

# Geometria analítica no espaço

## Vol. 3 Cap. 2

### PÁG. 58

#### Diagnóstico

$$1.1 \quad A = A_{\text{trap}} - A_{\text{circ}} = \frac{3+5}{2} \times 3 - \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \approx 12 - 3,14 \times 1,5^2 \approx 4,9 \text{ cm}^2$$

$$1.2 \quad d^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow d^2 = 32 \Rightarrow d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$A = A_{\text{semicirc}} - A_{\text{tri}} = \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{4 \times 4}{2} \approx 4 \times 3,14 - 8 \approx 4,6 \text{ cm}^2$$

2. Como os vértices  $C$  e  $D$  pertencem a uma circunferência de centro no ponto  $E$ , então,  $\overline{EC} = \overline{ED}$  (raio da circunferência). Como  $[ABED]$  é um quadrado, então,  $\overline{EB} = \overline{ED}$ .

Designemos por  $x$  a medida do comprimento do lado do quadrado  $[ABED]$ .

$$A_{\text{trapézio}} = 24 \Leftrightarrow \frac{x+2x}{2} \times x = 24 \Leftrightarrow 3x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{4} A_{\text{circunferência}} - A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{4}\pi \times 4^2 - \frac{4 \times 4}{2} \approx 4 \times 3,14 - 8 = 4,56 \text{ cm}^2$$

3. O quadrilátero  $[ABCD]$  é um trapézio retângulo cujas bases têm medidas iguais às dos lados dos dois quadrados representados na figura.

A medida do comprimento do lado do quadrado maior é  $\sqrt{25} = 5 \text{ cm}$  e a do quadrado menor é  $\sqrt{4} = 2 \text{ cm}$ .

$$\text{Assim, } A = \frac{2+5}{2} \times (2+5) = 24,5 \text{ cm}^2.$$

4.1 A reta  $MQ$  interseca o plano  $DCG$  num ponto e forma com qualquer reta contida no plano um ângulo que não é reto. (C)

$$4.2 \quad V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{\overline{FG}}{2}\right)^2 \times \overline{FG}$$

$$\overline{CF}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GC}^2 \Leftrightarrow \sqrt{128^2} = 2\overline{FG}^2 \Leftrightarrow \overline{FG}^2 = 64 \Leftrightarrow \overline{FG} = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Assim, } V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{8}{2}\right)^2 \times 8 = \frac{128}{3}\pi \approx 134 \text{ cm}^3.$$

### 5.1

a.  $CD$ ,  $EH$ ,  $FG$

b.  $AF$ ,  $BG$ ,  $EF$ ,  $GH$

c.  $AF$ ,  $BG$ ,  $EF$ ,  $GH$ ,  $CG$ ,  $DF$

d.  $ED$ ,  $BG$ ,  $FH$

e.  $BD$

f.  $DG$ , por exemplo.

## 5.2

- a.  $FGH$
- b.  $ABC$ , por exemplo
- c.  $ABC$  e  $ABH$ , por exemplo
- d.  $C$
- e.  $D$

## 5.3 Por exemplo,

- a.  $EF$
- b.  $EB$
- c.  $AB$
- d.  $CD$

## 5.4

- a.  $d^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow d^2 = 18 \underset{d>0}{\Leftrightarrow} d = \sqrt{18} \Leftrightarrow d = 3\sqrt{2}$  cm
- b.  $D^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow D^2 = 27 \underset{D>0}{\Leftrightarrow} D = \sqrt{27} \Leftrightarrow D = 3\sqrt{3}$  cm
- c.  $A = 6 \times 3^2 = 54$  cm<sup>2</sup>
- d.  $V = 3^3 = 27$  cm<sup>3</sup>
- e. 3 cm
- f. 3 cm
- g.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  cm
- h. 3 cm

## PÁG. 62

## Tarefa 1

$A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 2, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $D(0, 2, 3)$ ,  $E(0, 0, 3)$ ,  $F(1, 0, 3)$ ,  
 $G(1, 2, 3)$ ,  $O(0, 0, 0)$ .

## PÁG. 63

## Aplicar

- 2.  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$ ,  $D(0, 0, 0)$ ,  $E(0, 0, 1)$ ,  $F(1, 0, 1)$ ,  
 e  $G(1, 1, 1)$ ,  $H(0, 1, 1)$ .
- 3.  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(1, 1, -1)$ ,  $C(0, 1, -1)$ ,  $D(0, 0, -1)$ ,  $E(0, 0, 0)$ ,  
 $F(1, 0, 0)$ ,  $G(1, 1, 0)$  e  $H(0, 1, 0)$ .
- 4.  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(3, 6, 0)$  e  $H(-3, 0, 12)$ .
- 4.1  $C(-3, 6, 0)$ ,  $D(-3, 0, 0)$ ,  $E(-3, 0, 12)$ ,  $F(3, 0, 12)$ ,  $G(3, 6, 12)$ .
- 4.2  $V = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{AE} = 6 \times 6 \times 12 = 432$

**PÁG. 67****Aplicar**

6.  $ABC: z = 0$ ,  $EFG: z = 2$ ,  $OAF: y = 0$ ,  $BCD: y = -2$ ,  $OCD: x = 0$ ,  $ABG: x = -2$

**PÁG. 68****Aplicar**

7.1  $ABC: z = 0$ ,  $EFG: z = 3$ ,  $BCH: y = \frac{3}{2}$ ,  $ADE: y = -\frac{3}{2}$ ,  $ABG: x = \frac{3}{2}$ ,  $CDH: x = -\frac{3}{2}$

**7.2**

a.  $y = 5$

b.  $z = -2$

c.  $x = 10$

8.1  $z = 2$

8.2  $x = -1$

8.3  $y = \frac{1}{2}$

9. Designando por  $x$  a medida do comprimento da aresta da base, tem-se  $x^2 \times 2x = 16 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$ .

9.1  $A(2, -2, 0)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(-2, 0, 0)$ ,  $D(-2, -2, 0)$ ,  $E(-2, -2, 2)$ ,  $F(2, -2, 2)$ ,  $G(2, 0, 2)$ ,  $H(-2, 0, 2)$ .

9.2  $ABG: x = 2$ ,  $CDE: x = -2$ ,  $BCH: y = 0$ ,  $ADE: y = -2$ ,  $ABC: z = 0$ ,  $EFG: z = 2$

**9.3**

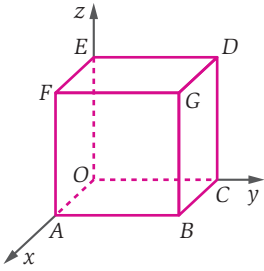
a.  $y = 0$

b.  $x = -3$

c.  $z = 7$

## PÁG. 71

## Tarefa 3



Arestas:

$$[OC]: x = 0 \wedge z = 0 \wedge 0 \leq y \leq 1, [FG]: x = 1 \wedge z = 1 \wedge 0 \leq y \leq 1,$$

$$[ED]: x = 0 \wedge z = 1 \wedge 0 \leq y \leq 1, [AO]: y = 0 \wedge z = 0 \wedge 0 \leq x \leq 1,$$

$$[BC]: y = 1 \wedge z = 0 \wedge 0 \leq x \leq 1, [EF]: y = 0 \wedge z = 1 \wedge 0 \leq x \leq 1,$$

$$[GD]: y = 1 \wedge z = 1 \wedge 0 \leq x \leq 1, [AF]: x = 1 \wedge y = 0 \wedge 0 \leq z \leq 1,$$

$$[BG]: x = 1 \wedge y = 1 \wedge 0 \leq z \leq 1, [OE]: x = 0 \wedge y = 0 \wedge 0 \leq z \leq 1$$

$$[CD]: x = 0 \wedge y = 1 \wedge 0 \leq z \leq 1$$

Faces:

$$[ABCO]: z = 0 \wedge 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1, [AOEF]: y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1,$$

$$[BCDG]: y = 1 \wedge 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1, [ABFG]: x = 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1,$$

$$[CDEO]: x = 0 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1$$

**PÁG. 73****Aplicar**

**11.**  $[AO]: y = 0 \wedge z = 0$ ,  $[CO]: x = 0 \wedge z = 0$ ,  $[AB]: x = -2 \wedge z = 0$ ,  $[BC]: y = -2 \wedge z = 0$ ,  
 $[EF]: y = 0 \wedge z = 2$ ,  $[DE]: x = 0 \wedge z = 2$ ,  $[FG]: x = -2 \wedge z = 2$ ,  $[DG]: y = -2 \wedge z = 2$

**12.1**  $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$ ,  $B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ ,  $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ ,  $D\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$ ,  
 $E\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 3\right)$ ,  $F\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 3\right)$ ,  $G\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$ ,  $H\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$

**12.2**

**a.**  $AB: x = \frac{3}{2} \wedge z = 0$ ,  $CD: x = -\frac{3}{2} \wedge z = 0$ ,  $FG: x = \frac{3}{2} \wedge z = 3$ ,  $EH: x = -\frac{3}{2} \wedge z = 3$ ,

$AD: y = -\frac{3}{2} \wedge z = 0$ ,  $BC: y = \frac{3}{2} \wedge z = 0$ ,  $EF: y = -\frac{3}{2} \wedge z = 3$ ,  $GH: y = \frac{3}{2} \wedge z = 3$ ,

$AF: x = \frac{3}{2} \wedge y = -\frac{3}{2}$ ,  $BG: x = \frac{3}{2} \wedge y = \frac{3}{2}$ ,  $DE: x = -\frac{3}{2} \wedge y = -\frac{3}{2}$ ,  $CH: x = -\frac{3}{2} \wedge y = \frac{3}{2}$

**b.**  $[EF]: y = -\frac{3}{2} \wedge z = 3 \wedge -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ ,  $[CD]: x = -\frac{3}{2} \wedge z = 0 \wedge -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$ ,

$[AF]: x = \frac{3}{2} \wedge y = -\frac{3}{2} \wedge 0 \leq z \leq 3$

**c.**  $[EFGH]: z = 3 \wedge -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \wedge -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$ ,  $[BCHG]: y = \frac{3}{2} \wedge -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \wedge 0 \leq z \leq 3$

**12.3**  $z = 2 \wedge -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \wedge -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

**13.1**  $AB: y = -5 \wedge z = 1$ ,  $BC: x = -2 \wedge z = 1$ ,  $CD: y = 5 \wedge z = 1$ ,  $AD: x = 2 \wedge z = 1$ ,

$EF: y = -5 \wedge z = -1$ ,  $EH: x = -2 \wedge z = -1$ ,  $GH: y = 5 \wedge z = -1$ ,  $FG: x = 2 \wedge z = -1$ ,

$AF: x = 2 \wedge y = -5$ ,  $BE: x = -2 \wedge y = -5$ ,  $CH: x = -2 \wedge y = 5$ ,  $DG: x = 2 \wedge y = 5$

**13.2**  $[AD]: x = 2 \wedge z = 1 \wedge -5 \leq y \leq 5$ ,  $[AF]: x = 2 \wedge y = -5 \wedge -1 \leq z \leq 1$ ,

$[GH]: y = 5 \wedge z = -1 \wedge -2 \leq x \leq 2$

**PÁG. 74****Aplicar**

**14.1**  $A(6, 0, 10)$ ,  $C(0, 10, 10)$ ,  $D(6, 10, 10)$ ,  $E(6, 0, 4)$ ,  $F(0, 0, 4)$   
e  $G(0, 10, 4)$ .

**14.2**  $ABC: z = 10$ ;  $ABF: y = 0$ ;  $ADH: x = 6$ .

**14.3**  $FG: x = 0 \wedge z = 4$ ;  $HG: y = 10 \wedge z = 4$ ;  $AE: x = 6 \wedge y = 0$ .

**14.4**  $[FEHG]: z = 4 \wedge 0 \leq x \leq 6 \wedge 0 \leq y \leq 10$ ;  $[CDHG]: y = 10 \wedge 0 \leq x \leq 6 \wedge 4 \leq z \leq 10$ .

**14.5**  $x = 2 \wedge 0 \leq y \leq 10 \wedge 4 \leq z \leq 10$

**PÁG. 75****Tarefa 4**

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 14 \Leftrightarrow_{\overline{AD} > 0} \overline{AD} = \sqrt{14}$$

**PÁG. 76****Aplicar**

$$17.1 \quad d(A, B) = \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$17.2 \quad d(C, D) = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (-2-0)^2 + (-3-(-3))^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$18.1 \quad d(A, B) = \sqrt{(5-2)^2 + (2-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$18.2 \quad d(C, D) = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-2-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$18.3 \quad d(E, F) = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-(-2))^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{16+36+1} = \sqrt{53}$$

$$18.4 \quad d(G, H) = \sqrt{(0-(-\sqrt{3}))^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{8})^2 + (3-1)^2} = \sqrt{3+(-\sqrt{2})^2+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$19. \quad \overline{AB} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-1-(-2))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-(-1))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (3-(-2))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

O triângulo  $[ABC]$  é escaleno.

$$20. \quad \overline{AB} = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-1)^2 + (10-2)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-1)^2 + (10-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 10^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow 100 = 100$$

O triângulo  $[ABC]$  é retângulo.

$$21. \quad d(A, B) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(2-k)^2 + (-1-k)^2 + (0-2)^2} = 3$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado,

$$(2-k)^2 + (-1-k)^2 + 4 = 9 \Leftrightarrow 4 - 4k + k^2 + 1 + 2k + k^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k(k-1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 1$$

**PÁG. 78****Aplicar**

$$24.1 \quad M_{[AB]} \left( \frac{-2+4}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+(-3)}{2} \right) = M_{[AB]} \left( 1, 1, -\frac{3}{2} \right)$$

$$24.2 \quad C(x, y, z)$$

$$M_{[AC]} = B \Leftrightarrow \left( \frac{-2+x}{2}, \frac{0+y}{2}, \frac{0+z}{2} \right) = (4, 2, -3) \Leftrightarrow \frac{-2+x}{2} = 4 \wedge \frac{0+y}{2} = 2 \wedge \frac{0+z}{2} = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \times 2 + 2 \wedge y = 2 \times 2 \wedge z = -3 \times 2 \Leftrightarrow x = 10 \wedge y = 4 \wedge z = -6$$

$$C(10, 4, -6)$$

$$25.1 \quad x = \frac{5+1}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

$$25.2 \quad y = \frac{-2+7}{2} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$25.3 \quad z = \frac{-7+7}{2} \Leftrightarrow z = 0$$

26. Plano mediador de  $[PQ]$  :

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-(-2))^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-(-3))^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + (z+2)^2 = (y-2)^2 + (z+3)^2 \Leftrightarrow 4z+4 = -4y+4+6z+9 \Leftrightarrow 4y-2z-9=0$$

Plano mediador de  $[QR]$  :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-(-3))^2 = (x-(-2))^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x - 4x - 4y + 2y + 6z + 9 = 0 \Leftrightarrow 6x + 2y - 6z - 9 = 0$$

Plano mediador de  $[PR]$  :

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-(-2))^2 = (x-(-2))^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 + 4z + 4 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x - 4x + 2y + 4z = 0 \Leftrightarrow -6x + 2y + 4z = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 2z = 0$$

**27.1** Designemos por  $(x, y, z)$  as coordenadas de  $D$ .

$$\text{Tem-se } M_{[OD]} = (-1, 1, 2) \Leftrightarrow \left( \frac{0+x}{2}, \frac{0+y}{2}, \frac{0+z}{2} \right) = (-1, 1, 2) \Leftrightarrow (x, y, z) = (-2, 2, 4)$$

A projeção ortogonal de  $D$  no plano  $z = 0$  é o ponto que está no centro da base da pirâmide. Assim, o ponto  $B$  tem coordenadas  $(-4, 4, 0)$ .

Plano mediador de  $[BD]$ :

$$\begin{aligned} (x - (-4))^2 + (y - 4)^2 + (z - 0)^2 &= (x - (-2))^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 + z^2 &= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8x - 4x - 8y + 4y + 8z + 16 - 4 - 4 &= 0 \Leftrightarrow 4x - 4y + 8z + 8 = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

**27.2** O plano  $ACD$  é o plano mediador de  $[OB]$ :

$$\begin{aligned} (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 &= (x - (-4))^2 + (y - 4)^2 + (z - 0)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 + z^2 \Leftrightarrow 8x - 8y + 16 + 16 = 0 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0 \end{aligned}$$

## PÁG. 79

### Tarefa 5

**1.**  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

**2.**

**a.**  $d(C, P) = 2$

**b.**  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$ , por exemplo

**PÁG. 81****Tarefa 6**

**1.1**  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

**1.3**  $z = 0$

**1.4** Circunferência de centro na origem e raio 4, contida no plano  $xOy$ :  $x^2 + y^2 = 16 \wedge z = 0$

**1.5.1** Circunferência de centro na origem e raio  $r$ , contida no plano  $xOy$ :  $x^2 + y^2 = r^2 \wedge z = 0$

**1.5.2****a.** Ponto de coordenadas  $(0,0,r)$ **b.** Ponto de coordenadas  $(0,0,-r)$ **c. e d.** Circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{r^2 - c^2}$ , contida no plano de equação  $z = c$ :  $x^2 + y^2 = r^2 - c^2 \wedge z = c$ **e.** O plano não interseca a superfície esférica (conjunto vazio).

**1.6.1**  $b = 0$ :  $x^2 + z^2 = r^2 \wedge y = 0$ ,  $a = 0$ :  $y^2 + z^2 = r^2 \wedge x = 0$

**1.6.2****a.** Ponto de coordenadas  $(0, r, 0)$ .**b.** Ponto de coordenadas  $(0, -r, 0)$ .**c. e d.** Circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{r^2 - b^2}$ , contida no plano de equação  $y = b$ :  $x^2 + z^2 = r^2 - b^2 \wedge y = b$ **e.** O plano não interseca a superfície esférica (conjunto vazio).**f.** Ponto de coordenadas  $(r, 0, 0)$ .**g.** Ponto de coordenadas  $(-r, 0, 0)$ .**h. e i.** Circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{r^2 - a^2}$ , contida no plano de equação  $x = a$ :  $y^2 + z^2 = r^2 - a^2 \wedge x = a$ **j.** O plano não interseca a superfície esférica (conjunto vazio).

**2.**  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 5 \wedge y = 3$

Círculo de centro no ponto de coordenadas  $(1, 3, 0)$  e raio 2:  $(x - 1)^2 + z^2 = 4 \wedge y = 3$ 

Área:  $\pi \times 2^2 = 4\pi \approx 12,57$

**PÁG. 83****Aplicar**

$$31.1 \quad (x + 10)^2 + (y - 9)^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow (x - (-10))^2 + (y - 9)^2 + (z - 0)^2 = 2^2$$

Centro:  $(-10, 9, 0)$ , raio: 2

$$31.2 \quad (x - 2)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 30 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 0)^2 + (z - (-2))^2 = \sqrt{30}^2$$

Centro:  $(2, 0, -2)$ , raio:  $\sqrt{30}$

$$31.3 \quad (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Centro:  $\left(1, 4, \frac{1}{2}\right)$ , raio:  $r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$

$$31.4 \quad (x + 3)^2 + (y + 6)^2 + z^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (x - (-3))^2 + (y - (-6))^2 + (z - 0)^2 = \frac{4}{3}$$

Centro:  $(-3, -6, 0)$ , raio:  $r^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

**PÁG. 84****Aplicar**

$$32.1 \quad (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 5 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - (-2))^2 + (z - 2)^2 = \sqrt{5}^2$$

Centro:  $(1, -2, 2)$ , raio:  $\sqrt{5}$

**32.2** Substituindo as coordenadas do ponto na equação da superfície esférica, obtém-se

$$(1 - 1)^2 + (0 + 2)^2 + (1 - 2)^2 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5, \text{ que é uma proposição verdadeira.}$$

Logo, o ponto pertence à circunferência.

**32.3** Substituindo as coordenadas do ponto na equação da superfície esférica, obtém-se

$$(2 - 1)^2 + (-1 + 2)^2 + (2 - 2)^2 = 2 < 5.$$

Logo, o ponto é interior à circunferência.

**33.** O raio da superfície esférica é  $\overline{OP} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (-2 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{14}$ ,

logo o diâmetro é  $2\sqrt{14}$ .

**34.** Interseção com  $Ox$ :

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (0 - 1)^2 + (0 + 1)^2 = 1 \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

Como a equação obtida é impossível, conclui-se que a superfície esférica não interseca o eixo das abcissas.

Interseção com  $Oy$ :

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 1)^2 + (0 + 1)^2 = 1 \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 1)^2 = 0 \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

A superfície esférica interseca o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas  $(0, 1, 0)$ .

Interseção com  $Oz$ :

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0 - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1 \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z + 1)^2 = 0 \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + 1 = 0 \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

A superfície esférica interseca o eixo das cotas no ponto de coordenadas  $(0, 0, -1)$ .

$$35.1 \quad x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 2)^2 + (z - (-1))^2 = 3^2$$

Centro:  $(0, 2, -1)$ , raio: 3

### 35.2

a.  $z = -1 - 3 \Leftrightarrow z = -4$ ,  $z = -1 + 3 \Leftrightarrow z = 2$

b.  $x = 0 - 3 \Leftrightarrow x = -3$ ,  $x = 0 + 3 \Leftrightarrow x = 3$

c.  $y = 2 - 3 \Leftrightarrow y = -1$ ,  $y = 2 + 3 \Leftrightarrow y = 5$

$$36. \quad (x - (-2))^2 + (y - (-3))^2 + (z - 1)^2 = 1^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 1$$

37. A distância do centro da esfera ao plano  $yOz$  é  $\frac{5}{2}$  (abscissa do centro).

Como o raio da esfera é  $\sqrt{\frac{9}{16}}$ , a distância pedida é  $\frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ .

### 38.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 169 \\ z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (-5)^2 \leq 169 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 144 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 12^2 \\ \text{_____} \end{cases}$$

Centro:  $(0, 0, 12)$ , raio: 12

39. Designemos por  $x = a$  o plano paralelo a  $yOz$  que intersesta a esfera.

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 \leq 25 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 \leq 25 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y + 2)^2 + (z - 4)^2 \leq 25 - (a - 3)^2 \\ \text{_____} \end{cases}$$

Como a área do círculo é  $16\pi$ ,

$$25 - (a - 3)^2 = 16 \Leftrightarrow (a - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow a - 3 = \pm 3 \Leftrightarrow a = -3 + 3 \vee a = 3 + 3 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 6$$

Assim, as possíveis equações do plano  $\alpha$  são  $x = 0$  e  $x = 6$ .

**PÁG. 85****Aplicar +**

**1.1**  $A(5, 5, 0)$ ,  $B(-5, 5, 0)$ ,  $C(-5, -5, 0)$ ,  $D(5, -5, 0)$ ,  $E(5, -5, 10)$ ,  $F(5, 5, 10)$ ,  $G(-5, 5, 10)$

**1.2** A face  $[ABCD]$  está contida no plano  $xOy$  e a cota do ponto  $H$  é 10. **(C)**

**1.3**

**a.**  $D^2 = 10^2 + 10^2 + 10^2 \Leftrightarrow D^2 = 300 \Leftrightarrow D = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$  cm

**b.**  $A = 6 \times 10^2 = 600$  cm<sup>2</sup>

**c.**  $V = 10^3 = 1000$  cm<sup>3</sup>

**1.4** O plano  $DCH$  é paralelo ao plano  $xOz$  e a ordenada do ponto  $H$  é  $-5$ . **(D)**

**1.5** A reta  $HG$  é paralela ao eixo  $Oy$ , a abscissa do ponto  $H$  é  $-5$  e a cota do ponto  $H$  é 10. **(A)**

**1.6**

**a.**  $x = 5 \wedge y = 5 \wedge 0 \leq z \leq 10$

**b.**  $z = 10 \wedge -5 \leq x \leq 5 \wedge -5 \leq y \leq 5$

**1.7**  $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 0)^2 = (x - (-5))^2 + (y - 5)^2 + (z - 10)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + z^2 = x^2 + 10x + 25 + z^2 - 20z + 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10x - 10x + 20z - 100 = 0 \Leftrightarrow x - z + 5 = 0$

**1.8** O ponto equidistante de todos os vértices do cubo é o ponto médio da diagonal espacial do cubo:

$$M_{[AH]} \left( \frac{-5+5}{2}, \frac{-5+5}{2}, \frac{10+0}{2} \right) = (0, 0, 5)$$

O raio da superfície esférica é igual a metade do comprimento da diagonal espacial:  $\frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

Equação da superfície esférica:  $x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 75$

**2.1**  $A(2, 2, 0)$ ,  $B(-2, 2, 0)$ ,  $D(2, -2, 0)$

**2.2** Aresta da base:  $\overline{AD} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-2 - 2)^2 + (0 - 0)^2} = 4$  cm

Aresta lateral:  $\overline{AE} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (0 - 2)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$  cm

**2.3**  $V = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 6 = 32$  cm<sup>3</sup>

**2.4**  $A = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$

A altura dos triângulos que constituem as faces laterais é:  $\sqrt{(\sqrt{44})^2 - 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$$A = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 4^2 + 4 \times \frac{4 \times 2\sqrt{10}}{2} = 16 + 16\sqrt{10} = 16(1 + \sqrt{10}) \text{ cm}^2$$

**2.5** Os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  estão à mesma distância da origem.

O raio da superfície esférica é metade da diagonal facial da base:  $\frac{\sqrt{4^2 + 4^2}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Equação da superfície esférica:  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$

**PÁG. 86****Aplicar +**

**3.** Como duas faces do cubo estão contidas nos planos de equações  $x = -1$  e  $x = 7$ , concluímos que a aresta do cubo mede 8. Dado que uma face do cubo está contida no plano de equação  $y = -2$ , outra face do cubo está contida no plano de equação  $y = 6$  ou  $y = -10$ ; dado que uma face do cubo está contida no plano de equação  $z = 3$ , outra face do cubo está contida no plano de equação  $z = 11$  ou  $z = -5$ . **(D)**

**4.** Os pontos  $A$  e  $B$  pertencem ao plano coordenado  $xOy$  e têm a mesma abcissa. Assim, o plano mediador de  $[AB]$  é  $y = -1$ . **(C)**

**5.**

(A)  $2 \times 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 5 = 0$  Proposição falsa

(B)  $2 \times 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 = 0$  Proposição falsa

**(C)**  $2 \times (-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$  Proposição verdadeira

**6.1**  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 10z + 25 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 10z + 25 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 6x + 2x - 4y - 4y + 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow 8x - 8y + 8 = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

**6.2**  $\frac{5}{2} - 4 + 1 = -\frac{1}{2} \neq 0$ , o ponto  $T$  não pertence ao plano mediador de  $[RS]$ , pelo que não é equidistante de  $R$  e de  $S$ .

**6.3**  $x - (-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ,  $U(-2, -1, 0)$

**7.1**

**a.**  $x = 4 \wedge z = -2$

**b.**  $y = 2 \wedge z = -2 \wedge 0 \leq x \leq 4$

**c.**  $z = -2 \wedge 0 \leq x \leq 4 \wedge -2 \leq y \leq 2$

**7.2** Plano mediador de  $[AB]$ :

$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 4y + 4 = -4y + 4 \Leftrightarrow y = 0$

Plano mediador de  $[VB]$ :

$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 + (z - 4)^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 8z + 16 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 4z + 4 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -4x + 8x + 4y - 8z - 4z - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x + 4y - 12z - 4 = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z - 1 = 0$

**7.3**  $[BD]$

**7.4**  $V = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 6 = 32$

**7.5**  $P(x, 0, 0)$ , com  $x > 0$

$$\overline{AP} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + 2^2 + 2^2} = 5$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem

$$(x-4)^2 + 2^2 + 2^2 = 25 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 17 \Leftrightarrow x-4 = \pm\sqrt{17} \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{17}$$

$$P(4 + \sqrt{17}, 0, 0)$$

**PÁG. 87****Aplicar +**

**8.** A reta  $AB$  é paralela ao eixo  $Oy$ , dado que o plano mediador de  $[AB]$  é perpendicular a  $Oy$ .

Logo, a sua equação é da forma  $x = a \wedge z = c$ , com  $\frac{a+c}{2} = 2$ . **(A)**

**9.1**  $y = -4 \wedge z = 7$

**9.2**  $\overline{AC} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-4-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+64+25} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \sqrt{98^2} = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 98 = 2\overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 49 \Leftrightarrow \overline{AB} = 7$   
 $\overline{BC} = \overline{AB}$   $\overline{AB} > 0$

$V = 7^3 = 343$

**9.3**  $BDE$  é o plano mediador de  $[AC]$ :

$(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = (x+1)^2 + (y+4)^2 + (z-7)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 4z + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + z^2 - 14z + 49 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x - 2x - 8y - 8y - 4z + 14z + 8 - 50 = 0 \Leftrightarrow -6x - 16y + 10z - 42 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 8y - 5z + 21 = 0$

**9.4**  $\overline{AB} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(5-2)^2 + (-2-4)^2 + (z-2)^2} = 7$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado,

vem  $(5-2)^2 + (-2-4)^2 + (z-2)^2 = 49 \Leftrightarrow 9 + 36 + (z-2)^2 = 49 \Leftrightarrow (z-2)^2 = 4 \Leftrightarrow z-2 = \pm 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 2 - 2 \vee z = 2 + 2 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = 4$

$B(5, -2, 4)$

**Outra resolução:**

$B(5, -2, z)$  e  $B$  pertence a  $BDE$ .

Substituindo na equação de  $BED$ :

$3 \times 5 + 8 \times (-2) - 5z + 21 = 0 \Leftrightarrow -5z = -20 \Leftrightarrow z = 4$

$B(5, -2, 4)$

**10.** O conjunto de pontos  $P$  que verificam a condição  $\overline{AP} = \overline{BP}$  é, por definição, o plano mediador de  $[AB]$ . **(B)**

**11.**  $V = 64 \Rightarrow a = 4$

**11.1**  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 32 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$   
 $\overline{AC} > 0$

$A(2\sqrt{2}, 0, 0)$ ,  $C(-2\sqrt{2}, 0, 0)$ ,  $B(0, 2\sqrt{2}, 0)$ ,  $D(0, -2\sqrt{2}, 0)$

$F(2\sqrt{2}, 0, 4)$ ,  $H(-2\sqrt{2}, 0, 4)$ ,  $G(0, 2\sqrt{2}, 4)$ ,  $E(0, -2\sqrt{2}, 4)$

**11.2** Centro: ponto médio de  $[AH]$ :  $\left(\frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{0+4}{2}\right) = (0, 0, 2)$

$$\text{Raio: } \frac{\overline{AH}}{2} = \frac{\sqrt{(-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 + (4 - 0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{32 + 16}}{2} = \frac{\sqrt{48}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Equação da superfície esférica:  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 12$

$$\text{a. } \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 12 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (4 - 2)^2 = 12 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ \text{_____} \end{cases}, r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 12 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 12 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + (z - 2)^2 = 11 \\ \text{_____} \end{cases}, r = \sqrt{11}$$

**11.3**  $x^2 + (y + 2\sqrt{2})^2 + z^2 = (x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 + (z - 4)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}y + 8 = -4\sqrt{2}x + 8 - 8z + 16 \Leftrightarrow 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 8z - 16 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z - 4 = 0$$



**PÁG. 88****Aplicar +**

**12.** Tem-se  $A_{[ABCD]} = 8 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 8$  e

$$\overline{BC}^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = 8 \Leftrightarrow 2\overline{OB}^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = 4 \Leftrightarrow_{\overline{OB} > 0} \overline{OB} = 2.$$

Assim,  $B(0, -2, 0)$ ,  $C(0, 0, 2)$  e o ponto que está no centro da base da pirâmide tem coordenadas  $(0, -2, 2)$ .

Por outro lado, tem-se  $V = \frac{112}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 8 \times \text{altura} = \frac{112}{3} \Leftrightarrow \text{altura} = \frac{112}{8} \Leftrightarrow \text{altura} = 14$ .

Visto que a altura da pirâmide é a distância do vértice  $V$  ao ponto que está no centro da base da pirâmide e  $V(x, -2, 2)$ ,

$$\text{vem } \sqrt{(x-0)^2 + (-2-(-2))^2 + (2-2)^2} = 14 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = 14 \Rightarrow x^2 = 14^2 \Leftrightarrow x = -14 \vee x = 14.$$

Como a abcissa de  $V$  é negativa, vem  $V(-14, -2, 2)$ .

Tem-se ainda  $A(0, -4, 2)$  e  $\overline{AV} = \sqrt{(-14-0)^2 + (-2-(-4))^2 + (2-2)^2} = \sqrt{196+4} = \sqrt{200}$ .

A equação pedida é  $(x+14)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 200$ .

**13.** Centro da esfera e do cubo:  $(-2, -4, 4)$ , raio da esfera:  $r = 5$

**13.1** O plano mediador da aresta  $[AB]$  é paralelo ao plano  $xOz$  e passa pelo centro do cubo, logo uma equação desse plano é  $y = -4$ .

**13.2**  $A(2, -8, 0)$ ,  $C(-6, 0, 0)$ ,  $D(-6, -8, 0)$ ,  $G(2, 0, 8)$ ,  $F(2, -8, 8)$ ,  $H(-6, 0, 8)$ ,  $E(-6, -8, 8)$

**13.3**  $\overline{AH} = \sqrt{(-6-2)^2 + 8^2 + 8^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$

**13.4**  $-6 \leq x \leq 2 \wedge -8 \leq y \leq 0 \wedge 0 \leq z \leq 8$

**13.5**  $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-4)^2 = 16$

**13.6**  $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-4)^2 = 25 \wedge x=0 \wedge y=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (0+2)^2 + (0+4)^2 + (z-4)^2 = 25 \wedge x=0 \wedge y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-4)^2 = 5 \wedge x=0 \wedge y=0 \Leftrightarrow z-4 = \pm\sqrt{5} \wedge x=0 \wedge y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 4 - \sqrt{5} \vee z = 4 + \sqrt{5} \wedge x=0 \wedge y=0$$

O segmento de reta tem extremos de coordenadas  $(0, 0, 4 - \sqrt{5})$  e  $(0, 0, 4 + \sqrt{5})$ .

Logo, tem comprimento  $4 + \sqrt{5} - (4 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$ .

**13.7** Determinemos a interseção da esfera com o plano que contém a face  $[BCHG]$ .

$$(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-4)^2 \leq 25 \wedge y=0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (0+4)^2 + (z-4)^2 \leq 25 \wedge y=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 + (z-4)^2 \leq 9 \wedge y=0$$

Obtivemos um círculo de raio 3, que tem área  $\pi \times 3^2 = 9\pi$ .

A área da superfície do cubo é  $6 \times 8^2 = 384$ .

A área da superfície do cubo que não está contida na esfera é  $384 - 6 \times 9\pi = 384 - 54\pi$ .

Logo, a percentagem pedida é  $\frac{384 - 54\pi}{384} \times 100 \approx 56\%$ .

## PÁG. 89

## Aplicar +

14. Centro:  $(1, -4, -1)$ , raio:  $r = 5$

$$14.1 \quad (0 - 1)^2 + (-8 + 4)^2 + (0 + 1)^2 = 1 + 16 + 1 = 18 < 25$$

O ponto está no interior da superfície esférica.

$$14.2 \quad \begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 = 25 \\ x = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 1)^2 + (y + 4)^2 + (1 + 1)^2 = 25 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + 4)^2 = 21 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 4 = \pm\sqrt{21} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 - \sqrt{21} \vee y = -4 + \sqrt{21} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

$$A(1, -4 - \sqrt{21}, 1), B(1, -4 + \sqrt{21}, 1) \text{ e } \overline{AB} = |-4 + \sqrt{21} - (-4 - \sqrt{21})| = 2\sqrt{21}$$

## 14.3

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 = 25 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (-4 + 1)^2 = 25 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 16 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

A circunferência que delimita a base do cone resulta da interseção da superfície esférica com o plano de equação  $z = -4$ , tem centro no ponto  $(1, -4, -4)$  e raio 4.

$$\text{Assim, } V = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times (5 + 3) = \frac{128}{3} \pi$$

15. Centro:  $(0, 1, c)$ , raio:  $r = 10$

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 + (z - c)^2 \leq 100 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 + (5 - c)^2 \leq 100 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 \leq 100 - (5 - c)^2 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

Como a interseção da esfera com o plano de equação  $z = 5$  é um círculo com 6 unidades de raio,  $100 - (5 - c)^2 = 6^2 \Leftrightarrow (5 - c)^2 = 64 \Leftrightarrow 5 - c = \pm 8 \Leftrightarrow c = 5 - 8 \vee c = 5 + 8 \Leftrightarrow c = -3 \vee c = 13$

Dado que a esfera intersesta o plano  $xOy$  e o raio da esfera é 10,  $c = -3$  e o centro da esfera é o ponto de coordenadas  $(0, 1, -3)$ .

**PÁG. 94****Autoavaliação**

**1.1** O plano de equação  $x = -4$  é o plano  $DCH$  e o plano de equação  $z = 0$  é o plano  $ABC$ . **(B)**

**1.2** A reta  $AB$  é paralela ao eixo  $Oy$ , os pontos  $A$  e  $B$  tem abcissa 4 e cota 0. **(D)**

**1.3** O ponto  $A$  tem ordenada 0 e o ponto  $B$  tem ordenada 8.

O plano mediador de  $[AB]$  tem equação  $y = \frac{0+8}{2} \Leftrightarrow y = 4$ . **(D)**

**1.4**  $C(-4, 8, 0)$ ,  $D(-4, 0, 0)$ ,  $F(4, 0, 16)$ ,  $G(4, 8, 16)$ ,  $E(-4, 0, 16)$

**1.5**

**a.**  $V = 8^2 \times 16 = 1024$

**b.**  $\overline{BH} = \sqrt{8^2 + 16^2} = \sqrt{64 + 256} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$

$\overline{AH} = \sqrt{8^2 + 8^2 + 16^2} = \sqrt{64 + 64 + 256} = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$

$P = \overline{AB} + \overline{BH} + \overline{AH} = 8 + 8\sqrt{5} + 8\sqrt{6}$

**2.**  $M_{[PQ]} \left( \frac{1-1}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{2-3}{2} \right) = \left( 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$  **(A)**

**3.1** Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  têm cota 4. **(B)**

**3.2** Os pontos  $B$  e  $C$  têm ordenada 0 e cota 4. **(A)**

**4.** Centro:  $(-2, 3, -3)$

**(A)** Centro:  $(-2, 3, -3)$ , raio: 2

**(B)** Centro:  $(2, -3, 3)$ , raio: 2

**(C)** Centro:  $(-2, 3, -3)$ , raio: 3

**(D)** Centro:  $(2, -3, 3)$ , raio: 3

**5.1**

**a.**  $z = -6$

**b.**  $y = -3 \wedge z = -6$

**c.**  $y = 5 \wedge -1 \leq x \leq 7 \wedge -6 \leq z \leq 2$

**d.**  $x = -1 \wedge z = -6 \wedge -3 \leq y \leq 5$

**5.2**  $(x-7)^2 + (y-5)^2 + (z+6)^2 = (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 + y^2 - 10y + 25 + z^2 + 12z + 36 =$

$= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -14x - 2x - 10y - 6y + 12z + 4z + 49 + 25 + 36 - 1 - 9 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -16x - 16y + 16z + 96 = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 6 = 0$

**5.3** Centro:  $M_{[QW]} \left( \frac{7-1}{2}, \frac{5-3}{2}, \frac{-6+2}{2} \right) = (3, 1, -2)$

Raio:  $\frac{\overline{QW}}{2} = \frac{\sqrt{(-1-7)^2 + (-3-5)^2 + (2+6)^2}}{2} = \frac{\sqrt{64+64+64}}{2} = \frac{\sqrt{192}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Equação da superfície esférica:  $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 48$

**5.4** Designemos por  $N$  o ponto descrito no enunciado.

A reta  $PT$  é definida por  $x=7 \wedge y=-3$ , logo  $N(7, -3, z)$ , com  $z > 0$ .

$$\overline{NQ} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{(7-7)^2 + (5+3)^2 + (-6-z)^2} = 12$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem

$$\Leftrightarrow (7-7)^2 + (5+3)^2 + (-6-z)^2 = 144 \Leftrightarrow (-6-z)^2 = 80 \Leftrightarrow -6-z = \pm\sqrt{80} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = -6 - 4\sqrt{5} \vee z = -6 + 4\sqrt{5}$$

Como o ponto tem cota positiva,  $N(7, -3, 4\sqrt{5} - 6)$ .

**6.1** Centro:  $(2, 0, -1)$ , raio:  $r=4$

**6.2**  $(1-2)^2 + 3^2 + (-3+1)^2 = 1 + 9 + 4 = 14 < 16$ , o ponto pertence à esfera.

**6.3**  $y=4$  e  $y=-4$

$$\mathbf{6.4} \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 16 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + 2^2 + (z+1)^2 \leq 16 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (z+1)^2 \leq 12 \\ \text{_____} \end{cases}$$

A figura definida pela interseção da esfera com o plano de equação  $y=2$  é um círculo de raio  $\sqrt{12}$  e a sua área é igual a  $\pi \times \sqrt{12}^2 = 12\pi$ .