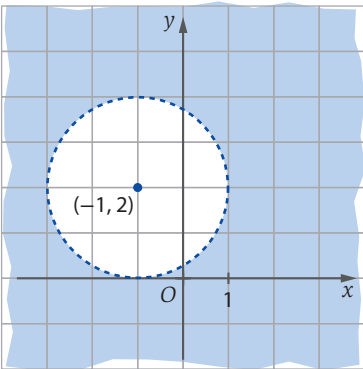
PÁG. 45

Aplicar+

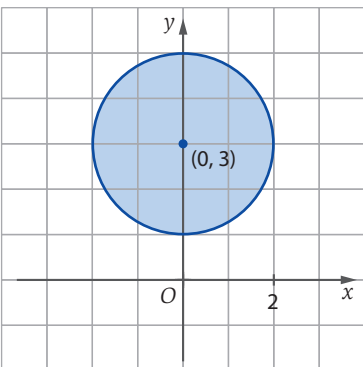
$$16.2 \quad (x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$



$$16.3 \quad (x - (-1))^2 + (y - 2)^2 > 2^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 > 4$$



$$16.4 \quad (x - 0)^2 + (y - 3)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 \leq 4$$



$$17.1 \quad \text{Raio: } d(C, A) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (2 - (-3))^2} = \sqrt{29}$$

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 \leq \sqrt{29}^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 29$$

$$17.2 \quad (x - (-1))^2 + (y - 3)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

17.3 Centro: $M_{[AB]} \left(\frac{0+2}{2}, \frac{-5+3}{2} \right) = M_{[AB]}(1, -1)$

Raio: $\frac{d(A, B)}{2} = \frac{\sqrt{(2-0)^2 + (3-(-5))^2}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 8^2}}{2} = \frac{\sqrt{68}}{2} = \frac{2\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}$

$$(x-1)^2 + (y-(-1))^2 < \sqrt{17}^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 < 17$$

17.4 $(x-(-1))^2 + (y-2)^2 < (x-2)^2 + (y-(-1))^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 < (x-2)^2 + (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 < x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -4y - 2y < -4x - 2x \Leftrightarrow -6y < -6x \Leftrightarrow y > x$$

18.1 Trata-se da interseção do semiplano fechado à direita da reta de equação $x = 2$ com o semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 0$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $x \geq 2 \wedge y \leq 0$.

18.2 Trata-se da reunião do semiplano fechado à direita da reta de equação $x = -2$ com o semiplano fechado superior à reta de equação $y = 3$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $x \geq -2 \vee y \geq 3$.

18.3 Trata-se da reunião do semiplano fechado à direita da reta de equação $x = 2$ com o semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 0$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $x \geq 2 \vee y \leq 0$.

18.4 Trata-se da interseção do semiplano fechado à direita da reta de equação $x = 2$ com o semiplano fechado superior à reta de equação $y = x$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $x \geq 2 \wedge y \geq x$.

18.5 Trata-se da reunião do semiplano fechado à direita da reta de equação $x = 2$ com o semiplano fechado superior à reta de equação $y = x$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $x \geq 2 \vee y \geq x$.

18.6 Trata-se da reunião da circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-1, 2)$ e que passa pelo ponto de coordenadas $(0, 1)$ com o conjunto de pontos exteriores a essa circunferência.

O raio da circunferência é $\sqrt{(-1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é

$$(x-(-1))^2 + (y-2) \geq \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2) \geq 2.$$

18.7 Trata-se do conjunto de pontos exteriores à circunferência de centro no ponto de coordenadas (a, b) e raio r .

Uma condição que define este conjunto de pontos é $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$.

18.8 Trata-se da interseção do conjunto de pontos exteriores à circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-2, 0)$ e raio 1 com o conjunto de pontos interiores à circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-3, 0)$ e raio 2.

Uma condição que define este conjunto de pontos é

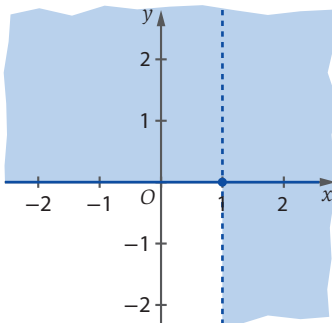
$$(x - (-2))^2 + (y - 0)^2 > 1^2 \wedge (x - (-3))^2 + (y - 0)^2 < 2^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 > 1 \wedge (x + 3)^2 + y^2 < 4$$

18.9 Trata-se da interseção do semiplano fechado superior à reta de equação $y = x$ com o círculo de centro no ponto de coordenadas $(2, -2)$ e raio 2.

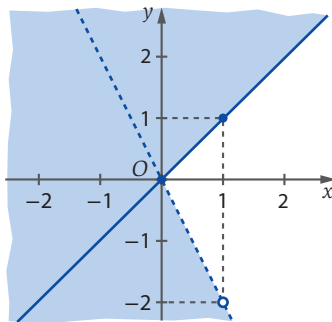
Uma condição que define este conjunto de pontos é

$$y \geq x \wedge (x - 2)^2 + (y - (-2))^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow y \geq x \wedge (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \leq 4.$$

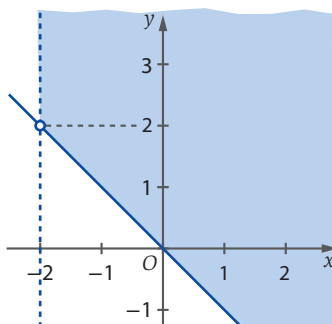
19.1



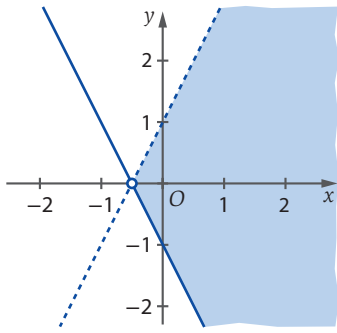
19.2



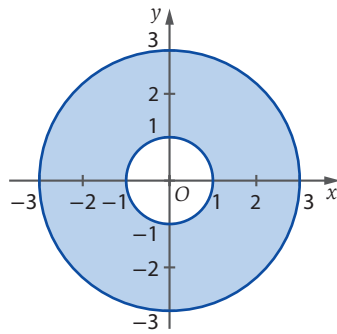
19.3



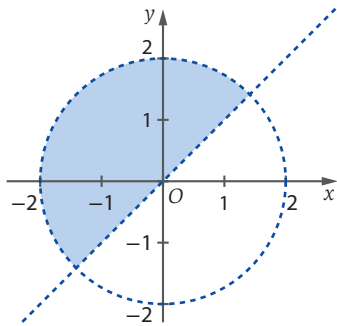
19.4



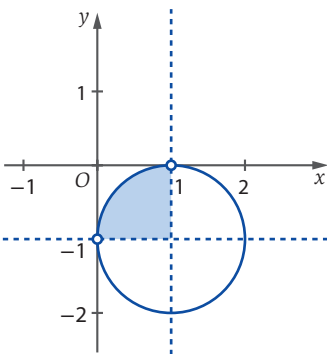
19.5



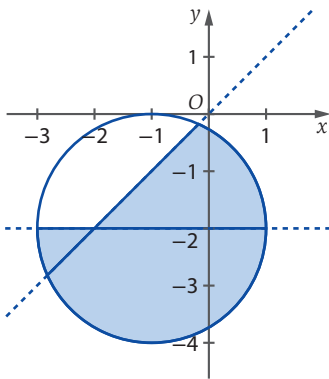
19.6



19.7



19.8



PÁG. 46**Aplicar+**

20.1 Trata-se da interseção do círculo de centro na origem e raio 5 com a reunião do semiplano fechado superior a uma reta não vertical com o semiplano aberto à direita da reta de equação $x = 1$.

A reta não vertical intersesta a circunferência de centro na origem e raio 5 no ponto de abcissa -4 :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-4)^2 + y^2 = 25 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 9 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \vee y = 3 \\ x = -4 \end{cases}$$

Como a ordenada do ponto de reta de abcissa -4 é positiva, esse ponto tem coordenadas $(-4, 3)$.

O declive da reta é $\frac{0 - 3}{5 - (-4)} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$.

Substituindo as coordenadas de um ponto da reta na equação $y = -\frac{1}{3}x + b$, a ordenada na origem da reta é

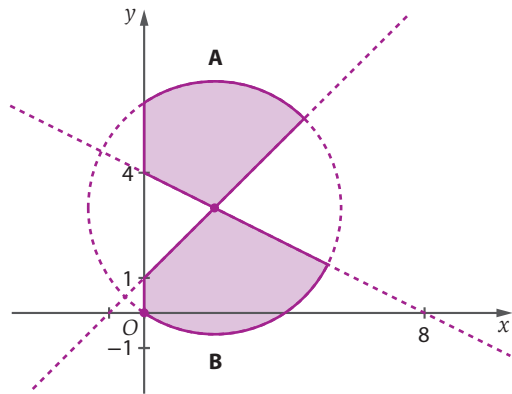
$$0 = -\frac{1}{3} \times 5 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{3}.$$

A equação reduzida da reta é $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $x^2 + y^2 \leq 25 \wedge \left(x > 1 \vee y \geq -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}\right)$.

20.2 O domínio plano representado na figura é a interseção do círculo com o semiplano fechado à direita de eixo Oy e com a reunião de duas regiões, **A** e **B**.

Designemos por r e s as retas não horizontais representadas no referencial da figura.



Na região **A** encontram-se os pontos dos semiplanos fechados superiores às retas r e s e na região **B** encontram-se os pontos dos semiplanos fechados inferiores às retas r e s .

O declive da reta r é $\frac{0 - 1}{-1 - 0} = 1$ e a ordenada na origem é 1.

A equação reduzida da reta r é $y = x + 1$.

O declive da reta s é $\frac{0 - 4}{8 - 0} = -\frac{1}{2}$ e a ordenada na origem é 4.

A equação reduzida da reta s é $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

O ponto de interseção das retas r e s é

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = -\frac{1}{2}x + 4 \\ x + \frac{1}{2}x = 4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

A circunferência tem centro no ponto de coordenadas $(2, 3)$.

O raio da circunferência é igual à distância do centro à origem: $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 13 \wedge x \geq 0 \wedge \left(\left(y \leq x + 1 \wedge y \leq -\frac{1}{2}x + 4 \right) \vee \left(y \geq x + 1 \wedge y \geq -\frac{1}{2}x + 4 \right) \right).$$

21.1 Trata-se da interseção do círculo com o semiplano fechado inferior à reta de equação $y = 0$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 \leq 9 \wedge y \leq 0$.

21.2 Área = $\frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \times \overline{AD}$

$[\overline{CD}]$ é um raio da circunferência, pelo que, $\overline{CD} = 3$.

O ponto B é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Ox com menor abscissa:

$$\begin{cases} (x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 6)^2 + (0 - 2)^2 = 9 \\ (x + 6)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 = \pm\sqrt{5} \\ x = -6 \pm \sqrt{5} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$B(-6 - \sqrt{5}, 0)$$

A abscissa do ponto A é igual à do ponto D : $A(-3, 0)$.

$$\text{Então } \overline{AB} = -3 + 6 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}.$$

$$\text{A área do trapézio é } \frac{3 + 3 + \sqrt{5}}{2} \times 2 = 6 + \sqrt{5}.$$

22.1 $\begin{cases} (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 17 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)^2 + (x - 2)^2 = 17 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \\ x = \frac{-1 \pm 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - 3}{2} \vee x = \frac{-1 + 3}{2} \\ x = -2 \vee x = 1 \\ y = x \end{cases}$$

Como a abscissa do ponto B é positiva, $B(1, 1)$.

22.2 a. O declive da reta r é $\frac{1 - 2}{1 - (-3)} = -\frac{1}{4}$.

Substituindo as coordenadas de um ponto da reta, a ordenada na origem da reta é

$$1 = -\frac{1}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = 1 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}.$$

$$\text{A equação reduzida da reta } r \text{ é } y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$

b. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 6x + 2x - 4y + 2y + 13 - 2 = 0 \Leftrightarrow 8x - 2y + 11 = 0 \Leftrightarrow y = 4x + \frac{11}{2}$

22.3 Os pontos da reta s têm coordenadas da forma $\left(x, 4x + \frac{11}{2}\right)$.

$$2d(P, A) = 17 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + \left(4x + \frac{11}{2} - 2\right)^2} = \frac{17}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + \left(4x + \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 17x^2 + 34x - 51 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2-4}{2} \vee x = \frac{-2+4}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

Se $x = -3$, $y = 4 \times (-3) + \frac{11}{2} = -\frac{13}{2}$ e $\left(-3, -\frac{13}{2}\right)$;

Se $x = 1$, $y = 4 \times 1 + \frac{11}{2} = \frac{19}{2}$ e $\left(1, \frac{19}{2}\right)$.

22.4 $(x+3)^2 + (y-2)^2 \leq 17 \wedge y \leq -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \wedge y \geq 4x + \frac{11}{2}$

PÁG. 50

Autoavaliação

1. O ponto simétrico de A relativamente a Ox tem a mesma abscissa de A e ordenada simétrica: $(-1, -3)$. O ponto simétrico de A relativamente a Oy tem a mesma ordenada de A e abscissa simétrica: $(1, 3)$.

2. Como o ponto C pertence à reta de equação $y = 5$, as suas coordenadas são da forma $(x, 5)$.

Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, com $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$, então $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Assim, $(x - 1)^2 + (5 - 2)^2 = (x + 2)^2 + (5 - 3)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 9 = x^2 + 4x + 4 + 4 \Leftrightarrow -2x - 4x = 8 - 10 \Leftrightarrow -6x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Logo, as coordenadas do ponto C são $(\frac{1}{3}, 5)$.

3. No 2.º quadrante, os pontos têm abscissa negativa e ordenada positiva. **(B)**

4. $3 < -2 \times (-1) + 1 \Leftrightarrow 3 < 3$ F

$1 < -2 \times 0 + 1 \Leftrightarrow 1 < 1$ F

$8 < -2 \times (-3) + 1 \Leftrightarrow 8 < 7$ F

$-6 < -2 \times 3 + 1 \Leftrightarrow -6 < -5$ V **(D)**

5. **(B)**

6. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow (x - (-1))^2 + (y - (-1))^2 = 3^2$ **(C)**

7. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\Leftrightarrow 4y + 10y = -6x + 2x + 34 - 5 \Leftrightarrow 14y = -4x + 29 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{7}x + \frac{29}{14}$$

8.1 $M_{[AB]} = (-1, -1) \Leftrightarrow \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{3+k}{2}\right) = (-1, -1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-2+0}{2} = -1 \wedge \frac{3+k}{2} = -1 \Leftrightarrow -1 = -1 \wedge k = -1 \times 2 - 3 \Leftrightarrow -1 = -1 \wedge k = -5$$
 (A)

8.2 $\sqrt{(0+2)^2 + (k-3)^2} = 2\sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{4 + (k-3)^2} = \sqrt{68}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado,

$$4 + (k - 3)^2 = 68 \Leftrightarrow (k - 3)^2 = 64 \Leftrightarrow k - 3 = \pm\sqrt{64} \Leftrightarrow k - 3 = -8 \vee k - 3 = 8 \Leftrightarrow k = -5 \vee k = 11$$

8.3 Centro: $M_{[AB]} \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$, ou seja, $M_{[AB]}(-1, 4)$

Raio: $\frac{\sqrt{(0+2)^2 + (5-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Equação da circunferência: $(x - (-1))^2 + (y - 4)^2 = \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 2$

PÁG. 51

Autoavaliação

9. Trata-se da interseção do círculo de centro no ponto C e que passa no ponto D com o semiplano fechado superior à reta AB e com o semiplano fechado à direita da reta de equação $x = 0$.

O raio da circunferência é $\sqrt{(-1 + 1)^2 + (3 - 0)^2} = 3$.

O declive da reta AB é $\frac{3+1}{2} = 2$, a ordenada na origem é -1 e a sua equação reduzida é $y = 2x - 1$.

Uma condição que define este conjunto de pontos é $(x + 1)^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \geq 2x - 1 \wedge x \geq 0$.

10. Como o ponto B pertence ao eixo das abcissas, tem coordenadas da forma $(x_B, 0)$.

$$\begin{aligned} \overline{AB} = \overline{BC} &\Leftrightarrow \sqrt{(x_B - 1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(4 - x_B)^2 + 3^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_B^2 - 2x_B + 1 + 4 = 16 - 8x_B + x_B^2 + 9 \Leftrightarrow x_B = \frac{10}{3}, B\left(\frac{10}{3}, 0\right) \end{aligned}$$

$$M_{[AC]} \left(\frac{1+4}{2}, \frac{2+3}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

$M_{[AC]}$ é também o ponto médio de $[BD]$.

$$\text{Assim, sendo } D(x_D, y_D), \text{ tem-se } M_{[BD]} \left(\frac{x_D + \frac{10}{3}}{2}, \frac{y_D + 0}{2} \right).$$

$$\text{Logo, } \frac{x_D + \frac{10}{3}}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x_D = 5 - \frac{10}{3} \Leftrightarrow x_D = \frac{5}{3}$$

$$\frac{y_D + 0}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow y_D = 5$$

Portanto, $D\left(\frac{5}{3}, 5\right)$.

11.1 A mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é a reta de equação $y = x$.

Interseção da reta com a circunferência:

$$\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 = 10 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (x - 2)^2 = 10 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 - 4x + 4 = 10 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x - 6 = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm 4}{2} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$P(-1, -1)$ e $Q(3, 3)$. Logo, $d(P, Q) = \sqrt{(3 + 1)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

11.2 O declive da reta AB é $\frac{1-0}{0-1} = -1$ e a sua ordenada na origem é 1 .

A equação reduzida da reta AB é $y = -x + 1$.

$$x^2 + (y - 2)^2 \leq 10 \wedge y \geq -x + 1$$

11.3 Se uma reta tangente à circunferência interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -3)$, então a sua ordenada na origem é -3 , pelo que a sua equação reduzida é da forma $y = mx - 3$, sendo m o seu declive.

Intersectando a reta com a circunferência:

$$x^2 + (mx - 3 - 2)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + (mx - 5)^2 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 - 10mx + 25 - 10 = 0 \Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 - 10mx + 15 = 0$$

Como a reta é tangente à circunferência, a reta interseca a circunferência num único ponto, pelo que a equação $(1 + m^2)x^2 - 10mx + 15 = 0$ só pode ter uma solução. Dado que esta equação é quadrática, então, só tem uma solução se o binómio discriminante for nulo.

Assim,

$$(-10m)^2 - 4 \times (1 + m^2) \times 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100m^2 - 60(1 + m^2) = 0 \Leftrightarrow 100m^2 - 60 - 60m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 40m^2 = 60 \Leftrightarrow m^2 = \frac{6}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{\sqrt{6}}{2} \vee m = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Portanto, as equações reduzidas de cada uma das retas tangentes à circunferência e que interseçam o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -3)$ são $y = -\frac{\sqrt{6}}{2}x - 3$ e $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x - 3$.