Pág. 105

Tarefa: Vamos recordar

1.

1.1. A correspondência *f* não é função porque o elemento 4 de A não tem correspondência em B.

1.2. A correspondência *g* não é função porque o elemento 2 de A tem dois correspondentes em B.

2.

2.1. $f(-1)-2f(0)=\frac{1}{2}\times(-1)+1-2\left(\frac{1}{2}\times 0+1\right)=$

$=-\frac{1}{2}+1-2=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$

2.2. $f(1)=\frac{1}{2}\times 1+1=\frac{3}{2}$

A imagem do objeto 2 é $\frac{3}{2}$.

2.3. $f(x)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+1=2 \Leftrightarrow x+2=4 \Leftrightarrow x=2$

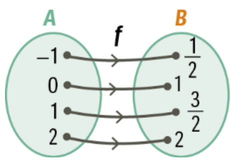
O objeto que tem imagem 2 é o 2.

2.4. $f(-1)=\frac{1}{2}\times(-1)+1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

$f(0)=\frac{1}{2}\times 0+1=1$

$f(1)=\frac{1}{2}\times 1+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$f(2)=\frac{1}{2}\times 2+1=2$



$D'_f=\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right\}$

3.

3.1.

a) $D_f=\{-1,0,1,2\}$ **b)** $D_g=[-1,+\infty[$

3.2.

a) $D'_f=\{1,2\}$ **b)** $D'_g=[0,+\infty[$

4.

4.1. Variável independente: temperatura em graus Celsius.

Variável dependente: temperatura em graus Fahrenheit.

4.2. $f(0)=k$

0 °C = 32 °F, $k=32$:

$f(c)=\frac{9}{5}c+32$

$f(20)+f(30)=\frac{9}{5}\times 20+32+\frac{9}{5}\times 30+32$

$=36+32+54+32=154$

Pág. 106

Tarefa inicial 1

1.

a) $D_f=[0,36]$ **b)** $D'_f=[-3,8]$

2. 4 soluções: 0, 6, 18 e 27.

0 h, 6 h, 18 h e 27 h após o início do registo, a temperatura foi $0\,°C$.

3. f é positiva em: $]6,18[\cup]27,36]$

f é negativa em: $]6,18[\cup]27,36]$

Pág. 107

4. 0 h; 2 h; 13 h; 22 h; 36 h.

Temperaturas registadas: $0\,°C$; $-2\,°C$; $5\,°C$; $-3\,°C$; $8\,°C$ (respetivamente)

5. f é crescente em $[2,13]$ e em $[22,36]$.

f é decrescente em $[0,2]$ e em $[13,22]$.

Pág. 108

Tarefa 1

1. $t\in\{0,3\}$

2. f é positiva em: $]3,4]$

f é negativa em: $]0,3[$

Pág. 109

1.

1.1. $D_g=]-5,4]$

$D'_g=[-2,3]\cup\{4\}$

1.2. Sinal: g é positiva em: $]-5,-1[\cup]1,4]$

g é negativa em: $]-1,1[$

Tabela de sinais:

x	-5		-1		1		4
$g(x)$	N.D.	$+$	0	$-$	0	$+$	4

2.

2.1. $f(x)=2x-6$

Zero: 3

f é positiva em $]3,+\infty[$.

f é negativa em: $]-\infty,3[$.

Tabela de sinais:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

2.2. $g(x) = -3x^2 + 12x$

Zeros: 0 e 4.

g é positiva em $]0, 4[$.

g é negativa em: $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$.

Tabela de sinais:

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

2.3. $h(x) = x^2 + 5x - 6$

Zeros: -6 e 1.

h é positiva em $]-\infty, -6[\cup]1, +\infty[$.

h é negativa em: $]-6, 1[$.

Tabela de sinais:

x	$-\infty$	-6		1	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Pág. 110

3.

3.1. Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -2]$

Conjunto dos majorantes: $[1, +\infty[$

3.2. Falsa porque, por exemplo, se $x = 1$, $f(1) = -2 < -1$

3.3 $D'_f = \{-2, 0, 1\}$

Pág. 111

4.

4.1. $D'_g =]-3, 0] \cup \{2\}$

4.2.

a) Máximo absoluto de g : 2

b) Mínimo absoluto de g : Não existe

Pág. 112

5.

5.1. $D_g = [-5, 4[$

$D'_g = [-2, 5[$

5.2. Máximo absoluto: não existe

Máximo relativo: 3

Maximizante: -3

Mínimo absoluto: -2

Mínimos relativos: -2 e 0

Minimizantes: -5 e -1 (respetivamente)

Pág. 113

6.

	f	***g***	***h***
Máximo absoluto	3	2	3
Mínimo absoluto	-1	Não tem	-3
Máximos relativos	-1 e 3	2	3
Mínimos relativos	-1	-1 e 1	-3 e -1
Maximizantes	-3 e $]-2, 1]$	-1 e 2	5
Minimizantes	$[-2, 1]$	1,3 e 4	-3 e 3

Pág. 117

7.

7.1.

a) $[3, 7]$

b)

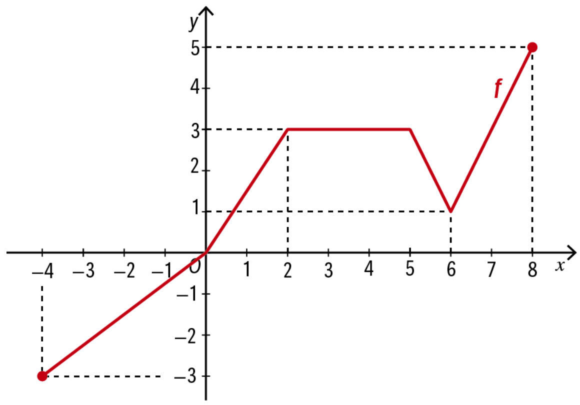
x	-2		0		3		5		7
$g(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\rightarrow$	3	$\searrow$	0

c) g é decrescente em: $[-2, 0]$ e em $[5, 7]$

g é crescente em: $[0, 3]$

g é constante em: $[3, 5]$

7.2. Por exemplo:



Pág. 118

Tarefas de consolidação

1.

1.1.

a) $D_f = [0, 10]$

b) $D'_f = [0, 50]$

c) Zeros: 0 e 10.

1.2.

x	0		3		4		7		10
$f(x)$	0	$\nearrow$	50	$\searrow$	40	$\rightarrow$	40	$\searrow$	0

1.3. f é crescente em: $[0,3]$

f é decrescente em: $[3,4]$ e em $[7,10]$

f é constante em: $[4,7]$

1.4. Máximo absoluto: 50

Mínimo absoluto: 0

1.5. 40

2.

2.1.

a) $D_f = [0,10]$

b) $D'_f = [-2,4]$

c) Zeros: 3 e 8.

2.2.

t	0		3		8		10
$f(t)$	4	+	0	+	0	−	−2

f é positiva em $[0,3[\cup]3,8[$.

f é negativa em: $]8,10]$.

2.3. Não. O máximo relativo é $f(6)=2$.
6 é o maximizante.

Pág. 119

3.

3.1. $[0,7]$ e $]14,16]$

3.2. Aparentemente sim, porque entre as 0**h** e as **7h** o consumo manteve-se nos 2 kWh.

3.3. O corte de corrente deu-se às 14**h** e durou 2 horas.

3.4.

a) $]14,16]$
b) 7
c) 0, 2, 5, 6 e 7;
d) 0**,** 2 e 5;
e) $[0,7[$, 9, $[14,16[$ e 20;
f) $[0,7]$, 11, $]14,16]$ e 24.

4. Durante os primeiros 9 minutos do salto ($D_d = [0,9]$) a distância da Cátia ao solo variou entre 100 m (máximo absoluto) e 30 m (mínimo absoluto), isto é, $D'_d = [30,100]$.

Nos primeiros 3 segundos, a distância ao solo decresceu, passou de 100 m para 30 m (mínimo relativo), a partir do terceiro segundo até ao quinto segundo a distância ao solo cresceu, passando de 30 m para 70 m (máximo relativo), de seguida, dos 5 segundos aos 7 segundos a distância decresceu, passando de 70 m para 40 m (mínimo relativo) e depois a distância ao solo volta a crescer passando para 60 m (máximo relativo). Durante os primeiros 9 segundos de salto, a Cátia não atinge o solo, isto é, a função d não tem zeros.

Pág. 121

Avaliação formativa 1

1. **(D)**

2. **(B)**

3.

3.1.

a) $D_h = [-3,4[$

b) $D'_h = [-2,2[$

c) Zeros: -1 e 2.

3.2. Sim, -2. Máximo absoluto, não tem.

4.

4.1. Mínimo absoluto: -3

Máximo absoluto: 7

4.2. $f(x)=7 \Leftrightarrow x=-6$

$S=\{-6\}$

4.3. $f(x)\leq -3 \Leftrightarrow x=-3$

$S=\{-3\}$

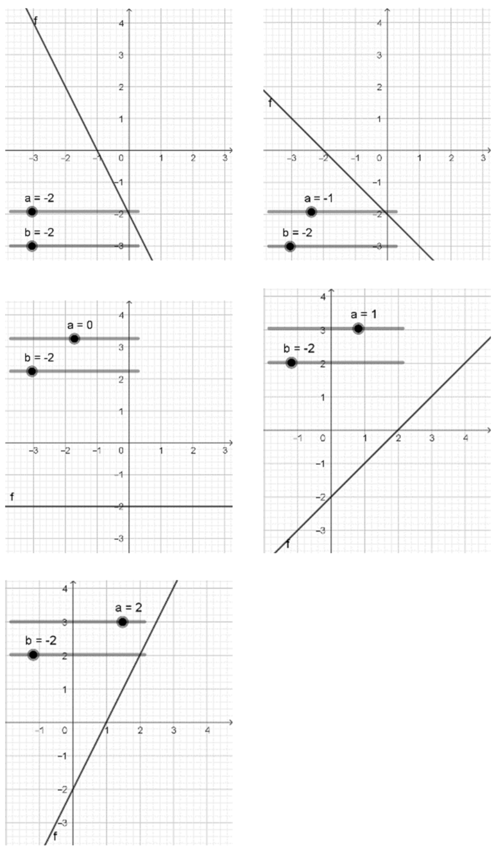
4.4. $f(x)=k$, impossível

$k<-3 \vee k>7$

Pág. 122

Tarefa inicial 2

1.



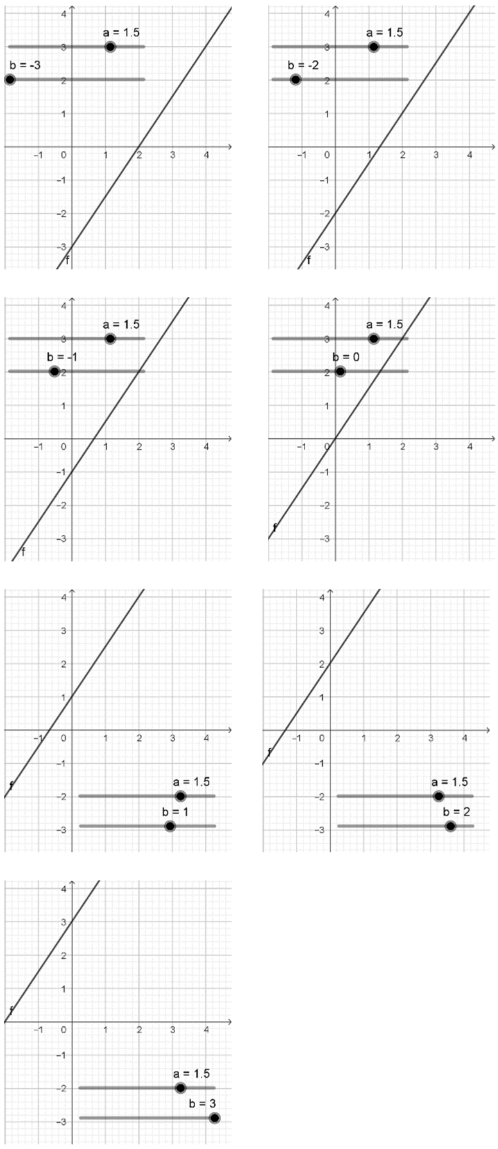
Quando $a<0$, o ângulo que a reta faz com o semieixo positivo Ox é obtuso e aumenta à medida que o valor de *a* aumenta.
Quando $a=0$, a reta é paralela ao eixo Ox.
Quando $a>0$, o ângulo que a reta faz com o semieixo positivo Ox é agudo e aumenta à medida que aumenta o valor de *a*.

2.

2.1. *u* e *t*

2.2. *r* e *s*

3.



As retas são paralelas.

4.

4.1. *r* e *t*

4.2. $y=-2x+5$

Pág. 124

8.

8.1. $A(-2,10)$; $B(-5,6)$

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-10}{-5-(-2)}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

8.2. $A(-1,-3)$; $B(-10,0)$

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-3)}{-10-(-1)}=\frac{3}{-9}=-\frac{1}{3}$$

8.3. $A(0,3)$; $B(-5,0)$

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-3}{-5-0}=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$$

9.

9.1. $y=ax+b$

$y=ax+8$

$5=a(-3)+8 \Leftrightarrow 3a=3 \Leftrightarrow a=1$

$y=x+8$

9.2. $\left(-\frac{1}{2},2\right)$; $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1}{2}-2}{-3-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{4}{2}}{-3+\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{6}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$$

$$y=\frac{3}{5}x+b$$

$$2=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b \Leftrightarrow 2=-\frac{3}{10}+b$$

$$\Leftrightarrow 2+\frac{3}{10}=b \Leftrightarrow b=\frac{23}{10}$$

$$y=\frac{3}{5}x+\frac{23}{10}$$

$y=0{,}6x+2{,}3$

9.3. $\left(-\frac{1}{4},0\right)$; $(0,5)$

$b=5$, é a ordenada na origem.

$y=ax+5$

$$a=\frac{5-0}{0-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{5}{\frac{1}{4}}=20$$

$y=20x+5$

10. *f*: $y=ax$

Ponto de *f*: (1,3)

$y=3x$

g: $y=ax+b$

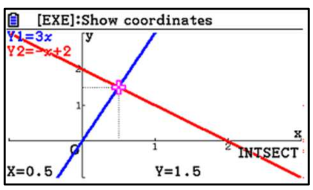
Pontos de *g*: (0,2) e (2,0)

$b=2$, é a ordenada na origem.

$y=ax+2$

$0=a\times 2+2 \Leftrightarrow a=-1$

$y=-x+2$



$$P\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Pág. 127

11.

11.1. Função *f*:

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$

O zero da função *f* é -2.

Função *g*:

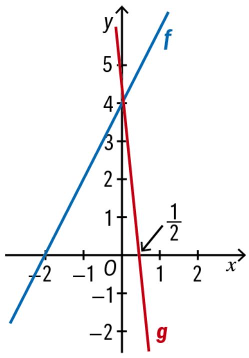
$g(x)=0 \Leftrightarrow -10x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

O zero da função *g* é $\frac{1}{2}$.

11.2.

x	$f(x)$
0	4
-2	0

x	$g(x)$
0	5
$\frac{1}{2}$	0



11.3. $D'_f = D'_g = \mathbb{R}$

11.4.

Tabela de variação de *f*:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

Tabela de sinal de *f*:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Tabela de variação de g:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$\searrow$

Tabela de sinal de *g*:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

12.

12.1.

$$\begin{cases} y=-x \\ y=\frac{1}{2}x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ -x=\frac{1}{2}x+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ -2x=x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ -3x=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-(-2) \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

Ponto de interseção $(-2,2)$.

12.2.

$$\begin{cases} y=3 \\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ 3=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=3 \\ 18=-2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ 2x=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-\frac{15}{2} \end{cases}$$

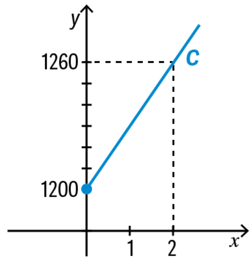
Ponto de interseção $\left(-\frac{15}{2},3\right)$.

Pág. 128

Tarefa de consolidação 2

1.

1.1. $C(x)=30x+1200$



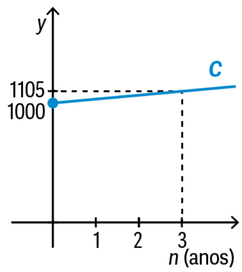
1.2. $C=4950$ €

$4950=30x+1200 \Leftrightarrow 30x=3750 \Leftrightarrow x=125$

A área do telhado é $125\ \text{m}^2$.

2.

2.1.



2.2. $1105-1000=105$ €

$\frac{105}{3}=35$ €/ano

$\frac{35}{1\,000}=3{,}5\%$

2.3. $C(n)=35n+1000$

$C(8)=35\times 8+1000=1280$ €

1280 € $-$ 1000 € $=280$ €

3.

3.1. Quem ganhou a corrida foi o Vasco.

3.2. **a)** $D_v=[0,400]$; $D'_v=[0,1000]$

b) $D_d=[0,450]$; $D'_d=[100,1000]$

3.3. Função *v*: $y = ax$

$$a = \frac{1\,000}{400} = \frac{5}{2}\ ;\quad y = \frac{5}{2}x$$

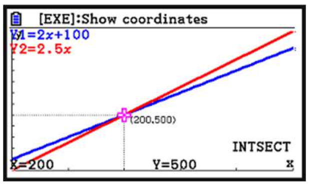
Função *d*: $y = ax + 100$

$$a = \frac{1\,000 - 100}{450 - 0} = 2$$

$$y = 2x + 100$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{2}x \\ y = 2x + 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2}x \\ \frac{5}{2}x = 2x + 100 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{2}x \\ 5x = 4x + 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2} \times 200 \\ x = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 500 \\ x = 200 \end{cases}$$



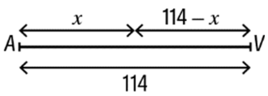
$P(200, 500)$

O Vasco ultrapassou a Daniela 200 s após o início da corrida e depois de ter percorrido 500 m.

Pág. 129

4. O Afonso vai percorrer x km e demora $\frac{x}{50}$ horas.

4.1. A Vitória vai percorrer $114 - x$ km e demora $\frac{114 - x}{45}$ horas.



$$\frac{x}{50} = \frac{114 - x}{45} \Leftrightarrow 45x = 50(114 - x)$$

$$\Leftrightarrow 45x = 5700 - 50x \Leftrightarrow 95x = 5700$$

$$\Leftrightarrow x = 60 \text{ km}$$

O Afonso vai percorrer 60 km até se encontrar com a Vitória logo, vai demorar $\frac{60}{50}$ horas, isto é, $1{,}2$ horas.

$1{,}2$ horas $= 1$ hora $+ 0{,}2$ horas

$= 1$ hora $+ 0{,}2 \times 60$ minutos $= 1$ hora $+ 12$ minutos

Decorreu 1h12m até se encontrarem.

4.2. $114 - 60 = 54$ km

Está a 54 km da casa da Vitória.

5.

5.1. $(2, 7)$: A 2 € compram 700 garrafas.

$(9, 0)$: A 9 € não compram nenhuma garrafa.

5.2. $(2, 1)$: A 2 € há oferta de 100 garrafas para venda.

(10,9): A 10 € há oferta de 900 garrafas para venda.

5.3. **a)** $(2, 7)\ ;\ (9, 0)$.

$$a = \frac{0 - 7}{9 - 2} = \frac{-7}{7} = -1$$

$y = -x + b$

$0 = -9 + b \Leftrightarrow b = 9$

$p(e) = -e + 9$

b) $(2, 1)\ ;\ (10, 9)$.

$$a = \frac{9 - 1}{10 - 2} = \frac{8}{8} = 1$$

$y = x + b$

$1 = 2 + b \Leftrightarrow b = -1$

$o(e) = e - 1$

5.4. $p(e) = o(e) \Leftrightarrow -e + 9 = e - 1 \Leftrightarrow -2e = -10 \Leftrightarrow e = 5$

$o(e) = 5 - 1 = 4$

Ponto de interseção dos gráficos: (5,4).

Significa que quando o preço é 5 € a procura iguala a oferta (400 garrafas).

Pág. 131

Avaliação formativa 2

1. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

$f(-2) = -\frac{1}{2} \times (-2) + 2 = 3\ ;\quad f(6) = -\frac{1}{2} \times 6 + 2 = -1$

$D'_f = [-1, 3]$

(D)

2. $(-1, 3)\ ;\ (2, 9)$.

$$a = \frac{9 - 3}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2$$

$y = 2x + b$

$3 = -2 + b \Leftrightarrow b = 5$

$g(x) = 2x + 5$

$g(-4) = 2 \times (-4) + 5 = -3$

(C)

3.

3.1.

a) $(3, 2)\ ;\ (-3, -1)$.

- $a = \frac{-1 - 2}{-3 - 3} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$
- $y = \frac{1}{2}x + b$

$$2 = \frac{1}{2} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 2 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

- $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}$

Ponto de interseção com o eixo Oy : $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 2$

$\left(2, \frac{3}{2}\right)$

3.2. $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$

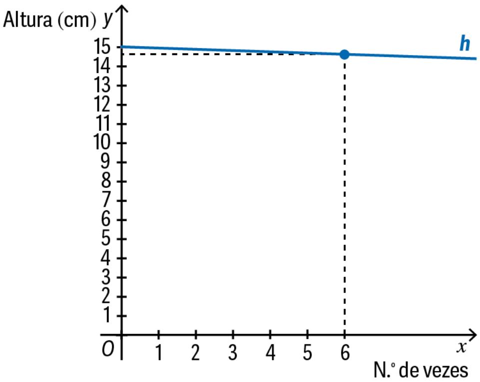
f é positiva em $]-1, +\infty[$.

4.

4.1. $h(n) = -0{,}05n + 15$

$h(0) = 15$

$h(6) = 14{,}7$



4.2. $h(150) = -0{,}05 \times 150 + 15 = 7{,}5$

Após 150 utilizações a altura do líquido no frasco é 7,5 cm.

4.2. $h(n) = 0 \Leftrightarrow -0{,}05n + 15 = 0 \Leftrightarrow n = 300$

Após 300 utilizações o frasco fica vazio.

5. B é o ponto de interseção da reta AB com a reta BC .

Reta AB :

Pontos da reta: $(0, 60)$; $(1, 48)$

$a = \frac{48 - 60}{1 - 0} = -12$; AB: $y = -12x + 60$

Reta BC :

Pontos da reta: $(3, 27)$; $(6, 0)$

$a = \frac{0 - 27}{6 - 3} = -9$; $y = -9x + b$

$0 = -9 \times 6 + b \Leftrightarrow b = 54$

BC : $y = -9x + 54$

$$\begin{cases} y = 12x + 60 \\ y = -9x + 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 60 \\ 12x + 60 = -9x + 54 \end{cases} \Leftrightarrow$$

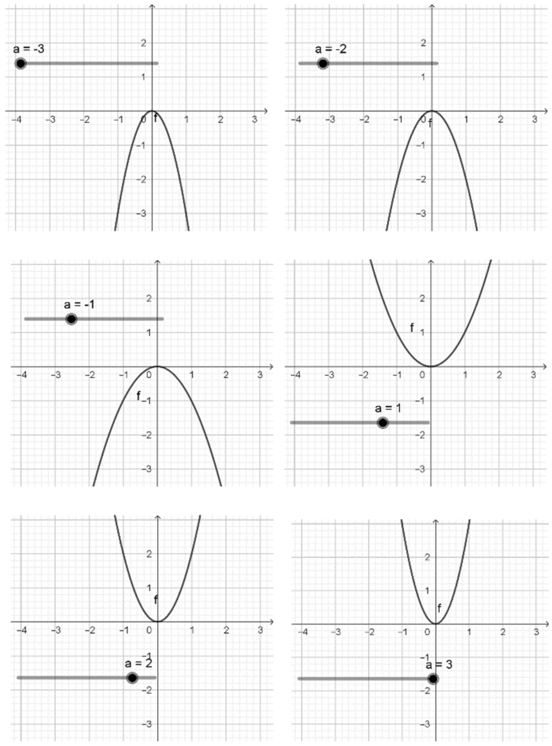
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 60 \\ 12x + 9x + = 54 - 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 60 \\ -3x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -12 \times 2 + 60 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 36 \\ x = 2 \end{cases} \quad B(2, 36)$$

Ao fim de 2 minutos, a parte superior do depósito fica vazia e inicia-se a saída de água da parte inferior que tem 36 cm de altura.

Pág. 132

Tarefa inicial 3



1.1. Se $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.
Se $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

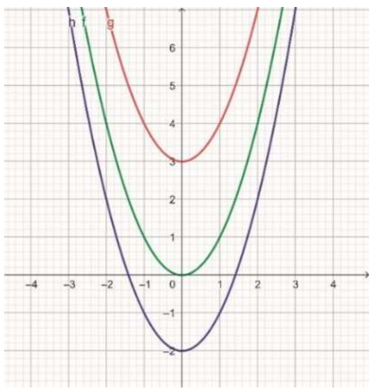
1.2. O eixo de simetria é o eixo Oy que tem de equação $x = 0$.

1.3. 0

Pág. 133

Tarefa 2

1.



2.

a) $A'(x, y + 3)$

b) $A''(x, y - 2)$

3. $g(x)=f(x)+3$ e $h(x)=f(x)-2$

4.

a) $D'_f=[0,+\infty[$

b) $D'_g=[3,+\infty[$

c) $D'_h=[-2,+\infty[$

13.

13.1.

a) $D'_f=]-\infty,1]$; $D'_h=]-\infty,3]$

b) O eixo de simetria é o eixo O_y que tem de equação $x=0$.

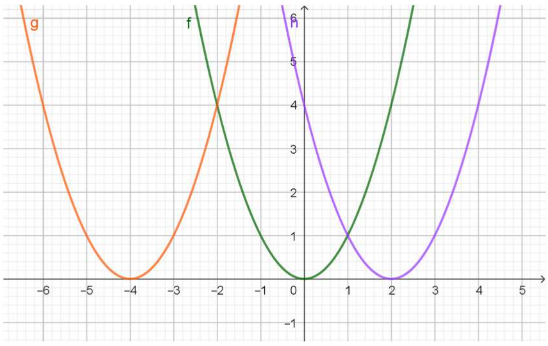
13.2.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

Pág. 134

Tarefa 3

1.



2. $A'(x-4,y)$; $A''(x+2,y)$

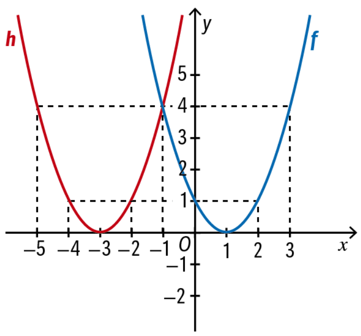
3.1. zero de *f*: 0

3.2. zero de *g*: -4

3.3. zero de *h*: 2

14.

14.1.



14.2. zero de *f*: 1

zero de *h*: -3

14.3. eixo de simetria da função *f*: $x=1$

eixo de simetria da função *h*: $x=-3$

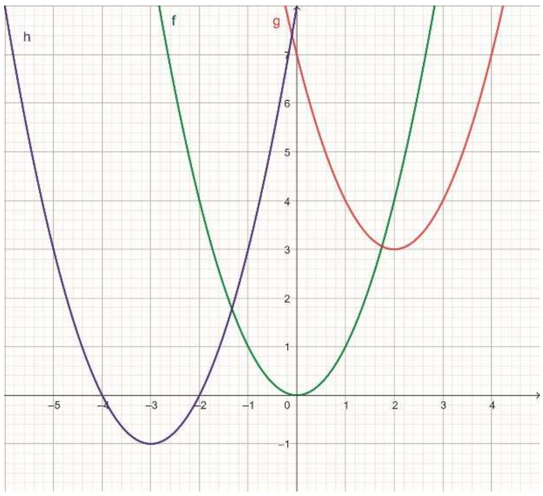
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Pág. 135

Tarefa 4

1.



2. O gráfico de *g* obtém-se do gráfico *f* deslocando-o duas unidades na horizontal para a direita seguido de um deslocamento vertical de três unidades para cima.

3. O gráfico de *h* obtém-se do gráfico *f* deslocando-o três unidades na horizontal para a esquerda seguido de um deslocamento vertical de uma unidade para baixo.

4. zeros de *g*: não tem

$h(x)=0 \Leftrightarrow (x+3)^2-1=0 \Leftrightarrow (x+3)^2=1$
$\Leftrightarrow x+3=1 \vee x+3=-1 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=-4$

Zeros de *h*: -4 e -2 .

Pág. 135

15.

15.1. $D'_g=[-4,+\infty[$

eixo de simetria: $x=1$

15.2.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

15.3. $g(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-4=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=4$
$\Leftrightarrow x-1=2 \vee x-1=-2 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-1$

Zeros de *g*: -1 e 3.

Pág. 136

Tarefa 5

1. $x=1 \quad y_2 = 3\times 1^2 = 3 \quad (1,3)$

$x=3 \quad y_2 = 3\times 3^2 = 27 \quad (3,27)$

2. $x=1 \quad y_3 = \frac{1}{3}\times 1^2 = \frac{1}{3} \quad \left(1,\frac{1}{3}\right)$

$x=3 \quad y_3 = \frac{1}{3}\times 3^2 = 3 \quad (3,3)$

Pág. 136

16.

16.1. Para $x\in[-1,1]$, $0\le x^2\le 1 \Leftrightarrow 2\le x^2+2\le 3$ pelo que $D'_f=[2,3]$

16.2. $D_g = D_f = [-1,1]$; $\quad D'_f = [2,3]$

$D'_g = \left[2\times\frac{1}{8}, 3\times\frac{1}{8}\right] = \left[\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right]$

g não tem zeros

16.3. Tabela de variação:

x	-1		0		1
$g(x)$	$\frac{3}{8}$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{3}{8}$

Tabela de sinal:

x	-1		1
$g(x)$	$\frac{3}{8}$	+	$\frac{3}{8}$

Pág. 138

17.

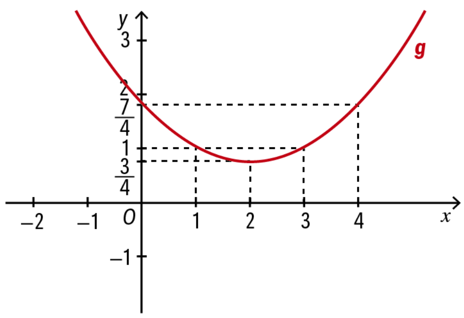
17.1. $V\left(2,\frac{3}{4}\right)$; equação do eixo de simetria: $x=2$

17.2. $g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x-2)^2+\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+3=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=-3$ Equação impossível

g não tem zeros

x	2	1	3	0	4
y	$\frac{3}{4}$	1	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$



17.3.

a) g é decrescente em $]-\infty,2]$

g é crescente em $[2,+\infty[$

b) Mínimo absoluto: $\frac{3}{4}$

$D'_g = \left[\frac{3}{4},+\infty\right[$

18.

18.1. $f(x)=a(x-h)^2+k$

$V(1,-1)$, $h=1$, $k=-1$

$f(x)=a(x-1)^2-1$

A função *f* passa no ponto (0,0)

$0=a(0-1)^2-1 \Leftrightarrow 0=a-1 \Leftrightarrow a=1$

$f(x)=(x-1)^2-1$

18.2. $g(x)=a(x-h)^2+k$

$V(1,2)$, $h=1$, $k=2$

$g(x)=a(x-1)^2+2$

A função *g* passa no ponto (-1,0)

$0=a(-1-1)^2+2 \Leftrightarrow 0=4a+2 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$

Pág. 139

Tarefa 6

1.

1.1. $V(0,0)$ **1.2.** $V(0,1)$ **1.3.** $V(0,-4)$

2.

2.1. $V(0,1)$ **2.2.** $g(x)=2(x-0)^2+1$

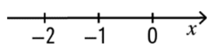
3.

3.1. $g(x)=0 \Leftrightarrow -2x^2-4x=0$

$\Leftrightarrow -2x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$

zeros de *g*: -2 e 0.

3.2.



$\frac{-2+0}{2}=-1$

abcissa do vértice: -1

3.3. $g(-1)=-2\times(-1)^2-4\times(-1)=-2+4=2$

3.4. $g(x)=-2(x+1)^2+2$

4.

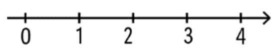
4.1. $h(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+12x=0 \Leftrightarrow -3x(x-4)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=4$

zeros de *h*: 0 e 4

4.2. Têm a mesma abcissa.

4.3.



$\frac{0+4}{2}=2$

Abcissa do vértice: 2

4.4. $g(2)=-3\times 2^2+12\times 2-7=5$

4.5. $g(x)=-3(x-2)^2+5$

Pág. 140

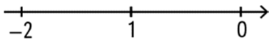
19.

Função *f*

a) zeros de *f*:

$f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x=0 \Leftrightarrow 3x(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$



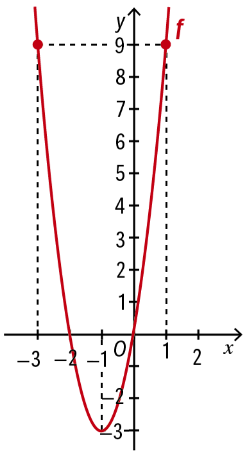
$\dfrac{0+(-2)}{2}=-1$

Abcissa do vértice: -1

$f(-1)=3\times(-1)^2+6\times(-1)=-3$

$f(x)=3(x+1)^2-3$

b)



c) Mínimo absoluto: -3 .

d)

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	–	0	+

e)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-3	↗

f é crescente em $[-1,+\infty[$

f é decrescente em $]-\infty,-1]$

Função *g*

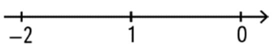
a) $g(x)=-0{,}2x^2-0{,}4x+3$

Seja $h(x)=-0{,}2x^2-0{,}4x$

Zeros de *h*:

$h(x)=0 \Leftrightarrow -0{,}2x^2-0{,}4x=0$

$\Leftrightarrow -0{,}2x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$



$\dfrac{0+(-2)}{2}=-1$

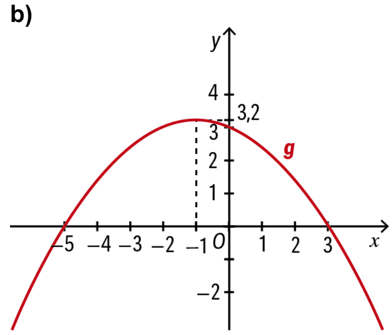
Abcissa do vértice de *h*: -1

Abcissa do vértice de *g*: -1

$g(-1)=-0{,}2\times(-1)^2-0{,}4\times(-1)+3=3{,}2$

$g(x)=-0{,}2(x+1)^2+3{,}2$

b)



c) Máximo absoluto: 3,2

d)

x	$-\infty$	-5		3	$+\infty$
$g(x)$	–	0	+	0	–

e)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	↗	3,2	↘

g é crescente em $]-\infty,-1]$

g é decrescente em $[-1,+\infty[$

Pág. 141

20.

20.1. $0<x<50$

20.2. $2x+y=100$; $y=-2x+100$

20.3 $A(x)=x(-2x+100) \Leftrightarrow A(x)=-2x^2+100x$

20.4. $A(x)=0 \Leftrightarrow x(-2x+100)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee -2x+100=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=50$

Abcissa do vértice: $\dfrac{0+50}{2}=25$

$y=-2\times 25+100=50$

O terreno é um retângulo de comprimento 50 m e largura 25 m.

20.5. $A(25)=25(-2\times 25+100)=1250$

A área máxima obtida é 1250 m^2 e é obtido para $x=25$ m.

Pág. 142

Tarefas de consolidação 3

1.

1.1. $f(5)=5^2-9=16$

1.2.

a) O gráfico de g obtém-se do gráfico f deslocando-o duas unidades na vertical para cima.

b) $A'(5,\,16+2)=(5,18)$

c) O gráfico de h obtém-se do gráfico de f deslocando-o duas unidades na horizontal para a esquerda.

d) $A''(5-2,\ 16)=(3,16)$

1.3. $D'_g=[-7,+\infty[$

1.4. zeros de h: $-3-2=-5$ e $3-2=1$.

2. $1.\rightarrow \boldsymbol{i}$ $\quad 2.\rightarrow \boldsymbol{g}$

$3.\rightarrow \boldsymbol{j}$ $\quad 4.\rightarrow \boldsymbol{k}$

$5.\rightarrow \boldsymbol{h}$

3.

3.1. $f(x)=a(x-2)^2-1$

A função *f* passa no ponto $(3,0)$.

$0=a(3-2)^2-1 \Leftrightarrow 0=a-1 \Leftrightarrow a=1$

$f(x)=(x-2)^2-1$

$g(x)=-(x-2)^2+1$

$h(x)=-(x+5)^2$

$i(x)=(x+7)^2$

3.2. $f(x)=(x-2)^2-1=x^2-4x+4-1=x^2-4x+3$

$g(x)=-(x-2)^2+1=-(x^2-4x+4)+1$

$=-x^2+4x-4+1=-x^2+4x-3$

$h(x)=-(x+5)^2=-(x^2+10x+25)$

$=-x^2-10x-25$

$i(x)=(x+7)^2=x^2+14x+49$

Pág. 143

4.

4.1. $h(0)=-5(0-1)^2+10=5$

A distância da concha ao mar é 5 m.

4.2. $V=(1,10)$

A altura foi de 10 m.

4.3. $h(t)=0 \Leftrightarrow -5(t-1)^2+10=0 \Leftrightarrow (t-1)^2=2$

$\Leftrightarrow t-1=\sqrt{2} \vee t-1=-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow t=1+\sqrt{2} \vee t=1-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow t\approx 2,4 \vee t\approx -0,4$

Como $t>0$, $t\approx 2,4$ segundos.

5.

5.1. $A(x)=x(40-2x)$

$A(x)=40x-2x^2$

$A(x)=-2x^2+40x$

5.2. $A(x)=0 \Leftrightarrow -2x^2+40x=0 \Leftrightarrow 2x(-x+20)=0$

$\Leftrightarrow 2x=0 \vee -x+20=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=20$

Abcissa do vértice: $\frac{0+20}{2}=10$

$A(10)=-2\times10^2+40\times10=-200+400=200$

$V(10,200)$

$A(x)=-2(x-10)^2+200$

5.3. $x=10$ cm

Área máxima da secção da caldeira é 200 cm^2.

6.

6.1. - 50 € ; 200 pessoas:

Receita: $50\text{ €}\times 200=1000\text{ €}$

- $50\text{ €}-1\text{ €}$; $200+20$ pessoas

Receita: $200\times(50-1)+20\times(50-1)$

- $50\text{ €}-2\text{ €}$; $200+2\times20$ pessoas

Receita: $200\times(50-2)+2\times20\times(50-2)$

- $50\text{ €}-x\text{ €}$; $200+x\times20$ pessoas

Receita: $200(50-x)+20x(50-x)$

$=(50-x)(200+20x)$

$R(x)=(200+20x)(50-x)$

6.2. $R(x)=0 \Leftrightarrow (200+20x)(50-x)=0$

$\Leftrightarrow 200+20x=0 \vee 50-x=0$

$\Leftrightarrow 20x=-200 \vee -x=-50 \Leftrightarrow x=-10 \vee x=50$

Abcissa do vértice: $\frac{-10+50}{2}=\frac{40}{2}=20$

Preço do ingresso: $50-20=30$

O preço do ingresso para que a receita seja máxima é 30 €.

Pág. 145

Avaliação formativa 3

1. $g(-3)-3g(1)=2f(-3+1)-3\times2f(1+1)$

$=2f(-2)-6\times f(2)=2\times1-6\times3=2-18=-16$

(A)

2. $g(-1)=2f(-1-2)+3=2f(-3)+3=2\times(-7)+3$

$=-14+3=-11$

(D)

3.

3.1.

$$\begin{cases} g(0)=4 \\ g(1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} af(0)+b=4 \\ af(1)+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times0^2+b=4 \\ a\times1^2+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b=4 \\ a+4=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ a=-1 \end{cases}$$

Logo, $g(x)=-x^2+4$

$g(x)=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=4$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

Zeros g: -2 e 2

3.2. $g(x)=-x^2+4$; $D'_g=]-\infty,4]$

4.

4.1. $V(2,-3)$

Eixo de simetria: $x=2$

4.2. $g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x-2)^2-3=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=3\times3$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=9 \Leftrightarrow x-2=-3 \vee x-2=3$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=5$

Zeros de *g*: -1 e 5.

4.3. g é crescente em $[2,+\infty[$.

4.4. Mínimo absoluto: -3 .

5.

5.1. $f(x)=x^2-2x+3$

Seja $g(x)=x^2-2x$

Zeros de g:

$g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0$
$\Leftrightarrow x=0 \vee x-2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

Zeros de g: 0 e 2

Abcissa do vértice dos gráficos de f e g é
$\frac{0+2}{2}=1$

$f(1)=1^2-2\times 1+3=1-2+3=2$

$f(x)=(x-1)^2+2$

5.2. $D'_f=[2,+\infty[$

5.3. $c\in\,]-2,+\infty[$

Pág. 146

Tarefa inicial 4

1.

1.1. Duas **1.2.** Uma **1.3.** Nenhuma

2.

2.1. $k>0 \Leftrightarrow k\in\,]0,+\infty[$

2.2. $k=0$

2.3. $k<0 \Leftrightarrow k\in\,]-\infty,0]$

3.

3.1. $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x^2-4x=-3$
$\Leftrightarrow x^2-4x+4=-3+4$ $\quad \left|(4:2)^2=4\right.$
$\Leftrightarrow (x-2)^2=1 \Leftrightarrow x-2=\pm\sqrt{1}$
$\Leftrightarrow x-2=-1 \vee x-2=1$
$\Leftrightarrow x=1 \vee x=3$
$S=\{1,\ 3\}$

3.2. $x^2-4x=5 \Leftrightarrow x^2-4x+4=5+4 \Leftrightarrow (x-2)^2=9$
$\Leftrightarrow x-2=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x-2=-3 \vee x-2=3$
$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=5$
$S=\{-1,5\}$

3.3. $3x^2-8x-3=0$
$\Leftrightarrow x^2-\frac{8}{3}x-1=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{8}{3}x=1$ $\quad \left|\left(\frac{8}{3}:2\right)^2=\frac{16}{9}\right.$
$\Leftrightarrow x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}=1+\frac{16}{9}$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9} \Leftrightarrow x-\frac{4}{3}=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}$
$\Leftrightarrow x-\frac{4}{3}=-\frac{5}{3} \vee x-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$
$\Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}+\frac{4}{3} \vee x=\frac{5}{3}+\frac{4}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3} \vee x=3$
$S=\left\{-\frac{1}{3},3\right\}$

3.4. $4x^2=9x-2 \Leftrightarrow 4x^2-9x+2=0$
$\Leftrightarrow x^2-\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}=0$
$\Leftrightarrow x^2-\frac{9}{4}x=-\frac{1}{2}$ $\quad \left|\left(\frac{9}{4}:2\right)^2=\frac{81}{64}\right.$
$\Leftrightarrow x^2-\frac{9}{4}x+\frac{81}{64}=-\frac{1}{2}+\frac{81}{64} \Leftrightarrow \left(x-\frac{9}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$
$\Leftrightarrow x-\frac{9}{8}=\pm\sqrt{\frac{49}{64}} \Leftrightarrow x-\frac{9}{8}=-\frac{7}{8} \vee x-\frac{9}{8}=\frac{7}{8}$
$\Leftrightarrow x=\frac{2}{8} \vee x=\frac{16}{8} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4} \vee x=2$

$S=\left\{\frac{1}{4},2\right\}$

Pág. 148

21.

21.1. $x^2-5x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 1\times(-2)=25+8$
$=33>0$

Como $\Delta>0$, a equação tem duas soluções.

21.2. $2x=-5x^2-5 \Leftrightarrow 5x^2+2x+5=0$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 5\times 5=4-100=-96<0$

Como $\Delta<0$, a equação não tem soluções.

21.3. $4x^2-2x+\frac{1}{4}=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 4\times\left(\frac{1}{4}\right)=0$

Como $\Delta=0$, a equação tem uma única solução.

21.4. $-\frac{1}{3}x^2-2x+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times 1=4+\frac{4}{3}$

$=\frac{16}{3}>0$

Como $\Delta>0$, a equação tem duas soluções.

22.

22.1. $x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times8}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{6\pm2}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{6-2}{2} \vee x=\frac{6+2}{2} \Leftrightarrow x=2\vee x=4$

$S=\{2,4\}$

22.2. $-x^2+4x+21=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times(-1)\times21}}{2\times(-1)}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{100}}{-2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm10}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-4-10}{-2}\vee x=\frac{-4+10}{2}$

$\Leftrightarrow x=7\vee x=-3$

$S=\{-3,7\}$

22.3. $-x^2+7x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times(-1)\times(-6)}}{2\times(-1)}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{-2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm5}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-7-5}{-2}\vee x=\frac{-7+5}{-2}$

$\Leftrightarrow x=6\vee x=1$

$S=\{1,6\}$

22.4. $x^2+2x=-1 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times1}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow x=-1$; $S=\{-1\}$

22.5. $5x^2-15x-50=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\times5\times(-50)}}{2\times5}$

$\Leftrightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{225+1000}}{10} \Leftrightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{1225}}{10}$

$\Leftrightarrow x=\frac{15\pm35}{10} \Leftrightarrow x=\frac{15-35}{10}\vee x=\frac{15+35}{10}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-20}{10}\vee x=\frac{50}{10} \Leftrightarrow x=-2\vee x=5$

$S=\{-2,5\}$

22.6. $x^2-2x+12=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times12}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-48}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{-44}}{2}$

Equação impossível. $S=\varnothing$

Pág. 149

23.

23.1.

a) $x^2+2kx+5k=0$

$\Delta=0 \Leftrightarrow (2k)^2-4\times1\times5k=0 \Leftrightarrow 4k^2-20k=0$

$\Leftrightarrow 4k(k-5)=0 \Leftrightarrow k=0\vee k-5=0$

$\Leftrightarrow k=0\vee k=5$; $k\in\{0,5\}$

b) $x^2+2x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times5}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}$ Equação impossível

$S=\varnothing$

23.2. a) $2k-1=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$

b) $x^2+4x+(2k-1)=0$

$\Delta=0 \Leftrightarrow 4^2-4\times1\times(2k-1)=0 \Leftrightarrow 16-8k+4=0$

$\Leftrightarrow -8k=-20 \Leftrightarrow k=\frac{20}{8} \Leftrightarrow k=\frac{5}{2}$

c) $x^2+4x+(2\times2-1)=0 \Leftrightarrow x^2+4x+3=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times3}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-4-2}{2}\vee x=\frac{-4+2}{2}$

$\Leftrightarrow x=-3\vee x=-1$

$S=\{-3,-1\}$ c.a.: $\frac{6}{2}=3$; $3^2=9$

24.

24.1. $f(x)=-x^2-6x-4=-(x^2+6x)-4$

$=-(x^2+6x+9-9)-4=-(x^2+6x+9)+9-4$

$=-(x+3)^2+5$

$V(-3,5)$

$D'_f=]-\infty,5]$

24.2 $g(x)=-9x^2+21x-13=-9\left(x^2-\frac{21}{9}x\right)-13$

$=-9\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)-13$ $\left(\frac{7}{3}:2\right)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{49}{36}$

$$= -9\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} - \frac{49}{36}\right) - 13$$

$$= -9\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36}\right) + \frac{49}{4} - 13 = -9\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

$$V\left(\frac{7}{6}, -\frac{3}{4}\right)$$

$$D'_g = \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right]$$

Pág. 150

25.

25.1. $h(0) = \frac{2}{9} \times 0^2 - \frac{4}{3} \times 0 + 2 = 2$

No início da prova o Afonso encontrava-se a 2 m do solo.

25.2 $h(t) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{2}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 2 = 0,5$

$\Leftrightarrow \frac{2}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 1,5 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 12t + 13,5 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 2 \times 13,5}}{2 \times 2}$

$\Leftrightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{4} \Leftrightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{4}$

$\Leftrightarrow t = \frac{12 - 6}{4} \vee t = \frac{12 + 6}{4} \quad \Leftrightarrow t = \frac{6}{4} \vee t = \frac{18}{4}$

$\Leftrightarrow t = 1,5 \vee t = 4,5$

O Afonso está a $0,5$ m do solo $1,5$ s e $4,5$ s após o início da prova.

26.

26.1. $V(1, -1)$

26.2. $(x-1)^2 - 1 = ax - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 = ax - 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - ax + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (-2 - a)x + 4 = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-2 - a)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4 + 4a + a^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 = 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$

$\Leftrightarrow a = \frac{-4 - 8}{2} \vee a = \frac{-4 + 8}{2}$

$\Leftrightarrow a = -6 \vee a = 2$

26.3. $a = 2$

$x^2 + (-2 - a)x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow x = 2$

$y = (x - 1)^2 - 1$

$y = (2 - 1)^2 - 1 = 0$

Ponto $(2, 0)$.

Pág. 151

Tarefa 7

1. $S = \{-2, 3\}$

$S = -2 + 3 = 1$

$P = -2 \times 3 = -6$

2. $(x - 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

3. $x^2 - 1x + (-6) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}$

4. $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

$x_1 \times x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} =$

$= \frac{b^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} =$

$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

27.

27.1. $S = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

$P = -1 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$

27.2. $S = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$P = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$

$x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$

27.3. $-2\sqrt{3}$ é zero duplo

$S = -2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

$P = -2\sqrt{3} \times \left(-2\sqrt{3}\right) = 12$

$x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 = 0$

28.

28.1. $S=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=-4$

e $P=-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{4}$

$x^2+4x+\frac{15}{4}=0 \quad \Leftrightarrow 4x^2+16x+15=0$

Não são soluções da equação.

28.2. $S=\sqrt{3}-\sqrt{12}=\sqrt{3}-2\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

$P=\sqrt{3}\times\left(-\sqrt{12}\right)=-\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=-6$

$x^2+\sqrt{3}x-6=0$

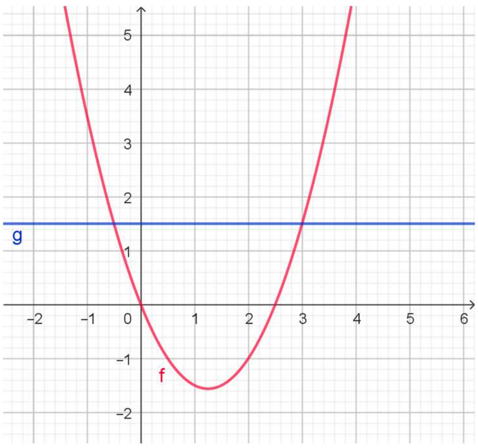
São soluções da equação.

Pág. 152

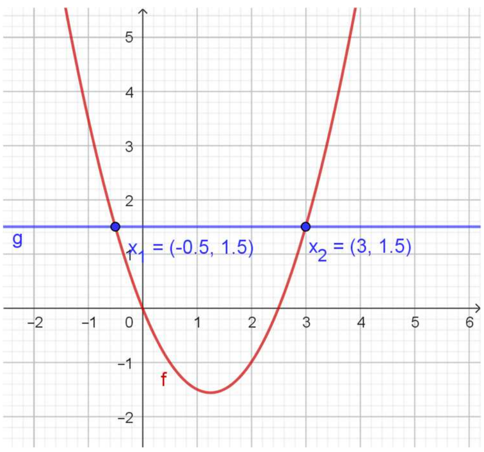
Tarefa 8

1.

1.1.



1.2.

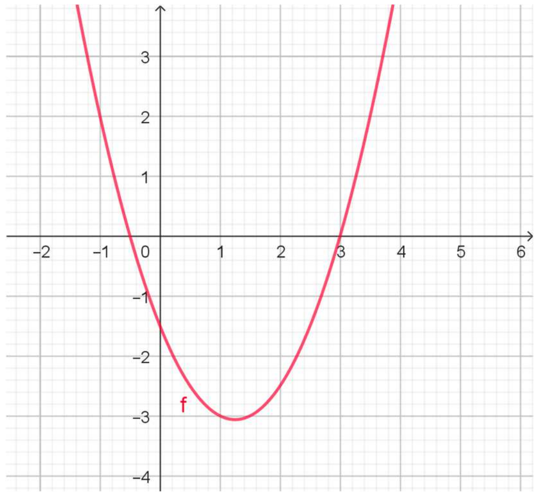


Abcissas: $-0,5$; 3.

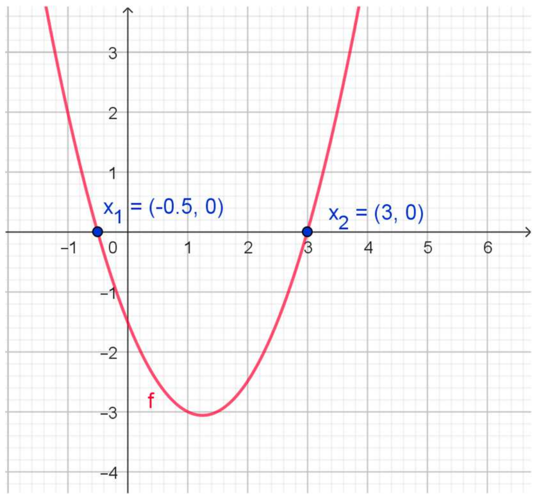
1.3. $x\in\left]-\infty;-0,5\right[\cup\left]3,+\infty\right[$

2.

2.1.



2.2.



zeros: $-0,5$; 3.

2.3. $x\in\left]-\infty;-0,5\right[\cup\left]3,+\infty\right[$

3. Considero mais rápido o processo 2 porque só se representa uma função.

Pág. 153

29.

29.1. $f(x)=x^2-3x+2$

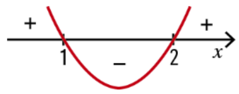
$\Delta=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1>0$

f tem dois zeros.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{3\pm1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{3-1}{2}\vee x=\frac{3+1}{2} \Leftrightarrow x=1\vee x=2$

$a=1>0$



$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

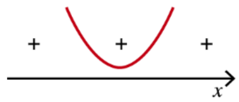
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]1, 2\right[$

29.2. $f(x) = x^2 - 3x + 5$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$

f não tem zeros.

$a = 1 > 0$



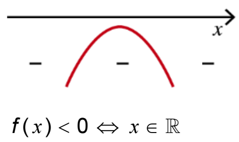
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

29.3. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

$\Delta = 2^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-3) = 4 - 6 = -2 < 0$

f não tem zeros.

$a = -\frac{1}{2} < 0$



$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

29.4. $f(x) = 2 - 3x - 2x^2$

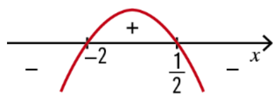
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 9 + 16 = 25 > 0$

f tem dois zeros.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{-4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3-5}{-4} \vee x = \frac{3+5}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -2$

$a = -2 < 0$



$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2, \frac{1}{2}\right[$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

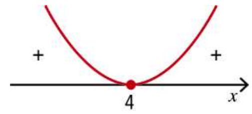
29.5. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 8 = 16 - 16 = 0$

f tem um zero.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \times \frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 4$

$a = \frac{1}{2} > 0$



$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

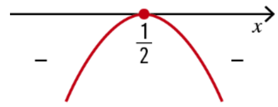
29.6. $f(x) = -x^2 + x - \frac{1}{4}$

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$

f tem um zero.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{0}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$a = -1 < 0$



$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

30.

30.1. $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

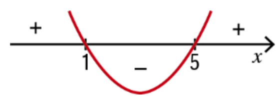
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16$

f tem dois zeros.

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{6+4}{2} \vee x = \frac{6-4}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$

$a = 1 > 0$



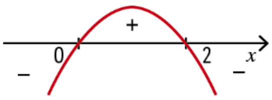
$S = [1, 5]$

30.2. $10x-5x^2<0$

$10x-5x^2=0 \Leftrightarrow 5x(2-x)=0 \Leftrightarrow 5x=0 \vee 2-x=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

$a=-5<0$



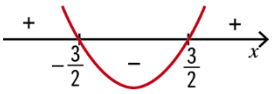
$S=\left]-\infty,0\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

30.3 $4x^2-9\leq 0$

$4x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2} \vee x=\frac{3}{2}$

$a=4>0$



$S=\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$

30.4. $-2x^2-7x+3<0$

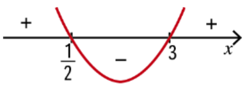
$\Delta=(-7)^2-4\times 2\times 3=25$

$2x^2-7x+3=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{25}}{2\times 2} \Leftrightarrow x=\frac{7\pm 5}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{7-5}{4} \vee x=\frac{7+5}{4} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=3$

$a=2>0$



$S=\left]\frac{1}{2},3\right[$

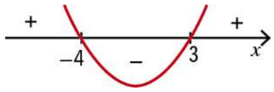
30.5. $\frac{x(x+1)}{2}\leq 6 \Leftrightarrow x^2+x\leq 12 \Leftrightarrow x^2+x-12\leq 0$

$\Delta=1^2-4\times 1\times(-12)=49$

$x^2+x-12=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm 7}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-1-7}{2} \vee x=\frac{-1+7}{2} \Leftrightarrow x=-4 \vee x=3$

$a=1>0$



$S=[-4,3]$

30.6. $x(8-5x)-4\leq 4(x-4) \Leftrightarrow 8x-5x^2-4\leq 4x-16$

$\Leftrightarrow -5x^2+4x+12\leq 0$

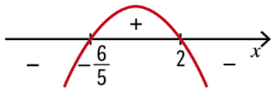
$\Delta=4^2-4\times(-5)\times 12=256$

$-5x^2+4x+12=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{256}}{2\times(-5)}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm 16}{-10} \Leftrightarrow x=\frac{-4-16}{-10} \vee x=\frac{-4+16}{-10}$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-\frac{6}{5}$

$a=-5<0$



$S=\left]-\infty,-\frac{6}{5}\right]\cup\left[2,+\infty\right[$

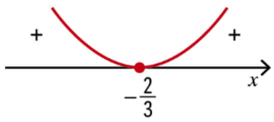
30.7. $9x^2+12x+4\leq 0$

$\Delta=12^2-4\times 9\times 4=0$

$9x^2+12x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{0}}{2\times 9} \Leftrightarrow x=-\frac{12}{18}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

$a=9>0$



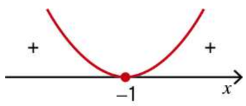
$S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

30.8. $x^2+2x+1>0$

$\Delta=2^2-4\times 1\times 1=0$

$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=-1$

$a=1>0$



$S=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

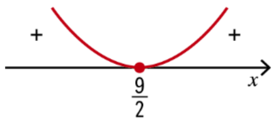
30.9. $\frac{81-4x}{4} > x(8-x) \Leftrightarrow \frac{81-4x}{4} > 8x - x^2$

$\Leftrightarrow 81-4x > 32x-4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-36x+81>0$

$\Delta = (-36)^2 - 4\times 4\times 81 = 0$

$4x^2-36x+81=0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-36)\pm\sqrt{0}}{2\times 4} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

$a = 4 > 0$

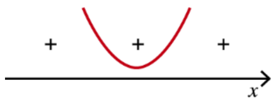


$S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{9}{2}\right\}$

30.10. $x \geq \frac{1-x^2}{3} - 2 \Leftrightarrow 3x \geq 1-x^2-6 \Leftrightarrow x^2+3x+5 \geq 0$

$\Delta = 3^2 - 4\times 1\times 5 = -11$

$a = 1 > 0$



$S = \mathbb{R}$

Pág. 154

Tarefa de consolidação 4

1.

1.1. $V(1,-2)$

$y = a(x-1)^2 - 2$

A função passa pelo ponto $(-1,0)$

$0 = a(-1-1)^2 - 2 \Leftrightarrow 0 = 4a - 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$

1.2. $r: y = x + b$

$\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 = x + b$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2-2x+1) - 2 = x + b$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} - 2 - x - b = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2} - b = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 4\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2} - b\right) = 0$

$\Leftrightarrow 4 - 2\left(-\frac{3}{2} - b\right) = 0$

$\Leftrightarrow 4 + 3 + 2b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{7}{2}$

$y = x - \frac{7}{2}$

$\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{4}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$y = 2 - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2}$

$B\left(2, -\frac{3}{2}\right)$

1.3. $\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x - 1 = -2 \vee x - 1 = 2$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

$A(-1, 0)$; $C(3,0)$

$A = \frac{\overline{AC}\times|y_v|}{2} = \frac{4\times\frac{3}{2}}{2} = \frac{6}{2} = 3$ u. a.

2. $(m-1)x^2 - 2x + 1 - m = 0$

$\Delta_1 = (-2)^2 - 4(m-1)\times(1-m) = 4 + 4(m-1)(m-1)$

$= 4 + 4(m-1)^2 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$

Logo, a equação tem duas soluções distintas.

$P = \frac{c}{a} = \frac{1-m}{m-1} = -1$, $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Como o produto das soluções é negativo, as soluções têm sinal contrário.

3.

3.1. $xn = 18\ 000$

$(x+250)(n-1) = 18\ 000$

$\Leftrightarrow xn - x + 250n - 250 = 18\ 000$

$\Leftrightarrow 18\ 000 - x + 250n - 250 = 18\ 000$

$\Leftrightarrow x = 250n - 250$

3.2. $xn = 18\ 000 \Leftrightarrow x = \dfrac{18\ 000}{n}$

$x = 250n - 250 \Leftrightarrow \dfrac{18\ 000}{n} = 250n - 250$

$\Leftrightarrow 18\ 000 = 250n^2 - 250n$

$\Leftrightarrow 250n^2 + 250n - 18\ 000 = 0$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-(-250) \pm \sqrt{18\ 062\ 500}}{2 \times 250}$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{250 \pm 4250}{500}$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{250 - 4250}{500} \vee n = \dfrac{250 + 4250}{500}$

$\Leftrightarrow n = -8 \vee n = 9$

Como $n > 0$, $n = 9$ anos.

c.a.

$\Delta = (-250)^2 - 4 \times 250 \times (-18000) = 18062500$

Pág. 155

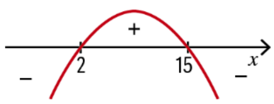
4.

4.1. $P(x) = 200(15 - x)(x - 2)$

Zeros de *P*:

$P(x) = 0 \Leftrightarrow 200(15 - x)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 15 - x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 15 \vee x = 2$



$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 15]$

4.2. abcissa do vértice: $\dfrac{2+15}{2} = \dfrac{17}{2} = 8,5$

$8,5 \times 1000 = 8500$

8,5 milhares de artigos, ou seja, 8500 artigos.

5.

5.1. $h(x) = 0,12x^2 - 0,96x + 2,6$

$h(0) = 2,6$. A altura da parede *A* é 2,6 metros.

5.2. $h(x) = 0,12\left(x^2 - \dfrac{0,96}{0,12}x\right) + 2,6$

$= 0,12\left(x^2 - 8x + 16 - 16\right) + 2,6$

$= 0,12\left(x^2 - 8x + 16\right) - 1,92 + 2,6$

$= 0,12(x-4)^2 + 0,68$

c.a. $-\dfrac{8}{2} = -4$ $\qquad (-4)^2 = 16$

5.3. $V(4; 0,68)$

Desnível: $2,6 - 0,68 = 1,92$ m

5.4. $h(x) = 1,76 \Leftrightarrow 0,12(x-4)^2 + 0,68 = 1,76$

$\Leftrightarrow 0,12(x-4)^2 = 1,08 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x - 4 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x - 4 = -3 \vee x - 4 = 3$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 7$

Os pontos da rampa com altura 1,76 m distam 1 m ou 7 m da parede A.

Pág. 157

Avaliação formativa 4

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 2}$ $\qquad$ <u>**c.a.**</u> $\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 81$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-7 \pm 9}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{-7-9}{4} \vee x = \dfrac{-7+9}{4}$

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = \dfrac{1}{2}$

(C)

2. $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$ **(C)**

3. $a + b = -2$ e $a \times b = -8$

$x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm 6}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2+6}{2} \vee x = \dfrac{-2-6}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -4$

<u>**c.a.**</u>

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36$

$a = 2$ e $b = -4$ ou $a = -4$ e $b = 2$

$s = -4 + 2 = -2$

$p = -4 \times 2 = -8$

4. $f(x) = x^2 - (n-2)x + \dfrac{1}{4}$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow [-(n-2)]^2 - 4 \times 1 \times \dfrac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n-2)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (n-2)^2 > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 - 4n + 4 - 1 > 0 \Leftrightarrow n^2 - 4n + 3 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \Leftrightarrow n = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow n = \dfrac{4+2}{2} \vee n = \dfrac{4-2}{2}$

$\Leftrightarrow n = 3 \vee n = 1$

$S =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$

5. $10\,000$ € taxa $t\%$

No final do 1.º ano, o capital da Ana Sofia é:

$$10\,000 + 10\,000 \times \frac{t}{100} = 10\,000 + 100t$$

Juros obtidos no final do 2.º ano:

$$(10\,000 + 100t) \times (t+1)\% =$$

$$= (10\,000 + 100t) \times \frac{t+1}{100}$$

$$= (100 + t)(t+1)$$

$$(100+t)(t+1) = 630 \Leftrightarrow 100t + 100 + t^2 + t = 630$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 101t - 530 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-101 \pm \sqrt{12\,321}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-101 \pm 111}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-101+111}{2} \vee t = \frac{-101-111}{2}$$

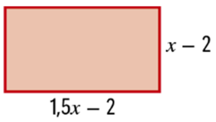
$$\Leftrightarrow t = 5 \vee t = -106$$

<u>c.a.</u>

$$\Delta = 101^2 - 4 \times 1 \times (-530) = 12\,321$$

Como $t > 0$, $t = 5\%$.

6.



$$(1,5x - 2)(x-2) = \frac{5}{3} \times 1,5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,5x^2 - 3x - 2x + 4 = \frac{7,5}{8}x^2$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 40x + 32 = 7,5x^2$$

$$\Leftrightarrow 4,5x^2 - 40x + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-40) \pm \sqrt{1024}}{2 \times 4,5} \Leftrightarrow x = \frac{40 \pm 32}{9}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{40-32}{9} \vee x = \frac{40+32}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{9} \vee x = 8$$

<u>c.a.:</u> $\Delta = (-40)^2 - 4 \times 4,5 \times 32 = 1024$

$x - 2 > 0 \wedge 1,5x - 2 > 0$

$$\Leftrightarrow x > 2 \wedge x > \frac{2}{1,5} \Leftrightarrow x > 2$$

Como $x > 2$, $x = 8$.

$1,5 \times 8 = 12$

O comprimento do retângulo é 12 m e a largura é 8 m.

Pág. 158

Tarefa inicial 5

1. 1,75 €; 1,25 €

2. Significa que para andar de trotinete 3 minutos, o preço a pagar é 1,25 €.

3. $D_f =]0,5]$; $D'_f = \{0,75;\ 1;\ 1,25;\ 1,5;\ 1,75\}$

4.

4.1. $f(1) = 0,75$

4.2. $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in]1,2]$

5. $f(x) = 1,25,\ x \in]2,3]$

Pág. 159

31.

31.1. 20 °C

31.2. 4 minutos

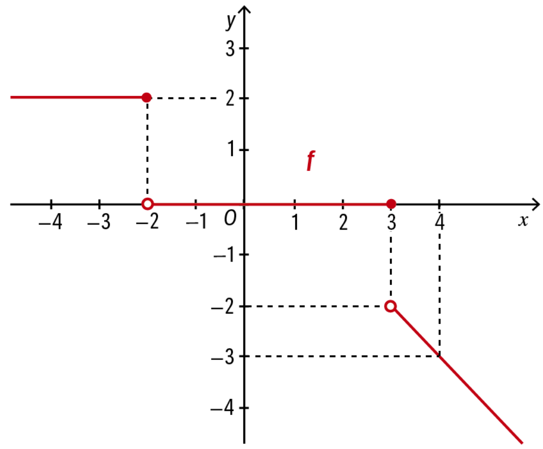
31.3. $(0,20)$ $(4,100)$; $a = \frac{100-20}{4-0} = 20$ e $b = 20$

$y = 20x + 20$

$$f(x) = \begin{cases} 20x + 20 & \text{se } 0 \le x \le 4 \\ 100 & \text{se } 4 < x \le 6 \end{cases}$$

32.

32.1.



<u>c.a.</u>

x	$y = -x + 1$
3	$y = -3 + 1 = -2$
4	$y = -4 + 1 = -3$

$D_f = \mathbb{R}$

$D'_f =]-\infty, -2[\cup \{0, 2\}$

32.2. $-2 < x < 0$; $(-2,0)$ $(0,1)$

$$a = \frac{1-0}{0-(-2)} = \frac{1}{2} \text{ e } b = 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

$0 \le x \le 1$

$(0,2)$ $(1,3)$

$$a = \frac{3-2}{1-0} = 1 \text{ e } b = 2$$

$y = x + 2$

$1 < x \le 4$

$(1,3)$ $(4,0)$

$$a = \frac{0-3}{4-1} = -1$$

$y = -x + b$

$0=-4+b \Leftrightarrow b=4$

$y=-x+4$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1 & \text{se } -2<x<0\\ x+2 & \text{se } 0\le x\le 1\\ -x+4 & \text{se } 1<x\le 4\end{cases}$$

Pág. 160

33.

33.1. $y=a(x-h)^2+k$

$y=a(x+1)^2+3$

$(1,1)$

$1=a(1+1)^2+3$

$\Leftrightarrow 1=4a+3$

$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+3$

$(1,-1)\quad (3,-2)$

$a=\frac{-2-(-1)}{3-1}=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}x+b$

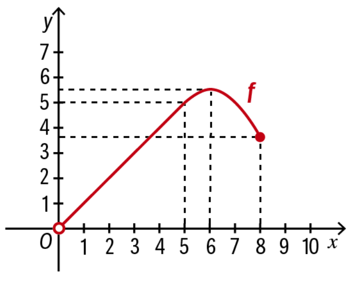
$-1=-\frac{1}{2}\times 1+b \Leftrightarrow -1+\frac{1}{2}=b$

$\Leftrightarrow b=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$$h(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(x+1)^2+3 & \text{se } x<1\\ 0 & \text{se } x=1\\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & \text{se } x>1\end{cases}$$

33.2. $D'_h=\left]-\infty,3\right]$

34.1.



x	$y=-\frac{1}{2}(x-6)^2+\frac{11}{2}$
5	$y=5$
6	$y=\frac{11}{2}=5,5$
8	$y=3,5$

34.2. A altura máxima é 5,5 m.

Pág. 161

35.

35.1. $g(1)-g(0)=(1-2)^2+7-2(0+1)^2$

$=1+7-2=6$

35.2. Para $-2\le x<1$:

$2(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$

$-1\in\left[-2,1\right[$

Para $1\le x\le 3$:

$(x-2)^2+7=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=-7$

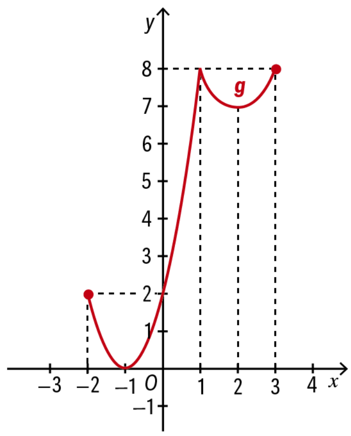
Equação impossível.

Zero de g : -1

35.3.

x	$y=2(x+1)^2$
–2	2
–1	0
0	2
1	8

x	$y=(x-2)^2+7$
1	8
2	7
3	8



Pág. 163

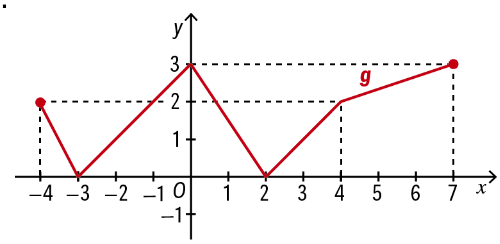
36.

36.1. a) $D_f=[-4,7]$

b) $D'_f=[-3,3]$

c) Zeros de f : –3 e 2

36.2.



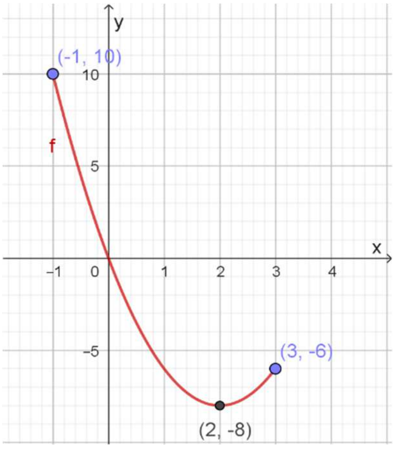
$D_g=[-4,7]$ e $D'_f=[0,3]$

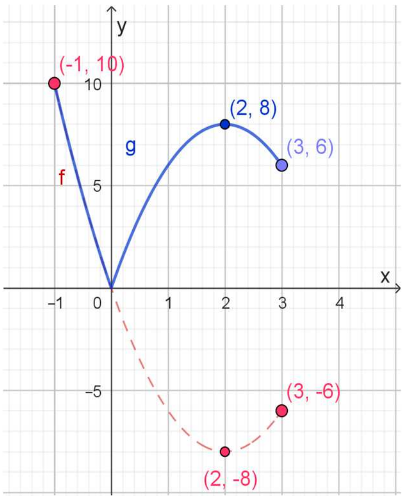
Zeros de g : –3 e 2

Pág. 164

37.1

x	$f(x)$
–1	10
0	0
2	–8
3	–6





37.2. $D'_f = [-8, 10]$; $D'_g = [0, 10]$

38. $D'_f =]a, b]$, $a < b$

38.1. Como $a \times b < 0$, então $a < 0$ e $b > 0$.

Se $|a| < |b|$, $D'_g = [0, b]$

Se $|a| > |b|$, $D'_g = [0, -a[$

38.2. Como $a \times b > 0$, então $0 < a < b$ ou $a < b < 0$ e

Se $0 < a < b$, então $D'_g =]a, b]$.

Se $a < b < 0$ então $D'_g = [-b, -a[$.

Pág. 165

39.

39.1. $f(x) = |1 - 3x|$

$$= \begin{cases} 1-3x & \text{se } 1-3x \geq 0 \\ -(1-3x) & \text{se } 1-3x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-3x & \text{se } x \leq \frac{1}{3} \\ -1+3x & \text{se } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

c.a.

$$1 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -1 \Leftrightarrow 3x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

$D'_f = [0, +\infty[$

39.2. $g(x) = 2 - 3|x - 1|$

$$= \begin{cases} 2-3(x-1) & \text{se } x-1 \geq 0 \\ 2-3[-(x-1)] & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2-3x+3 & \text{se } x \geq 1 \\ 2-3(-x+1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5-3x & \text{se } x \geq 1 \\ 2+3x-3 & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} -3x+5 & \text{se } x \geq 1 \\ 3x-1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$D'_g =]-\infty, 2]$

39.3. $h(x) = 2|x + 2| - 1$

$$= \begin{cases} 2(x-2)-1 & \text{se } x+2 \geq 0 \\ 2[-(x+2)]-1 & \text{se } x+2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x+4-1 & \text{se } x \geq -2 \\ 2(-x-2)-1 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \geq -2 \\ -2x-5 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$D'_h = [-1, +\infty[$

40.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{se } x < 2 \\ -\frac{3}{2}x + 6 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

c.a.

$(4, 0)$ $(2, 3)$; $a = \dfrac{3-0}{2-4} = -\dfrac{3}{2}$

$y = -\dfrac{3}{2}x + b$; $0 = -\dfrac{3}{2} \times 4 + b \Leftrightarrow b = 6$

$y = -\dfrac{3}{2}x + 6$

Pág. 166

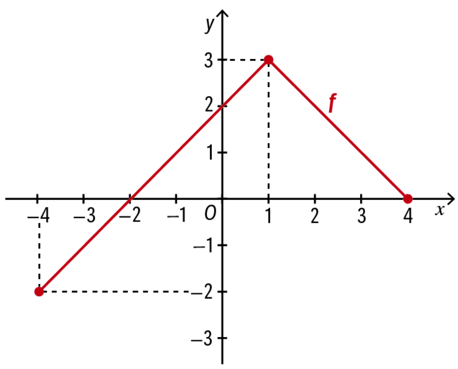
41.

41.1. $f(x) = -|x - 1| + 3$

$$= \begin{cases} -(x-1)+3 & \text{se } x-1 \geq 0 \wedge x \in [-4, 4] \\ -[-(x-1)]+3 & \text{se } x-1 < 0 \wedge x \in [-4, 4] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x+4 & \text{se } x \in [1, 4] \\ x+2 & \text{se } x \in [-4, 1[\end{cases}$$

41.2.



x	$y=x+2$
-4	-2
1	3

x	$y=-x+4$
1	3
4	0

41.3.

a) $D'_f=[-2,3]$ **b)** zeros de f : -2 e 4

c) f é crescente em $[-4,1]$;

f é decrescente em $[1,\ 4]$

Pág. 167

42.

42.1. $h(x)=\begin{cases}(x+3)^2-1 & \text{se } x<-1\\ |x-2| & \text{se } -1\leq x\leq 5\end{cases}$

$V(-3,\,-1)$; $(-4,\,0)$;

$y=a(x-h)^2+k$

$y=a(x+3)^2-1$

$0=a(-4+3)^2-1 \Leftrightarrow a=1$

$y=(x+3)^2-1$

42.2. $D'_h=[-1,+\infty[$

42.3. Zeros de h : -4 , -2 e 2 .

42.4.

x	$-\infty$	-3		-1		2		5
$h(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	3

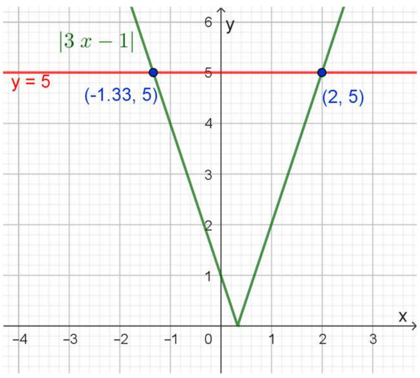
42.5. Máximo absoluto: não tem;
máximo relativo: 3
mínimo absoluto: -1 ;
mínimos relativos: -1 e 0

Pág. 169

43.

43.1. a) $|3x-1|=5 \Leftrightarrow 3x-1=5 \vee 3x-1=-5$

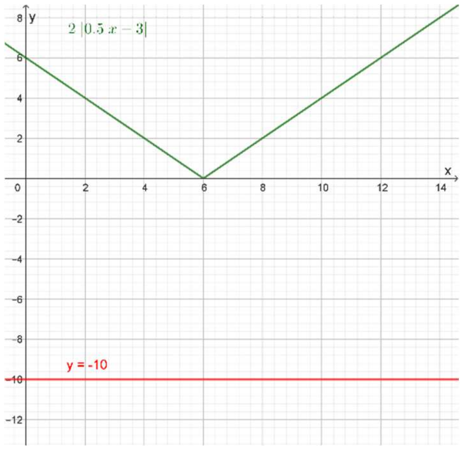
$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-\dfrac{4}{3}$



$S=\left\{-\dfrac{4}{3},2\right\}$

b) $2\left|\dfrac{1}{2}x-3\right|=-10 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{2}x-3\right|=-5$

Equação impossível



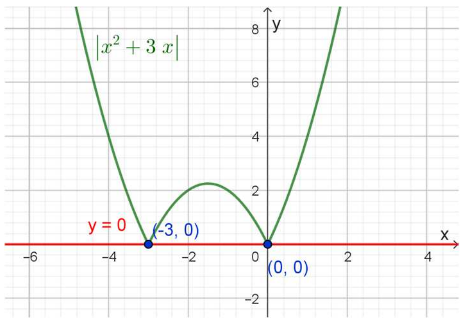
$S=\varnothing$

c) $|x^2+3x|=0 \Leftrightarrow x^2+3x=0$

$\Leftrightarrow x(x+3)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x+3=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-3$



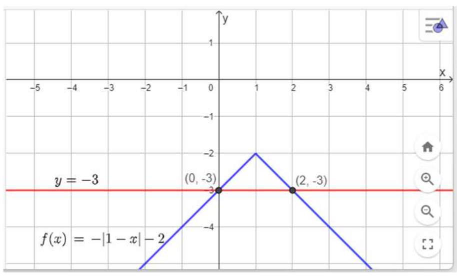
$S=\{-3,0\}$

d) $-|1-x|-2=-3 \Leftrightarrow -|1-x|=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |1-x|=1 \Leftrightarrow 1-x=-1 \vee 1-x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x=-2 \vee -x=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=0$

$S=\{0\ ,\ 2\}$

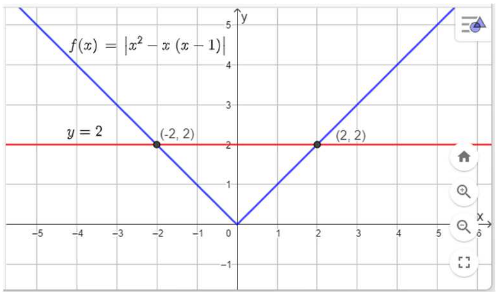


e) $|x^2-x(x-1)|=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x^2-x^2+x|=2 \Leftrightarrow |x|=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

$S=\{-2\ ,\ 2\}$

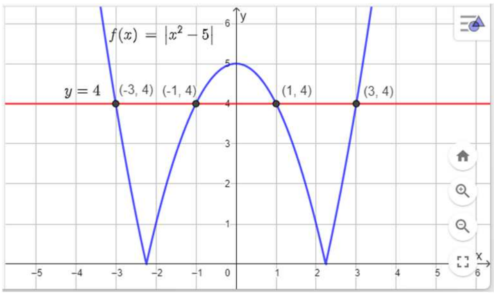


f) $|x^2 - 5| = 4 \Leftrightarrow x^2 - 5 = -4 \vee x^2 - 5 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = -3 \vee x = 3$

$S = \{-3, -1, 1, 3\}$



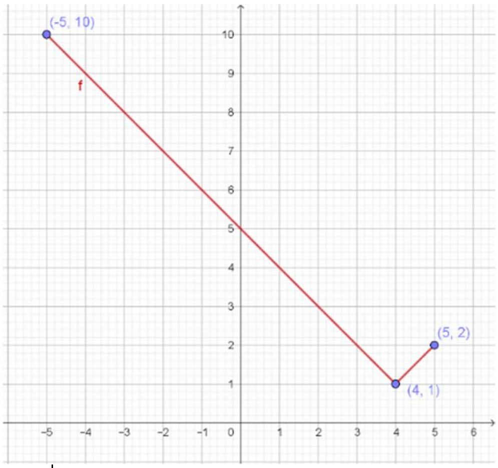
43.2.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-4| + 1 = 0 \Leftrightarrow |x-4| = 1$

Equação impossível.

f não tem zeros.

b)



x	$y = \|x-4\| + 1$
-5	10
4	1
5	2

c) $D'_f = [1, 10[$

d)

x	-5		4		5
$f(x)$	10	↘	1	↗	2

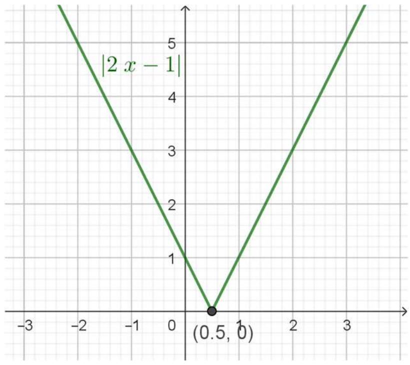
Pág. 170

44.

44.1.

a) $|2x-1| > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$

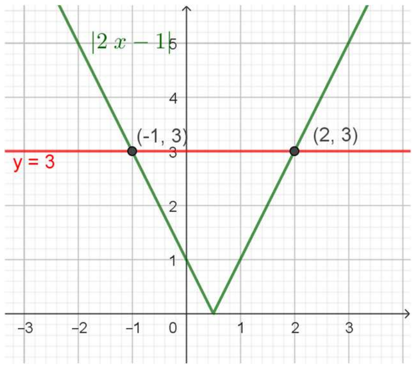
$S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$



b) $|2x-1| < 3 \Leftrightarrow 2x - 1 < 3 \wedge 2x - 1 > -3$

$\Leftrightarrow 2x < 4 \wedge 2x > -2$

$\Leftrightarrow x < 2 \wedge x > -1$; $S =]-1, 2[$



c) $\left|-x + \frac{1}{2}\right| + 2 > 7 \Leftrightarrow \left|-x + \frac{1}{2}\right| > 5$

$\Leftrightarrow -x + \frac{1}{2} > 5 \vee -x + \frac{1}{2} < -5$

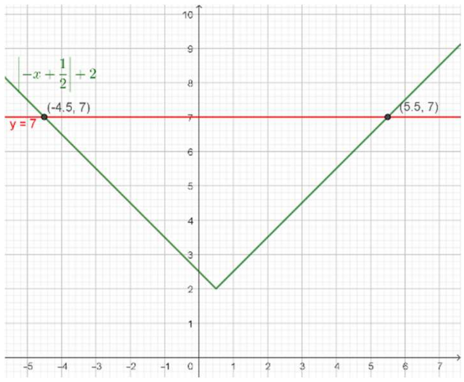
$\Leftrightarrow -2x + 1 > 10 \vee -2x + 1 < -10$

$\Leftrightarrow -2x > 9 \vee -2x < -11$

$\Leftrightarrow 2x < -9 \vee 2x > -11$

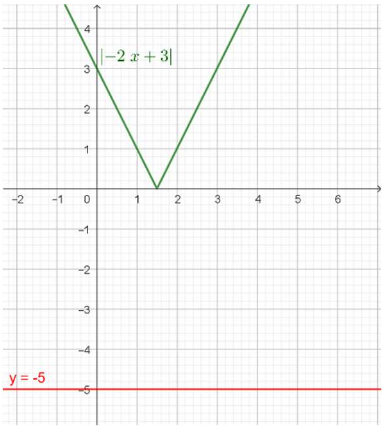
$\Leftrightarrow x < -\frac{9}{2} \vee x > \frac{11}{2}$

$S = \left]-\infty, -\frac{9}{2}\right[\cup \left]\frac{11}{2}, +\infty\right[$

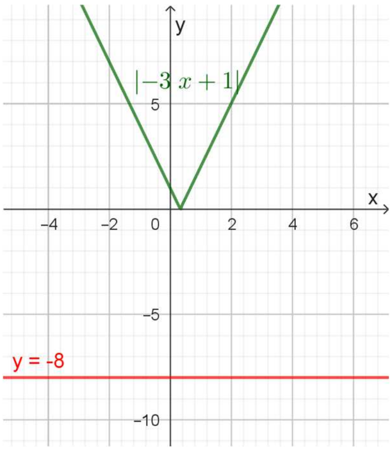


d) $|-2x+3| < -5$ Condição impossível

$S = \varnothing$



e) $|-3x+1| > -8$; condição universal. $S = \mathbb{R}$



f) $-3-|6-2x| \leq -10 \Leftrightarrow -|6-2x| \leq -7$

$\Leftrightarrow |6-2x| \geq 7$

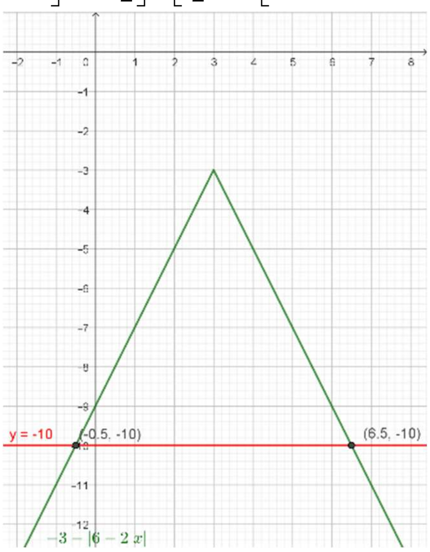
$\Leftrightarrow 6-2x \geq 7 \vee 6-2x \leq -7$

$\Leftrightarrow -2x \geq 1 \vee -2x \leq -13$

$\Leftrightarrow 2x \leq -1 \vee 2x \geq 13$

$\Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{2} \vee 2x \geq \dfrac{13}{2}$

$S = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{13}{2}, +\infty\right[$



44.2.

a) $f(x) = -|x-3|+1$

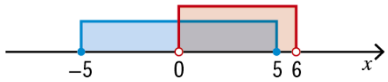
$f(x) > -2 \Leftrightarrow -|x-3|+1 > -2$

$\Leftrightarrow -|x-3| > -3$

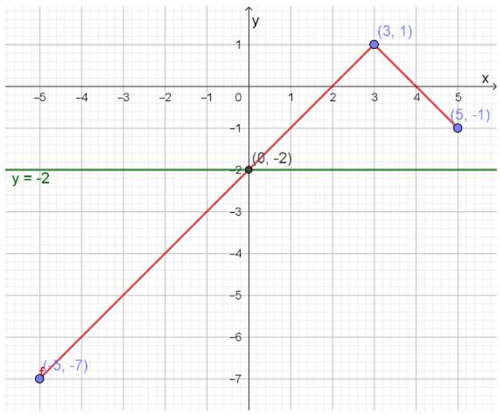
$\Leftrightarrow |x-3| < 3$

$\Leftrightarrow x-3 < 3 \wedge x-3 > -3$

$\Leftrightarrow x < 6 \wedge x > 0$



$S =]0, 6[\cap [-5, 5] =]0, 5]$



b) $f(-5) = -7$; $f(5) = -1$; $f(3) = 1$

$D'_f = [-7, 1]$

c) Máximo absoluto: 1
Mínimo absoluto: –7
Máximo relativo: 1
Mínimos relativos: –7 e –1

Pág. 171

45.

45.1. $v(0) = |0-20|+100 = |-20|+100 = 20+100 = 120$

A velocidade do automóvel no início do estudo era 120 km/h.

45.2. $v(t) = |t-20|+100$

$v(60) = |60-20|+100 = 40+100 = 140$ km/h

45.3.

$v(t) = 130 \Leftrightarrow |t-20|+100 = 130 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |t-20| = 30 \Leftrightarrow t-20 = 30 \vee t-20 = -30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 50 \vee t = -10$

Como $t \in [0, 60]$, a solução da equação é $t = 50$.

A velocidade do automóvel era 130 km/h, 50 segundos após o início do estudo.

45.4. $v(t) \leq 120 \Leftrightarrow |t-20|+100 \leq 120$

$\Leftrightarrow |t-20| \leq 20$

$\Leftrightarrow t-20 \leq 20 \wedge t-20 \geq -20$

$\Leftrightarrow t \leq 40 \wedge t \geq 0$

$t \in [0, 40]$

Significa que durante os primeiros 40 segundos do estudo, a velocidade do automóvel era inferior ou igual a 120 km/h.

Pág. 172

46.

46.1.

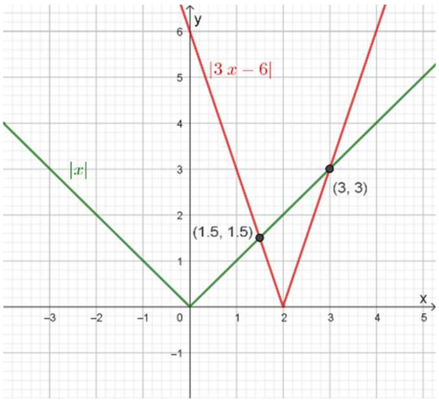
a) $|x| = |3x-6| \Leftrightarrow x = 3x-6 \vee x = -(3x-6)$

$\Leftrightarrow -2x = -6 \vee x = -3x+6$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee 4x = 6$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \dfrac{3}{2}$

$S = \left\{\dfrac{3}{2}, 3\right\}$



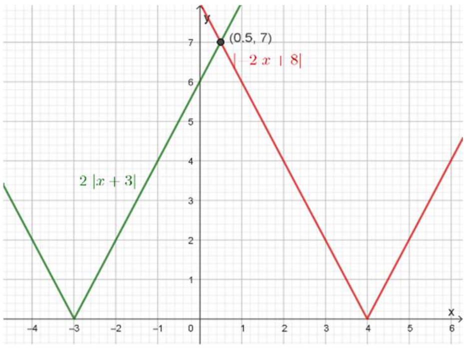
b) $2|x+3| = |-2x+8| \Leftrightarrow |2x+6| = |-2x+8|$

$\Leftrightarrow 2x+6 = -2x+8 \vee 2x+6 = -(-2x+8)$

$\Leftrightarrow 4x = 2 \vee 2x+6 = 2x-8$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \vee 0x = -14$ Equação impossível.

$S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$



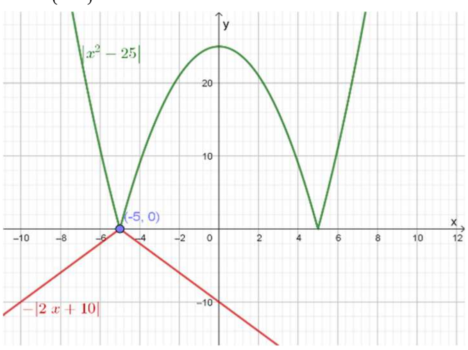
c) $|x^2-25| = -|2x+10| \Leftrightarrow x^2-25 = 0 \wedge 2x+10 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 25 \wedge x = -5$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25} \wedge x = -5$

$\Leftrightarrow (x = -5 \vee x = 5) \wedge x = -5$

$S = \{-5\}$



d) $|3-x| > |x| \Leftrightarrow |3-x|^2 > |x|^2$

$\Leftrightarrow (3-x)^2 > x^2$

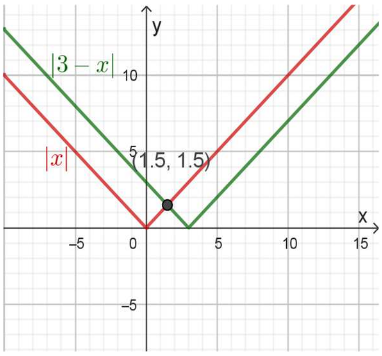
$\Leftrightarrow 9-6x+x^2 > x^2$

$\Leftrightarrow -6x > -9$

$\Leftrightarrow 6x < 9$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{3}{2}$

$S = \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$



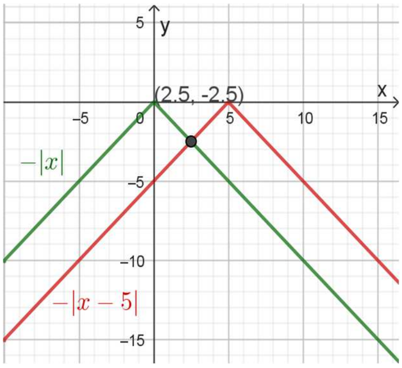
e) $-|x| \leq -|x-5| \Leftrightarrow |x| \geq |x-5|$

$\Leftrightarrow |x|^2 \geq |x-5|^2 \Leftrightarrow x^2 \geq (x-5)^2$

$\Leftrightarrow x^2 \geq x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow 10x \geq 25$

$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{2}$

$S = \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$



46.2.

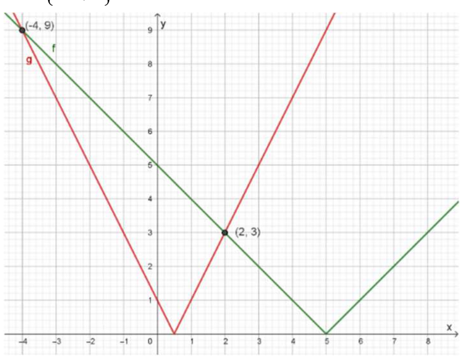
a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x-5| = |-2x+1|$

$\Leftrightarrow x-5 = -2x+1 \vee x-5 = -(-2x+1)$

$\Leftrightarrow 3x = 6 \vee x-5 = 2x-1$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee -x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -4$

$S = \{-4, 2\}$



b) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow |x-5| \geq |-2x+1|$

$\Leftrightarrow |x-5|^2 \geq |-2x+1|^2$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 \geq (-2x+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \geq 4x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 24 \geq 0$

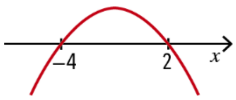
$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 \geq 0$

c.a.

$-x^2 - 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm 6}{-2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$

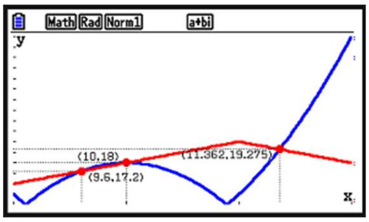
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36$



$S = [-4, 2]$

Pág. 173

47.



$S =]9{,}6; 10[\cup]11{,}36; 12]$

9,6 h = 9h36m   11,36 h $\approx$ 11h22m

Entre as 9h36m e as 10h00 e entre as 11h22m e as 12h00, a temperatura no escritório foi superior à temperatura no exterior.

Pág. 174

Tarefa de consolidação 5

1.

1.1. $v(3, 100)$

100 m

1.2. $f(3{,}2) = -\dfrac{100}{9}(3{,}2-3)^2 + 100 \approx 99{,}6$

Significa que passados 3,2 minutos após levantar, o balão estava a uma distância do solo de 99,6 metros, aproximadamente.

1.3. $f(x) = 80 \Leftrightarrow -\dfrac{100}{9}(x-3)^2 + 100 = 80$

$\Leftrightarrow -\dfrac{100}{9}(x-3)^2 = -20$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 1{,}8$

$\Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{1{,}8}$

$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{1{,}8} \vee x = 3 + \sqrt{1{,}8}$

$\Leftrightarrow x \approx 1{,}66 \vee x \approx 4{,}3$

Se $x \approx 4{,}3$ minutos, a distância ao solo era de 99 m.

$x \approx 1{,}66$

$0{,}66 \times 60 \approx 40$

Resposta: 1 minuto e 40 segundos, aproximadamente.

1.4. $-\dfrac{100}{9}(x-3)^2 + 100 = 99 \Leftrightarrow -\dfrac{100}{9}(x-3)^2 = -1$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0{,}09$

$\Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{0{,}09}$

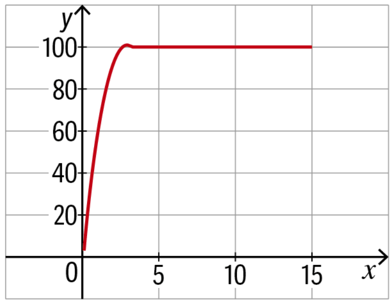
$\Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt{0{,}09} \vee x - 3 =$

$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{0{,}09} \vee x = 3 + \sqrt{0{,}09}$

$\Leftrightarrow x = 2{,}7 \vee x = 3{,}3$

Ao fim de 2,7 minutos depois de levantar voo e ao fim de 3,3 minutos.

1.5.



2.

2.1. $v(0,0)$ $(4,6)$

$y = ax^2$

$6 = a4^2 \Leftrightarrow 6 = 16a$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{3}{8}$

$y = \dfrac{3}{8}x^2$

$(4,6)$ $(7,8)$

$a = \dfrac{8-6}{7-4} \Leftrightarrow a = \dfrac{2}{3}$

$y = \dfrac{2}{3}x + b$

$6 = \dfrac{2}{3} \times 4 + b \Leftrightarrow 6 - \dfrac{8}{3} = b$

$\Leftrightarrow b = \dfrac{10}{3}$

$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3} & \text{se } 4 < x \leq 7 \end{cases}$$

2.2. $h(2) = \dfrac{3}{8} \times 2^2 = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ cm

Significa que 2 minutos após o início do enchimento, a altura da água no recipiente é 1,5 cm.

2.3. $\dfrac{3}{8}x^2 = 5 \Leftrightarrow 3x^2 = 40 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{40}{3}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{40}{3}},\ x > 0 \Leftrightarrow x \approx 3{,}7$

A altura da água no recipiente era de 5 cm ao fim de 3,7 segundos.

Pág. 175

3.

3.1.

- Se o consumo de água é inferior ou igual 10 m^3, o consumidor paga 7 € do aluguer do contador mais 0,5 € por cada m^3 consumido, ou seja, se consumir $x\,\text{m}^3$ o preço a pagar é $7+0,5x$.
- Se o consumo de água exceder os 10 m^3, o consumidor paga:

$$7+0,5\times 10+(x-10)\times 0,9$$
$$=7+5+(x-10)\times 0,9=12+(x-10)\times 0,9$$

Onde $0,5\times 10$ representa 10 m^3 pagos a 0,50 € e $(x-10)$ representa o consumo acima dos 10 m^3 pagos a 0,90 €.

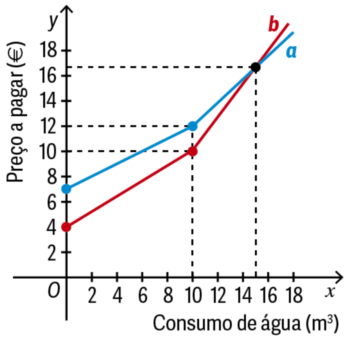
3.2.

a)

$$b(x)=\begin{cases}4+0,6x & \text{se } 0\le x\le 10\\ 4+0,6\times 10+1,3\times(x-10) & \text{se } x>10\end{cases}$$

$$b(x)=\begin{cases}4+0,6x & \text{se } 0\le x\le 10\\ 10+1,3(x-10) & \text{se } x>10\end{cases}$$

b)



x	$a(x)$
0	7
10	12
15	16,5

x	$b(x)$
0	4
10	10
15	16,5

c) A localidade A é mais barata para consumos superiores a 15 m^3.
A localidade B é mais barata para consumos inferiores a 15 m^3.
O gráfico de a está "abaixo" do gráfico de b a partir do $x=15$.

4.

4.1. $a(x)=\begin{cases}5x & \text{se } 0\le x\le 5\\ 25+10(x-5) & \text{se } 5<x\le 15\end{cases}$

4.2. $a(8)=25+10(8-5)=55$ u.a.
Quando $x=8$, a área da região colorida é 55 u. a.

4.3. $a(5)=5\times 5=25$
Se $a(x)=5x$ então $a(x)=2\times a(5)\Leftrightarrow 5x=2\times 25$
$\Leftrightarrow x=10$. Impossível porque $0\le x\le 5$.
Se $a(x)=25+10(x-5)$ então

$25+10(x-5)=2\times 25$
$\Leftrightarrow 25+10x-50=50\Leftrightarrow 10x=75\Leftrightarrow x=7,5$
7,5 é o valor de x para o qual a área da região colorida é igual ao dobro da área do quadrado menor.

Pág. 177

Avaliação formativa 5

1. **(B)** **2.** **(A)**

3. $(-6,3)$ $(-3,0)$

$a=\dfrac{0-3}{-3-(-6)}=-1$

$y=-x+b$; $0=-(-3)+b\Leftrightarrow b=-3$

$y=-x-3$

$(0,3)$ $(-3,0)$

$a=\dfrac{0-3}{-3-0}=1$ e $b=3$

$y=x+3$; $V(2,2)$ $(4,0)$

$y=a(x-2)^2+2$

$0=a(4-2)^2+2\Leftrightarrow 0=4a+2\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$

$y=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2$

$$h(x)=\begin{cases}-x-3 & \text{se } -6\le x\le -3\\ x+3 & \text{se } -3<x\le 0\\ -\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2 & \text{se } x>0\end{cases}$$

ou

$(0,3)$; $y=a|x-b|+c$

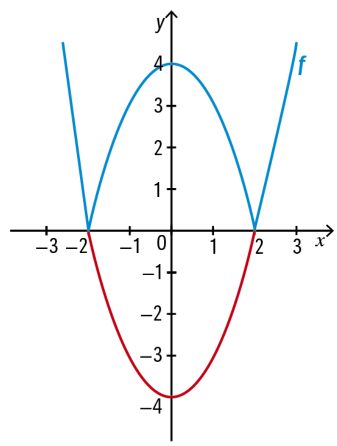
$y=a|x+3|$; $3=a|0+3|\Leftrightarrow a=1$

$y=|x+3|$

$$h(x)=\begin{cases}|x+3| & \text{se } -6\le x\le 0\\ -\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2 & \text{se } x>0\end{cases}$$

4. $|x-1|>1\Leftrightarrow x-1>1\vee x-1<-1$
$\Leftrightarrow x>2\vee x<0$. $S=]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

5.



x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘	0	↗

Pág. 178

1.

1.1. $D'_f = [-5,2]$

1.2.

a) $S = \{-5,5\}$

b) $f(x) - 1 = 1 \Leftrightarrow f(x) = 2$

$S = \{7\}$

c) $f(x) < f(-5) \Leftrightarrow f(x) < 0$

$S =]-5,5[$

d) $f(7) \times (1 - f(x)) \leq 0 \Leftrightarrow 2(1 - f(x)) \leq 0$

$\Leftrightarrow 1 - f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -f(x) \leq -1 \Leftrightarrow f(x) \geq 1$

$S =]-\infty,-6] \cup [6,8]$

2.

2.1. 0 horas corresponde às 7 horas da manhã

3 horas corresponde às 10 horas

15 horas corresponde às 22 horas

$5 - 5 = 0$

2.2. Entre as 16:00 e as 19:00.

2.3. $t \in [1,3] \cup [13,15]$

Significa que entre as 08:00 e as 10:00, e entre as 20:00 e as 22:00, o consumo de água no prédio da Joana foi superior ou igual a 5 hectolitros.

2.4. c é crescente em: $[0,2]$, em $[5,7]$ e em $[12,14]$

c é decrescente em: $[2,4]$ e em $[14,17]$

c é constante em: $[4,5]$, em $[7,9[$ e em $[9,12]$

Pág. 179

3.

3.1.

a) $[7,13]$

b) $[4,7]$

3.2. f é positiva em: $]2,6[\cup]9,15[$

f é negativa em: $]6,9[$

Dos 2 aos 6 segundos e dos 9 aos 15 segundos, o carro encontrava-se acima do solo.

Dos 6 aos 9 segundos o carro estava abaixo do solo.

3.3. Máximo absoluto: 12

Maximizante: 13

A altura máxima atingida pelo carro foi 12 metros e ocorreu passados 13 segundos após a partida.

Mínimo absoluto: -4

Minimizantes: $[7,8]$

A altura mínima alcançada pelo carro foi -4 metros e ocorreu entre os 7 e os 8 segundos de viagem.

3.4. $\textit{velocidade média} = \dfrac{\textit{espaço percorrido}}{\textit{tempo}}$

$v = \dfrac{12-(-4)}{13-8} = 3{,}2\,\text{m/s}$ $v = \dfrac{12-0}{15-13} = 6\,\text{m/s}$

A velocidade média foi maior dos 13 aos 15 segundos.

4.

4.1.

a) $f(-1) = 3$

$f(2) = -1$

b) $f(1) = 0$

A ordenada é zero.

c) $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$

As abcissas são -3 e 2.

d) 3 soluções

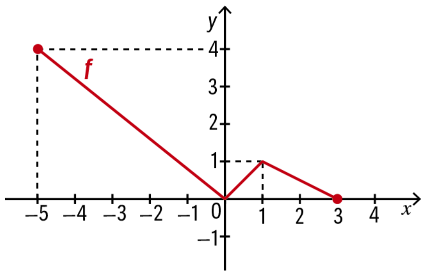
4.2.

x	-4		-3		$-1{,}1$		$-0{,}5$		2
$f(x)$	1	↘	-1	↗	3	→	3	↘	-1

Pág. 180

5.

5.1. Por exemplo



5.2.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

$S = \{0,3\}$

b) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5,3]$

$S = [-5,3]$

c) $f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in [-5,3]$

$S = \{0,3\}$

6.

6.1. 03:00; 09:00; 15:00 e 21:00.

6.2. 10 metros; 00:00; 12:00 e 24:00.

6.3. 6 metros; 06:00 e 18:00.

6.4.

a) $D'_f = [6,10]$

b) f é crescente em $[6,12]$ e em $[18,24]$.

f é decrescente em $[0,6]$ e em $[12,18]$.

c)

x	0		6		12		18		24
$f(x)$	10	↘	6	↗	10	↘	6	↗	10

d) $f(x)=6 \Leftrightarrow x=6 \vee x=18$

Duas soluções.

e) $f(x)\geq 8 \Leftrightarrow x\in[0,3]\cup[9,15]\cup[21,24]$

$S=[0,3]\cup[9,15]\cup[21,24]$

A profundidade de água do mar é superior ou igual a 8 metros das 0 h às 3 h, das 9 h às 15 h e das 21 h às 24 h, inclusive.

Pág. 181

7.

7.1. $r:\ a=-1$

$s:\ a=1$

$t:\ a=2$

$u:\ a=-3$

7.2. $r:\ y=-x+3$

$s:\ y=x+2$

$t:\ y=2x-2$

$u:\ y=-3x+2$

8.

8.1. $r:\ a=\frac{-3-2}{-1-1}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$

$s:\ y=\frac{5}{2}x+b \qquad C(3,7)$

$7=\frac{5}{2}\times 3+b \Leftrightarrow 7=\frac{15}{2}+b \Leftrightarrow 7-\frac{15}{2}=b \Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}$

$y=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$

8.2. $(0,3)$

$(-3,-3)$

$b=3$

$y=ax+3$

$a=\frac{-3-3}{-3-0}=\frac{-6}{-3}=2$

$y=2x+3$

A reta s não é paralela à reta r, porque não têm o mesmo declive $\left(\frac{5}{2}\neq 2\right)$.

9.

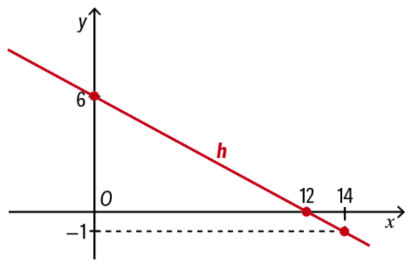
9.1.

x	$h(x)$
0	6
12	0
–4	8
14	–1

$0=-\frac{1}{2}x+6 \Leftrightarrow 0=-x+12 \Leftrightarrow x=12$

$h(-4)=-\frac{1}{2}\times(-4)+6=8$

$h(14)=-\frac{1}{2}\times 14+6=-1$



9.2. $D'_h=[-1,8]$

9.3.

x	–4		12		14
$h(x)$	8	+	0	–	–1

h é positiva em $[-4,12[$.

9.4.

x	–4		14
$h(x)$	8	↘	–1

10.

10.1. $f:\ A(2,0) \quad B(0,3)$

$b=3$

$a=\frac{3-0}{0-2}=-\frac{3}{2}$

$f(x)=-\frac{3}{2}x+3$

$g:\ C(-2,-3) \quad D(1,0)$

$a=\frac{0-(-3)}{1-(-2)}=\frac{3}{3}=1$

$y=x+b$

$0=1+b \Leftrightarrow b=-1$

$g(x)=x-1$

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+3 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+3 \\ -\frac{3}{2}x+3=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+3 \\ -3x+6=2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+3 \\ -5x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}\times\frac{8}{5}+3 \\ x=\frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{5} \\ x=\frac{8}{5} \end{cases}$$

$P\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$

10.2. $2f(x)-g(x)\le 0 \Leftrightarrow 2\left(-\frac{3}{2}x+3\right)-(x-1)\le 0$

$\Leftrightarrow -3x+6-x+1\le 0 \Leftrightarrow -4x+7\le 0 \Leftrightarrow -4x\le -7$

$\Leftrightarrow 4x\ge 7 \Leftrightarrow x\ge \frac{7}{4}$

$S=\left[\frac{7}{4},+\infty\right[$

Pág. 182

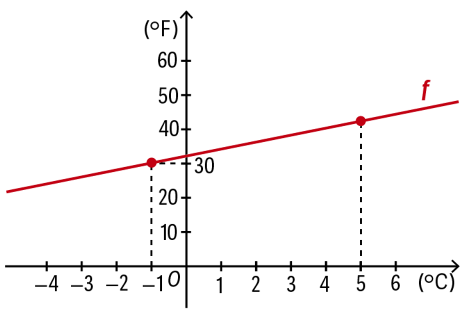
11.

11.1. $(0,32)$ $(100,212)$

$b=32$ e $a=\frac{212-32}{100}=\frac{180}{100}=\frac{9}{5}$

$F=\frac{9}{5}C+32$

11.2.



°C	°F
−1	30,2
0	32
5	41

11.3. $41=\frac{9}{5}C+32 \Leftrightarrow 205=9C+160 \Leftrightarrow 9C=45$

$\Leftrightarrow C=5$

Em Nova Iorque a temperatura é $5\ °C$, logo, provavelmente, a fotografia da Adriana não foi tirada hoje, porque ela está vestida com roupa de verão.

11.4. $F=\frac{9}{5}\times 55+32=131$

A temperatura do chá é $131\ °F$.

12.

12.1. $(0,1)$ $(50,6)$

$b=1$

$a=\frac{6-1}{50}=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$

$f(x)=\frac{1}{10}x+1$

12.2. $x=18$

$f(18)=\frac{1}{10}\times 18+1=\frac{14}{5}=2,8$

A pressão sofrida é de 2,8 atm.

12.3. $f(x)=4$

$4=\frac{1}{10}x+1 \Leftrightarrow 40=x+10 \Leftrightarrow x=30$

O mergulhador encontra-se a 30 metros de profundidade.

13.

13.1. $f(x)=20\times(10-x)$

$f(x)=-20x+200$

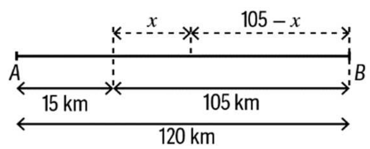
13.2. $f(4)=-20\times 4+200=120$

Se o retângulo da horta tiver 4 metros de largura, a área do jardim é $120\ m^2$.

Pág. 183

14.

14.1.



$\frac{x}{30}=\frac{105-x}{40} \Leftrightarrow 40x=3150-30x \Leftrightarrow 70x=3150$

$\Leftrightarrow x=45$ km

$\frac{45}{30}=1,5$ horas

$0,5$ horas $+ 1,5$ horas $= 2$ horas

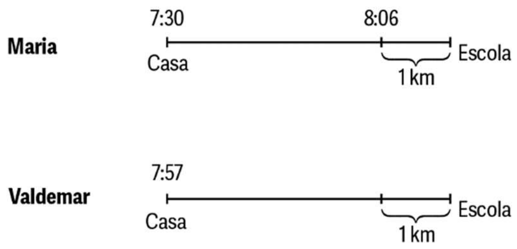
Ao fim de 2 horas.

14.2. $15\,\text{km}+45\,\text{km}=60\,\text{km}$

Cruzam-se a uma distância de A de $60\,\text{km}$.

15.

15.1.



$7\,h30 + 3 \times 12\,min = 7\,h30 + 36\,min = 8\,h06\,min$

$20\,km$ —— $1\,h$

$3\,km$ —— x

$0{,}15 \times 60 = 9\,min$

$8\text{ h }06\text{ min} - 9\text{ min} = 7\text{ h }57\text{ min}$

O Valdemar saiu de casa às $7\text{ h }57\text{ min}$.

15.2. $\frac{1}{20} = 0{,}05\,h$

$0{,}05\,h \times 60\,min = 3\,min$

O Valdemar fez o quilómetro que faltava em 3 minutos e a Maria fez em 12 minutos.

$12 - 3 = 9$ Portanto o Valdemar fez bem as contas.

16.

16.1. $(0, 20)$ $(10, 0)$

$b = 20$

$a = \frac{-20}{10} = -2$

$V = -2I + 20$

$V = -2 \times 4{,}5 + 20 = 11$ volts

16.2. $5 = -2I + 20 \Leftrightarrow 2I = 15 \Leftrightarrow I = 7{,}5$ amperes

---

Pág. 184

17.

17.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

Zeros de f: -2 e 2

17.2. O gráfico de h obtém-se do gráfico de f deslocando-o duas unidades na vertical para baixo.

17.3.

a) $D'_f =]-\infty, 4]$

b) $D'_i =]-\infty, 5]$

17.4. $c \in]-\infty, -4[$

18.

18.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee x + 2 = 0$

$x = 2 \vee x = -2$

Zeros de f: -2 e 2

18.2. $f(x) = x^2 - 4$

O gráfico de f obtém-se do gráfico de g deslocando-o quatro unidades na vertical para baixo.

18.3. $D'_h = [-1, +\infty[$

18.4. $c = 4$

18.5. $d \in]-4, +\infty[$

19.

19.1.

a) $D_i = [-2+1, 2+1] = [-1, 3]$

$D'_i = [0, 2]$

b) $D_j = [-2-3, 2-3] = [-5, -1]$

$D'_j = [0, 2]$

19.2. $c = 4$

Pág. 185

20.

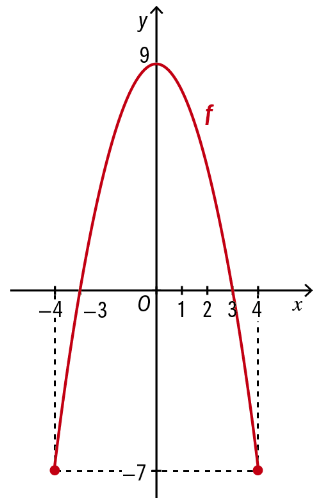
20.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-3)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

Zeros de f: -3 e 3

20.2. $f(0) = -(0-3)(0+3) = 9$

20.3.



$f(x) = -(x^2 - 9) = -x^2 + 9$

$f(-4) = -(-4)^2 + 9 = -7$

$f(4) = -4^2 + 9 = -7$

$D'_f = [-7, 9]$

20.4. $D_g = [-4+3, 4+3] = [-1, 7]$

$D'_g = [-7+2, 9+2] = [-5, 11]$

21.

21.1. $i(x) = -2 + f(x-3)$.

O gráfico de i obtém-se do gráfico de j por um deslocamento de três unidades na horizontal para a direita seguido de um deslocamento na vertical de duas unidades para baixo.

21.2. $g(x) = 2(x-8)^2 + 2$

$h(x) = 2(x+3)^2 - 6$

22. $g(x) = f(x-4)$

$h(x) = f(x) + 3$

$i(x) = f(x+6) + 3$

Pág. 186

23.

23.1. O gráfico de g obtém-se do gráfico de f por um deslocamento de três unidades na horizontal para a direita seguido de um deslocamento na vertical de cinco unidades para baixo.

23.2. $g(x) = -5 + f(x-3) \Leftrightarrow g(x) = -5 + (x-3)^2 - 4$

$\Leftrightarrow g(x) = -9 + (x-3)^2$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -9 + (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x - 3 = -3 \vee x - 3 = 3$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$

Zeros de g : 0 e 6

24.

24.1. $D_g = [-1+10, +\infty[= [9, +\infty[$

$D'_g = D'_f = [-2, 5]$

24.2. $D_g = D_f = [-1, +\infty[$

$D'_g = [-2+3, 5+3] = [1, 8]$

24.3. $D_g = [-1+1, +\infty[= [0, +\infty[$

$D'_g = [-2-2, 5-2] = [-4, 3]$

25. $g(x) = -f(x)$

$h(x) = -f(x+7) - 1$

$i(x) = f(x+9) + 1$

26.

26.1.

a) $V(0, -2)$ **b)** $V(4, -4)$

26.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + f(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow -2 + (x-4)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x - 4 = -2 \vee x - 4 = 2$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6$

Zeros de g: 2 e 6

Pág. 187

27.

27.1. $h(x) = a(x-h)^2 + k$

$h(x) = a(x-1)^2$

$6 = a(3-1)^2 \Leftrightarrow 6 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$ $(3, 6)$

$h(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2$

27.2.

a) $g(x) = 0 \Leftrightarrow -h(x-3) + 6 = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}(x-3-1)^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}(x-4)^2 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow -3(x-4)^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x - 4 = 2 \vee x - 4 = -2$

$\Leftrightarrow x = 6 \vee x = 2$

Zeros de g: 2 e 6

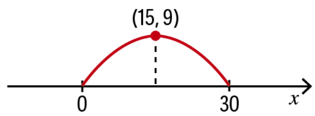
b) $D'_g =]-\infty, 6]$

28. $h(x) = a(x-15)^2 + 9$

$0 = a(-15)^2 + 9$ $(0, 0)$

$\Leftrightarrow 225a = -9 \Leftrightarrow a = -0{,}04$

$h(x) = -0{,}04(x-15)^2 + 9$

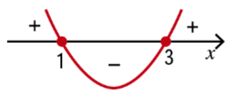


29.

29.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Zeros de f : 1 e 3



29.2. Abcissa do vértice: 2

29.3. $f(2) = (2-1)(2-3) = -1$

Ordenada do vértice: -1

29.4. $f(x) = a(x-2)^2 - 1$

$0 = a(1-2)^2 - 1$ $(1, 0)$

$\Leftrightarrow 0 = a - 1 \Leftrightarrow a = 1$

$f(x) = (x-2)^2 - 1$

29.5. $f(0) = (0-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$(0, 3)$

30.

30.1. $f(x)=-kx^2+\frac{k}{2}x+k$

$\frac{k}{2}=0 \Leftrightarrow k=0$

30.2. $f(x)=-4x^2+2x+4$

Seja $g(x)=-4x^2+2x$

Zeros de g: $g(x)=0 \Leftrightarrow -4x^2+2x=0$

$\Leftrightarrow 2x(-2x+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x=0 \vee -2x+1=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{1}{2}$

Abcissa do vértice dos gráficos de f e g é

$\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=-4\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\times\frac{1}{4}+4=-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+4=\frac{17}{4}$

$D'_f=\left]-\infty,\frac{17}{4}\right]$

Pág. 188

31.

31.1. Se são plantadas x laranjeiras e cada laranjeira produz $800-8x$ laranjas, o número total de laranjas produzidas é $x(800-8x)$

$L(x)=x(800-8x)$

31.2. $L(x)=0 \Leftrightarrow x(800-8x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 800-8x=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=100$

Abcissa do vértice $\frac{0+100}{2}=50$

Devem ser plantadas 50 laranjeiras.

32.

32.1. Abcissa do vértice: $\frac{-1+3}{2}=1$

$f(x)=a(x-1)^2+k$

$\begin{cases}-3=a(0-1)^2+k & (0,-3)\\ 0=a(3-1)^2+k & (3,0)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-3=a+k\\ 0=4a+k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3=a-4a\\ k=-4a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ k=-4\end{cases}$

$f(x)=(x-1)^2-4$

32.2. Abcissa do vértice: $\frac{-3+0}{2}=-\frac{3}{2}$

$f(x)=a\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+k$

$\begin{cases}0=a\left(0+\frac{3}{2}\right)^2+k & (0,0)\\ -4=a\left(-2+\frac{3}{2}\right)^2+k & (-2,-4)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}0=\frac{9}{4}a+k\\ -4=a\left(-\frac{1}{2}\right)^2+k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-\frac{9}{4}a\\ -4=\frac{1}{4}a+k\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}k=-\frac{9}{4}a\\ -4=\frac{1}{4}a-\frac{9}{4}a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-\frac{9}{4}a\\ -16=a-9a\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}k=-\frac{9}{4}a\\ -16=-8a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-\frac{9}{4}a\\ a=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-\frac{9}{4}\times 2\\ a=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}k=-\frac{9}{2}\\ a=2\end{cases}$

$f(x)=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$

32.3. Abcissa do vértice: $\frac{-3+1}{2}=-1$

$f(x)=a(x+1)^2+k$

$\begin{cases}6=a(0+1)^2+k & (0,6)\\ 0=a(1+1)^2+k & (1,0)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6=a+k\\ 0=4a+k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6-a=k\\ 0=4a+6-a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6-a=k\\ 3a=-6\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6-(-2)=k\\ a=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=8\\ a=-2\end{cases}$

$f(x)=-2(x+1)^2+8$

32.4. Abcissa do vértice: $\frac{-2+4}{2}=1$

$f(x)=a(x-1)^2+k$

$\begin{cases}5=a(3-1)^2+k & (3,5)\\ 0=a(4-1)^2+k & (4,0)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}5=4a+k\\ 0=9a+k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=5-4a\\ 0=9a+5-4a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=5-4a\\ -5=5a\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}k=5-4\times(-1)\\ a=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=9\\ a=-1\end{cases}$

$f(x)=-(x-1)^2+9$

33.

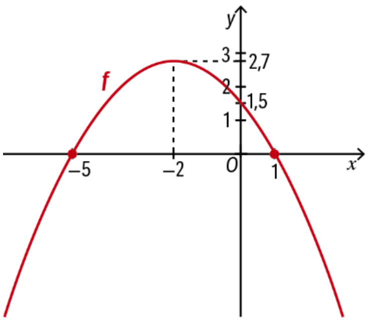
33.1. Zeros de f : 1 e -5

Abcissa do vértice: $\frac{-5+1}{2}=-2$

$f(-2)=-0,3(-2-1)(-2+5)=-0,3\times(-3)\times 3=2,7$

$f(x)=-0,3(x+2)^2+2,7$

33.2.



33.3. Máximo absoluto: 2,7

33.4.

x	$-\infty$	-5		1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

f é positiva em $]-5,1[$

f é negativa em $]-\infty,-5[\cup]1,+\infty[$

33.5.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	2,7	$\searrow$

f é crescente em $]-\infty,-2]$

f é decrescente em $[-2,+\infty[$

Pág. 189

34.

34.1. $A(t)=-5t^2+20t+2,5$

Seja $B(t)=-5t^2+20t$

Zeros de B : $-5t^2+20t=0\Leftrightarrow -5t(t-4)=0$

$\Leftrightarrow t=0\vee t=4$

Abcissa do vértice dos gráficos de A e de B :
$\frac{0+4}{2}=2$

$A(2)=-5\times 2^2+20\times 2+2,5=22,5$

$A(t)=-5(t-2)^2+22,5$

34.2. $A(0)=-5\times 0^2+20\times 0+2,5=2,5$

No instante em que foi lançada, a bola encontrava-se a 2,5 m.

Decorreram 4 segundos.

34.3. A altura máxima atingida pela bola foi 22,5 m.

35.

35.1. $A(x)=x(40-x)=-x^2+40x$

$A(x)=0\Leftrightarrow -x^2+40x=0\Leftrightarrow x(-x+40)=0$

$\Leftrightarrow x=0\vee -x+40=0\Leftrightarrow x=0\vee x=40$

Abcissa do vértice: $\frac{0+40}{2}=20$

$A(20)=-20^2+40\times 20=400$

$A(x)=-(x-20)^2+400$

35.2. $x=20\,\text{m}$

36.

36.1. $560=10(a-4\times 10)\Leftrightarrow 560=10(a-40)$

$\Leftrightarrow 56=a-40\Leftrightarrow a=96$

36.2. $x(96-4x)\geq 0$ $\quad|0\leq x\leq 30$

$\Leftrightarrow 96-4x\geq 0\Leftrightarrow -4x\geq -96$

$\Leftrightarrow 4x\leq 96\Leftrightarrow x\leq 24$

Devem ser produzidos 24 artigos ou menos.

36.3. $R(x)=x(96-4x)$

$R(x)=0\Leftrightarrow x(96-4x)=0\Leftrightarrow x=0\vee 96-4x=0$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=24$

Abcissa do vértice: $\frac{0+24}{2}=12$

$R(12)=12(96-4\times 12)=576$

O rendimento máximo que a empresa pode obter é 576 euros.

Pág. 190

37.

37.1 Critério AA

$D\hat{A}F=E\hat{F}C$ e $A\hat{D}F=F\hat{E}C=90°$

a) $\frac{4-x}{4}=\frac{y}{6}\Leftrightarrow 4y=6(4-x)\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}(4-x)$

$A(x)=x\times\frac{3}{2}(4-x)\Leftrightarrow A(x)=\frac{3}{2}x(4-x)$

$\Leftrightarrow A(x)=x\left(6-\frac{3}{2}x\right)$

b)

$A(x)=0\Leftrightarrow x\left(6-\frac{3}{2}x\right)=0\Leftrightarrow x=0\vee 6-\frac{3}{2}x=0$

$\Leftrightarrow x=0\vee 12-3x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=4$

Abcissa do vértice: $\frac{0+4}{2}=2$

$A(2)=2\left(6-\frac{3}{2}\times 2\right)=6$; $\quad V(2,6)$

c) 6 m^2

38.

38.1.

a) $25-x$: Representa o número de euros que se deduz ao preço de cada bilhete.

b) $1200(25-x)$: Representa o número de bilhetes que o clube vai vender a mais devido à diminuição dos custos.

c) $R(x)=x[18\ 000+1200(25-x)]$: Representa a receita da venda de bilhetes que o clube passa a ter.

38.2. $R(x)=0 \Leftrightarrow (18\ 000+1200x)(25-x)=0$

$\Leftrightarrow 18\ 000+1200x=0 \vee 25-x=0$

$\Leftrightarrow 1200x=-18\ 000 \vee -x=-25 \Leftrightarrow x=-15 \vee x=25$

Abcissa do vértice: $\dfrac{-15+25}{2}=5$

Custo do bilhete: $25\text{€}-5\text{€}=20\text{€}$

$R(5)=(18\ 000+1200\times5)(25-5)=480\ 000$ €

Pág. 191

39.

39.1.

a) $f(-4)=2(-4+3)^2-1=$

$=2\times(-1)^2-1=2\times1-1=1$

b) $f(x)=7 \Leftrightarrow 2(x+3)^2-1=7 \Leftrightarrow 2(x+3)^2=8$

$\Leftrightarrow (x+3)^2=4 \Leftrightarrow x+3=-\sqrt{4} \vee x+3=\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x+3=-2 \vee x+3=2 \Leftrightarrow x=-5 \vee x=-1$

39.2.

a) $V(-3,-1)$

b) $x=-3$

39.3. Como o mínimo de f é -1 e a parábola tem a concavidade voltada para cima, f tem dois zeros.

39.4. $y=-1$

39.5. f é decrescente em $]-\infty,-3]$

f é crescente em $[-3,+\infty[$

40.

40.1. $f(x)=3x^2-6x+5$

Seja $g(x)=3x^2-6x$

Zeros de g : $g(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0$

$\Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0 \vee x-2=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

Abcissa do vértice: $\dfrac{0+2}{2}=1$

$f(1)=3\times1^2-6\times1+5=3-6+5=2$

$f(x)=3(x-1)^2+2$

40.2. $x=1$

40.3. $D'_f=[2,+\infty[$

f é decrescente em $]-\infty,1]$

f é crescente em $[1,+\infty[$

40.4. $f(0)=3\times0^2-6\times0+5=5$

$B(0,5)$

$A_{[BOA]}=\dfrac{\overline{OB}\times2}{2}=\overline{OB}=5$ u.a.

Pág. 192

41.

41.1. $d=2\times500=1000$ metros

41.2. $D_f=[0,1000]$

$f(x)=a(x-h)^2+k \qquad V(500,20)$

$f(x)=a(x-500)^2+20$

$220=a(0-500)^2+20 \qquad (0,220)$

$\Leftrightarrow 220=250\ 000a+20 \Leftrightarrow 200=250\ 000a$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{1250}$

$f(x)=\dfrac{1}{1250}(x-500)^2+20$

42.

42.1. $x\in\,]0,10[$

42.2. $A_{[ABF]}=\dfrac{10\times(10-x)}{2}=5(10-x)$

$A_{[FCE]}=\dfrac{x\times x}{2}=\dfrac{1}{2}x^2$

$A_{[AED]}=\dfrac{10\times(10-x)}{2}=5(10-x)$

42.3. $A_{[AFE]}=A_{[ABCD]}-A_{[ABF]}-A_{[FCE]}-A_{[AED]}$

$=100-2\times5(10-x)-\dfrac{1}{2}x^2=100-100+10x-\dfrac{1}{2}x^2$

$=-\dfrac{1}{2}x^2+10x$

$A(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+10x$

$A(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x^2+10x=0 \Leftrightarrow -x^2+20x=0$

$\Leftrightarrow x(-x+20)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=20$

Abcissa do vértice: $\frac{0+20}{2}=10$

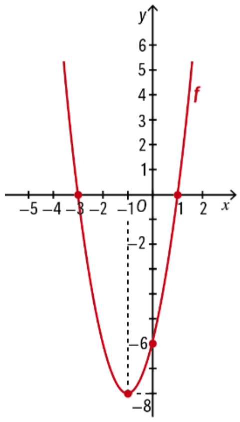
$A(10)=-\frac{1}{2}\times 10^2+10\times 10=-50+100=50$

$A(x)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+50$

Como $x\in]0,10[$, $A(x)\in]0,50[$

Pág. 193

43.



$f(x)=a(x-h)^2+k$ e $h=-1$

$f(x)=a(x+1)^2+k$

$(1,0)$; $(0,-6)$

$\begin{cases} 0=a(1+1)^2+k \\ -6=a(0+1)^2+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=4a+k \\ -6=a+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4a \\ -6=a-4a \end{cases}$

$\begin{cases} k=-4a \\ -6=-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4\times 2 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-8 \\ a=2 \end{cases}$

$f(x)=2(x+1)^2-8$

44.

44.1. $A(x)=A_{[AHE]}+A_{[HMDE]}+A_{[MBCD]}$

$=\frac{\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}}{2}+\frac{8-x+\frac{x}{2}}{2}\times\frac{x}{2}+(8-x)(8-x)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\times\left(8x-x^2+\frac{x^2}{2}\right)+64-8x-8x+x^2$

$=\frac{x^2}{8}+2x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{8}+64-16x+x^2$

$=\frac{x^2}{8}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{8}+x^2+2x+64-16x=x^2-14x+64$

44.2. $x^2-14x+64=x^2-14x+49-49+64$

$=(x-7)^2+15$

$V(7,15)$

A área é mínima para $x=7$ cm .

C.A.

$-\frac{14}{2}=-7$

$(-7)^2=49$

45.

45.1. $400=k\times 10^2 \Leftrightarrow 400=100k \Leftrightarrow k=4$

45.2.

a) massa $=2$ g

Preço $=4\times 2^2=16$ €

massa $=8$ g

Preço $=4\times 8^2=256$ €

256 € $+16$ € $=272$ €

b) $P(x)=4x^2+4(10-x)^2$

$P(x)=4x^2+4(100-20x+x^2)$

$P(x)=4x^2+400-80x+4x^2$

$P(x)=8x^2-80x+400$

Seja $Q(x)=8x^2-80x$

Zeros de Q : $Q(x)=0 \Leftrightarrow 8x^2-80x=0$

$\Leftrightarrow 8x(x-10)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=10$

Abcissa do vértice: $\frac{0+10}{2}=5$

$P(5)=8\times 5^2-80\times 5+400=$

$=200-400+400=200$

O preço mínimo a pagar é 200 euros e isso acontece quando a esmeralda fica partida em duas partes com a mesma massa, 5 g.

Pág. 194

46.

46.1. $(m-1)x^2-2x+1=0$

$\Delta=0 \Leftrightarrow b^2-4ac=0 \Leftrightarrow (-2)^2-4(m-1)\times 1=0$

$\Leftrightarrow 4-4m+4=0 \Leftrightarrow -4m=-8 \Leftrightarrow m=2$

46.2. $\Delta>0 \Leftrightarrow b^2-4ac>0$

$\Leftrightarrow -4m+8>0 \Leftrightarrow -4m>-8$

$\Leftrightarrow 4m<8 \Leftrightarrow m<2$

$m\in]-\infty,2[\setminus\{1\}$

46.3. $\Delta<0 \Leftrightarrow b^2-4ac<0$

$\Leftrightarrow -4m+8<0 \Leftrightarrow -4m<-8$

$\Leftrightarrow 4m>8 \Leftrightarrow m>2$

$m\in]2,+\infty[$

47. $(m+1)x^2-mx-1=0$

$\Delta=0 \Leftrightarrow (-m)^2-4\times(m+1)\times(-1)=0$

$\Leftrightarrow m^2+4m+4=0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2=0 \Leftrightarrow m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$

48.

48.1. $f(x)=2x^2-7x+3$

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-7x+3=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times3}}{2\times2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x=\frac{7-5}{4} \vee x=\frac{7+5}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=3$

Zeros de f : $\frac{1}{2}$ e 3

48.2. $g(x)=16x^2-8x+1$

$g(x)=0 \Leftrightarrow 16x^2-8x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times16\times1}}{2\times16}$

$\Leftrightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{32}$

$\Leftrightarrow x=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

Zero de g : $\frac{1}{4}$

48.3. $h(x)=x^2-x+4$

$h(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x+4=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times4}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-16}}{2}$

Equação impossível

A função h não tem zeros.

48.4. $i(x)=2x^2+5x-3$

$i(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+5x-3=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times(-3)}}{2\times2} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4} \Leftrightarrow x=\frac{-5-7}{4} \vee x=\frac{-5+7}{4}$

$\Leftrightarrow x=-3 \vee x=\frac{1}{2}$

Zeros de i : -3 e $\frac{1}{2}$

49.

49.1. $f(x)=-x^2+2x+3=-(x^2-2x)+3$

$=-(x^2-2x+1-1)+3$ $\quad\left|(2:2)^2=1\right.$

$=-(x^2-2x+1)+1+3=-(x-1)^2+4$

$D'_f=]-\infty,4]$

49.2. $f(x)=-x^2+x+\frac{3}{4}=-(x^2-x)+\frac{3}{4}$

$=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}$ $\quad\left|(1:2)^2=\frac{1}{4}\right.$

$=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=-\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+1$

$D'_f=]-\infty,1]$

49.3. $f(x)=2x^2-12x+20=2(x^2-6x)+20$

$=2(x^2-6x+9-9)+20$ $\quad\left|(6:2)^2=9\right.$

$=2(x^2-6x+9)-18+20$

$=2(x-3)^2+2$

$D'_f=[2,+\infty[$

49.4. $f(x)=-8x^2-16x-\frac{13}{2}=-8(x^2+2x)-\frac{13}{2}$

$=-8(x^2+2x+1-1)-\frac{13}{2}$ $\quad\left|(2:2)^2=1\right.$

$=-8(x^2+2x+1)+8-\frac{13}{2}$

$=-8(x+1)^2+\frac{3}{2}$

$D'_f=\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$

50.

50.1. Mínimo absoluto: $-\frac{25}{12}$

50.2. $f(x)=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{12}=3\left(x^2-2x\times\frac{1}{6}+\frac{1}{36}\right)-\frac{25}{12}$

$=3\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right)-\frac{25}{12}=3x^2-x+\frac{1}{12}-\frac{25}{12}$

$=3x^2-x-2$

50.3. $f(x)=0 \Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{12}=0 \Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{25}{12}$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{25}{36} \Leftrightarrow x-\frac{1}{6}=\pm\sqrt{\frac{25}{36}}$

$\Leftrightarrow x-\frac{1}{6}=-\frac{5}{6} \vee x-\frac{1}{6}=\frac{5}{6} \Leftrightarrow x=-\frac{5}{6}+\frac{1}{6} \vee x=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{4}{6} \vee x=1 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3} \vee x=1$

Zeros de f : $-\frac{2}{3}$ e 1

Pág. 195

51.

51.1. $f(x)=3mx^2-(m+3)x+1, \quad m\neq 0$

$3m<0 \Leftrightarrow m<0$

$m\in\left]-\infty,0\right[$

51.2. $\Delta=0 \Leftrightarrow b^2-4ac=0$

$\Leftrightarrow \left[-(m+3)\right]^2-4\times 3m\times 1=0$

$\Leftrightarrow m^2+6m+9-12m=0 \Leftrightarrow m^2-6m+9=0$

$\Leftrightarrow (m-3)^2=0 \Leftrightarrow m-3=0 \Leftrightarrow m=3$

51.3. $A(1,\ 2)$

$2=3m\times 1^2-(m+3)\times 1+1 \Leftrightarrow 2=3m-m-3+1$

$\Leftrightarrow 4=2m \Leftrightarrow m=2$

51.4.

a) $f(x)=3x^2-4x+1$

$=3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)+1$ $\qquad \left(\frac{4}{3}:2\right)^2=\frac{4}{9}$

$=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)+1$

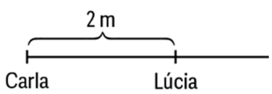
$=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{12}{9}+1$

$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$

b)

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$

52.



Carla: $f(t)=0{,}5t^2$

Lúcia: $g(t)=1{,}5t+2$

52.1. $f(t)=g(t) \Leftrightarrow 0{,}5t^2=1{,}5t+2$

$\Leftrightarrow 0{,}5t^2-1{,}5t-2=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{-(-1{,}5)\pm\sqrt{6{,}25}}{2\times 0{,}5}$ $\qquad \Delta=(-1{,}5)^2-4\times 0{,}5\times(-2)=6{,}25$

$\Leftrightarrow t=\frac{1{,}5\pm 2{,}5}{1}$

$\Leftrightarrow t=1{,}5-2{,}5 \ \vee\ t=1{,}5+2{,}5$

$\Leftrightarrow t=-1 \ \vee\ t=4$

Como $t>0$, $t=4$ segundos.

52.2. $g(4)=1{,}5\times 4+2=8$ m

$8\text{ m}-2\text{ m}=6\text{ m}$

A Lúcia percorreu 6 m.

53.

53.1. $P(x)=30\,000+x^2+130x$

$P(0)=30\,000$

O número de habitantes no início do estudo era 30 000.

53.2. 3 anos $=3\times 12=36$ meses

$P(36)=30\,000+36^2+130\times 36=35\,976$

Passados 3 anos o número de habitantes é 35 976.

53.3. $P(x)=33\,000 \Leftrightarrow 30\,000+x^2+130x=33\,000$

$\Leftrightarrow x^2+130x-3000=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-130\pm\sqrt{130^2-4\times 1\times(-3000)}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-130\pm\sqrt{16\,900+12\,000}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-130\pm\sqrt{28\,900}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-130-170}{2} \ \vee\ x=\frac{-130+170}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-300}{2} \ \vee\ x=\frac{40}{2}$

$\Leftrightarrow x=-150 \ \vee\ x=20$

Como $x>0$, $x=20$

Ao fim de 20 meses, a cidade tem 33 000 habitantes.

Pág. 196

54.

54.1. $a+b=-\frac{1}{6} \qquad a\times b=-\frac{1}{18}$

$x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{18}=0 \Leftrightarrow 18x^2+3x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 18\times(-1)}}{2\times 18}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+72}}{36} \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{81}}{36}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm 9}{36} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3} \vee x=\frac{1}{6}$

$a=-\frac{1}{3}$ e $b=\frac{1}{6}$ ou $a=\frac{1}{6}$ e $b=-\frac{1}{3}$

54.2. $a+b=\sqrt{2} \qquad a\times b=-4$

$x^2-\sqrt{2}x-4=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-(-\sqrt{2})\pm\sqrt{\sqrt{2}^2-4\times 1\times(-4)}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+16}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{18}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}\pm 3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{4\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 2\sqrt{2}$

$a = -\sqrt{2}$ e $b = 2\sqrt{2}$ ou $a = 2\sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{2}$

55.

55.1. *A*: $(x-2)^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - (2x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2-2x)(x-2+2x) = 0$

$\Leftrightarrow (-x-2)(3x-2) = 0$

B: $(x-4) - x(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(1-x) = 0$

C: $75 - 3(2-3x)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\left[25 - (2-3x)^2\right] = 0$

$\Leftrightarrow 3\left[5^2 - (2-3x)^2\right] = 0$

$\Leftrightarrow 3\left[5-(2-3x)\right]\left[5+(2-3x)\right] = 0$

$\Leftrightarrow 3(5-2+3x)(5+2-3x) = 0$

$\Leftrightarrow 3(3x+3)(-3x+7) = 0$

D: $x - x^2 - 2(1-x) = 0$

$\Leftrightarrow x(1-x) - 2(1-x) = 0$

$\Leftrightarrow (1-x)(x-2) = 0$

55.2. *A*: $(-x-2)(3x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$-x-2 = 0 \vee 3x-2 = 0 \Leftrightarrow$

$x = -2 \vee x = \frac{2}{3}$

$S = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$

$P = -2 \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$

B: $(x-4)(1-x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-4 = 0 \vee 1-x = 0$

$x = 4 \vee x = 1$

$S = 1 + 4 = 5$

$P = 1 \times 4 = 4$

C: $3(3x+3)(-3x+7) = 0$

$\Leftrightarrow 3x+3 = 0 \vee -3x+7 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{7}{3}$

$S = -1 + \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$

$P = -1 \times \frac{7}{3} = -\frac{7}{3}$

D: $(1-x)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow 1-x = 0 \vee x-2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

$S = 1 + 2 = 3$

$P = 1 \times 2 = 2$

56.

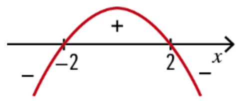
56.1 $4 - x^2 \le 0$

$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x = -2 \quad \vee \quad x = 2$

$a = -1 < 0$



$S = \left]-\infty\ ,\ -2\right] \cup \left[2\ ,\ +\infty\right[$

56.2 $x^2 - x - 6 < 0$

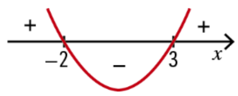
$x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)$
$= 25$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1-5}{2} \vee x = \frac{1+5}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$



$S = \left]-2\ ,\ 3\right[$

56.3 $9 \ge -x^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 \ge 0$

Condição universal

$S = \mathbb{R}$

57.

57.1.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 30 = 0$

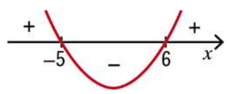
$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{121}}{2 \times 1}$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-30)$
$= 121$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 11}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1+11}{2} \vee x = \frac{1-11}{2} \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -5$

$a = 1 > 0$



$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ -5\right[\cup \left]6\ ,\ +\infty\right[$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-5\ ,\ 6\right[$

b) $f(x) > x - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 15 > x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 30 > 2x - 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 28 > 0$

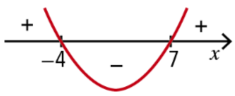
$x^2 - 3x - 28 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{121}}{2 \times 1}$ $\quad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-28) = 121$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 11}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 - 11}{2} \vee x = \frac{3 + 11}{2}$

$\Leftrightarrow x = -4 \quad \vee \quad x = 7$

$a = 1 > 0$



$S = \left]-\infty\ ,\ -4\right[\cup \left]7\ ,\ +\infty\right[$

57.2.

a) Abcissa do vértice: $\frac{-5 + 6}{2} = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2} - 15$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 15 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{120}{8} = -\frac{121}{8}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{121}{8}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x - 2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{121}{8} - 1$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{129}{8}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) - \frac{129}{8}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{8} - \frac{129}{8}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 13$$

b)

$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 15 \leq \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 13$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}x \leq -13 + 15$

$\Leftrightarrow 2x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$

$S = \left]-\infty\ ,\ 1\right]$

Pág. 197

58.

58.1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ $\quad x^2 = t$

$\Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2 \times 1}$ $\quad \Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 64$

$\Leftrightarrow t = \frac{10 \pm 8}{2} \Leftrightarrow t = 9 \vee t = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 9 \vee x^2 = 1$ $\quad x^2 = t$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \vee x = \pm\sqrt{1}$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = -1 \vee x = 1$

$S = \{-3\ ,\ -1\ ,\ 1\ ,\ 3\}$

58.2. $(x+1)(x-1)(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, por exemplo

58.3. $(x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$

59.

59.1. $f(x) = a(x - h)^2 + k$

$\frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}$

$f(x) = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + k$

$$\begin{matrix} (2\ ,\ 0) \\ (0\ ,\ -6) \end{matrix} \quad \begin{cases} 0 = a\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + k \\ -6 = a\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{25}{4}a + k \\ -6 = \frac{1}{4}a + k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{25}{4}a \\ -6 = \frac{1}{4}a - \frac{25}{4}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{25}{4}a \\ -6 = -6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{25}{4} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

59.2. $V\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{25}{4}\right)$

59.3. $-4 = \left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \Leftrightarrow -4 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow -4 = \frac{9}{4} - \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow -4 = -4 \quad (\text{V})$

O ponto $(-2\ ,\ 4)$ pertence à parábola que representa graficamente f.

59.4. $f(x)=(x+3)(x-2)=$

$=x^2-2x+3x-6=$

$=x^2+x-6$

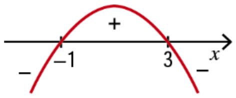
$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=$

$=x^2-2\times\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{25}{4}=x^2+x-6$

Pág. 198

60. $f(x)=a(x-h)^2+k$

Zeros de f: -1 e 3



Abcissa do vértice: $\frac{-1+3}{2}=1$ $\quad f(1)=5$

$f(x)=a(x-1)^2+5$

$(-1,\ 0)$ $\quad 0=a(-1-1)^2+5$

$\Leftrightarrow 0=4a+5;\ a=-\frac{5}{4}$

61. $f(x)=x^2-mx+1$

$\Delta=0\Leftrightarrow(-m)^2-4\times1\times1=0$

$\Leftrightarrow m^2-4=0$

$\Leftrightarrow m^2=4$

$\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow m=-2\ \vee\ m=2$

62. $f(x)=-x^2+bx-12$

$f(x)-5=0\Leftrightarrow -x^2+bx-12-5=0$

$\Leftrightarrow -x^2+bx-17=0$

$\Leftrightarrow -1^2+b\times1-17=0$

$\Leftrightarrow -1+b-17=0$

$\Leftrightarrow b=18$

63. $f(x)=g(x)=-x^2+3x+5=x^2-x-1$

$\Leftrightarrow -x^2-x^2+3x+x+5+1=0$

$\Leftrightarrow -2x^2+4x+6=0$

$\Leftrightarrow -x^2+2x+3=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\times(-1)}$ $\qquad \begin{array}{|l}\Delta=2^2-4\times(-1)\times3\\=16\end{array}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm4}{-2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-2-4}{-2}\vee x=\frac{-2+4}{-2}$

$\Leftrightarrow x=3\ \vee\ x=-1$

$g(3)=3^2-3-1=5$

$g(-1)=(-1)^2-(-1)-1=1$

$(3\ ,\ 5)$ $\quad (-1\ ,\ 1)$

$y=ax+b$

$a=\frac{1-5}{-1-3}=1$

$y=x+b$

$1=-1+b\Leftrightarrow b=2$

$y=x+2$

$h(x)=x+2$

64.

64.1. $(x-2)^2-4=mx-9\Leftrightarrow x^2-4x+4-4=mx-9$

$\Leftrightarrow x^2-4x-mx+9=0$

$\Leftrightarrow x^2+(-4-m)x+9=0$

$\Delta=0\Leftrightarrow(-4-m)^2-4\times1\times9=0$

$\Leftrightarrow(-4-m)^2-36=0$

$\Leftrightarrow(-4-m)^2=36$

$\Leftrightarrow -4-m=\pm\sqrt{36}$

$\Leftrightarrow -4-m=\pm6$

$\Leftrightarrow -4-m=-6\ \vee\ -4-m=6$

$\Leftrightarrow m=2\ \vee\ m=-10$

64.2. $m=2$

$(x-2)^2-4=2x-9\Leftrightarrow x^2-4x+4-4=2x-9$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9=0$

$\Leftrightarrow(x-3)^2=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$

$\Leftrightarrow x=3$

$y=2\times3-9=-3$

$(3\ ,\ -3)$

$m=-10$

$(x-2)^2-4=-10x-9\Leftrightarrow x^2-4x+4-4=-10x-9$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9=0\Leftrightarrow(x+3)=0$

$\Leftrightarrow(x+3)^2=0$

$\Leftrightarrow x+3=0$

$\Leftrightarrow x=-3$

$y=-10\times(-3)-9=21$

$(-3\ ,\ 21)$

Pág. 199

65.

65.1. $g(x) = x\,f(x) = x(x+1)$

Zero de f : -1

Zeros de g : -1 e 0

Verdadeira

65.2. $f(x) = g(x) = x+1 = x(x+1)$

$\Leftrightarrow \cancel{x}+1 = x^2+\cancel{x}$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1}$

$\Leftrightarrow x = -1 \;\vee\; x = 1$

Falsa

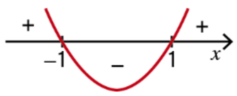
65.3. $f(x) \geq g(x) = x+1 \geq x(x+1)$

$\Leftrightarrow \cancel{x}+1 \geq x^2+\cancel{x}$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$



$S = [-1\,,\;1]$

Verdadeira

65.4. $g(x) = x(x+1)$

Zeros de g : -1 e 0

Abcissa do vértice: $\dfrac{-1+0}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}+1\right) = -\dfrac{1}{4}$

Verdadeira

66.

66.1. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{HG}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CH}} \Leftrightarrow \dfrac{12}{12-2x} = \dfrac{6}{\overline{CH}}$

$\Leftrightarrow 12\overline{CH} = 6(12-2x)$

$\Leftrightarrow \overline{CH} = \dfrac{1}{2}(12-2x)$

$\Leftrightarrow \overline{CH} = 6 - x$

$\overline{AH} = 6 - (6-x) = x$

C.A.

$\Delta = 80^2 - 4\times(-1)\times(-1500)$

$= 400$

$\dfrac{\overline{EF}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{EB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{EF}}{6} = \dfrac{x}{12}$

$12\overline{EF} = 6x$

$\Leftrightarrow \overline{EF} = \dfrac{1}{2}x$

66.2.

a) $A_{[ADGH]} = x(12-2x) = 12x - 2x^2$

b) $A_{[DEFI]} = x \times \dfrac{1}{2}x = \dfrac{x^2}{2}$

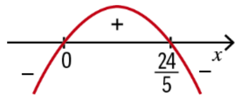
66.3. $12x - 2x^2 \geq \dfrac{x^2}{2} \Leftrightarrow 24x - 4x^2 \geq x^2$

$\Leftrightarrow -5x^2 + 24x \geq 0$

$-5x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow x(-5x+24) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; -5x + 24 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = \dfrac{24}{5}$



$S = \left]0\,,\;\dfrac{24}{5}\right]$

Pág. 200

67.

67.1. $h(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \dfrac{4x}{5} - \dfrac{1}{100}x^2 = 0$

$\Leftrightarrow 200 + 80x - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-80 \pm \sqrt{7200}}{2\times(-1)}$

$\Delta = 80^2 - 4\times(-1)\times 200$
$= 7200$

$\Leftrightarrow x \approx 82{,}43 \;\vee\; x \approx -2{,}43$

Como $d > 0$, $x \approx 82{,}43$ m .

67.2. Abcissa do vértice: $\dfrac{-2{,}43 + 82{,}43}{2} = 40$

$h(40) = 2 + \dfrac{4\times 40}{5} - \dfrac{1}{100}\times 40^2 = 18$

A altura máxima atingida pelo dardo foi 18 m.

67.3. $h(x) \geq 17 \Leftrightarrow 2 + \dfrac{4x}{5} - \dfrac{1}{100}x^2 \geq 17$

$\Leftrightarrow 200 + 80x - x^2 \geq 1700$

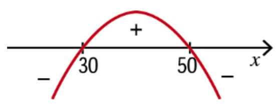
$\Leftrightarrow -x^2 + 80x - 1500 \geq 0$

$-x^2 + 80x - 1500 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-80 \pm \sqrt{400}}{2\times(-1)}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-80 \pm 20}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 50 \vee x = 30$



$x \in [30\,,\;50]$

$50 - 30 = 20$ metros

68.

68.1. $A_{[EFGH]} = 10^2 - 4 \times \frac{x(10-x)}{2}$

$= 100 - 2x(10-x)$

$= 100 - 20x + 2x^2$

$= 2x^2 - 20x + 100$

68.2. $2x^2 - 20x + 100 = 58 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 42 = 0$

$\Leftrightarrow x - 10x + 21 = 0$

c.a.
$\Delta = -(10)^2 - 4 \times 1 \times 21$
$= 16$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{16}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{10 \pm 4}{2}$

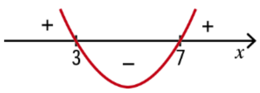
$\Leftrightarrow x = \frac{10-4}{2} \quad \vee \quad x = \frac{10+4}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = 7$

Se $x = 3$: $\overline{AE} = 10 - 3 = 7$ m

Se $x = 7$: $\overline{AE} = 10 - 7 = 3$ m

68.3.



Abcissa do vértice: $\frac{3+7}{2} = 5$

$\overline{AH} = x = 5$ m

Pág. 201

69.

69.1. $h(0) = -0,4 \times 0^2 + 2,4 \times 0 + 8 = 8$

A distância da prancha à água é 8 m .

69.2. $h(5) = -0,4 \times 5^2 + 2,4 \times 5 + 8 = 10$ m

Quando a atleta está a uma distância de 5 m , na horizontal, da extremidade da prancha, está a uma distância de 10 m da água.

69.3. $h(x) = -0,4x^2 + 2,4x + 8$

$= -0,4\left(x^2 - \frac{2,4}{0,4}x\right) + 8$

$= -0,4(x^2 - 6x) + 8 \qquad (6:2)^2 = 9$

$= -0,4(x^2 - 6x + 9 - 9) + 8$

$= -0,4(x^2 - 6x + 9) + 3,6 + 8$

$= -0,4(x-3)^2 + 11,6$

A distância máxima é 11,6 m .

69.4. $h(x) = 0 \Leftrightarrow -0,4(x-3)^2 + 11,6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = \frac{11,6}{0,4}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 29$

$\Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{29}$

$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{29} \vee x = 3 + \sqrt{29}$

$x \approx -2,39 \vee \approx 8,39$

Como $x > 0$, a distância é 8,39 m .

69.5. $h(x) = 10 \Leftrightarrow -0,4(x-3)^2 + 11,6 = 10$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = \frac{10 - 11,6}{-0,4}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x - 3 = -2 \vee x - 3 = 2$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

Quando a atleta se encontra a 10 m da água, está a 1 m ou a 5 m, na horizontal, da extremidade da linha da prancha

69.6. $h(x) > 5,2 \Leftrightarrow -0,4(x-3)^2 + 11,6 > 5,2$

$\Leftrightarrow -0,4(x-3)^2 + 11,6 - 5,2 > 0$

$\Leftrightarrow -0,4(x-3)^2 + 6,4 > 0$

$\Leftrightarrow -0,4(x-3)^2 + 6,4 = 0$

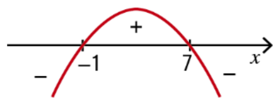
$\Leftrightarrow (x-3)^2 = \frac{-6,4}{-0,4}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 16$

$\Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{16}$

$\Leftrightarrow x - 3 = -4 \quad \vee \quad x - 3 = 4$

$\Leftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = 7$

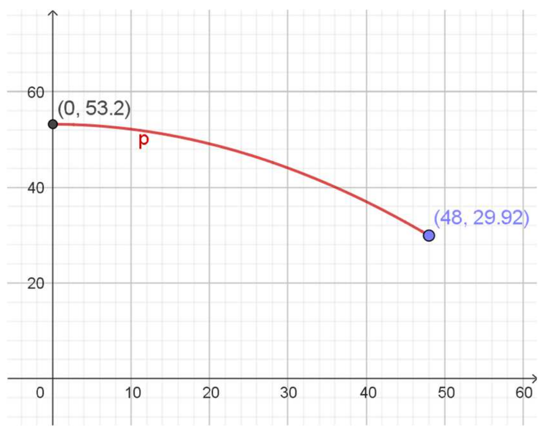


$x \in [0, 7[$

Quando a atleta está a uma distância superior a 5,2 m da água , a distância da mergulhadora, na horizontal, à extremidade da prancha é inferior a 7 m .

70.

70.1.



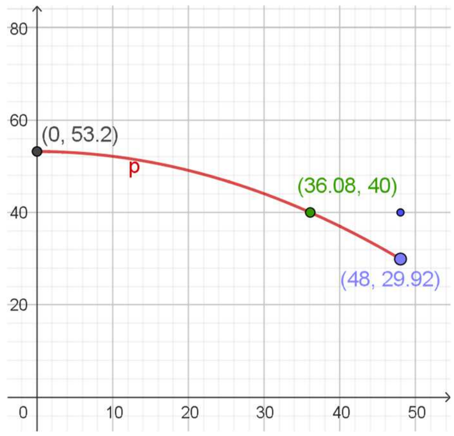
Máximo $= q(0) = 53{,}2$ mg/100 g

Mínimo $= q(48) = 29{,}9$ mg/100 g

$q(0)$ é a quantidade de vitamina C nas laranjas acabadas de colher.

$q(48)$ é a quantidade de vitamina C nas laranjas 48 h depois de serem colhidas.

70.2.



$q(x) > 40 \Leftrightarrow x > 36{,}08$ horas

Poderão passar no máximo 36 horas.

Pág. 202

71.

71.1. $\sqrt{1+f(0)} - f\left(\frac{3}{2}\right)$ $\qquad$ $f(0) = 3-0 = 3$

$= \sqrt{1+3} - \left(-\frac{7}{4}\right)$ $\qquad$ $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 - 4$

$= 2 + \frac{7}{4} = \frac{15}{4}$

71.2. $\left(x^2 - 4 \le 5 \wedge x > 1\right) \vee \left(3 - x \le 5 \wedge x \le 1\right)$

$\left(x^2 - 9 \le 0 \wedge x > 1\right) \vee \left(-x \le 2 \wedge x \le 1\right)$

$x \in \left([-3\ ,\ 3] \cap]1\ ,\ +\infty[\right) \vee \left(x \ge -2 \wedge x \le 1\right)$

$x \in]1\ ,\ 3] \cup [-2\ ,\ 1]$

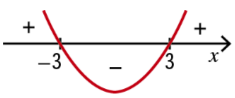
$x \in [-2\ ,\ 3]$

Cálculos auxiliares

$x^2 - 9 = 0$ $\qquad$ $x \ge -2 \wedge x \le 1$

$x^2 = 9$ $\qquad$ $x \in [-2\ ,\ 1]$

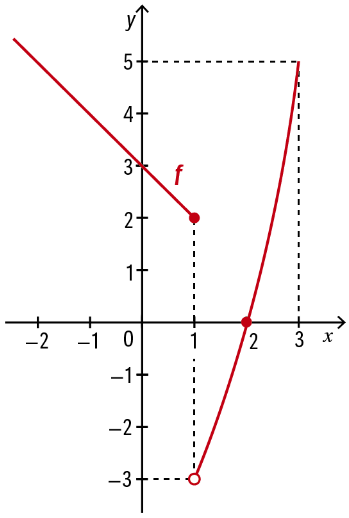
$x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$



71.3.

x	$y = x^2 - 4$
1	–3
2	0
3	5

x	$y = 3 - x$
0	3
1	2



72. $x < 0$ $\qquad (0\ ,\ 4) \qquad (-2\ ,\ 1)$

$a = \frac{1-4}{-2-0} = \frac{3}{2}$ e $b = 4$

$y = \frac{3}{2}x + 4$

$x > 0$

$V(2\ ,\ -4)\,; \qquad (0\ ,\ 0)\,; \qquad (4\ ,\ 0)$

$y = a(x-2)^2 - 4$

$0 = a(0-2)^2 - 4 \Leftrightarrow 0 = 4a - 4$

$\Leftrightarrow a = 1$

$y = (x-2)^2 - 4$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 4 & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ (x-2)^2 - 4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

73.

73.1. $0 \le x \le 600$

$(600\ ,\ 1000) \qquad (0\ ,\ -2500)$

$a = \frac{-2500 - 1000}{0 - 600} \Leftrightarrow a = \frac{35}{6}$

$b = -2500$

$y = \frac{35}{6}x - 2500$

$600 < x \le 800$

$(600\ ,\ 0) \qquad (800\ ,\ 2000)$

$a = \frac{2000 - 0}{800 - 600} \Leftrightarrow a = 10$

$y = 10x + b$

$a = 10 \times 600 + b$

$\Leftrightarrow b = -6000$

$y = 10x - 6000$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{35}{6}x - 2500 & \text{se } 0 \le x \le 600 \\ 10x - 6000 & \text{se } 600 < x \le 600 \end{cases}$$

73.2. $f(0) = -2500$

Significa o prejuízo da D. Joaquina se não fabricar qualquer doce.

73.3. $10x - 6000 > 1000 \Leftrightarrow 10x > 7000$

$\Leftrightarrow x > 700$

$700 < x \le 800$

A D. Joaquina tem de fazer entre 700 e 800 (inclusive) ovos doces.

73.4. 600 ovos

Pág. 203

74.

74.1.

a) Para $x \le 0$

$0{,}2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 20$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{20} \Leftrightarrow x = -\sqrt{20} \vee x = \sqrt{20}$

$-\sqrt{20} = -2\sqrt{5}$ é zero de f .

Para $x > 0$

$-2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ é zero de f .

Zeros de f : $-2\sqrt{5}$ e $\sqrt{2}$

b)

$f(\sqrt{2}) - f(-\sqrt{2}) = -2(\sqrt{2})^2 + 4 - \left[0{,}2(-\sqrt{2})^2 - 4\right]$

$= -2 \times 2 + 4 - (0{,}2 \times 2 - 4)$

$= -4 + 4 - (0{,}4 - 4) = 3{,}6$

74.2. $a < 0$

$f(a) - 2f(-a) = 0{,}2a^2 - 4 - 2\left(-2(-a)^2 + 4\right)$

$= 0{,}2a^2 - 4 - 2\left(-2a^2 + 4\right)$

$= 0{,}2a^2 - 4 + 4a^2 - 8$

$= 4{,}2a^2 - 12$

75.

75.1. 6 m

75.2. $-\frac{1}{8}(x-14)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-14)^2 = 16$

$\Leftrightarrow x - 14 = \pm\sqrt{16}$

$\Leftrightarrow x - 14 \pm 4$

$\Leftrightarrow x - 14 = -4 \quad \vee \quad x - 14 = 4$

$\Leftrightarrow x = 10 \quad \vee \quad x = 18$

A bola estava a 18 m .

75.3. $-\frac{1}{8}(x-14)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow (x-14)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 14$

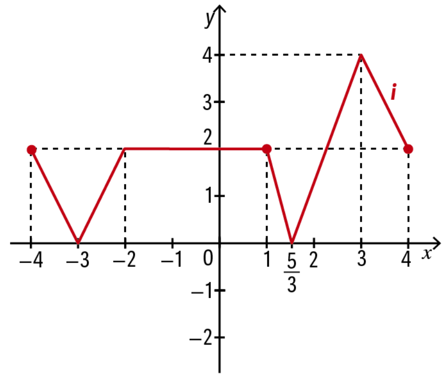
$20 - 14 = 6$ metros

O jogador estava a 6 metros de distância.

75.4. $h(20) = -\frac{1}{4}(20-20)^2 + 1 = 1$ metros

Pág. 204

76.



$D'_i = [0\ ,\ 4]$

77. $f(x) = -x^2 - 2x + 8$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0$

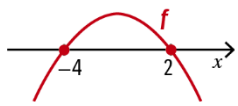
$\Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \times (-1)}$ $\quad \Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{2-6}{-2} \vee x = \frac{2+6}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -4$

Zeros de f : -4 e 2

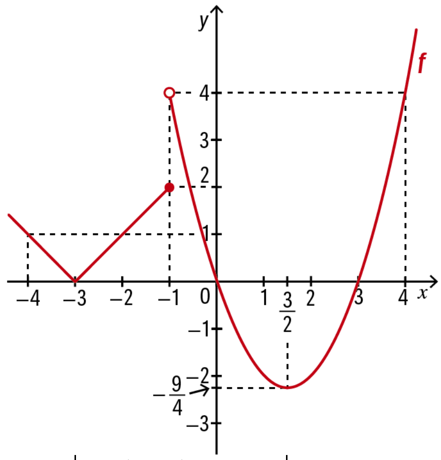
Zeros de g : -4 e 2



$D'_g = [0\ ,\ +\infty[= \mathbb{R}_0^+$

78.

78.1.



x	$y=\lvert x+3\rvert$
-4	1
-3	0
-1	2

x	$y=x^2-3x$
-1	4
4	4

$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=3$

Abcissa do vértice: $\frac{3}{2}$

Ordenada do vértice:

$\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}=-\frac{9}{4}$

78.2. $D'_f=\left[-\frac{9}{4}\ ,\ +\infty\right[$

79.

79.1. $f(x)=|x|+|x+1|$

$f_1(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$

$f_2(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{se } x-1\geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1<0\end{cases}$

$=\begin{cases} x-1 & \text{se } x\geq 1 \\ -x-1 & \text{se } x<1\end{cases}$

79.2.

x		0		1	
$\lvert x\rvert$	$-x$	0	x	1	x
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	1	$-x+1$	0	$x-1$
$f(x)$	$-2x+1$	1	1	1	$2x-1$

$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } 0\leq x\leq 1 \\ 2x-1 & \text{se } x>1\end{cases}$

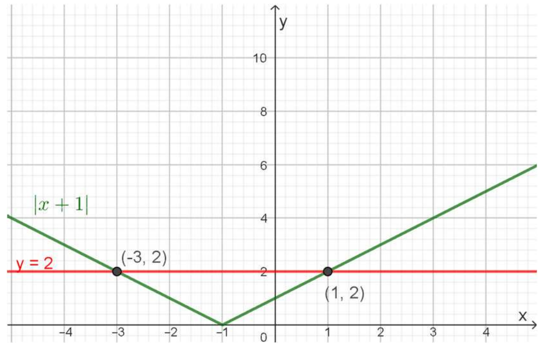
Pág. 205

80.

80.1. $|x+1|\geq 2 \Leftrightarrow x+1\geq 2 \ \vee\ x+1\leq -2$

$\Leftrightarrow x\geq 1 \ \vee\ x\leq -3$

$S=\left]-\infty\ ,\ -3\right]\cup\left[1\ ,\ +\infty\right[$



80.2. $|x^2-4|<5 \Leftrightarrow x^2-4<5 \ \wedge\ x^2-4>-5$

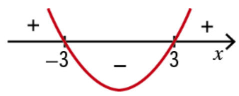
$\Leftrightarrow x^2-9<0 \wedge x^2+1>0$ $x^2+1>0$ é uma condição universal

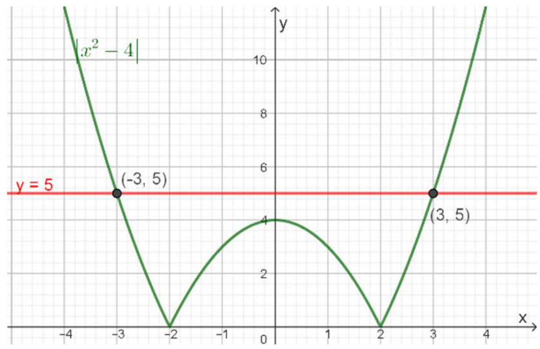
$S=\left]-3\ ,\ 3\right[$

Cálculos auxiliares

$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9$

$\Leftrightarrow x=-3 \ \vee\ x=3$





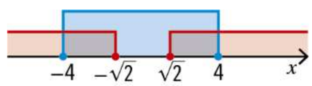
80.3. $|x^2-9|\leq 7 \Leftrightarrow x^2-9\leq 7 \ \wedge\ x^2-9\geq -7$

$\Leftrightarrow x^2-16\leq 0 \wedge x^2-2\geq 0$

$\Leftrightarrow x\in\left[-4\ ,\ 4\right]\cap\left(\left]-\infty\ ,\ -\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2}\ ,\ +\infty\right[\right)$

$x\in\left[-4\ ,\ -\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2}\ ,\ 4\right]$

$S=\left[-4\ ,\ -\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2}\ ,\ 4\right]$

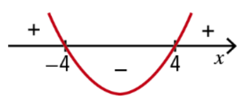


Cálculos auxiliares

$x^2-16=0$

$\Leftrightarrow x^2=16$

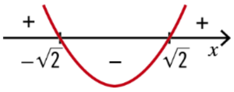
$\Leftrightarrow x=-4 \ \vee\ x=4$; $S_1=\left[-4\ ,\ 4\right]$



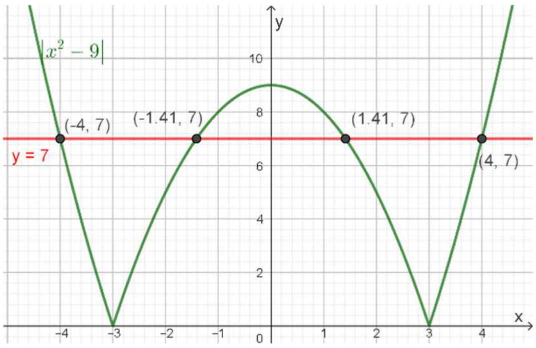
$x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \ \vee \ x = \sqrt{2}$



$S_2 = \left]-\infty \ , \ -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2} \ , \ +\infty\right[$



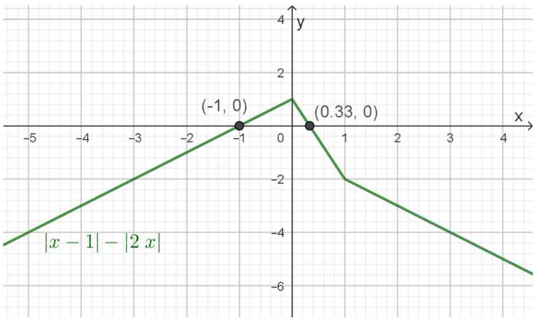
80.4. $|x-1| - |2x| = 0 \Leftrightarrow |x-1| = |2x|$

$\Leftrightarrow x - 1 = 2x \ \vee \ x - 1 = -2x$

$\Leftrightarrow x = -1 \ \vee \ x = \dfrac{1}{3}$

$S = \left\{-1 \ , \ \dfrac{1}{3}\right\}$

x	$f(x)$
-1	0
2	-3
5	0



80.5. $|2x| < |5x - 21| \Leftrightarrow |2x|^2 < |5x-21|^2$

$\Leftrightarrow (2x)^2 < (5x-21)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 < 25x^2 - 210x + 441$

$\Leftrightarrow -21x^2 + 210x - 441 < 0$

$\Leftrightarrow x < 3 \vee x > 7$

$S =]-\infty \ , \ 3[\cup]7 \ , \ +\infty[$

Cálculos auxiliares

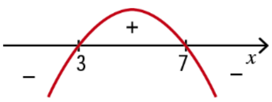
$-21x^2 + 210x - 441 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-210 \pm \sqrt{7056}}{2 \times (-21)}$

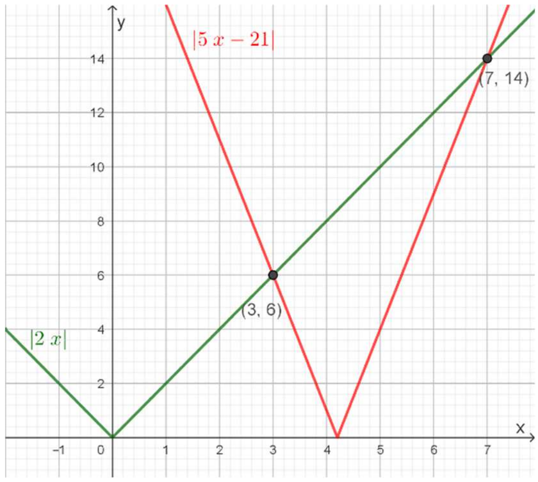
$\Delta = 210^2 - 4 \times (-21) \times (-441)$
$= 7056$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-210 \pm 84}{-42}$

$\Leftrightarrow x = 7 \ \vee \ x = 3$

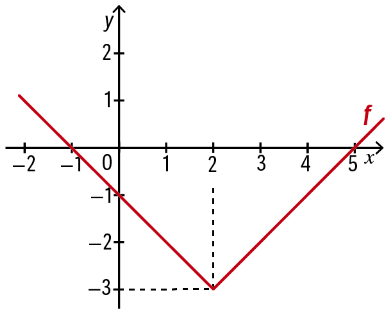


$S =]-\infty \ , \ 3[\cup]7 \ , \ +\infty[$



81.

81.1.



81.2.

a) Zeros de f: -1 e 5

b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	-3	↗

c) $D'_f = [-3 \ , \ +\infty[$

81.3.

a) $g(x) = f(x) - x = |2-x| - 3 - x$

$= \begin{cases} 2 - x - 3 - x & \text{se } 2 - x \geq 0 \\ -(2-x) - 3 - x & \text{se } 2 - x < 0 \end{cases}$

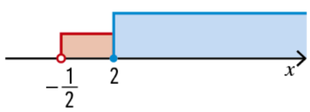
$= \begin{cases} -2x - 1 & \text{se } -x \geq -2 \\ -2 + x - 3 - x & \text{se } -x < -2 \end{cases} = \begin{cases} -2x - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ -5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) < x \Leftrightarrow f(x) - x < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0$

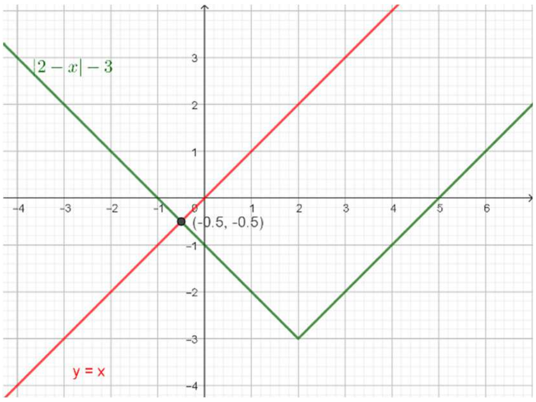
$\Leftrightarrow (-2x - 1 < 0 \wedge x \leq 2) \vee (-5 < 0 \wedge x > 2)$

$\Leftrightarrow (-2x < 1 \wedge x \leq 2)$ (V)

$\Leftrightarrow \left(x > -\dfrac{1}{2} \ \wedge \ x \leq 2\right)$



$S = \left]-\dfrac{1}{2}, 2\right] \cup]2, +\infty[= \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$



82.

82.1. $|x|+1\le k \Leftrightarrow |x|\le k+1$

$k+1<0 \Leftrightarrow k<-1$

$k\in]-\infty\ ,\ 1[$

82.2. $|x|\le k-1$

$k-1=0 \Leftrightarrow k=1$

82.3. $|x|\le k-1$

$k-1=5 \Leftrightarrow k=6$

Pág. 206

83.

83.1. $g(34{,}5)=-|34{,}5-26|+10=1{,}5$

$$g(t)=\begin{cases} 0 & \text{se } 0\le t<16 \\ -|t-26|+10 & \text{se } 16\le t\le 34{,}5 \\ 1{,}5 & \text{se } 34<t\le 45 \end{cases}$$

83.2. A prova durou 45 s .

83.3. $g(26)=-|26-26|+10=10$ m

83.4. $g(t)>8 \Leftrightarrow -|t-26|+10>8$

$\Leftrightarrow -|t-26|>-2 \Leftrightarrow |t-26|<2$

$\Leftrightarrow t-26<2 \ \wedge\ t-26>-2$

$\Leftrightarrow t<28 \ \wedge\ t>24$

$t\in]24\ ,\ 28[$

$28-24=4$ s

83.5. $g(t)=1{,}5 \Leftrightarrow -|t-26|+10=1{,}5$

$\Leftrightarrow -|t-26|=-8{,}5$

$\Leftrightarrow |t-26|=8{,}5$

$\Leftrightarrow t-26=8{,}5 \ \vee\ t-26=-8{,}5$

$\Leftrightarrow t=34{,}5 \ \vee\ t=17{,}5$

$t\in\{17{,}5\}\cup[34{,}5\ ;\ 45]$

83.6. $g(t)=6 \Leftrightarrow -|t-26|+10=6$

$\Leftrightarrow -|t-26|=-4 \Leftrightarrow |t-26|=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t-26=4 \ \vee\ t-26=-4$

$\Leftrightarrow t=30 \ \vee\ t=22$

$t\in[0\ ,\ 22]\cup[30\ ,\ 45]$

$22-0+45-30=37$

O atleta percorreu a parte da pista com uma altitude não superior a 6 m durante 37 segundos.

84. **(C)**

Pág. 207

85. $D'_{|f|}=[0\ ,\ 5]$

$D'_h=[0+2\ ,\ 5+2]=[2\ ,\ 7]$ **(B)**

86. $|x+3|\ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}|x+3|\le 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}|x+3|\le 0+1$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}|x+3|\le 1$

$\Leftrightarrow f(x)\le 1$

$D'_f=]-\infty\ ,\ 1]$ **(D)**

87.

87.1.

a) $f(x)=-1 \Leftrightarrow 1-2|x-3|=-1$

$\Leftrightarrow -2|x-3|=-2$

$\Leftrightarrow |x-3|=1$

$\Leftrightarrow x-3=1 \ \vee\ x-3=-1$

$\Leftrightarrow x=4 \ \vee\ x=2$

$S=\{2\ ,\ 4\}$

b) $f(x)\le -3 \Leftrightarrow 1-2|x-3|\le -3$

$\Leftrightarrow -2|x-3|\le -4$

$\Leftrightarrow 2|x-3|\ge 4$

$\Leftrightarrow |x-3|\ge 2$

$\Leftrightarrow x-3\ge 2 \ \vee\ x-3\le -2$

$\Leftrightarrow x\ge 5 \ \vee\ x\le 1$

$S=]-\infty\ ,\ 1]\cup[5\ ,\ +\infty[$

87.2.

a) $|x-3|\ge 0$

$\Leftrightarrow -2|x-3|\le 0$

$\Leftrightarrow 1-2|x-3|\le 1$

$\Leftrightarrow f(x)\le 1$

$D'_f=]-\infty\ ,\ 1]$

b) f é crescente em $]-\infty\ ,\ 3]$

f é decrescente em $[3\ ,\ +\infty[$

c) $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-2|x-3|=0$

$\Leftrightarrow -2|x-3|=-1$

$\Leftrightarrow |x-3|=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x-3=\frac{1}{2} \vee x-3=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=3+\frac{1}{2} \vee x=3-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{7}{2} \vee x=\frac{5}{2}$

Zeros de f : $\frac{5}{2}$ e $\frac{7}{2}$

88.

88.1. $g(-3)-g(2)=$

$|-3-1|-(3\times 2+5)$

$=|-4|-11$

$=4-11=-7$

88.2. $g(\underbrace{1+h}_{>1})-3g(\underbrace{1-h}_{<1})=$

$=3(1+h)+5-3|1-h-1|$

$=3+3h+5-3|h| \qquad |\, h>0$

$=3+3h+5-3h=8$

88.3. $(0\ ,\ 1)$

Pág. 208

Tarefas de aprofundamento

1. A velocidade aumenta dos 0 aos 50 m/s até cerca de 23 segundos após a saída da aeronave e depois mantém-se constante até cerca de 22 segundos $(45-23=22)$.

Quando abre o paraquedas (ao fim de 45 segundos) a velocidade diminui drasticamente para 5 m/s e assim se mantém até à chegada ao solo ao fim de 70 segundos.
Máximo absoluto: 50
Mínimo absoluto: 0
Máximos relativos: 50 e 5
Mínimos relativos: 0 , 50 e 5
Maximizantes: $[23\ ,\ 45]$ e $]52\ ,\ 70]$
Minimizantes: 0 , $]23\ ,\ 45]$ e $[52\ ,\ 70]$

v é crescente em $[0\ ,\ 23]$

v é decrescente em $[45\ ,\ 52]$

v é constante em $[23\ ,\ 45]$ e em $[52\ ,\ 70]$

Pág. 209

2.

2.1. $g=10$ m/s^2

$E_p\left(h_{(t)}\right)=0{,}058\times 10\times h(t)$

$E_p(t)=0{,}058\times 10\times\left[-5t(t-1)\right]$

$=0{,}58\left(-5t^2+5t\right)$

$=-2{,}9t^2+2{,}9t$

$=-2{,}9t(t-1)$

$E_p(t)=0 \Leftrightarrow -2{,}9t(t-1)=0$

$\Leftrightarrow t=0 \ \vee \ t=1$

abcissa do vértice: $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$

$0{,}5$ segundos após o ressalto.

2.2. $E_p(t)>0{,}696 \Leftrightarrow -2{,}9t^2+2{,}9t>0{,}696$

$\Leftrightarrow -2{,}9t^2+2{,}9t-0{,}696>0$

$\Leftrightarrow t=\frac{-2{,}9\pm\sqrt{8{,}41-8{,}0736}}{2\times(-2{,}9)}$

$\Leftrightarrow t=0{,}6 \ \vee \ t=0{,}4$

Entre os $0{,}4$ s e os $0{,}6$ s .

2.3. **(C)**

Pág. 210

Tarefas 1

1.

1.1. Passo 2 : Superior a 4 km

$1{,}50$ € / km

5 €

1.2.

a) 1) Distância

2) 5

b) Devolve, com duas casas decimais, o valor da distância $\times 1{,}5$.

c)

```
def custo(distancia):
  if distancia>4:
    return round(distancia*1.5,2)
  else:
    return 5
```

```
[ ] custo(2.2)
```

5

```
[ ] custo(1)
```

5

```
[ ] custo(4.1)
```

6.15

```
[ ] custo(3)
```

5

Pág. 211

2.

2.1. *d* , *e* , *c* , *g* , *b* , *f* , *a*

```
def modulo(x):
  if x<0:
    return -x
  else:
    return x
x=float(input("x="))
print("A imagem de ", x, " é: ",modulo(x))
```

```
x=-2.34
A imagem de  -2.34  é:  2.34
```

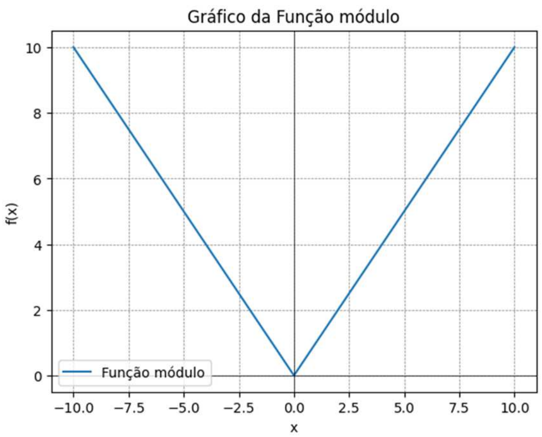
2.2.

a)

```
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
  if x<0:
    return -x
  else:
    return x

valores_x = [i for i in range(-10, 11)]
valores_y = [f(x) for x in valores_x]

plt.plot(valores_x, valores_y, label='Função módulo')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.title('Gráfico da Função módulo')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.legend()
plt.show()
```

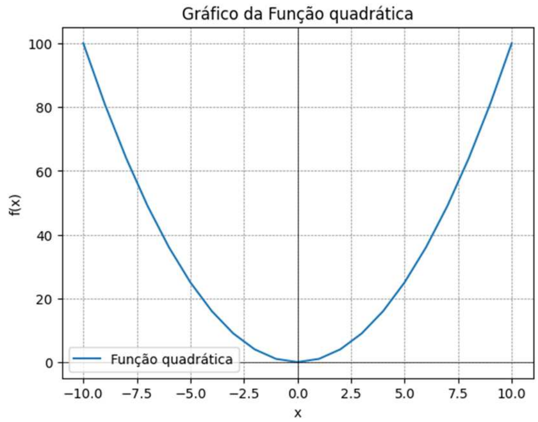


b)

```
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
  return x**2

valores_x = [i for i in range(-10, 11)]
valores_y = [f(x) for x in valores_x]

plt.plot(valores_x, valores_y, label='Função quadrática')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.title('Gráfico da Função quadrática')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.legend()
plt.show()
```



Pág. 212

Tarefa 2

1.

ERROS	CORREÇÃO
Delta $= b^2 + 4ac$	Delta $= b^2 - 4ac$
Delta > 0	Delta < 0

2.

a) Não tem soluções

b) Delta $= 0$

c) $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$

Pág. 213

3.

3.1. $x^2 - x - 6 = 0$

3.2. "A equação não é do 2.º grau!"

3.3 A primeira estrutura de condição distingue os procedimentos quando as equações são ou não do 2.º grau.

A segunda estrutura de condição distingue os procedimentos de acordo com o sinal do delta.

3.4.

```
import math
a=1
b=-1
c=-6
if a==0:
    print("A equação não é do 2.º grau!")
else:
    delta=b**2-4*a*c
    if delta<0:
        print("Não tem soluções")
    elif delta==0:
        x1=(-b)/(2*a)
        print('Tem só uma solução: ',x1)
    else:
        x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
        x2=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
        print('Tem 2 soluções: ',x1,' e ',x2)
```

```
Tem 2 soluções:  -2.0  e  3.0
```

3.5.

a) $2x^2+x-3=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2\times 2}$ $\quad \Delta = 5^2-4\times(-1)\times 6 = 49$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm 5}{4} \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2} \vee x=1$

$S=\left\{-\dfrac{3}{2}\ ,\ 1\right\}$

```
import math
a=2
b=1
c=-3
if a==0:
    print("A equação não é do 2.º grau!")
else:
    delta=b**2-4*a*c
    if delta<0:
        print("Não tem soluções")
    elif delta==0:
        x1=(-b)/(2*a)
        print('Tem só uma solução: ',x1)
    else:
        x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
        x2=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
        print('Tem 2 soluções: ',x1,' e ',x2

Tem 2 soluções:  -1.5  e  1.0
```

b) $(x-5)^2=0 \Leftrightarrow x-5=0$

$\Leftrightarrow x=5$

$S=\{5\}$

$(x-5)^2=x^2-10x+25$

```
import math
a=1
b=-10
c=25
if a==0:
    print("A equação não é do 2.º grau!")
else:
    delta=b**2-4*a*c
    if delta<0:
        print("Não tem soluções")
    elif delta==0:
        x1=(-b)/(2*a)
        print('Tem só uma solução: ',x1)
    else:
        x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
        x2=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
        print('Tem 2 soluções: ',x1,' e ',x2

Tem só uma solução:  5.0
```

3.6. O André pretende que os coeficientes a, b e c passem a ser inseridos quando se corre o programa.

```
import math
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
if a==0:
    print("A equação não é do 2.º grau!")
else:
    delta=b**2-4*a*c
    if delta<0:
        print("Não tem soluções")
    elif delta==0:
        x1=(-b)/(2*a)
        print('Tem só uma solução: ',x1)
    else:
        x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
        x2=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
        print('Tem 2 soluções: ',x1,' e ',x2)

a=1
b=-1
c=-6
Tem 2 soluções:  -2.0  e  3.0
```

Pág. 214

Avaliação global 1

1. **(D)**

2. **(A)**

3. $V(0{,}5\ ;\ -1{,}25)$

$V\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{4}\right)$

(D)

4. $A_{[ABCD]}=x^2$

$A_{[DEFG]}=(x+3)(x+2)=x^2+5x+6$

$x^2+5x+6>2x^2 \Leftrightarrow -x^2+5x+6>0$

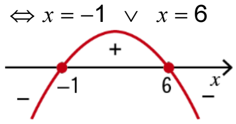
$\Leftrightarrow x\in\,]0\ ,\ 6[$

Cálculos auxiliares:

$-x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{49}}{2\times(-1)}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm 7}{-2}$

$\Leftrightarrow x=-1 \ \vee\ x=6$



$x\in\,]-1\ ,\ 6[\,\wedge x>0$

$x\in\,]0\ ,\ 6[$

(C)

Pág. 215

5. **(D)**

6. $h(2)+h\left(\sqrt{2}\right)-h\left(2\sqrt{2}\right)=$

$=3-2+\left(\sqrt{2}\right)^2-1-\left(3-2\sqrt{2}\right)$

$=\cancel{1}+2-\cancel{1}-3+2\sqrt{2}$

$=-1+2\sqrt{2}$

(D)

7. **(B)**

8. **(B)**

Pág. 216

Avaliação global 2

1.

1.1. $3-a>0\wedge-(a-1)<0\Leftrightarrow -a>-3\wedge -a+1<0$

$\Leftrightarrow a<3\wedge a>1$

$a\in\left]1\,,\ 3\right[$

1.2. $a=2$

a) $f(x)=x^2+2x-1$ $\quad\left|(2:2)^2=1\right.$

$=\left(x^2+2x+1\right)-1-1$

$=(x+1)^2-2$

$x=-1$

b) $f(x)<g(x)=x^2+2x-1<9-x$

$\Leftrightarrow x^2+3x-10<0$

$\Leftrightarrow x\in\left]-5\,,\ 2\right[$

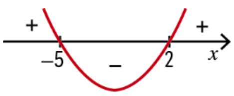
Cálculos auxiliares

$x^2+3x-10=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{49}}{2\times1}$ $\quad\left|\Delta=3^2-4\times1\times(-10)\right.$ $\left|=49\right.$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm7}{2}$

$\Leftrightarrow x=-5\vee x=2$



$S=\left]-5\,,\ 2\right[$

c) $k=2$

2. $P(x)\geq0\Leftrightarrow 200(15-x)(x-2)\geq0$

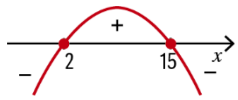
$\Leftrightarrow x\in[2\,,\ 15]$

Cálculos auxiliares

$200(15-x)(x-2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15-x=0\ \vee x-2=0$

$\Leftrightarrow x=15\ \ \vee\ \ x=2$



$P(x)\geq0\Leftrightarrow x\in[2\,,\ 15]$

3.

3.1. $A_{[AVB]}=1\Leftrightarrow\dfrac{\overline{AB}\times|y_V|}{2}-1$

$\Leftrightarrow \overline{AB}\times|-1|=2$

$\Leftrightarrow \overline{AB}=2$

$A(-3\,,\ 0)\qquad B(-1\,,\ 0)$

$(-1\,,\ 0)\qquad f(x)=a(x+2)^2-1$

$\Leftrightarrow 0=a(-1+2)^2-1$

$\Leftrightarrow 0=a-1\Leftrightarrow a=1$

3.2. $f(x)=(x+2)^2-1\qquad y=6x+b$

$(x+2)^2-1=6x+b\Leftrightarrow x^2+4x+4-1=6x+b$

$\Leftrightarrow x^2-2x+3-b=0$

$\Delta=0\Leftrightarrow(-2)^2-4\times1\times(3-b)=0$

$\Leftrightarrow 4-4(3-b)=0\Leftrightarrow 4-12+4b=0$

$\Leftrightarrow -8+4b=0\Leftrightarrow 4b=8\Leftrightarrow b=2$

$y=6x+2$

Pág. 217

4. $a(x)>2\Leftrightarrow -0{,}2x^2+1{,}2x+1>2$

$\Leftrightarrow -0{,}2x^2+1{,}2x-1>0\Leftrightarrow x\in\left]1\,,\ 5\right[$

A jogadora estava entre 1 m e 5 m da rede

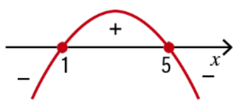
Cálculos auxiliares

$-0{,}2x^2+1{,}2x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1{,}2\pm\sqrt{0{,}64}}{2\times(-0{,}2)}$ $\quad\left|\Delta=1{,}2^2-4\times(-0{,}2)\times(-1)\right.$ $\left|=0{,}64\right.$

$\Leftrightarrow x=5\vee x=1$

$x\in\left]1\,,\ 5\right[$



5.

5.1. $(0\,,\ -1)\quad(0\,,\ 3)$

$a=\dfrac{3-(-1)}{2-0}=2$ e $b=3$

$y=2x-1$

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{se } x\le 0\\ 2x-1 & \text{se } 0<x\le 2\\ 3 & \text{se } x>2\end{cases}$$

5.2.

a) $f\left(\sqrt{5}\right)=3$

b) $f(x)=2 \Leftrightarrow 2x-1=2$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ $\qquad 0<\frac{3}{2}<2$

$S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

5.3.

a) f é decrescente em sentido lato em:

$]-\infty\ ,\ 0]$ e em $[2\ ,\ +\infty[$.

b) Máximos relativos de f: -1 e 3

Maximizantes: $]-\infty\ ,\ 0[$ e $[2\ ,\ +\infty[$

6.

6.1.

a) $f(x)=-5 \Leftrightarrow |-x+3|-4=-5$

$\Leftrightarrow |-x+3|=-1$ Equação impossível

$S=\varnothing$

b) $f(-x-1)=5 \Leftrightarrow |-(-x-1)+3|-4=5$

$\Leftrightarrow |x+1+3|=9 \Leftrightarrow |x+4|=9$

$\Leftrightarrow x+4=9 \ \vee\ x+4=-9$

$\Leftrightarrow x=5 \ \vee\ x=-13$

$S=\{-13\ ,\ 5\}$

6.2.

a) $|-x+3|\ge 0$

$\Leftrightarrow |-x+3|-4\ge 0-4$

$\Leftrightarrow f(x)\ge -4$

$D'_f=[-4\ ,\ +\infty[$

b) $f(x)=|-x+3|-4$

$f(x)=|x-3|-4$

f é decrescente em $]-\infty\ ,\ 3]$

f é crescente em $[3\ ,\ +\infty[$

c) $f(x)=0 \Leftrightarrow |-x+3|-4=0$

$\Leftrightarrow |-x+3|=4$

$\Leftrightarrow -x+3=4 \ \vee\ -x+3=-4$

$\Leftrightarrow -x=1 \ \vee\ -x=-7$

$\Leftrightarrow x=-1 \ \vee\ x=7$

Zeros de f: -1 e 7

Pág. 218

Questões tipo exame

1.

1.1. f: $(700\ ,\ 10)$ $(100\ ,\ 50)$

$a=\frac{50-10}{100-700}=-\frac{1}{15}$

$y=-\frac{1}{15}x+b$

$10=-\frac{1}{15}\times 700+b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 150=-700+15b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=\frac{850}{15}$

$\Leftrightarrow b=\frac{170}{3}$

$y=-\frac{1}{15}x+\frac{170}{3}$

$f(x)=-\frac{1}{15}x+\frac{170}{3}$

g : $(150\ ,\ 10)$ $\qquad (650\ ,\ 50)$

$a=\frac{50-10}{650-150}=\frac{2}{25}$

$y=\frac{2}{25}x+b$

$50=\frac{2}{25}\times 650+b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1250=1300+25b$

$\Leftrightarrow b=-2$

$y=\frac{2}{25}x-2$

$g(x)=\frac{2}{25}x-2$

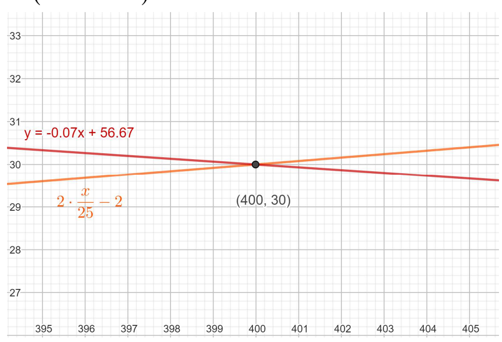
1.2. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow -\underset{(\times 5)}{\frac{1}{15}}x+\underset{(\times 25)}{\frac{170}{3}}=\underset{(\times 3)}{\frac{2}{25}}x-\underset{(\times 75)}{2}$

$\Leftrightarrow -5x+4250=6x-150$

$\Leftrightarrow -11x=-4400$

$g(400)=\frac{2}{25}\times 400-2=30$

$E(400\ ,\ 30)$



1.3. f_1 : $(200\ ,\ 50)$ $\quad$ $(800\ ,\ 10)$

$y = -\frac{1}{15}x + b$

$50 = -\frac{1}{15} \times 200 + b \Leftrightarrow 750 = -200 + 15b$

$\Leftrightarrow 950 = 15b$

$\Leftrightarrow b = \frac{190}{3}$

$y = -\frac{1}{15}x + \frac{190}{3}$

$f_1(x) = -\frac{1}{15}x + \frac{190}{3}$

$g(x) = f_1(x) \Leftrightarrow \underset{(\times 3)}{\frac{2}{25}}x - \underset{(\times 75)}{2} = -\underset{(\times 5)}{\frac{1}{15}}x + \underset{(\times 25)}{\frac{190}{3}}$

$\Leftrightarrow 6x - 150 = -5x + 4750$

$\Leftrightarrow 11x = 4900$

$\Leftrightarrow x = \frac{4900}{11}$

$g\left(\frac{4900}{11}\right) = \frac{2}{25} \times \frac{4900}{11} - 2 = \frac{9800}{275} - 2 = \frac{370}{11}$

$E_1\left(\frac{4900}{11}\ ,\ \frac{370}{11}\right)$

1.4. $f_2(x) = g(x) \Leftrightarrow -\underset{(\times 5)}{\frac{1}{15}}x + \underset{(\times 25)}{\frac{190}{3}} + \underset{(\times 75)}{k} = \underset{(\times 3)}{\frac{2}{25}}x - \underset{(\times 75)}{2}$

$\Leftrightarrow -5x + 4750 + 75k = 6x - 150$

$\Leftrightarrow -11x = -4900 - 75k$

$\Leftrightarrow x = \frac{4900}{11} + \frac{75}{11}k$

com $k \in \mathbb{R}^+$, o gráfico de f_2 obtém-se do gráfico de f_1 deslocando-o k unidades na vertical para cima. Assim, para não existir ponto de equilíbrio entre a procura e a oferta $x > 650$.

$x > 650 \Leftrightarrow \frac{4900}{11} + \frac{75}{11}k > 650 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4900 + 75k > 7150$

$\Leftrightarrow 75k > 2250$

$\Leftrightarrow k > 30$

Pág. 219

2.

2.1. $f(x) = a(x-0)(x-4)$

$f(x) = ax(x-4)$

$5 = a(-1)(-1-4) \Leftrightarrow 5 = a \times 5 \Leftrightarrow a = 1$

$f(x) = x^2 - 4x$

Abcissa do vértice: $\frac{0+4}{2} = 2$

$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 = -4$

$f(x) = (x-2)^2 - 4$

2.2. $f(x) \geq 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x \geq 5$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty\ ,\ -1] \cup [5\ ,\ +\infty[$

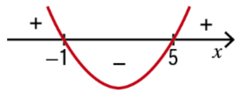
Cálculos auxiliares

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4+6}{2} \ \vee\ x = \frac{4-6}{2}$

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$



$S =]-\infty\ ,\ -1] \cup [5\ ,\ +\infty[$

2.3.

a) $D'_g = [-2\ ,\ +\infty[$

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + f(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2 + (x-1-2)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2 + (x-3)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 2$

$\Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt{2} \ \vee\ x - 3 = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{2} \ \vee\ x = 3 + \sqrt{2}$

Zeros de g : $3 - \sqrt{2}$ e $3 + \sqrt{2}$

3.

3.1. $f(x) \geq -4\left(x - \frac{13}{2}\right) \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 \geq -4x + 26$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \geq 0$

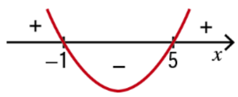
$x \in]-\infty\ ,\ -1] \cup [5\ ,\ +\infty[$

Cálculos auxiliares

$x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 6}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$

$S =]-\infty\ ,\ -1] \cup [5\ ,\ +\infty[$



3.2.

a) $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$

$= 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 16$

$|(6:2)^2 = 9$

$= 2(x^2 - 6x + 9) - 18 + 16 = 2(x+3)^2 - 2$

$C(3\ ,\ -2)$

b) Zeros de f :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-3)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x - 3 = -1 \vee x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$

$A(2\ ,\ 0)$ $\quad$ $B(4\ ,\ 0)$ $\quad$ $C(2\ ,\ -2)$

$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{AD}$

$= \frac{2+1}{2} \times 2 = 3$ u.a.

Pág. 220

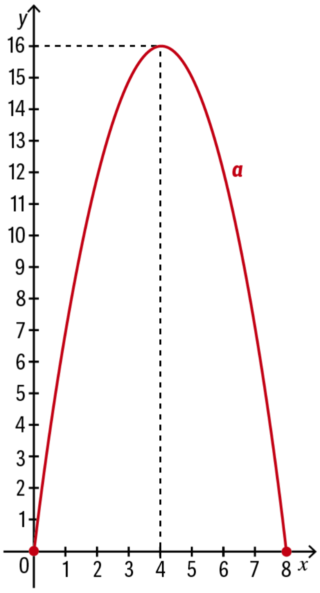
4. $\overline{OA} = x$

$\overline{AP} = f(x) = 16 - 2x$

$A_{[OAP]} = \dfrac{x \times f(x)}{2} = \dfrac{x(16-2x)}{2} = \dfrac{16 - 2x^2}{2} = -x^2 + 8x$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 16 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$

$x \in \left]0\ ,\ 8\right[$



A área máxima do triângulo é 16 u. a.

5. $\overline{OA} = x$

$\overline{AP} = g(x) = 20 + 8x - x^2$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x + 20 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{144}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-8+12}{-2} \ \vee \ x = \dfrac{-8-12}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -1 \ \vee \ x = 10$

$\overline{AB} = 10 - x$

$A_{[ABCP]} = (10 - x) \times g(x)$

$= (10 - x) \times (20 + 8x - x^2)$

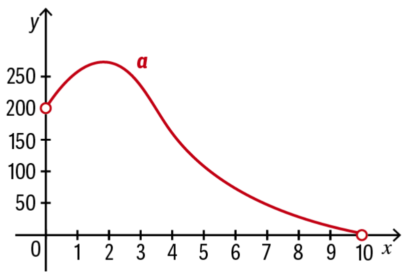
$= 200 + 80x - 10x^2 - 20x - 8x^2 + x^3$

$= x^3 - 18x^2 + 60x + 200\ ,\ \ x \in \left]0\ ,\ 10\right[$

$a(x) = x^3 - 18x^2 + 60x + 200$

$V(2\ ,\ 256)$

$x = 2$



$P_{[ABCP]} = 2(10-2) + 2g(2)$

$= 2 \times 8 + 2(20 + 8 \times 2 - 2^2)$

$= 16 + 2 \times 32$

$= 80$ u.c.

x	$a(x)$
0	200
2	556
10	0

Pág. 221

6.

6.1. $(-4\ ,\ 1)$ $\qquad (-6\ ,\ -2)$

$a = \dfrac{-2-1}{-6-(-4)} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{3}{2}x + b$

$1 = \dfrac{3}{2}(-4) + b \Leftrightarrow 1 = -6 + b \Leftrightarrow b = 7$

$y = \dfrac{3}{2}x + 7$

$y = a(x-h)^2 + k \qquad V(0\ ,\ -2)$

$y = ax^2 - 2 \qquad (-2\ ,\ 0) \quad (2\ ,\ 0)$

$0 = a(-2)^2 - 2 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$

$y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x + 7 & \text{se } x < -3 \\ -4 & \text{se } x = -3 \\ \dfrac{1}{2}x^2 - 2 & \text{se } x > -3 \end{cases}$$

6.2. $\dfrac{3}{2}x + 7 = 0 \wedge x < -3$

$3x = -14 \wedge x < -3$

$x = \dfrac{-14}{3} \wedge x < -3$

Zeros de f : $-\dfrac{14}{3}$, 2 e 2

Zeros de g : $-\dfrac{14}{3} + 1 = -\dfrac{11}{3}$

$-2 + 1 = -1 \qquad 2 + 1 = 3$

6.3. $\left]-2\ ,\ 0\right]$

7.

7.1.

$$g(x) = \begin{cases} -(x-1) + 3 & \text{se } x - 1 \geq 0 \ \wedge \ x \in [-5\ ,\ 5] \\ -[-(x-1)] + 3 & \text{se } x - 1 < 0 \ \wedge \ x \in [-5\ ,\ 5] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x + 1 + 3 & \text{se } x \geq 1 \ \wedge \ x \in [-5\ ,\ 5] \\ x - 1 + 3 & \text{se } x < 1 \ \wedge \ x \in [-5\ ,\ 5] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x + 4 & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ x + 2 & \text{se } -5 \leq x < 1 \end{cases}$$

7.2.

a) $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow -|x-1| \leq 0$

$\Leftrightarrow -|x-1|+3 \leq 3$

$\Leftrightarrow g(x) \leq 3$

$g(-5) = -|-5-1|+3 = -6+3 = -3$

$g(5) = -|5-1|+3 = -4+3 = -1$

$D'_g = [-3\ ,\ 3]$

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow -|x-1|+3 = 0$

$\Leftrightarrow |x-1| = 3$

$\Leftrightarrow x-1 = 3 \ \vee\ x-1 = -3$

$\Leftrightarrow x = 4 \ \vee\ x = -2$

Zeros de g : -2 e 4

c) g é crescente em : $[-5\ ,\ 1]$

g é decrescente em : $[1\ ,\ 5]$

7.3. $g(x) < 0 \Leftrightarrow -|x-1|+2 < 0$

$\Leftrightarrow -|x-1| < -3$

$\Leftrightarrow |x-1| > 3$

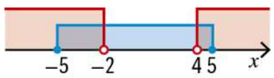
$\Leftrightarrow x-1 > 3 \ \vee x-1 < -3$

$\Leftrightarrow x > 4 \vee x < -2$

c.a.

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 18$

$= 9$



$S = [-5\ ,\ -2[\cup]4\ ,\ 5]$

7.4. $f(x) = a|x-2|$

$(0\ ,\ 2)$

$2 = a|0-2| \Leftrightarrow 2 = 2a$

$\Leftrightarrow a = 1$

$f(x) = |x-2|$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0 \ \vee\ x = 3$

$S = \{0\ ,\ 3\}$

Pág. 223

Problema

1. $A_{[EFGH]} = A_{[ABCD]} - 2 \times A_{[FBG]} - 2 \times A_{[AFE]}$

$= 10 \times 8 - 2 \times \dfrac{x(8-x)}{2} - 2 \times \dfrac{x(10-x)}{2}$

$= 80 - x(8-x) - x(10-x)$

$= 80 - 8x + x^2 - 10x + x^2$

$= 2x^2 - 18x + 80 \qquad 0 \leq x \leq 8$

2. $A(0) = 2 \times 0^2 - 18 \times 0 + 80 = 80$

Quando $x = 0$, a área do quadrilátero $[EFGH]$ coincide com a área do retângulo $[ABCD]$.

3. $A(x) = 2x^2 - 18x + 80$

$= 2(x^2 - 9x) + 80 \qquad (9:2)^2 = \dfrac{81}{4}$

$= 2\left(x^2 - 9x + \dfrac{81}{4} - \dfrac{81}{4}\right) + 80$

$= 2\left(x^2 - 9x + \dfrac{81}{4}\right) - \dfrac{81}{2} + 80$

$= 2\left(x - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \dfrac{79}{2}$

Área mínima: $\dfrac{79}{2}$ para $x = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$

$\overline{FB} = 4{,}5$

$\overline{BG} = 8 - 4{,}5 = 3{,}5$

$\overline{FG}^2 = 4{,}5^2 + 3{,}5^2 \Leftrightarrow \overline{FG}^2 = 32{,}5$

$\Leftrightarrow \overline{FG} = \sqrt{32{,}5}$

$\overline{AF} = 10 - 4{,}5 = 5{,}5$

$\overline{EF}^2 = 4{,}5^2 + 5{,}5^2 \Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 50{,}5$

$\Leftrightarrow \overline{EF} = \sqrt{50{,}5}$

$P = 2\sqrt{32{,}5} + 2\sqrt{50{,}5} = \sqrt{130} + \sqrt{202}$ cm

4. $A(x) = 44 \Leftrightarrow 2x^2 - 18x + 80 = 44$

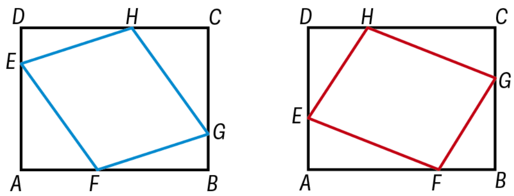
$\Leftrightarrow 2x^2 - 18x + 36 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-(-9) \pm \sqrt{9}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{9 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow x = 6 \ \vee\ x = 3$



Os quadriláteros obtidos têm de área $44\ \text{cm}^2$.

Pág. 225

Tarefa 2