

# Vetores no espaço

## Vol. 3 Cap. 4

### PÁG. 147

#### Diagnóstico

1.1 São coplanares.

1.2 São coplanares.

1.3 São coplanares.

1.4 Não são coplanares.

$$2.1 \quad \overline{PR}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 \Leftrightarrow \overline{PR}^2 = 10^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{PR}^2 = 116 \underset{\overline{PR} > 0}{\Leftrightarrow} \overline{PR} = \sqrt{116} \Leftrightarrow \overline{PR} = 2\sqrt{29}$$

$$2.2 \quad \overline{PX}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 + \overline{RX}^2 \Leftrightarrow \overline{PX}^2 = 10^2 + 4^2 + 6^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{PX}^2 = 152 \underset{\overline{PX} > 0}{\Leftrightarrow} \overline{PX} = \sqrt{152} \Leftrightarrow \overline{PX} = 2\sqrt{38}$$

2.3 PQ e TX, por exemplo.

2.4 PQ e RX, por exemplo.

### 3.1

a. Paralelas

b. Concorrentes

c. Não coplanares

d. Coincidentes

$$3.2 \quad V_{\text{sólido}} = 2 \times V_{\text{pirâmide}}$$

A medida da altura de cada triângulo equilátero que é face do sólido é

$$\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} \quad \text{e a medida da altura de cada pirâmide é } \sqrt{\sqrt{12}^2 - 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Assim, } V_{\text{sólido}} = 2 \times \frac{1}{3} \times 4^2 \times 2\sqrt{2} = \frac{64\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3.$$

## PÁG. 148

## Tarefa 1

1.  $[A, F]$ ,  $[B, G]$ ,  $[C, H]$  e  $[D, E]$ .

2.1  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EH}$

2.2  $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{HC}$

2.3  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{DH}$

2.4  $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HE}$

3.1  $F + \overrightarrow{AB} = F + \overrightarrow{FG} = G$

3.2  $G + \overrightarrow{ED} = G + \overrightarrow{GB} = B$

3.3  $C - \overrightarrow{FE} = C + \overrightarrow{EF} = C + \overrightarrow{CB} = B$

3.4  $G - \overrightarrow{DF} = G + \overrightarrow{FD} = G + \overrightarrow{GC} = C$

3.5  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH}$

3.6  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$

3.7  $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CB}$ , por exemplo.

3.8  $\overrightarrow{HF} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{HA}$

4.1  $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Leftrightarrow \sqrt{8}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 \Leftrightarrow 2\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 8 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 4 \underset{\|\overrightarrow{AB}\| > 0}{\Leftrightarrow} \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = 2$

4.2  $\|\overrightarrow{AH}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CH}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AH}\|^2 = \sqrt{8}^2 + 2^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AH}\|^2 = 12 \underset{\|\overrightarrow{AH}\| > 0}{\Leftrightarrow} \|\overrightarrow{AH}\| = 2\sqrt{3}$

4.3  $\|\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{CD}\| = \|\vec{0}\| = 0$

4.4  $\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{HE}\| = \|\overrightarrow{2BA}\| = 2 \times 2 = 4$

**PÁG. 150****Aplicar****2.1**

a.  $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{CD}$

b.  $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DE}$

c.  $-\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FB}$

d.  $-\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{EA}$

e.  $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CH}$

f.  $-2\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BG}$

**2.2**  $[B, A], [C, D], [G, F]$  e  $[H, E]$

**2.3**

a.  $B + \overrightarrow{AD} = B + \overrightarrow{BC} = C$

b.  $C - \overrightarrow{FH} = C + \overrightarrow{HF} = C + \overrightarrow{CA} = A$

c.  $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BE}$

d.  $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF}$ , por exemplo.

e.  $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE}$ , por exemplo.

f.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ , por exemplo

**2.4**  $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 50 \Leftrightarrow \underset{\|\overrightarrow{AC}\| > 0}{\Leftrightarrow} \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{50} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = 5\sqrt{2}$$

**2.5**  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{FN} = 2(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FN}) = 2\overrightarrow{MN}$

Logo, os vetores são colineares.

## PÁG. 151

## Aplicar

## 3.1

a.  $P + \overrightarrow{TX} = P + \overrightarrow{PQ} = Q$

b.  $V - \overrightarrow{TU} = V + \overrightarrow{UT} = V + \overrightarrow{VX} = X$

c.  $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QV} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PT}$ , por exemplo.

d.  $\overrightarrow{VT} - \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{VT} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{VT} + \overrightarrow{TX} = \overrightarrow{VX}$ , por exemplo.

e.  $Q - U + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{UQ} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{UQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{UR}$

f.  $U - (\overrightarrow{TU} - \overrightarrow{PQ}) = U - (\overrightarrow{TU} + \overrightarrow{QP}) = U - (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP}) = U - \overrightarrow{RP} = U + \overrightarrow{PR} = U + \overrightarrow{UX} = X$

3.2  $\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{TQ} = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QX}) + (\overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{QX} + \overrightarrow{TP}) = 2\overrightarrow{PQ} + \vec{0} = 2\overrightarrow{PQ}$

Logo, os vetores são colineares.

3.3  $\overrightarrow{PX}^2 = \overrightarrow{PQ}^2 + \overrightarrow{QR}^2 + \overrightarrow{RX}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{PX}^2 = 5^2 + 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{PX}^2 = 50 \underset{\overrightarrow{PX} > 0}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{PX} = \sqrt{50} \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} = 5\sqrt{2}$

## 4.1

a.  $? + \overrightarrow{BC} = J \Leftrightarrow ? = J - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow ? = J + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow ? = J + \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow ? = I$

b.  $? + \overrightarrow{KD} = B \Leftrightarrow ? = B - \overrightarrow{KD} \Leftrightarrow ? = B + \overrightarrow{DK} \Leftrightarrow ? = B + \overrightarrow{BI} \Leftrightarrow ? = I$

c.  $-\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{KJ}$

4.2  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{DC}$ , por exemplo.

4.3  $\overrightarrow{GJ}$  e  $\overrightarrow{HI}$ , por exemplo.

4.4  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{GK}$

4.5 A base do prisma é um hexágono regular que pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros de lado 2.

A altura de cada triângulo é  $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$  e a área de cada triângulo é  $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ .

Assim,  $V_{\text{prisma}} = 24\sqrt{3} \Leftrightarrow 6 \times \sqrt{3} \times \text{altura} = 24\sqrt{3} \Leftrightarrow \text{altura} = \frac{24\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow \text{altura} = 4 \text{ cm}$ .

Logo,  $\|\overrightarrow{AH}\| = 4$ .

## 5.1

$$\text{a. } ? + \overrightarrow{BG} = E \Leftrightarrow ? = E - \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow ? = E + \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow ? = E + ED \Leftrightarrow ? = D$$

$$\text{b. } E + \overrightarrow{DB} = E + \overrightarrow{EG} = G$$

$$\text{c. } \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AC}, \text{ por exemplo.}$$

$$\text{d. } ? + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} \Leftrightarrow ? = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow ? = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CE} \Leftrightarrow ? = \overrightarrow{CB}, \text{ por exemplo.}$$

$$\text{5.2 } \|\overrightarrow{BH}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CH}\|^2 \Leftrightarrow 4^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Leftrightarrow 2\|\overrightarrow{BC}\|^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = 8 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{8} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = 2\sqrt{2}$$

$\|\overrightarrow{BC}\| > 0$

$$V_{\text{cubo}} = (2\sqrt{2})^3 = 8 \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

$$\text{6.1 } \overrightarrow{UA}, \text{ por exemplo}$$

## 6.2

$$\text{a. } M - \overrightarrow{LC} = M + \overrightarrow{CL} = M + \overrightarrow{MV} = V$$

$$\text{b. } 2\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PK} - \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{NC} =$$

$$= \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XK} = \overrightarrow{AK}, \text{ por exemplo.}$$

$$\text{c. } C + 2\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{UT} = C + \overrightarrow{BV} + \overrightarrow{UT} = C + \overrightarrow{BV} + \overrightarrow{VU} = C + \overrightarrow{BU} = C + \overrightarrow{CV} = V$$

$$\text{d. } K + 3\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{BM} = K + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{BM} = K + \overrightarrow{BJ} = K + \overrightarrow{KS} = S$$

$$\text{e. } \overrightarrow{LN} + \overrightarrow{CF} - 2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{LN} + \overrightarrow{CF} + 2\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{LN} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{LN} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{ED} =$$

$$= \overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{LM}, \text{ por exemplo.}$$

**PÁG. 154****Aplicar****8.1**

a.  $-\overrightarrow{AE}(2, 0, -3)$

b.  $\overrightarrow{DE}(0, 0, 3)$

c.  $\overrightarrow{BC}(-2, 0, 0)$

**8.2**  $\overrightarrow{BH}(-2, 0, 3)$

$$k^2 + 4k + 1 = -2 \wedge 0 = 0 \wedge k^2 - 6 = 3 \Leftrightarrow k^2 + 4k + 3 = 0 \wedge k^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \wedge k = \pm\sqrt{6} \Leftrightarrow k = \frac{-4 \pm 2}{2} \wedge k = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow$$

$$(k = -3 \vee k = -1) \wedge (k = -3 \vee k = 3) \Leftrightarrow k = -3$$

**8.3**  $V_{\text{prisma}} = 30 \Leftrightarrow 2 \|\overrightarrow{AB}\| \times 3 = 30 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = 5$

Logo,  $\overrightarrow{HE}(0, -5, 0)$ .

**Tarefa 3****1.**

a.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$

b.  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{AL}$

c.  $\overrightarrow{FH} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FI}$

d.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$

e.  $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

f.  $-2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$

**2.1**  $\overrightarrow{AB}(0, 3, 0), \overrightarrow{BG}(-3, -3, 3), \overrightarrow{GA}(3, 0, -3), \overrightarrow{BC}(0, 3, 0),$

$\overrightarrow{FH}(3, 0, 3), \overrightarrow{DE}(0, -3, 0)$

**2.2**  $\overrightarrow{AG}(-3, 0, 3), \overrightarrow{AL}(-3, 3, 3), \overrightarrow{FI}(3, 3, 3), \overrightarrow{0}(0, 0, 0),$

$\overrightarrow{AC}(0, 6, 0), \overrightarrow{CA}(0, -6, 0)$

**2.3**

- As coordenadas do vetor soma são dadas pela soma das coordenadas correspondentes de cada um dos vetores adicionados.
- As coordenadas do vetor diferença são dadas pela diferença das coordenadas correspondentes de cada um dos vetores subtraídos.
- As coordenadas de cada um dos vetores produto de um vetor por um escalar são dadas pelo produto do escalar pelas coordenadas desse vetor.

## PÁG. 157

## Aplicar

## 11.1

$$\begin{aligned} \text{a. } 2\vec{u} - 3\vec{v} &= 2(2, -1, 4) - 3(1, 3, -2) = (4, -2, 8) - (3, 9, -6) = \\ &= (4 - 3, -2 - 9, 8 + 6) = (1, -11, 14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } A + \vec{v} - 2\vec{u} &= (1, -1, 1) + (1, 3, -2) - 2(2, -1, 4) = \\ &= (1 + 1, -1 + 3, 1 - 2) - (4, -2, 8) = (2 - 4, 2 + 2, -1 - 8) = (-2, 4, -9) \end{aligned}$$

$$\text{c. } 2\vec{u} - 2(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} - 2\vec{u} - 6\vec{v} = -6(1, 3, -2) = (-6, -18, 12)$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \overrightarrow{AB} &= (-3, 1, 1) - (1, -1, 1) = (-3 - 1, 1 + 1, 1 - 1) = (-4, 2, 0) \\ -\vec{u} - (\overrightarrow{AB} + 2\vec{v}) &= -\vec{u} - \overrightarrow{AB} - 2\vec{v} = -(2, -1, 4) - (-4, 2, 0) - 2(1, 3, -2) = \\ &= (-2, 1, -4) - (-4, 2, 0) - (2, 6, -4) = \\ &= (-2 + 4 - 2, 1 - 2 - 6, -4 - 0 + 4) = (0, -7, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } 2\overrightarrow{AB} - 3(\vec{u} + 2\vec{v}) &= 2\overrightarrow{AB} - 3\vec{u} - 6\vec{v} = 2(-4, 2, 0) - 3(2, -1, 4) - 6(1, 3, -2) = \\ &= (-8, 4, 0) - (6, -3, 12) - (6, 18, -12) = (-8 - 6 - 6, 4 + 3 - 18, 0 - 12 + 12) = \\ &= (-20, -11, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f. } 3\vec{v} - 2(A - B) &= 3\vec{v} - 2\overrightarrow{BA} = 3(1, 3, -2) + 2(-4, 2, 0) = (3, 9, -6) + (-8, 4, 0) = \\ &= (3 - 8, 9 + 4, -6 + 0) = (-5, 13, -6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{11.2 } \overrightarrow{AX} + 3\vec{v} &= \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} - 3\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = (-4, 2, 0) - 3(1, 3, -2) \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{AX} &= (-4, 2, 0) - (3, 9, -6) \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = (-4 - 3, 2 - 9, 0 + 6) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} &= (-7, -7, 6) \end{aligned}$$

Como  $X = A + \overrightarrow{AX}$ , as coordenadas do ponto  $X$  são:

$$(1, -1, 1) + (-7, -7, 6) = (1 - 7, -1 - 7, 1 + 6) = (-6, -8, 7)$$

$$\text{12. } P_{[ABC]} = 3 \|\overrightarrow{AB}\| = 3\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{49} = 3 \times 7 = 21$$

## PÁG. 158

## Aplicar

$$13. \|\vec{a}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (\lambda + 3)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda + 14} = 5 \Leftrightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 14 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 11 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times (-11)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{80}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-6 \pm 4\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \lambda = -3 \pm 2\sqrt{5}$$

$$14. \vec{AB} = (-1, 1, 1) - (1, -1, 2) = (-1 - 1, 1 + 1, 1 - 2) = (-2, 2, -1)$$

$$\vec{BC} = (2, 1, 0) - (-1, 1, 1) = (2 + 1, 1 - 1, 0 - 1) = (3, 0, -1)$$

$$\vec{DC} = (2, 1, 0) - (4, -1, 1) = (2 - 4, 1 + 1, 0 - 1) = (-2, 2, -1)$$

$$\vec{AD} = (4, -1, 1) - (1, -1, 2) = (4 - 1, -1 + 1, 1 - 2) = (3, 0, -1)$$

[ABCD] é um paralelogramo porque  $\vec{AB} = \vec{DC}$  e  $\vec{BC} = \vec{AD}$ .

$$15.1 \ C = A + \vec{EG} = (10, -6, 2) + (-4, 1, 9) = (10 - 4, -6 + 1, 2 + 9) = (6, -5, 11)$$

$$G = E + \vec{EG} = (4, 6, -2) + (-4, 1, 9) = (4 - 4, 6 + 1, -2 + 9) = (0, 7, 7)$$

15.2  $V_{\text{prisma}} = \|\vec{AB}\|^2 \times \|\vec{AE}\|$ . Como  $\vec{AC} = \vec{EG}$ , pelo teorema de Pitágoras,

$$\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 \Leftrightarrow \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 9^2} = 2\|\vec{AB}\|^2 \Leftrightarrow 98 = 2\|\vec{AB}\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2 = \frac{98}{2} \Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2 = 49$$

$$\vec{AE} = (4, 6, -2) - (10, -6, 2) = (4 - 10, 6 + 6, -2 - 2) = (-6, 12, -4)$$

$$\|\vec{AE}\| = \sqrt{(-6)^2 + 12^2 + (-4)^2} = \sqrt{196} = 14$$

$$V_{\text{prisma}} = 49 \times 14 = 686$$

$$16.1 \ D = A + \vec{BC} = (6, 6, -4) + (4 - 8, 8 - 10, 4 - 0) =$$

$$= (6 - 4, 6 - 2, -4 + 4) = (2, 4, 0)$$

$$16.2 \ \vec{AB} = (8, 10, 0) - (6, 6, -4) = (8 - 6, 10 - 6, 0 + 4) = (2, 4, 4)$$

$$\|\vec{AB}\|^2 = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 36$$

$$V_{\text{pirâmide}} = 108 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \|\vec{AB}\|^2 \times \|\vec{VM}\| = 108 \Leftrightarrow 36 \times \|\vec{VM}\| = 108 \times 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{VM}\| = \frac{108 \times 3}{36} \Leftrightarrow \|\vec{VM}\| = 9$$

**PÁG. 160****Aplicar**

$$18.1 \quad \frac{k}{3} = \frac{3}{-1} \Leftrightarrow k = \frac{3 \times 3}{-1} \Leftrightarrow k = -9$$

**18.2** Um vetor colinear com  $\vec{a}$  é da forma  $\lambda\vec{a}$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pelo que tem coordenadas  $(3\lambda, -\lambda, 0)$ .

Vamos determinar  $\lambda$  de modo que  $\|\lambda\vec{a}\| = \sqrt{80}$ .

$$\|\lambda\vec{a}\| = \sqrt{80} \Leftrightarrow \sqrt{(3\lambda)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{80} \Leftrightarrow \sqrt{10\lambda^2} = \sqrt{80} \Leftrightarrow 10\lambda^2 = 80 \Leftrightarrow \lambda^2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{2}$$

Como os vetores têm o mesmo sentido,  $\lambda > 0$ ; logo, o vetor tem coordenadas

$$2\sqrt{2}(3, -1, 0) = (6\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0).$$

**19.1**  $(2, -3, 5)$ , por exemplo.

**19.2**  $(0, 1, -8)$ , por exemplo.

**19.3**  $(1, 0, 0)$ , por exemplo.

**20.1**  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , dado que  $\vec{w} = -3\vec{v}$ .

**20.2**  $(2, 0, 0)$ , por exemplo.

**20.3**  $a^2 - 1 = 0 \wedge a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a = -1 \vee a = 1) \wedge a = -1 \Leftrightarrow a = -1$

$b$  pode tomar qualquer valor real.

**20.4**  $\vec{x} = -2\vec{w} = -2(3, -9, -6) = (-6, 18, 12)$

$$\|\vec{x}\| = \|(-6, 18, 12)\| = \sqrt{(-6)^2 + 18^2 + 12^2} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14}$$

**21.**  $\vec{BA} = (1, 2, 3) - (-3, -2, 1) = (1+3, 2+2, 3-1) = (4, 4, 2)$

$$\frac{k}{4} = \frac{-k}{4} = \frac{2k}{2} \Leftrightarrow \frac{k}{4} = -\frac{k}{4} \wedge \frac{k}{4} = \frac{2k}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2} = 0 \wedge -\frac{3k}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \wedge k = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

Logo, os vetores não podem ser colineares.

**22.**

I. Verdadeira:  $\|\vec{a}\| = \|-2\vec{c}\| = 2\|\vec{c}\| = 2 \times 3 = 6$

II. Verdadeira:  $\vec{a}$  e  $\vec{c}$  são colineares e  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são colineares, logo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são colineares.

III. Falsa:  $\|\vec{a} + \vec{c}\| = \|-2\vec{c} + \vec{c}\| = \|\vec{c}\| = 3$  e  $\|\vec{a}\| + \|\vec{c}\| = 6 + 3 = 9$

**23.**  $\overrightarrow{PQ} = (0, 7, 7) - (3, 1, 9) = (0 - 3, 7 - 1, 7 - 9) = (-3, 6, -2)$

$$\overrightarrow{SR} = \left(\frac{11}{2}, 3, -1\right) - (7, 0, 0) = \left(\frac{11}{2} - 7, 3 - 0, -1 - 0\right) = \left(-\frac{3}{2}, 3, -1\right)$$

$\overrightarrow{PQ} = 2 \times \overrightarrow{SR}$ , os vetores são colineares, logo o quadrilátero é um trapézio.

**24.**  $\overrightarrow{AB} = (7, 0, 7) - (5, -3, 1) = (7 - 5, 0 + 3, 7 - 1) = (2, 3, 6)$

$$\overrightarrow{BC} = (1, -2, 10) - (7, 0, 7) = (1 - 7, -2 - 0, 10 - 7) = (-6, -2, 3)$$

$$\overrightarrow{CD} = (-1, -5, 4) - (1, -2, 10) = (-1 - 1, -5 + 2, 4 - 10) = (-2, -3, -6) \text{ e}$$

$$\overrightarrow{AD} = (-1, -5, 4) - (5, -3, 1) = (-1 - 5, -5 + 3, 4 - 1) = (-6, -2, 3)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7, \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7,$$

$$\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 7 \text{ e } \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7$$

O quadrilátero tem os lados todos iguais, logo, é um losango.

## PÁG. 163

## Aplicar

$$26.1 \quad (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(-1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 4 \\ \lambda = 4 \\ z = -1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \lambda = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$26.2 \quad (9, -6, -7) = (1, 2, -1) + \lambda(-1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 1 - \lambda \\ -6 = 2 + \lambda \\ -7 = -1 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -8 \\ \lambda = -8 \\ \lambda = -6 \end{cases}$$

O ponto não pertence à reta.

$$26.3 \quad (12, y, -12) = (1, 2, -1) + \lambda(-1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ -12 = -1 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -11 \\ y = 2 - 11 \\ \lambda = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -11 \\ y = -9 \\ \lambda = -11 \end{cases}$$

As retas intersectam-se no ponto de coordenadas  $(12, -9, -12)$ .

$$26.4 \quad (x, y, z) = (2, -1, 4) + \lambda(-1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$26.5 \quad \overrightarrow{AB} = (-1, 3, 2) - (2, 4, 1) = (-1 - 2, 3 - 4, 2 - 1) = (-3, -1, 1)$$

$\frac{-3}{-1} = 3$ ,  $\frac{-1}{1} = -1$  e  $\frac{1}{1} = 1$ , os vetores não são colineares, logo as retas não têm a mesma direção.

## 27.1

$$a. \quad M_{[AC]} = \left( \frac{5+1}{2}, \frac{-3-2}{2}, \frac{1+10}{2} \right) = \left( 3, -\frac{5}{2}, \frac{11}{2} \right)$$

$$(x, y, z) = \left( 3, -\frac{5}{2}, \frac{11}{2} \right) + \lambda(3, -6, 2), \lambda \in \mathbb{R}$$

b. As retas  $AB$  e  $CD$  são paralelas, pelo que o vetor  $\overrightarrow{AB}$  é vetor diretor de  $CD$ .

$$\overrightarrow{AB} = (7, 0, 7) - (5, -3, 1) = (2, 3, 6)$$

$$(x, y, z) = (1, -2, 10) + \lambda(2, 3, 6), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$27.2 \quad V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \|\overrightarrow{AB}\|^2 \times \|\overrightarrow{VM}\|$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}^2 = 49, \quad \|\overrightarrow{VM}\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = 7$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 49 \times 7 = \frac{343}{3}$$

$$\mathbf{28.1} \quad \overrightarrow{AB} = (-5, 2, 1) - (1, 2, -1) = (-5 - 1, 2 - 2, 1 + 1) = (-6, 0, 2)$$

Um vetor colinear com  $\overrightarrow{AB}$  é da forma  $\lambda \overrightarrow{AB}$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pelo que tem coordenadas  $(-6\lambda, 0, 2\lambda)$ .

Vamos determinar  $\lambda$  de modo que  $\|\lambda \overrightarrow{AB}\| = 3\sqrt{10}$ .

$$\begin{aligned} \|\lambda \overrightarrow{AB}\| = 3\sqrt{10} &\Leftrightarrow \sqrt{(-6\lambda)^2 + (2\lambda)^2} = \sqrt{90} \Leftrightarrow \sqrt{40\lambda^2} = \sqrt{90} \Leftrightarrow 40\lambda^2 = 90 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{90}{40} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Como os vetores têm o mesmo sentido,  $\lambda > 0$ ; logo, o vetor tem coordenadas

$$\frac{3}{2}(-6, 0, 2) = (-9, 0, 3).$$

**28.2** Os vetores não são colineares, pelo que as retas não são paralelas.

$$\mathbf{28.3} \quad (x, 0, z) = (-1, 2, 0) + k(0, 3, 1), \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 0 = 2 + 3k \\ z = 0 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ k = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

A reta intersesta o plano  $xOz$  no ponto de coordenadas  $(-1, 0, -\frac{2}{3})$ .

$$\mathbf{29.} \quad \overrightarrow{AB} = (7, 4, 2) - (1, 0, -2) = (7 - 1, 4 - 0, 2 + 2) = (6, 4, 4)$$

$$\frac{k^2 - 1}{6} = \frac{k}{4} = \frac{k}{4} \Leftrightarrow \frac{k^2 - 1}{6} = \frac{k}{4} \Leftrightarrow 4(k^2 - 1) = 6k \Leftrightarrow 2k^2 - 3k - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow k = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \vee k = 2$$

**PÁG. 164****Aplicar +****1.1**

(A)  $D + \overrightarrow{BD} = D$  Falso

(B)  $\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GE} = -\overrightarrow{EG}$  Verdadeiro

**1.2**  $\|\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE}\| = \|2\overrightarrow{CD}\| = \| \overrightarrow{CD} \| + \| \overrightarrow{CD} \| = \| \overrightarrow{CD} \| + \| \overrightarrow{FE} \|$  (C)

**2.**  $\overrightarrow{AB} = (k, 3, -2) - (0, -1, 2) = (k-0, 3+1, -2-2) = (k, 4, -4)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6 \Leftrightarrow k^2 + 32 = 36 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2$  (A)

**3.1**  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$ , pelo que o raio da esfera é  $\frac{3}{2}$ .

$V = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{4 \times 27}{3 \times 8}\pi = \frac{9}{2}\pi$

**3.2** Sendo  $M$  o ponto médio de  $[AB]$ , então  $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

Logo, as coordenadas de  $M$  são

$$(1, 2, 0) + \frac{1}{2}(1, 2, -2) = (1, 2, 0) + \left(\frac{1}{2}, 1, -1\right) = \left(1 + \frac{1}{2}, 2 + 1, 2 - 1\right) = \left(\frac{3}{2}, 3, -1\right)$$
 (C)

**4.1**  $\|\overrightarrow{AG}\|^2 = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HG}\|^2 \Leftrightarrow \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-1)^2}^2 = 2\|\overrightarrow{AH}\|^2 \Leftrightarrow 18 = 2\|\overrightarrow{AH}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AH}\|^2 = 9 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AH}\| = 3$   
 $\|\overrightarrow{AH}\| > 0$

$V_{\text{cubo}} = 3^3 = 27$  (C)

**4.2**  $D = F + \overrightarrow{GA} = (6, 3, 2) - (4, -1, -1) = (6-4, 3+1, 2+1) = (2, 4, 3)$

**5.1**  $\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (-2 - 1)^2 + (-2 - (-2))^2} = \sqrt{10}$ ,  $V = \sqrt{10}^2 \times 6 = 60$

**5.2** O vetor  $\overrightarrow{BG}$  tem cota 6, pelo que os pontos da face  $[EFGH]$  têm cota  $-2 + 6 = 4$ . (A)

**5.3**  $G = B + \overrightarrow{BG}$

$B = A + \overrightarrow{DC}$ , pelo que as coordenadas de  $B$  são  $(3, -1, -2) + [(-1, 1, -2) - (0, -2, -2)] = (3, -1, -2) + (-1, 3, 0) = (2, 2, -2)$

Logo, as coordenadas de  $G$  são  $(2, 2, -2) + (-3, 2, 6) = (-1, 4, 4)$ .

**PÁG. 165****Aplicar +**

6. O único vetor que pode ser vetor diretor de uma reta perpendicular ao plano de equação  $y = 2$  é o da opção (D). **(D)**

$$7. \frac{k+2}{1} = \frac{3}{k} \Leftrightarrow k(k+2) = 3 \Leftrightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow k = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow k = -3 \vee k = 1 \quad \mathbf{(B)}$$

8. O vetor  $(2, 0, -1)$  não é colinear com o vetor  $\vec{u}$  **(D)**

9. Uma reta perpendicular ao plano  $xOz$  é paralela ao eixo  $Oy$ . **(B)**

**10.1**

a.  $A + \vec{EH} = A + \vec{AB} = B$

b.  $S - \frac{1}{2}\vec{BG} = S + \vec{SD} = D$

c.  $\vec{PS} + \vec{EG} = \vec{PS} + \vec{SQ} = \vec{PQ}$

d.  $\vec{QR} - \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{QR} + \vec{BP} = \vec{QR} + \vec{RE} = \vec{QE}$

10.2  $\vec{PS} = \vec{PA} + \vec{AD} + \vec{DS} = -\vec{RH} - \vec{HG} - \vec{GQ} = -(\vec{RH} + \vec{HG} + \vec{GQ}) = -\vec{RQ} = \vec{QR}$

$\vec{PQ} = \vec{PB} + \vec{BQ} = \vec{ER} + \vec{SE} = \vec{SR}$

Logo,  $[PQRS]$  é um paralelogramo.

10.3 O plano medidor do segmento de reta  $[DB]$  é o plano  $ACF$ .

(A)  $B + \vec{DB} = B$  Não

(B)  $A + \vec{CH} = F$  Sim

$$\begin{aligned} \mathbf{11.1} \quad B - A - 2\vec{u} &= (3, -3, -1) - (-1, 1, 3) - 2(2, -2, -2) = \\ &= (3 + 1, -3 - 1, -1 - 3) - (4, -4, -4) = (4 - 4, -4 + 4, -4 + 4) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\|B - A - 2\vec{u}\| = 0$$

$$\|B - A - 2\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \|\vec{AB} - 2\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} - 2\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} = 2\vec{u}$$

Logo, os vetores são colineares.

**11.2** Um vetor colinear com  $\vec{u}$  é da forma  $\lambda\vec{u}$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pelo que tem coordenadas  $(2\lambda, -2\lambda, -2\lambda)$ .

Vamos determinar  $\lambda$  de modo que  $\|\lambda\vec{u}\| = 5\sqrt{3}$ .

$$\begin{aligned} \|\lambda\vec{u}\| = 5\sqrt{3} &\Leftrightarrow \sqrt{(2\lambda)^2 + (-2\lambda)^2 + (-2\lambda)^2} = \sqrt{75} \Leftrightarrow \sqrt{12\lambda^2} = \sqrt{75} \Leftrightarrow 12\lambda^2 = 75 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{75}{12} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Como os vetores têm sentidos opostos,  $\lambda < 0$ ; logo, o vetor tem coordenadas

$$-\frac{5}{2}(2, -2, -2) = (-5, 5, 5).$$

## PÁG. 166

## Aplicar +

## 12.1

a.  $A + \overrightarrow{BH} = A + \overrightarrow{AE} = E$  cujas coordenadas são  $(0, 6, 8)$ .

b.  $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BC} = (0, 10, 0) - (4, 10, 0) = (-4, 0, 0)$

c.  $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} = (0, 10, 0) - (4, 6, 0) = (-4, 4, 0)$

d.  $C - (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AB}) = C - (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FG}) = C - \overrightarrow{FC} = C + \overrightarrow{CF} = F$  cujas coordenadas são  $(4, 6, 8)$ .

12.2  $\overrightarrow{GC} = (0, 10, 0) - (4, 10, 8) = (-4, 0, -8)$

$$\frac{-4}{1} = -4 \text{ e } \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3} \neq -4$$

Logo, os vetores não são colineares.

12.3  $\overrightarrow{GE} = (0, 6, 8) - (4, 10, 8) = (-4, -4, 0)$

$$\|\overrightarrow{GE}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

13. As coordenadas do centro  $C$ , da superfície esférica, são  $(0, -1, 2)$ .

Tem-se que  $B = C + \overrightarrow{AC}$ .

Como as coordenadas de  $\overrightarrow{AC}$  são

$$(0, -1, 2) - (1, -2, 3) = (0 - 1, -1 + 2, 2 - 3) = (-1, 1, -1),$$

as coordenadas do ponto  $B$  são  $(0, -1, 2) + (-1, 1, -1) = (-1, 0, 1)$ .

14.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (2, -1, 3) + (-3, 0, 2) = (-1, -1, 5)$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}, \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Leftrightarrow (\sqrt{27})^2 = (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{13})^2 \Leftrightarrow 27 = 27$  Proposição verdadeira, pelo que o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$ .

**15.1** A reta  $ST$  é paralela à reta  $PU$ , pelo que  $\overrightarrow{PU}$  é vetor diretor da reta  $ST$ .

$$S = P + \overrightarrow{PS} = P - \overrightarrow{SP} = (1, -1, \sqrt{3}) - (-\sqrt{3}, 2, -3) = (1 + \sqrt{3}, -3, \sqrt{3} + 3)$$

$$(x, y, z) = (1 + \sqrt{3}, -3, 3 + \sqrt{3}) + \lambda(-4\sqrt{3}, 0, 4), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{15.2} \begin{cases} (x, y, z) = (1, -1, \sqrt{3}) + \lambda(-\sqrt{3}, 2, -3), \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3}\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ 0 = \sqrt{3} - 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ y = -1 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 \\ \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

O ponto de interseção da reta com o plano tem coordenadas  $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, 0\right)$ .

**15.3** Plano mediador de  $[PO]$ :

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - \sqrt{3})^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow -2x + 1 + 2y + 1 - 2\sqrt{3}z + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y - 2\sqrt{3}z + 5 = 0$$

Interseção com o eixo das abcissas:

$$\begin{cases} -2x + 2y - 2\sqrt{3}z + 5 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto de interseção são  $\left(\frac{5}{2}, 0, 0\right)$ .

**15.4** Raio:  $\|\overrightarrow{PW}\|$

$$\|\overrightarrow{PW}\|^2 = \|\overrightarrow{PS}\|^2 + \|\overrightarrow{SR}\|^2 + \|\overrightarrow{RW}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{PS}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{16} = 4, \quad \|\overrightarrow{RW}\| = \|\overrightarrow{PU}\| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\|\overrightarrow{PW}\|^2 = 4^2 + 4^2 + 8^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{PW}\|^2 = 96 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{PW}\| = \sqrt{96}$$

$\|\overrightarrow{PW}\| > 0$

Equação da superfície esférica:  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 96$

**15.5** Como o ponto  $Q$  pertence à reta  $PQ$ , as suas coordenadas são da forma

$$(1 + 2\lambda, -1 + 4\sqrt{3}\lambda, \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\lambda), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado,  $\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{SP}\|$ .

Tem-se

$$\overrightarrow{PQ} = (1 + 2\lambda, -1 + 4\sqrt{3}\lambda, \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\lambda) - (1, -1, \sqrt{3}) = (2\lambda, 4\sqrt{3}\lambda, 2\sqrt{3}\lambda), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt{(2\lambda)^2 + (4\sqrt{3}\lambda)^2 + (2\sqrt{3}\lambda)^2} = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{4\lambda^2 + 48\lambda^2 + 12\lambda^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{64\lambda^2} = 4 \Leftrightarrow 64\lambda^2 = 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{16}{64} &\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{16}{64}} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{4}{8} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se  $\lambda = -\frac{1}{2}$ ,  $1 + 2\lambda = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $-1 + 4\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - 2\sqrt{3}$  e  $\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ;

Se  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $1 + 2\lambda = 1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 2$ ,  $-1 + 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 2\sqrt{3}$  e  $\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}$ .

Como o ponto  $Q$  tem cota positiva, as coordenadas do vértice  $Q$  são  $(2, -1 + 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ .

## PÁG. 167

## Aplicar +

$$\begin{aligned} 16.1 \quad D &= C + \overrightarrow{BA} = C - \overrightarrow{AB} = (1, -2, 1) - (2, -2, 0) = \\ &= (1 - 2, -2 + 2, 1 - 0) = (-1, 0, 1) \end{aligned}$$

$$16.2 \quad \|\overrightarrow{AB}\|^2 = (\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2})^2 = 8, \text{ pelo que}$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \|\overrightarrow{AB}\|^2 \times \text{altura} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow 8 \times \text{altura} = 32 \Leftrightarrow \text{altura} = \frac{32}{8} \Leftrightarrow \text{altura} = 4$$

Assim, como a altura da pirâmide é 4 e a sua base é paralela ao plano  $xOy$ , a cota do ponto  $V$  é  $1 + 4 = 5$ , pelo que as coordenadas do ponto  $V$  são da forma  $(x, y, 5)$ .

Como  $V$  pertence à reta dada, substituindo,

$$(x, y, 5) = (0, 2, 9) + \lambda(1, 0, -2), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ 5 = 9 - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases}.$$

Logo,  $V(2, 2, 5)$

$$17.1 \quad H = F + \overrightarrow{CA} = F - \overrightarrow{AC} = (6, 11, 6) - (-4, 3, 6) = (6 + 4, 11 - 3, 6 - 6) = (10, 8, 0)$$

## 17.2

a. A reta  $FH$  é paralela à reta  $AC$ , pelo que um vetor diretor da reta  $FH$  é  $\overrightarrow{AC}(-4, 3, 6)$ .

Assim, uma equação vetorial da reta  $FH$  é:

$$(x, y, z) = (6, 11, 6) + \lambda(-4, 3, 6), \lambda \in \mathbb{R}$$

b.  $A(x, 0, 0)$ ,  $B(0, y, 0)$ ,  $C(0, y, z)$

Por um lado, as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AC}$  são  $(-4, 3, 6)$ .

Por outro, são  $(0, y, z) - (x, 0, 0) = (-x, y, z)$  pelo que  $(-x, y, z) = (-4, 3, 6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4 \wedge y = 3 \wedge z = 6$ . Logo,  $B(0, 3, 0)$

A reta  $CB$  é paralela ao eixo  $Oy$ , pelo que o vetor de coordenadas  $(0, 0, 1)$  é um vetor diretor de  $CB$ .

Assim, uma equação vetorial da reta  $CB$  é:

$$(x, y, z) = (0, 3, 0) + \lambda(0, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$17.3 \quad V = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(0 - 4)^2 + (3 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 5, \quad \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(10 - 4)^2 + (8 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 10,$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(0 - 0)^2 + (3 - 3)^2 + (6 - 0)^2} = 6$$

$$V = 5 \times 10 \times 6 = 300$$

$$18.1 \quad (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(4, 3, -2), \lambda \in \mathbb{R}$$

18.2 Coordenadas de  $V$ :

$$\begin{cases} (x, y, z) = (4, 3, 2) + \lambda(4, 3, -2) \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4 + 4\lambda \\ 0 = 3 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \\ z = 2 - 2(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$V(0, 0, 4)$$

Coordenadas de  $B$ :

$$\begin{cases} (x, y, z) = (4, 3, 2) + \lambda(4, 3, -2) \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 3 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ 0 = 2 - 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 4 \times 1 \\ y = 3 + 3 \times 1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$B(8, 6, 0)$$

$$V = \frac{1}{3} \times \overline{OA} \times \overline{OC} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times 8 \times 6 \times 4 = 64$$

19. Como a reta  $CV$  é perpendicular ao plano  $ABC$ , a altura da pirâmide é

$$\|\overrightarrow{CV}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

$$A(0, y_A, 0), y_A < 0, B(x_B, 0, 0), x_B > 0, C(0, 0, z_C), z_C > 0, V(x_V, y_V, 10)$$

Por um lado, as coordenadas de  $\overrightarrow{BA}$  são  $(-6, -6, 0)$  e, por outro, são

$$(0, y_A, 0) - (x_B, 0, 0) = (-x_B, y_A, 0) \text{ pelo que } (-x_B, y_A, 0) = (-6, -6, 0) \Leftrightarrow$$

$$-x_B = -6 \wedge y_A = -6 \Leftrightarrow x_B = 6 \wedge y_A = -6$$

$$A(0, -6, 0) \text{ e } B(6, 0, 0).$$

Por um lado, as coordenadas de  $\overrightarrow{CV}$  são  $(4, -4, 6)$  e, por outro, são

$$(x_V, y_V, 10) - (0, 0, z_C) = (x_V, y_V, 10 - z_C), \text{ pelo que } (x_V, y_V, 10 - z_C) = (4, -4, 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_V = 4 \wedge y_V = -4 \wedge 10 - z_C = 6 \Leftrightarrow x_V = 4 \wedge y_V = -4 \wedge z_C = 4$$

$$C(0, 0, 4) \text{ e } V(4, -4, 10).$$

A área da base da pirâmide é a área do triângulo  $[ABC]$ :  $\frac{\overline{AB} \times \overline{CM}}{2}$

$$M_{[AB]} \left( \frac{0+6}{2}, \frac{-6+0}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (3, -3, 0)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(6-0)^2 + (0+6)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\overline{CM} = \sqrt{(3-0)^2 + (-3-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{34}$$

$$V_{[ABCV]} = \frac{1}{3} \times \frac{6\sqrt{2} \times \sqrt{34}}{2} \times 2\sqrt{17} = 68$$



## PÁG. 170

## Autoavaliação

$$1.1 \quad \overrightarrow{AF} - \left( \overrightarrow{JE} - \frac{1}{2} \overrightarrow{GK} \right) = \overrightarrow{AF} - (\overrightarrow{JE} + \overrightarrow{LG}) = \overrightarrow{AF} - (\overrightarrow{JE} + \overrightarrow{EF}) = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{JF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AJ} \quad (\mathbf{B})$$

$$1.2 \quad \text{Designando por } a \text{ a medida do comprimento da aresta do cubo, tem-se } \|\overrightarrow{HJ}\| = 2a.$$

$$(A) \quad \|\overrightarrow{HL}\| - \|\overrightarrow{LJ}\| = 0, \text{ porque } \|\overrightarrow{HL}\| = \|\overrightarrow{LJ}\|$$

$$(B) \quad \|\overrightarrow{HL}\| + \|\overrightarrow{LJ}\| = 2\|\overrightarrow{HL}\| = 2\sqrt{2}a$$

$$(C) \quad \|\overrightarrow{HI}\| - \|\overrightarrow{IL}\| = a - a = 0$$

$$(D) \quad \|\overrightarrow{HI}\| + \|\overrightarrow{IL}\| = a + a = 2a$$

$$1.3 \quad \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{EJ}$$

Como  $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{EJ}$  e  $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{IJ}$ ,  $[FIJE]$  é um paralelogramo.

$$1.4.1 \quad \overrightarrow{CG} = (0, -3, 3) - (3, 3, 0) = (0 - 3, -3 - 3, 3 - 0) = (-3, -6, 3)$$

$$\|\overrightarrow{CG}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$1.4.2 \text{ a. } \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{LE} = \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{HD} = (0, 3, 0) - (3, -3, 3) =$$

$$= (0 - 3, 3 + 3, 0 - 3) = (-3, 6, -3)$$

$$\text{b. } B - \frac{1}{2} \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{AF} = B + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{AF} = B + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = B + \overrightarrow{BF} = F \text{ cujas coordenadas são } (0, -3, 0).$$

$$2.1 \quad \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}, \quad \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \text{ e } \frac{3}{-\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}, \text{ pelo que os vetores são colineares.}$$

$$2.2 \quad \sqrt{3}\vec{b} - \vec{a} = \sqrt{3}(\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 3) - (-1, 2, -\sqrt{3}) = (3, -6, 3\sqrt{3}) - (-1, 2, -\sqrt{3}) =$$

$$= (4, -8, 4\sqrt{3})$$

$$\|\sqrt{3}\vec{b} - \vec{a}\| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 64 + 48} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

2.3 Um vetor colinear com  $\vec{c}$  é da forma  $\lambda\vec{c}$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pelo que tem coordenadas  $(\sqrt{5}\lambda, -2\lambda, 4\lambda)$ .

Vamos determinar  $\lambda$  de modo que  $\|\lambda\vec{c}\| = 10$ .

$$\|\lambda\vec{c}\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{5}\lambda)^2 + (-2\lambda)^2 + (4\lambda)^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{25\lambda^2} = 10 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{100}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

Como os vetores têm sentidos opostos,  $\lambda < 0$ ; logo, o vetor tem coordenadas

$$-2(\sqrt{5}, -2, 4) = (-2\sqrt{5}, 4, -8).$$

## PÁG. 171

$$3. (0, y, 0) = (1, 2, -2) + k(0, 3, 0), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 & \text{falso} \\ y = 2 + 3k & , k \in \mathbb{R} \quad (\text{C}) \\ 0 = -2 & \text{falso} \end{cases}$$

$$4.1 (7, -3, -2) = (3, 3, 0) + \lambda(2, -3, 1), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 3 + 2\lambda \\ -3 = 3 - 3\lambda \\ -2 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

O ponto não pertence à reta.

$$4.2 \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \frac{\frac{3}{2}}{-3} = -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

O vetor  $\vec{v}$  e o vetor diretor da reta  $r$  não são colineares, pelo que as retas não são paralelas.

$$4.3 \begin{cases} (x, y, z) = (3, 3, 0) + \lambda(2, -3, 1) \\ y = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ 0 = 3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \lambda = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$(5, 0, 1)$$

$$4.4 \begin{cases} (x, y, z) = (3, 3, 0) + \lambda(2, -3, 1) \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ 0 = 3 - 3\lambda \\ 0 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

O sistema é impossível, pelo que a reta  $r$  não intereseta o eixo das abcissas.

$$5.1 F = G + \overrightarrow{GF} = G - \overrightarrow{CB} = (3, -5, -2) - (6, 2, -3) = (-3, -7, 1)$$

5.2 A reta  $GF$  é paralela à reta  $CB$ , pelo que  $\overrightarrow{CB}(6, 2, -3)$  é um vetor diretor de  $GF$ .

$$(x, y, z) = (3, -5, -2) + \lambda(6, 2, -3), \lambda \in \mathbb{R}, \text{ por exemplo.}$$

$$5.3 \|\overrightarrow{FD}\|^2 = \|\overrightarrow{FC}\|^2 + \|\overrightarrow{FC}\|^2 = 2\|\overrightarrow{CB}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{CB}\|^2 = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = 7$$

$$\|\overrightarrow{FD}\|^2 = 2\|\overrightarrow{CB}\|^2 \Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2 + 9^2 + k^2} = 2 \times 49 \Leftrightarrow k^2 = 16 \Leftrightarrow k = \pm 4$$

Como  $k > 0$ , vem que  $k = 4$ .

**PÁG. 172****Teste global**

1.  $k - 4 = -(-2) \Leftrightarrow k = 2 + 4 \Leftrightarrow k = 6$  **(C)**

2. A reta  $s$  passa pelos pontos  $(3, 0)$  e  $(0, 2)$ ,

logo tem declive  $\frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$  e ordenada na origem  $3$ .

Como a reta  $r$  é paralela à reta  $s$ , tem declive igual ao desta reta e um vetor diretor da reta tem coordenadas  $(3, -2)$ , por exemplo. **(D)**

3.1  $A_{[PQRS]} = \overline{PQ}^2 = \sqrt{(0 - (-4))^2 + (-2 - 0)^2} = 20$

3.2  $S = R + \overrightarrow{RS} = R + \overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{QP} = (-4, 0) - (0, -2) = (-4, 2)$

Logo, as coordenadas de  $S$  são

$(2, 2) + (-4, 2) = (2 - 4, 2 + 2) = (-2, 4)$

3.3  $(x + 4)^2 + y^2 = x^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow 8x + 16 = 4y + 4 \Leftrightarrow y = 2x + 3$

3.4 Centro:  $M_{[PR]} \left( \frac{-4+2}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (-1, 1)$

Raio:  $\frac{\overline{PR}}{2} = \frac{\sqrt{(2+4)^2 + (2-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

Equação da circunferência:

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$

3.5  $T(x, y)$ ,  $\overrightarrow{TQ} (0 - x, -2 - y)$ , ou seja,  $\overrightarrow{TQ} (-x, -2 - y)$ ,  $\overrightarrow{TR} (2 - x, 2 - y)$ .

$\|\overrightarrow{TQ}\| = \sqrt{(-x)^2 + (-2 - y)^2}$ ,  $\|\overrightarrow{TR}\| = \sqrt{(2 - x)^2 + (2 - y)^2}$

$\|\overrightarrow{TQ}\| = \|\overrightarrow{TR}\| \Leftrightarrow \sqrt{(-x)^2 + (-2 - y)^2} = \sqrt{(2 - x)^2 + (2 - y)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-x)^2 + (-2 - y)^2 = (2 - x)^2 + (2 - y)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4 + 4y + y^2 = 4 - 4x + x^2 + 4 - 4y + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8y = -4x + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$\|\overrightarrow{TQ}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-x)^2 + (-2 - y)^2} = 5 \Leftrightarrow (-x)^2 + (-2 - y)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 4 = 25$

$\|\overrightarrow{TR}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(2 - x)^2 + (2 - y)^2} = 5 \Leftrightarrow (2 - x)^2 + (2 - y)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 4y + 8 = 25$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y + 4 = 25 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) + 4 = 25 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - 2x + 2 + 4 = 25 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{75}{4} = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 10x - 75 = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 15 = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15)}}{2 \times 1} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm 8}{2} \\ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2-8}{2} \vee x = \frac{2+8}{2} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \vee x = 5 \\ y = -\frac{1}{2} \times (-3) + \frac{1}{2} \vee y = -\frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \vee x = 5 \\ y = 2 \vee y = -2 \end{cases}$$

Como o ponto  $T$  pertence ao 4.º quadrante, conclui-se que tem coordenadas  $(5, -2)$ .

4. A circunferência tem centro  $(3, -k)$  e raio  $\sqrt{\frac{k}{2}} = \frac{\sqrt{2k}}{2}$ .

$$P = 2\sqrt{2}\pi \Leftrightarrow 2\pi \frac{\sqrt{2k}}{2} = 2\sqrt{2}\pi \Leftrightarrow \sqrt{k} = 2 \Leftrightarrow k = 4$$

Como  $k=4$ , as coordenadas do centro  $C$  da circunferência são  $(3, -4)$  e as coordenadas do ponto dado, que vamos designar por  $B$ , são  $(4, -3)$ .

Assim, o ponto  $A$ , diametralmente oposto a  $B$  é  $A = B + \overrightarrow{BA} = B + 2\overrightarrow{BC}$ .

As coordenadas do vetor  $\overrightarrow{BC}$  são  $(3, -4) - (4, -3) = (3-4, -4+3) = (-1, -1)$ ,

pelo que as coordenadas do ponto  $A$ , diametralmente oposto a  $B$ , são

$$(4, -3) + 2(-1, -1) = (4, -3) + (-2, -2) = (4-2, -3-2) = (2, -5).$$

5.  $\frac{-1}{1+t} = \frac{1-t}{2} \Leftrightarrow (1+t)(1-t) = 2(-1) \Leftrightarrow 1-t^2 = -2 \Leftrightarrow t^2 = 3 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{3}$  (D)

## PÁG. 173

**6.1** O plano que contém a face  $[EFGH]$  é paralelo ao plano que contém a face  $[ABCD]$  e o vetor  $\overrightarrow{AE}$  tem cota 10. **(A)**

**6.2**  $x = 14 \wedge y = -7 \wedge 0 \leq z \leq 10$

**6.3** Designando por  $a$  a medida do comprimento da aresta do cubo, tem-se  $\|\overrightarrow{AE}\|^2 = a^2 + a^2$

$$\|\overrightarrow{AE}\|^2 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{200}^2 = 2a^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 200 \Leftrightarrow a^2 = 100$$

Logo,  $A = 6a^2 = 6 \times 100 = 600$

**6.4** A reta  $BH$  é paralela à reta  $AE$  e passa pelo ponto  $B$ ,

logo tem equação vetorial  $(x, y, z) = (14, -7, 0) + k(-6, 8, 10)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

Interseção com o plano  $xOz$ :

$$\begin{cases} (x, y, z) = (14, -7, 0) + k(-6, 8, 10) \\ y = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 - 6k \\ y = -7 + 8k \\ z = 10k \\ y = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 - 6k \\ 0 = -7 + 8k \\ z = 10k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 - 6\left(\frac{7}{8}\right) \\ k = \frac{7}{8} \\ z = 10\left(\frac{7}{8}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{35}{4} \\ z = \frac{35}{4} \end{cases}, \left(\frac{35}{4}, 0, \frac{35}{4}\right)$$

**7.1**  $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(-6, 6, 0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , por exemplo

**7.2**

**a.**  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

**b.**  $B + \overrightarrow{CV} - \overrightarrow{DA} = B + \overrightarrow{CV} + \overrightarrow{AD} = B + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CV} = B + \overrightarrow{BV} = V$

**7.3** O plano medidor do segmento de reta  $[AB]$  é o plano  $xOz$ , que tem equação  $y = 0$ .

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 2\|\overrightarrow{AB}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{72}$$

$$\sqrt{72}^2 = 2\|\overrightarrow{AB}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \frac{72}{2} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 36$$

$$V = 96 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 36 \times h = 96 \Leftrightarrow h = \frac{96}{12} \Leftrightarrow h = 8, V(0, 0, 8)$$

O polígono que resulta da interseção da pirâmide com o plano medidor do segmento de reta  $[AB]$  é um triângulo de base  $\sqrt{36} = 6$  e altura 8, que tem área  $\frac{6 \times 8}{2} = 24$ .

**7.4** A esfera de centro no ponto  $A(3, -3, 0)$  e que passa no ponto  $C$  tem raio  $\|\overrightarrow{AC}\| = 6\sqrt{2}$  é definida pela condição  $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + z^2 \leq 72$ .

Interseção da esfera com o plano de equação  $z = 2$ :

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + z^2 \leq 72 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + 2^2 \leq 72 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 3)^2 \leq 68 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$P = 2\pi \times \sqrt{68} = 2\pi \times 2\sqrt{17} = 4\pi\sqrt{17}$$

**8.** O plano mediador de  $[AC]$  passa pelo ponto  $V(3, y, 2)$ .

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 &= x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 &= x^2 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x - 2y = 2y - 4z &\Leftrightarrow -4x - 4y + 4z = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0 \end{aligned}$$

Substituindo as coordenadas de  $V$  na equação do plano mediador,  $3 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ .

