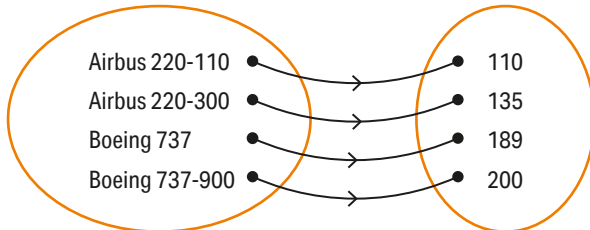


Funções

Vamos recordar

Ficha 1 Representações de funções

1.1.



1.2. A correspondência é uma função, porque a cada tipo de avião associa um e só um número de lugares.

1.3. $D = \{\text{Airbus 220-110, Airbus 220-300, Boeing 737, Boeing 737-900}\}$
 $D' = \{110, 135, 189, 200\}$

2.1. $D = \{1, 2, 3, 4\}$
 $D' = \{-3, 0, 3, 6\}$

2.2.

x	1	2	3	4
$f(x)$	6	3	0	-3

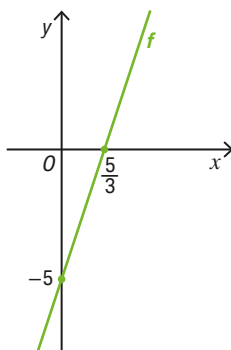
2.3. $f(x) = -3x + 9$

3.1. $f(2) = 3 \times 2 - 5 = 1$

3.2. Determinar a imagem de 3 é calcular $f(3) = 3 \times 3 - 5 = 4$.

3.3. $3x - 5 = -5 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 O objeto cuja imagem é -5 é 0 (zero).

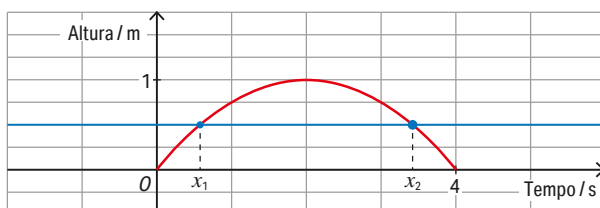
3.4.



4.1. O tempo varia entre 0 e 4 s. A altura varia entre 0 e 1 m.

4.2. Por exemplo, nos instantes 1 s e 3 s a bola está à mesma altura.

4.3.



Nos instantes x_1 e x_2 , a bola encontra-se a meio metro do chão.

Ficha 3 Função afim

pág. 30

MMATOCAD © Porto Editora

- 1.1.** Temos que verificar que a imagem de 1 pela função h é 4. $h(1) = 1 + 3 = 4$
- 1.2.** Como $(1, 4)$ pertence ao gráfico de f , temos que $f(1) = 4$:
 $2 \times 1 + b = 4 \Leftrightarrow b = 4 - 2 \Leftrightarrow b = 2$
- 1.3.** Como $(1, 4)$ pertence ao gráfico de h e de f , também tem de pertencer ao gráfico de g .
 Temos $g(1) = 4$ e, por substituição, obtemos $a \times 1 - 2 = 4 \Leftrightarrow a = 4 + 2 \Leftrightarrow a = 6$.
- 2.1.** Como g é uma função afim, é definida por uma expressão do tipo $g(x) = ax + b$, em que a é o declive da reta que a representa e b a ordenada na origem.

$$a = \frac{-1 - (-7)}{1 - (-1)} = 3. \text{ Logo, } g(x) = 3x + b.$$

$$\text{Utilizando a condição } g(1) = -1 \Leftrightarrow 3 \times 1 + b = -1 \Leftrightarrow b = -1 - 3 \Leftrightarrow b = -4.$$

$$g(x) = 3x - 4$$

2.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

- 3.1.** Como a ordenada de A é o dobro da abcissa de B , temos que $y_A = 2x_B$.

A área do triângulo $[OAB]$ é $\frac{x_B \times y_A}{2}$, pois a abcissa e a ordenada são positivas.

$$\text{Substituindo, obtemos a condição } \frac{x_B \times 2x_B}{2} = 4 \Leftrightarrow x_B^2 = 4 \Leftrightarrow x_B = \pm 2.$$

Como a abcissa é positiva, temos que $x_B = 2$ e $y_A = 4$.

As coordenadas são, respetivamente, $A(0, 4)$ e $B(2, 0)$.

- 3.2.** Como o gráfico é uma reta não vertical, a função pode ser expressa por $f(x) = ax + b$, em que a é o declive da reta e b a ordenada na origem.

$$a = \frac{0 - 4}{2 - 0} = -2 \text{ e } b = 4. \text{ Logo, } f(x) = -2x + 4.$$

pág. 31

3.3.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-
	↘		

4.1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$; $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

4.2. $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x - 3 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 8x - 12 = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 8x - x = 12 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 7x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \times 2 - 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

As coordenadas de I são $(2, 1)$.

- 4.3.** As coordenadas de I são $(2, 1)$, de $G(0, -3)$ e de $H(0, \frac{1}{2})$.

$$\text{Base: } \overline{GH} = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}; \text{ altura: } 2. \text{ A área de } [GHI] \text{ é } \frac{\frac{7}{2} \times 2}{2} = \frac{7}{2} \text{ (u. a.)}$$

- 5.1.** Com o eixo Oy : $f(0) = \frac{5 - 3 \times 0}{2} = \frac{5}{2}$. As coordenadas são $(0, \frac{5}{2})$.

$$\text{Com o eixo } Ox: f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 3x}{2} = 0 \Leftrightarrow 5 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}. \text{ As coordenadas são } (\frac{5}{3}, 0).$$

- 5.2. a) $a = -\frac{3}{2}$
 b) $a = 1$ (por exemplo)
 c) $a = 0$
- 6.1. $f(x) = kx + k^2 - 6$; f é uma função definida por uma expressão do tipo $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, sendo $a = k$ e $b = k^2 - 6$.
- 6.2. a) $f(1) = 0 \Leftrightarrow k \times 1 + k^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow k^2 + k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \vee k = 2$
 b) A função afim é decrescente se e só se o coeficiente de x é negativo. Logo, $k = -3$.

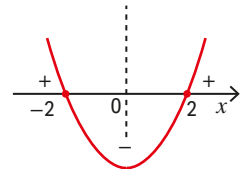
Ficha 4 Função quadrática

pág. 32

- 1.1. $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$
- 1.2. $h(x) = 3f(x)$
- 1.3. $i(x) = f(x - 1) - 2$
- 1.4. $j(x) = -f(x + 1) + 3$
- 2.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Os zeros de f são -2 e 2 .

2.2.

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$



- 2.3. $(0, -8)$; $x = 0$

2.4.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	\searrow	-8	\nearrow

- 2.5. $D_f = [-8; +\infty[$
- 2.6. (C)
 $h(x) = -(2x^2 - 8) + 1 = -2x^2 + 8 + 1 = -2x^2 + 9$, logo $D_h =]-\infty, 9]$.

pág. 33

3.1. e 3.2.

	Vértice	Eixo	Zeros	Concavidade	Monotonia	Extremo	Contradomínio
3.1.	$V\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Para cima	Decrescente em $]-\infty, \frac{1}{2}]$ e crescente em $[\frac{1}{2}, +\infty[$	0 (mínimo)	$[0, +\infty[$
3.2.	$V(-3, -1)$	$x = -3$	Não tem	Para baixo	Crescente em $]-\infty, -3]$ e decrescente em $[-3, +\infty[$	-1 (máximo)	$]-\infty, -1]$

- 4.1. $f(x) = a(x - h)^2 + k$ e $h = \frac{-1 + 3}{2} = 1$; Assim, $f(x) = a(x - 1)^2 + k$.
 $f(-1) = 0 \wedge f(2) = 6 \Leftrightarrow 4a + k = 0 \wedge a + k = 6 \Leftrightarrow a = -2 \wedge k = 8$; $f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$
- 4.2. $D_f =]-\infty, 8]$
- 4.3. f é crescente em $]-\infty, 1]$ e é decrescente em $[1, +\infty[$.
- 5.1. $f(x) = a(x - 1)^2 + 2$
 $f(2) = 0$
 $a(2 - 1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$
 $f(x) = -2(x - 1)^2 + 2$

5.2. $g(x) = a(x - 1)^2 - 4$
 $g(3) = 0$
 $a(3 - 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$
 $g(x) = (x - 1)^2 - 4$

5.3. Abcissa do vértice: $\frac{0+4}{2} = 2$
 $h(x) = a(x - 2)^2 + k$
 $h(-2) = 0 \wedge h(0) = -3$
 $16a + k = 0 \wedge 4a + k = -3$
 $a = \frac{1}{4} \wedge k = -4$
 $h(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 4$

5.4. Abcissa do vértice: $\frac{-2+4}{2} = 1$
 $i(x) = a(x - 1)^2 + k$
 $i(-2) = -1 \wedge i(0) = 3$
 $9a + k = -1 \wedge a + k = 3$
 $a = -\frac{1}{2} \wedge k = \frac{7}{2}$
 $i(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{7}{2}$

6.1. $g(x) = -2(x - 1)^2 + 2, V(1, 2)$
 $D'_g =]-\infty, 2]$; Zeros: 0 e 2

6.2. $f(x) = 3(x - 2)^2 - 3; V(2, -3)$
 $D'_f = [-3, +\infty[$; Zeros: 1 e 3

7.1. $g(x) = 10 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$
 O eixo de simetria tem equação $x = 2$.

7.2. $g(2) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 + 10 = 18$
 $D'_g =]-\infty, 18]$

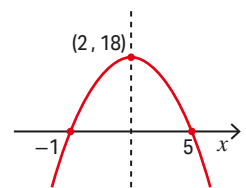
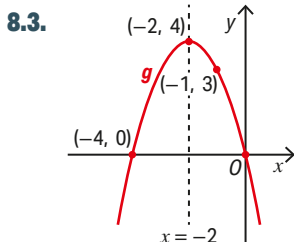
7.3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow -2(x - 2)^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$
 A função g é crescente e positiva em $]-1, 2]$.

8.1. Os zeros de g são -4 e 0 .

8.2. Como $x = -2$ é eixo de simetria, a abcissa do vértice é -2 .
 Podemos escrever $g(x) = a(x + 2)^2 + k$.

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + k = 0 \\ a + k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 3 - a = 0 \\ k = 3 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ k = 4 \end{cases}$$

Logo, $g(x) = -(x + 2)^2 + 4$.



8.4. O gráfico de g tem concavidade voltada para baixo, $D'_g =]-\infty, 4]$.

8.5. A função é crescente e negativa em $]-\infty, -4]$.

9.1. $h(0) = -4,9 \times 0^2 + 29,4 \times 0 + 0,9 = 0,9$; O projétil foi lançado a 0,9 m de altura.

9.2. $-4,9t^2 + 29,4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 6$
 Abcissa do vértice: $t = 3$
 Ordenada do vértice: $h(3) = 45$
 $h(t) = -4,9(t - 3)^2 + 45$, c.q.m.

9.3. $h(2) = -4,9 \times 1 + 45 = 40,1$ m; $t = 3$ define o eixo de simetria da parábola.
 Portanto, $h(2) = h(3 - 1) = h(3 + 1) = h(4)$.
 O projétil também esteve a 40,1 metros de altura decorridos 4 segundos.

9.4. O vértice da parábola tem coordenadas (3, 45). Logo, a altura máxima atingida foi 45 metros, passados 3 segundos do seu lançamento.

10.1. Sendo M o ponto médio de $[AB]$, os triângulos $[AMC]$ e $[ADG]$ são semelhantes.

Logo: $\frac{\overline{GD}}{4} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow \overline{GD} = \frac{4}{3}x$ e, como $\overline{DE} = 6 - 2x$, vem $A(x) = \frac{4}{3}x(6 - 2x) = 8x - \frac{8}{3}x^2$.

10.2. $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$
 Abcissa do vértice: $x = \frac{3}{2}$

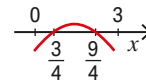
Ordenada do vértice: $A\left(\frac{3}{2}\right) = 6$; $A(x) = \frac{8}{3}(x^2 - 3x) = -\frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 6$; Vértice da parábola: $V\left(\frac{3}{2}, 6\right)$

A área é máxima para $x = \frac{3}{2}$, sendo essa área igual a 6 u. a.

10.3. $A(x) \leq \frac{9}{2} \wedge 0 < x < 3 \Leftrightarrow 8x - \frac{8}{3}x^2 \leq \frac{9}{2} \wedge 0 < x < 3 \Leftrightarrow$

$-16x^2 + 48x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \vee x = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x \leq \frac{3}{4} \vee x \geq \frac{9}{4}\right) \wedge 0 < x < 3 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{9}{4}, 3\right[$



Ficha 5 Equações e inequações do 2.º grau

1.1. Abcissa do vértice: $\frac{-2+4}{2} = 1$

$g(x) = a(x - 1)^2 + k$

$\begin{cases} g(-2) = 0 \\ g(0) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + k = 0 \\ a + k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ k = -\frac{9}{2} \end{cases}$

A expressão é $g(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2}$.

1.2. a) $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2} = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 1)^2 = -4 + \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 1)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x - 1 = -1 \vee x - 1 = 1$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

b) $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 1)^2 = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 1)^2 = \frac{4}{2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x - 1 = -2 \vee x - 1 = 2$

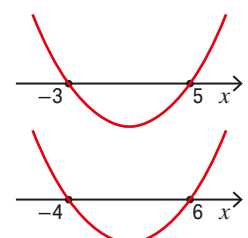
$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

1.3. a) $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 5$

$S =]-3, 5[$

b) $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{9}{2} = 8 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 6$

$S =]-\infty, -4] \cup [6, +\infty[$



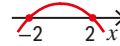
$$\begin{aligned}
 \mathbf{2.1.} \quad f(x) = 0 &\Leftrightarrow -4x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 3x = -1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{1}{4} \\
 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} \\
 &\Leftrightarrow x + \frac{3}{8} = -\frac{5}{8} \vee x + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{2.2.} \quad \text{Abcissa do vértice: } &\frac{-1 + \frac{1}{4}}{2} = -\frac{3}{8} \\
 \text{Ordenada do vértice: } &f\left(-\frac{3}{8}\right) = -4\left(-\frac{3}{8}\right)^2 - 3\left(-\frac{3}{8}\right) + 1 = \frac{25}{16} \\
 f(x) &= -4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{25}{16}
 \end{aligned}$$

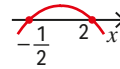
$$\begin{aligned}
 \mathbf{2.3.} \quad f(x) = 1 &\Leftrightarrow -4x^2 - 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow -4x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(-4x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{4} \\
 S &= \left[-\frac{3}{4}, 0\right] \quad \text{Esboço do gráfico: } \img alt="Esboço do gráfico de uma parábola que abre para baixo, com vértice em (-3/8, 25/16) e raízes em x = -3/4 e x = 0." data-bbox="398 321 541 356"/>$$

pág. 37

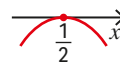
$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.1.} \quad -x^2 + 4 = 0 &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \\
 S &=]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.2.} \quad -2x^2 + 3x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2 \\
 S &= \left[-\frac{1}{2}, 2\right]
 \end{aligned}$$



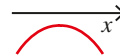
$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.3.} \quad -4x^2 + 4x - 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\
 S &= \emptyset
 \end{aligned}$$



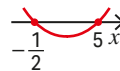
$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.4.} \quad 2x^2 - 4x = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \\
 S &=]0, 2[
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.5.} \quad -4x^2 + 6x - 3 = 0 &\text{ (impossível } \mathbb{R}) \\
 S &= \emptyset
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.6.} \quad 2x^2 - 9x - 5 = 0 &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 5 \\
 S &= \left[-\frac{1}{2}, 5\right]
 \end{aligned}$$

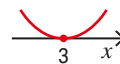


$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.7.} \quad -x^2 + 8x - 16 = 0 &\Leftrightarrow x = 4 \\
 S &= \mathbb{R}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.8.} \quad \text{Para qualquer número real, } x, \quad &1 + 4x^2 > 0; \\
 x(1 + 4x^2) < 0 &\Leftrightarrow x < 0 \\
 S &=]-\infty, 0[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.9.} \quad x^2 - 6x + 9 = 0 &\Leftrightarrow x = 3 \\
 S &= \{3\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.10.} \quad -x^2 + 8x - 16 = 0 &\Leftrightarrow x = 4 \\
 S &= \mathbb{R} \setminus \{4\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{4.1.} \quad A(x, 0), P(x, -2x + 8), B(0, -2x + 8); \quad &\overline{OA} = x; \overline{AP} = -2x + 8 \\
 A(x) = \overline{OA} \times \overline{OP} &= x(-2x + 8) = -2x^2 + 8x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{4.2.} \quad A(x) = -2x^2 + 8x = -2(x^2 - 4x) &= -2(x^2 - 4x + 4) + 8 = -2(x - 2)^2 + 8; V(2, 8) \\
 \text{A área máxima do retângulo é } 8 &\text{ e ocorre para } x = 2. \text{ As suas dimensões são } \overline{OA} = 2 \text{ e } \overline{OB} = 4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{4.3.} \quad A(x) < 6 \wedge 0 < x < 4 &\Leftrightarrow -2x^2 + 8x - 6 < 0 \wedge 0 < x < 4 \Leftrightarrow (x < 1 \vee x > 3) \wedge 0 < x < 4 \\
 &\Leftrightarrow x \in]0, 1[\cup]3, 4[
 \end{aligned}$$

Avaliação

Ficha 6 Funções afim e quadrática

pág. 38

1.1. (C)

1.2. $x \in]-2, 2[$

1.3.

x	-2		0		3		5
$f(x)$	0	↗	2	↘	-1	↗	N. D.

2.1. O gráfico de uma função afim é uma reta, logo é definida por uma expressão do tipo $g(x) = ax + b$.

$$a = \frac{-5-3}{3-(-1)} = -2; g(-1) = 3 \Leftrightarrow -2 \times (-1) + b = 3 \Leftrightarrow b = 1$$

$$g(x) = -2x + 1$$

2.2. (B)

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

2.3.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-
	↘		

2.4. (C)

pág. 39

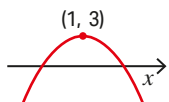
3.1. $h(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$$\text{Abcissa do vértice: } \frac{0+2}{2} = 1$$

$$\text{Ordenada do vértice: } h(1) = 3$$

Coordenadas do vértice: (1, 3)

3.2. (A)



4.1. $P(x, 0)$ e $Q(8, x)$; $\overline{BP} = \sqrt{(x-4)^2 + 16} = \overline{BQ}$; $\overline{PQ} = \sqrt{(8-x)^2 + x^2}$;

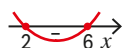
$\overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{PQ}^2$. O triângulo [BPQ] é isósceles e, pelo recíproco do teorema de Pitágoras, é retângulo.

$$4.2. A(x) = \frac{\overline{BP} \times \overline{BQ}}{2} = \frac{\overline{BP}^2}{2} = \frac{(x-4)^2 + 16}{2} = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 8$$

4.3. a) $A_{[OPB]} = \frac{x \times 4}{2} = 2x$; $A(x) = 2x \wedge x \in [0, 8] \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-4)^2 + 8 = 2x \wedge x \in [0, 8] \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 8$

b) $A(x) \leq 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-4)^2 + 8 \leq 10 \wedge x \in [0, 8] \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + 16 \leq 20 \wedge x \in [0, 8]$

$$x^2 - 8x + 12 \leq 0 \wedge x \in [0, 8] \Leftrightarrow x \in [2, 6]$$



c) Como o vértice tem coordenadas (4, 8), a área é mínima para $x = 4$.

$$4.4. A_{[PAQ]} = \frac{(8-x) \times x}{2} = \frac{-x^2 + 8x}{2} = -\frac{x^2}{2} + 4x; A_{[BPAQ]} = A_{[BPQ]} + A_{[PAQ]} = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 8 + \left(-\frac{x^2}{2} + 4x\right) = 16$$

Ficha 7 Funções definidas por ramos

pág. 40

MMATOCAD © Porto Editora

1.1. $A(0, 10)$, $B(4, 2)$ e $C(8, 0)$; $m_{AB} = \frac{2-10}{4-0} = -2$; $AB: y = -2x + 10$

$m_{BC} = \frac{0-2}{8-4} = -\frac{1}{2}$; $BC: y = -\frac{1}{2}x + b$; $-\frac{1}{2} \times 8 + b = 0 \Leftrightarrow b = 4$; $y = -\frac{1}{2}x + 4$;

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 10 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & \text{se } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

1.2. a) $f(1,5) = -2 \times 1,5 + 10 = 7$

b) $f(5) = -\frac{1}{2} \times 5 + 4 = 1,5$

1.3. a) Como f é decrescente temos que $f(x) = 4 \Leftrightarrow -2x + 10 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

Logo, $f(x) \leq 4 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, 8]$

b) $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \in [0, 4] \Leftrightarrow f(x+2) \geq 2 \Leftrightarrow x \in [0-2, 4-2] \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$

2.1. Para $x \leq 4$, $f(x) = a(x-2)^2 + 8$;

$f(4) = 6 \Leftrightarrow a(4-2)^2 + 8 = 6 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

Para $x > 4$, $y = 2x - 10$; $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 & \text{se } x \leq 4 \\ 2x - 10 & \text{se } x > 4 \end{cases}$

2.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 = 0 \wedge x \leq 4\right) \vee (2x - 10 = 0 \wedge x > 4) \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 5$

2.3. f é crescente em $]-\infty, 2]$ e em $]4, +\infty]$ e é decrescente em $[2, 4]$.

f tem um máximo relativo igual a 8 para $x = 2$ e não tem extremos absolutos.

pág. 41

3.1. $g(2) + g\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \times 2 + 1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 = -6 + 1 + \frac{1}{2} - 4 = -\frac{17}{2}$

3.2.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$g(x)$	\searrow	-4	\nearrow	-2	\searrow

3.3. Para $a = 2$ ou $a = 4$, a função h tem apenas dois zeros distintos, pois o gráfico de h é obtido a partir do gráfico de g deslocando-se a unidades na vertical.

4.1. a) Seja $h(x) = -x^2 + 4x$.

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Abcissa do vértice: 2

Ordenada do vértice: $f(2) = 1$

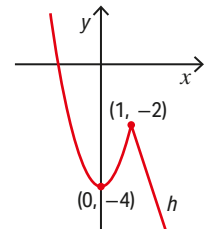
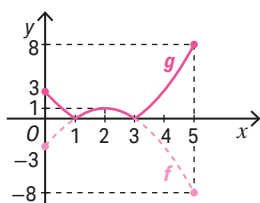
$f(x) = -(x-2)^2 + 1$; $V(2, 1)$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

c) $V(2, 1)$ e a concavidade do gráfico é voltada para baixo.

$f(0) = -0^2 + 4 \times 0 - 3 = -3$; $f(5) = -5^2 + 4 \times 5 - 3 = -8$; $D'_f = [-8, 1]$

4.2.



4.3. $D'_g = [0, 8]$

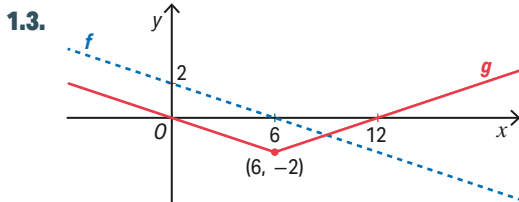
Ficha 8 Problemas com funções

pág. 42

MMATOCAD © Porto Editora

1.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$

1.2. A função f é uma função afim cujo gráfico é uma reta com declive negativo $(-\frac{1}{3})$, logo f é **decrecente** para todo o valor de x .



1.4.
$$g(x) = \begin{cases} -\frac{x}{3} & \text{se } x \leq 6 \\ \frac{x}{3} - 4 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

2.1. $A(200, 100)$ e $B(250, 200)$; $m_{OA} = 0,5$; $OA: y = 0,5t$; $m_{AB} = 2$;
 $OB: y = 2t + b$; $100 = 2 \times 200 + b \Leftrightarrow b = -300$; $y = 2t - 300$

$$h(t) = \begin{cases} 0,5t & \text{se } 0 \leq t \leq 200 \\ 2t - 300 & \text{se } 200 < t \leq 250 \end{cases}$$

2.2. $1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$; $h(t) = 150 \Leftrightarrow 2t - 300 = 150 \Leftrightarrow t = 225$;
 $225 \text{ min} = \mathbf{3 \text{ h } 45 \text{ min}}$

2.3. $V_{\text{cubo}} = 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$; Em 200 minutos a torneira debitou 1000 litros.
 Logo, o débito é de $1000/200 = \mathbf{5 \text{ litros por minuto}}$.

2.4. a) $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$; $h(60) = 0,5 \times 60 = 30 \text{ cm} = 3 \text{ dm}$; $V = 10 \times 10 \times 3 = 300 \text{ dm}^3 = 300 \text{ L}$
 Em alternativa, como o caudal é de 5 L/min , temos $60 \times 5 \text{ L} = \mathbf{300 \text{ L}}$.
 b) $4 \text{ h} = 240 \text{ min}$; $240 \times 5 \text{ L} = \mathbf{1200 \text{ L}}$

pág. 43

3.1. $m_{AB} = \frac{1 - 0,8}{2 - 1} = 0,2$; $AB: y = 0,2t + b$; $1 = 0,2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 0,6$; $y = 0,2t + 0,6$

$$C(t) = \begin{cases} 0,3 & \text{se } 0 < t \leq 0,5 \\ 0,8 & \text{se } 0,5 < t \leq 1 \\ 0,2t + 0,6 & \text{se } 1 < t \leq 12 \end{cases}$$

3.2. $1 \text{ h } 45 \text{ min} = 1,75 \text{ h}$
 $C(1,75) = 0,2 \times 1,75 + 0,6 = 0,95$
 O custo de um estacionamento de 1 h 45 min é $\mathbf{0,95 \text{ €}}$.

4.1. A área do trapézio $[ABQP]$ é dada por $\frac{\overline{AB} + \overline{PQ}}{2} \times \overline{QB}$.

Sei que $\overline{AB} = 12$; $\overline{QB} = x$. Preciso de calcular \overline{PQ} .

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PQ}}{12} = \frac{6 - x}{6} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 2(6 - x)$$

Logo, a área do trapézio $[ABQP]$ é dada por: $A(x) = \frac{12 + 2(6 - x)}{2} \times x = \mathbf{12x - x^2}$

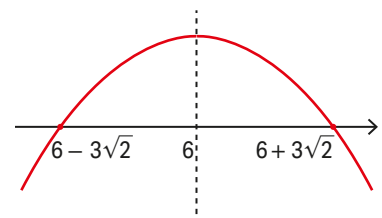
4.2. $A(x) = 20 \Leftrightarrow 12x - x^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 10$
 Como $x \in]0, 6[$, o valor de x para o qual a área é 20 cm^2 é $\mathbf{2 \text{ cm}}$.

4.3. Área do retângulo: $12 \times 6 = 72$

Área do trapézio é superior ou igual a um quarto da área do retângulo:

$$A(x) \geq \frac{1}{4} \times 72 \wedge 0 < x < 6 \Leftrightarrow 12x - x^2 \geq 18 \wedge 0 < x < 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 18 \geq 0 \wedge 0 < x < 6 \Leftrightarrow \mathbf{x \in [6 - 3\sqrt{2}, 6]}$$

Cálculos auxiliares: $18 - 12x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6 - 3\sqrt{2} \vee x = 6 + 3\sqrt{2}$



Ficha 9 Funções e tecnologia

pág. 44

1.1. A população cresce a uma taxa de 5% à hora, até atingir 1500 bactérias; aumenta 5 bactérias por hora até atingir 1600; mantém o mesmo número de bactérias durante 5 h e, de seguida, decresce a uma taxa de 5% por hora até restar 1 bactéria.

2.1. $y = -2$

2.2. Por exemplo, $x = 5$ ou $x = 0$.

2.3. $x = \text{float}(\text{input}("x = "))$

if $x > 5$ and $x \leq 8$:

$y = 5$

else:

$y = 0$

print (y)

2.4. $x = \text{float}(\text{input}("x = "))$

if $x > -2$ and $x \leq 5$:

$y = 2 * x - 2$

else:

$y = 3$

print (y)

pág. 45

3.1. Coordenadas do vértice: $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

3.2. $f(x) = -4 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{5}{3}$

3.3. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > \frac{2}{3}$

$x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$

3.4. Ordenada de C: $y = f(0) = 1$

Abcissas de A e B:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = 1$

Área do triângulo [ABC]:

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) \times 1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ u. a.}$$

Avaliação global do tema

Ficha 10

pág. 46

1.1. $D_f = [-2, 8[; D'_f =]-3, 4]$

1.2.

x	-2		1		8
$f(x)$	-2	↗	4	↘	N. D.

Mínimo relativo: -2

Máximo absoluto: 4

1.3. (B)

1.4. (A)

2.1. $a = \frac{-1-0}{-1-2} = \frac{1}{3}; g(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 2 + b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{2}{3}$

$$g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

2.2.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

3. (D)

pág. 47

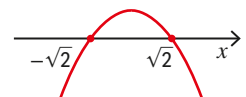
4.1. $g(x) = a(x-0)^2 + 1$

$$g(2) = -1 \Leftrightarrow a(2-0)^2 + 1 = -1 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1.$$

4.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

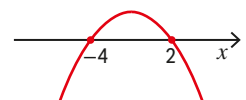
Um intervalo onde a função é decrescente e positiva é $[0, \sqrt{2}[$.



4.3. $g(x) < x - 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 1 < x - 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 < 0$

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$$

$$S =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$$



4.4. (B)

5.1. Para $x \leq 3$, $f(x) = a(x-2)^2 + k$.

$$f(0) = 2 \wedge f(1) = -1 \Leftrightarrow 4a + k = 2 \wedge a + k = -1 \Leftrightarrow a = 1 \wedge k = -2$$

Para $x > 3$, $f(x) = ax + b$.

$$f(4) = 0 \wedge f(6) = -1 \Leftrightarrow 4a + b = 0 \wedge 6a + b = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \wedge b = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 2 & \text{se } x \leq 3 \\ -\frac{x}{2} + 2 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

5.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow ((x-2)^2 - 2 = 0 \wedge x \leq 3) \vee \left(-\frac{x}{2} + 2 = 0 \wedge x > 3\right)$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \vee x = 4$$