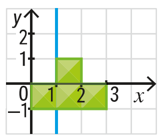
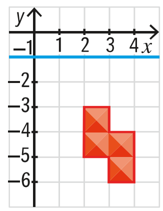
Pág. 7

Tarefa de revisão

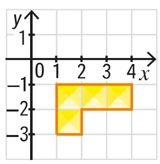
1. $C(2, -1)$
2. AB: $x = -1$; GF: $y = 1$; OF: $y = x$
3.



4.



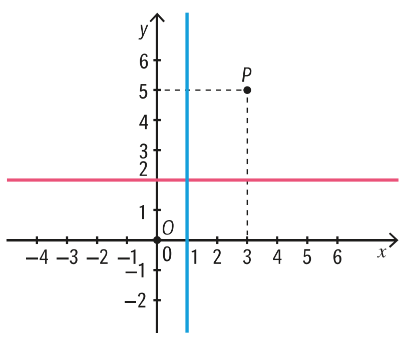
5. $y = 1{,}5$
6. $x = -4$
7.



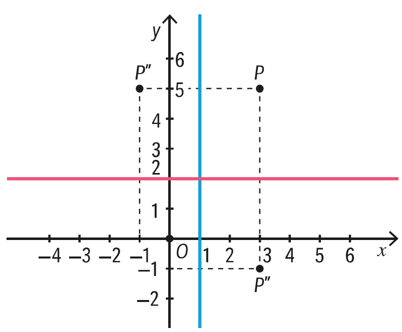
Pág. 8

Tarefa inicial 1

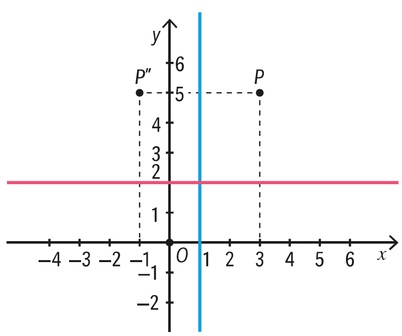
1.



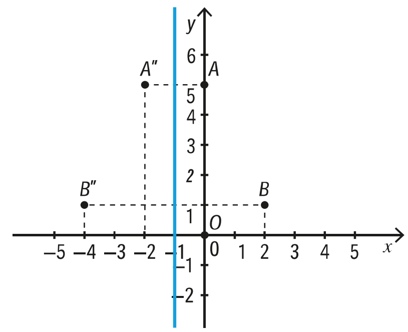
2.1.



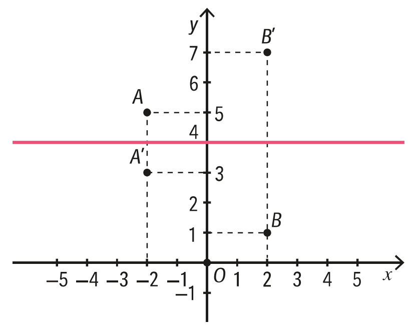
2.2.



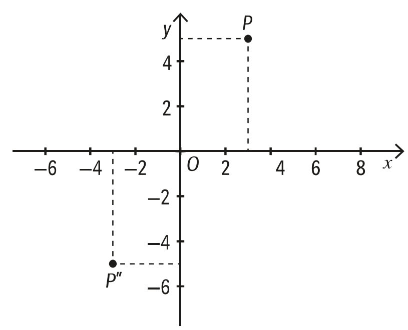
3.1.



3.2.

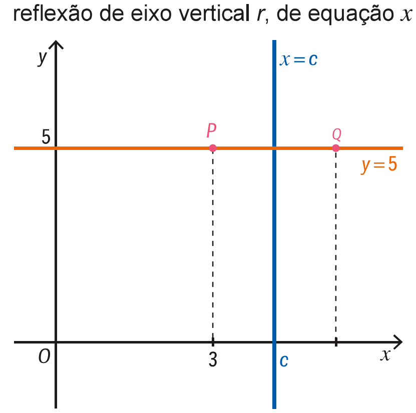


4.



5. $Q' = (-a, -b)$

6. Seja Q o transformado do ponto $P(3, 5)$ pela reflexão de eixo vertical r, de equação $x = c$.



6.1. O ponto Q pertence à reta à reta t, que passa no ponto $P(3, 5)$ e é perpendicular à reta $r : x = c$. Logo, como a reta r é vertical, a reta t é horizontal, de equação $y = 5$ pelo que o ponto Q tem ordenada 5.

6.2. Sabemos que as distâncias de P e Q à reta r. $x = c$ são iguais.

Consideremos os três casos possíveis

1.°: $c < 3$;

2.° $c > 3$;

3.° $c = 3$

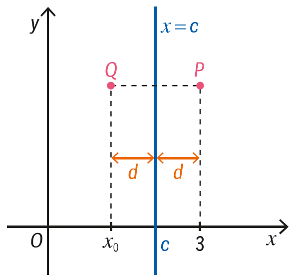
1.° caso: $c < 3$;

$c - x_0 = d = 3 - c$

$c - x_0 = 3 - c \iff$

$\iff c + c - 3 = x_0 \iff$

$\iff x_0 = 2c - 3$



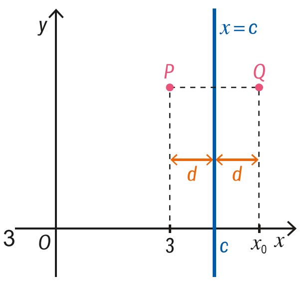
2.° caso: $c > 3$;

$c - 3 = d = x_0 - c$

$c - 3 = x_0 - c \iff$

$\iff c + c - 3 = x_0 \iff$

$\iff x_0 = 2c - 3$



3.° caso: $c = 3$

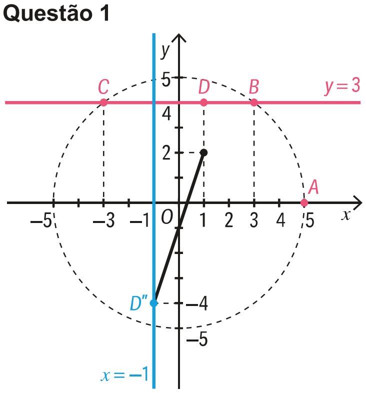
Neste caso, tem-se $Q = P$ pelo que a abcissa de Q é 3, ou seja,

$x_0 = 2c - 3 = 2 \times 3 - 3 = 3$

Em qualquer dos casos, $x_0 = 2c - 3$.

Pág. 9

Questão 1



$x^2 + y^2 = 25$

$x = 3$

$9 + y^2 = 25 \iff$

$\iff y^2 = 16 \iff$

$\iff y = 4 \, , \, y > 0$

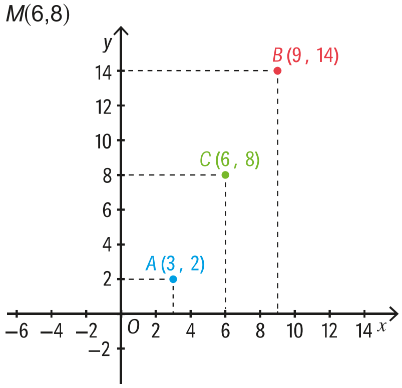
1.1. $D'(1\,,\,2)$

1.2. $D''(-1\,,-4)$

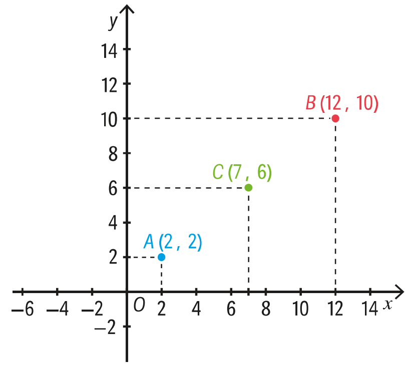
Pág. 10

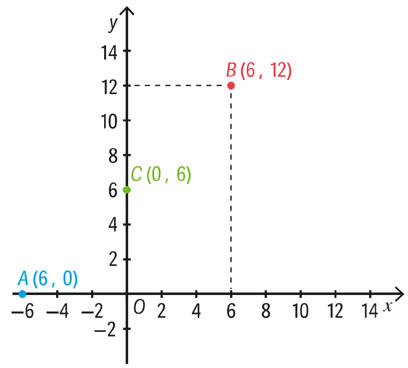
Tarefa 1

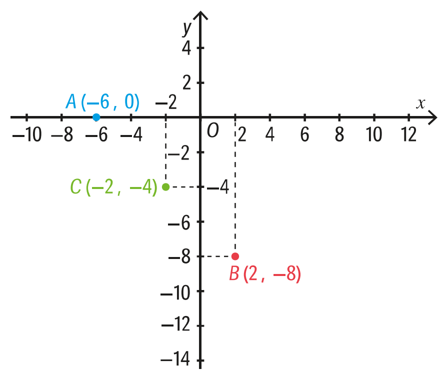
1. $M(6{,}8)$



2.







Pág. 11

Questão 2

2.1. $\left(\dfrac{1+(-1)}{2}, \dfrac{3+2}{2}\right) = \left(0, \dfrac{5}{2}\right)$

2.2. $\left(\dfrac{-1+(-3)}{2}, \dfrac{2+(-10)}{2}\right) = (-2, -4)$

2.3. $\left(\dfrac{-3+(-5)}{2}, \dfrac{-10+4}{2}\right) = (-4, -3)$

2.4. $\left(\dfrac{1+(-5)}{2}, \dfrac{3+4}{2}\right) = \left(-2, \dfrac{7}{2}\right)$

Questão 3

3.1. $A(0{,}2)$; $N\left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$; $B(x{,}y)$

$\left(\dfrac{0+x}{2}, \dfrac{2+y}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{2} \wedge \dfrac{2+y}{2} = 1 \iff x = 3 \wedge 2 + y = 2$

$\iff x = 3 \wedge y = 0$

$C(3{,}0)$

3.2. $A(0,2)$; $M\left(\frac{3}{2},4\right)$; $B(x,y)$

$\left(\frac{0+x}{2},\frac{2+y}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},4\right)$

$\frac{x}{2}=\frac{3}{2}\wedge\frac{2+y}{2}=4 \Leftrightarrow x=3\wedge 2+y=8$

$\Leftrightarrow x=3\wedge y=6$

$C(3,6)$

Pág. 12

Tarefa 2

1. $\overline{FB}^2=2^2+5^2 \Leftrightarrow \overline{FB}^2=29 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{FB}=\sqrt{29}\approx 5{,}39,\ \overline{FB}>0$

$d(F,B)\approx 5{,}39$ milhas marítimas.

2. $\overline{PB}^2=12^2+1^2 \Leftrightarrow \overline{PB}^2=145 \Leftrightarrow \overline{PB}=\sqrt{145}$

$\Leftrightarrow \overline{PB}\approx 12{,}04,\ \overline{PB}>0$

$d(P,B)\approx 12{,}04$ milhas marítimas.

3. $\overline{FP}^2=14^2+6^2 \Leftrightarrow \overline{FP}^2=232 \Leftrightarrow \overline{FP}=\sqrt{232}$

$\Leftrightarrow \overline{FP}\approx 15{,}23,\ \overline{FP}>0$

$d(F,P)\approx 15{,}23$ milhas marítimas.

Pág. 13

Questão 4

$\overline{AB}^2=2^2+7^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2=53$

como $\overline{AB}>0$, $\overline{AB}=\sqrt{53}$

$|3-1|=|2|=2$

$|2-(-5)|=|7|=7$

Questão 5

$r: y=x+6$; $s: y=-x$; $A(x,0)$

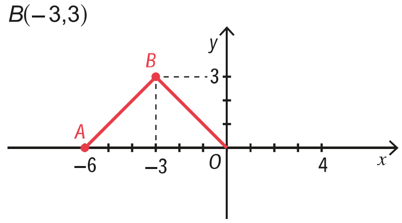
$0=x+6 \Leftrightarrow x=-6$

$A(-6,0)$

$\begin{cases}y=x+6\\y=-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x=x+6\\ \_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x=6\\ \_\_\_\_\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}$

$B(-3,3)$



$\overline{OB}^2=|-3|^2+3^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2=9+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{OB}=\sqrt{18},\ \overline{OB}>0$

$\overline{OB}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$

$\overline{OB}=\overline{AB}$

$P=2\times 3\sqrt{2}+6=6\sqrt{2}+6=6(\sqrt{2}+1)=6(1+\sqrt{2})$

$\begin{array}{r|l} 18 & 2\\ 9 & 3\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array}$

Pág. 14

Questão 6

6.1. $d(A,B)=\sqrt{(-4-0)^2+(2-5)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

6.2. $d(A,B)=\sqrt{(-5-(-1))^2+(4-0)^2}=$

$=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=$

$=\sqrt{2^2\times 2^2\times 2}=2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$\begin{array}{r|l} 32 & 2\\ 16 & 2\\ 8 & 2\\ 4 & 2\\ 2 & 2\\ 1 & \end{array}$

6.3. $d(A,B)=\sqrt{(-4-(-2))^2+(5-(-3))^2}$

$=\sqrt{(-2)^2+8^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}=$

$=\sqrt{2^2\times 17}=2\sqrt{17}$

$\begin{array}{r|l} 68 & 2\\ 34 & 2\\ 17 & 17\\ 1 & \end{array}$

Questão 7

7.1. **a)** $d(M,A)=\sqrt{(-2-4)^2+(1-(-1))^2}=$

$=\sqrt{(-6)^2+2^2}=\sqrt{36+4}=$

$=\sqrt{2^2\times 2\times 5}=2\sqrt{10}$

$\begin{array}{r|l} 40 & 2\\ 20 & 2\\ 10 & 2\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}$

b) $d(A,R)=\sqrt{(4-2)^2+(-1-(-5))^2}$

$=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

c) $d(M,R)=\sqrt{(-2-2)^2+(1-5)^2}=$

$=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$

$=\sqrt{2^2\times 2^2\times 2}=2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$\begin{array}{r|l} 32 & 2\\ 16 & 2\\ 8 & 2\\ 4 & 2\\ 2 & 2\\ 1 & \end{array}$

7.2. O triângulo $[MAR]$ é isósceles.

Pág. 15

Questão 8

$A(2,-1)$, $B(1,-3)$ e $C(a^2-1,\ b+2)$

8.1. $a^2-1=3\wedge b+2=-2 \Leftrightarrow a^2=4\wedge b=-4$

$\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{4}\wedge b=-4 \Leftrightarrow a=\pm 2\wedge b=-4$

8.2. $a^2-1=0\wedge\sqrt{(a^2-1-0)^2+(b+2-0)^2}$

$=3\sqrt{(2-1)^2+(-1-(-3))^2}$

$a^2=1\wedge\sqrt{(a^2-1)^2+(b+2)^2}=3\sqrt{1+2^2}$

$a=\pm 1\wedge\sqrt{(a^2-1)^2+(b+2)^2}=3\sqrt{5}$

Como a soma de dois quadrados é não negativa,

$a=\pm 1\wedge (a^2-1)^2+(b+2)^2=(3\sqrt{5})^2$

$a=\pm 1\wedge (a^2-1)^2+(b+2)^2=45$

Se $a=1\wedge(1^2-1)^2+(b+2)^2=45 \Leftrightarrow (b+2)^2=45$

Como c tem ordenada positiva, $b+2>0$

$b+2=\sqrt{45} \Leftrightarrow b+2=\sqrt{9\times 5} \Leftrightarrow b=-2+3\sqrt{5}$

Se $a=-1$:

$((-1)^2-1)^2+(b+2)^2=45 \Leftrightarrow (b+2)^2=45$

$\Leftrightarrow b=-2+3\sqrt{5}$

$a=\pm 1$ e $b=-2+3\sqrt{5}$

Pág. 16

Tarefas de consolidação

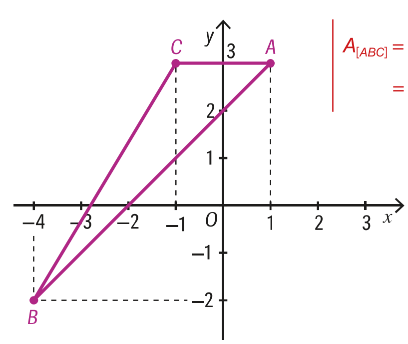
1.1. $A(1,3)$, $E(a^2,a+4)$

$a^2=1\wedge 3=a+4 \Leftrightarrow a=\pm 1\wedge -1=a \Leftrightarrow a=-1$

1.2. **a)** $(1,-3)$ **c)** $(1,-3)$

b) $(4,-2)$

1.3.



$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AC}\times|-2-3|}{2}$

$=\frac{2\times 5}{2}=5$ u. a.

2. $A(-2,2)$, $B(5,-1)$ e $C(4,6)$

2.1. $d(A,B)=\sqrt{(-2-5)^2+(2-(-1))^2}=$

$=\sqrt{(-7)^2+3^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$

52	2
26	2
13	13
1	

$d(A,C)=\sqrt{(-2-4)^2+(2-6)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}$

$=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}=\sqrt{2^2\times 13}=2\sqrt{13}$

$d(B,C)=\sqrt{(5-4)^2+(-1-6)^2}=\sqrt{1^2+(-7)^2}$

$=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

O triângulo $[ABC]$ é escaleno.

2.2. $D\left(\frac{-2+5}{2},\frac{2+(-1)}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

$E\left(\frac{-2+4}{2},\frac{2+6}{2}\right)=(1\,,\,4)$

$d(D,E)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-4\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{7}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}}=\sqrt{\frac{50}{4}}=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

3. $A(-5,2)$

Como a soma da abcissa de B com a ordenada é 0, a abcissa e a ordenada são simétricas.

$B(b,-b)$; $M(x,y)$

$y-x=\frac{5}{2} \Leftrightarrow y=x+\frac{5}{2}$

$M\left(x,x+\frac{5}{2}\right)$

$\left(\frac{-5+b}{2},\frac{2+(-b)}{2}\right)=\left(x,x+\frac{5}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-5+b}{2}=x\\ \frac{2-b}{2}=x+\frac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5+b=2x\\ 2-b=2x+5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\qquad\qquad}\\ 2-b=-5+b+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\qquad\qquad}\\ -2b=-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-5+1=2x\\ b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4=2x\\ b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ b=1\end{cases}$

$M\left(-2,-2+\frac{5}{2}\right)=\left(-2,\frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{2}=-\frac{1}{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

4. $A(a-3,b+4)$ e $B(a+1,b+1)$

4.1. $d(A,B)=\sqrt{(a-3-(a+1))^2+(b+4-(b+1))^2}$

$=\sqrt{(a-3-a-1)^2+(b+4-b-1)^2}$

$=\sqrt{(-4)^2+3^2}$

$=\sqrt{16+9}=5$

4.2. $a=1$ e $b=-2$

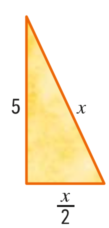
a) $A(1-3,-2+4)=(-2,2)$ e $B(1+1,-2+1)=(2,-1)$

$d(A,B)=5$

$x^2=5^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2=25+\frac{x^2}{4}$

$\Leftrightarrow 4x^2=100+x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2=100 \Leftrightarrow x^2=\frac{100}{3}$

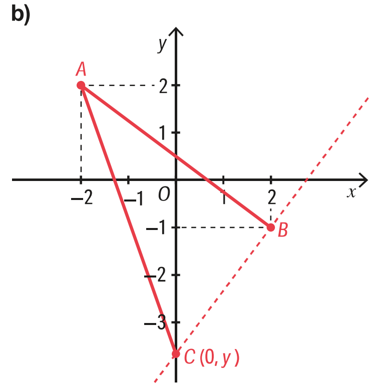


Como $x>0$

$x=\frac{10}{\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$

$A=\frac{\frac{10\sqrt{3}}{3}\times 5}{2}=\frac{50\sqrt{3}}{6}=\frac{25\sqrt{3}}{3}$ u. a.

b)



$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(-2-0)^2+(2-y)^2}\right)^2=$

$=5^2+\left(\sqrt{(2-0)^2+(-1-y)^2}\right)^2$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$(-2)^2+(2-y)^2=25+2^2+(-1-y)^2$

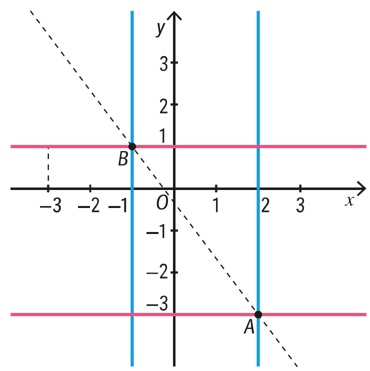
$\Leftrightarrow 4+4-4y+y^2=25+4+1+2y+y^2$

$\Leftrightarrow -6y=22 \Leftrightarrow y=-\frac{22}{6} \Leftrightarrow y=-\frac{11}{3}$

$C\left(0,-\frac{11}{3}\right)$

Pág. 17

5. $A(2,-3)$ e $B(-1\,,\,1)$



5.1. $A=3\times 4=12$ u. a.

$P=2\times 3+2\times 4=14$ u. c.

$|2-(-1)|=3$

$|1-(-3)|=4$

5.2. $C(x,0)$ e $D(0,y)$

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$

$0=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3}x=-\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 4x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$

$C\left(-\frac{1}{4},0\right)$

$y=-\frac{4}{3}\times 0-\frac{1}{3}y=-\frac{1}{3};$

$D\left(0,-\frac{1}{3}\right)$

$d(C,D)=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}-0\right)^2+\left(0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2}=$

$=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}=$

$=\sqrt{\frac{9+16}{144}}=\sqrt{\frac{25}{144}}=\frac{5}{12}$

$m=\frac{1-(-3)}{-1-2}=-\frac{4}{3}$

$y=-\frac{4}{3}x+b,\ B(-1,1)$

$1=-\frac{4}{3}\times(-1)+b$

$\Leftrightarrow 1=\frac{4}{3}+b$

$\Leftrightarrow b=1-\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow b=-\frac{1}{3}$

AB: $y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$

6. $C(x,0)$, $A(0,8)$ e $B(0,18)$.

$d(A,B) = d(A,C)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(0-0)^2+(8-18)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(0-8)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-10)^2} = \sqrt{x^2+(-8)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{100} = \sqrt{x^2+64}$

Como $100 > 0$ e $x^2+64>0$

$100 = x^2+64 \Leftrightarrow x^2 = 36$

Como a abcissa de C é positiva, $x = \sqrt{36} = 6$.

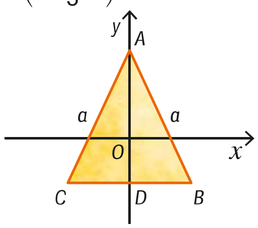
$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB}\times 6}{2} = \frac{10\times 6}{2} = 30$ u. a.

7. $P(2,a)$ e $Q(-a-2,1)$, $a<-1$

$\left(\frac{2+(-a-2)}{2}, \frac{a+1}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}\right)$

A abcissa do ponto médio de $[PQ]$ é positiva e a ordenada é negativa, logo o ponto pertence ao 4.° quadrante.

8. $A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$, $a>0$



Seja D o ponto médio de $[BC]$.

Como a ordenada de A é $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ e O é o centro do triângulo, a ordenada de B e C é negativa.

8.1. Seja D o ponto médio de $[BC]$.

$\overline{DB} = \frac{a}{2}$ e $\overline{CD} = \frac{a}{2}$

A abcissa de B é $\frac{a}{2}$ e a abcissa de C é $-\frac{a}{2}$.

$B\left(\frac{a}{2}, y\right)$ e $C\left(-\frac{a}{2}, y\right)$, $y<0$.

$\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+(y-0)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$\frac{a^2}{4}+y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4}+y^2 = \frac{1}{3}a^2$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{12}a^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{a^2}{12}}$

$\Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{12}} \Leftrightarrow y = -\frac{a}{\sqrt{12}} \vee y = \frac{a}{\sqrt{12}}$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{12}}{12}a \vee y = \frac{\sqrt{12}}{12}a$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2\sqrt{3}}{12}a \vee y = \frac{2\sqrt{3}}{12}a \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{6}a \vee y = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

Como as ordenadas de B e C são negativas, isto é, $y<0$, $B\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$ e $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$

8.2. **a)** $A(0, 2\sqrt{3})$, $B(3, -\sqrt{3})$ e $C(-3, -\sqrt{3})$

$d(0,A) = \sqrt{(0-0)^2+\left(0-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2}$

$= \sqrt{12} = \sqrt{2^2\times 3} = 2\sqrt{3}$

b) $M_{[AC]} = \left(\frac{0+(-3)}{2}, \frac{2\sqrt{3}+(-\sqrt{3})}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$B'(x,y)$ $\frac{x+3}{2} = -\frac{3}{2} \wedge \frac{y+(-\sqrt{3})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x+3 = -3 \wedge y-\sqrt{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x=-6 \wedge y = 2\sqrt{3}$

$B'(-6, 2\sqrt{3})$

$d(A,B) = \sqrt{(0-3)^2+\left(2\sqrt{3}-(-\sqrt{3})\right)^2}$

$= \sqrt{9+\left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+9\times 3} = \sqrt{36} = 6$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$d(B,B') = \sqrt{(3-(-6))^2+\left(-\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)^2}$

$= \sqrt{(3+6)^2+\left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{81+27} = \sqrt{108}$

$= \sqrt{2^2\times 3^2\times 3} = 2\times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$P = 4\times 6 = 24$ u. c.

$A = \frac{D\times d}{2} = \frac{6\sqrt{3}\times 6}{2} = 18\sqrt{3}$ u. a.

Pág. 19

Avaliação formativa 1

1.1. **a)** D; **b)** H; **c)** A

1.2. $x=-3$; $y=-1$

Transformado de D pela reflexão vertical: $(-8,2)$

Transformado de D pela reflexão horizontal: $(2,-4)$

1.3. **a)** $P(x,y)$, $F(-2,0)$, $D(2,2)$

$\begin{cases} \frac{-2+x}{2} = 2 \\ \frac{0+y}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+x=4 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$ $P(6,4)$

b) $A = \pi\times 2^2 = 4\pi$ u.a.

2. $x=0$; $4y=20 \Leftrightarrow y=5$; $B(0,5)$

$y=0$; $5x=20 \Leftrightarrow x=4$; $A(4,0)$

$\overline{AB}^2 = 4^2+5^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 16+25 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 41$

Como $\overline{AB}>0$, tem-se que: $AB = \sqrt{41}$

$P = 4+5+\sqrt{41} = 9+\sqrt{41}$

Opção: (A)

3. $A(1,-4)$, $B(-3,-3)$, $C\left(1,-\sqrt{15}\right)$, $O(0,0)$

3.1. $d(A,O) = \sqrt{(1-0)^2+(-4-0)^2} = \sqrt{17}$

$d(B,O) = \sqrt{(-3-0)^2+(-3-0)^2} = \sqrt{18}$

$d(C,O) = \sqrt{(1-0)^2+\left(-\sqrt{15}-0\right)^2} = \sqrt{16}$

Resposta: Ponto B

3.2. **a)** $d(A,B) = \sqrt{(1-(-3))^2+(-4-(-3))^2}$

$= \sqrt{(1+3)^2+(-4+3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

Resposta: $\frac{\sqrt{17}}{2}$

b) Transformado de A pela reflexão na reta de equação $x=2$: $(3,-4)$

Transformado de B pela rotação de meia-volta de centro O: $(3,3)$

$d = \sqrt{(3-3)^2+(-3-(-4))^2} = \sqrt{7^2} = 7$

4. $A(-1, 2)$; $B(5,y)$

$\overline{AB} = 2\sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(-1-5)^2+(2-y)^2} = 2\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-6)^2+(2-y)^2} = 2\sqrt{13}$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$36+(2-y)^2=(2\sqrt{13})^2 \Leftrightarrow 36+4-4y+y^2=4\times 13$

$\Leftrightarrow y^2-4y+49-52=0 \Leftrightarrow y^2-4y-12=0$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 1\times(-12)}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{4\pm\sqrt{16+48}}{2} \Leftrightarrow y=\dfrac{4\pm\sqrt{64}}{2}$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{4-8}{2}\vee y=\dfrac{4+8}{2} \Leftrightarrow y=-2\vee y=6$

Pág. 20

Tarefa inicial 2

1.1. $d(A,B)=\sqrt{(0-10)^2+(3-1)^2}=$

$=\sqrt{(-10)^2+2^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$

104	2
52	2
26	2
13	13
1	

A distância do ponto A e do ponto B ao ponto médio de[AB] é $\dfrac{2\sqrt{26}}{2}=\sqrt{26}$.

1.2. **a)** Distância de A ao ponto (6 , 7):

$d=\sqrt{(0-6)^2+(3-7)^2}=\sqrt{36+16}=$

$=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

52	2
26	2
13	13
1	

Distância de B ao ponto (6,7):

$d=\sqrt{(10-6)^2+(1-7)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

A distância de A ao ponto (6,7) é igual à distância de B ao ponto (6,7).

b) Distância de A ao ponto (7,12):

$d=\sqrt{(0-7)^2+(3-12)^2}=$

$=\sqrt{49+81}=\sqrt{130}$

130	2
65	5
13	13
1	

Distância de B ao ponto (7,12):

$d=\sqrt{(10-7)^2+(1-12)^2}=\sqrt{9+121}=\sqrt{130}$

A distância de A ao ponto (7,12) é igual à distância de B ao ponto (7,12).

2. **a)** $\overline{BP}$ **b)** $\sqrt{(x-10)^2+(y-1)^2}$

c) y^2-2y+1 **d)** $100+1-9=92$

e) $20x-92$ **f)** $y=5x-2x$

Pág. 21

Questão 9

9.1. $y=\dfrac{2+6}{2}=4$; $\boxed{y=4}$

9.2. $x=\dfrac{-2+6}{2}=2$; $\boxed{x=2}$

9.3. $A(-2,2)$; $B(4,0)$; $P(x,y)$

$(x-(-2))^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y-0)^2$

$\Leftrightarrow (x+4)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-4y+4=x^2-8x+16+y^2$

$\Leftrightarrow -4y=-8x-4x+16-4-4$

$\Leftrightarrow -4y=-12x+8 \Leftrightarrow \boxed{y=3x-2}$

9.4. $A(-2,2)$; $C(6,6)$; $P(x,y)$

$(x-(-2))^2+(y-2)^2=(x-6)^2+(y-6)^2$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-2)^2=(x-6)^2+(y-6)^2$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-4y+4=$

$=x^2-12x+36+y^2-12y+36$

$\Leftrightarrow -4y+12y=-12x-4x+36+36-4-4$

$\Leftrightarrow 8y=-16x+64 \Leftrightarrow \boxed{y=-2x+8}$

9.5. $B(4,0)$; $C(6,6)$; $P(x,y)$

$(x-4)^2+(y-0)^2=(x-6)^2+(y-6)^2$

$\Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=(x-6)^2+(y-6)^2$

$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2=x^2-12x+36+y^2-12y+36$

$\Leftrightarrow 12y=-12x+8x+36+36-16$

$\Leftrightarrow 12y=-4x+56 \Leftrightarrow y=-\dfrac{4}{12}x+\dfrac{56}{12}$

$\Leftrightarrow \boxed{y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{14}{3}}$

Pág. 22

Questão 10

$A(-2,-3)$, $B(2,1)$

A reta perpendicular a AB e que passa pelo ponto médio de [AB] é a mediatriz do segmento de reta [AB].

$(x-(-2))^2+(y-(-3))^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2+6y+9=x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow 6y+2y=-4x-4x+1-9 \Leftrightarrow 8y=-8x-8$

$\Leftrightarrow \boxed{y=-x-1}$

A reta de equação $y=-x-1$ é paralela à bissetriz dos quadrantes pares, $y=-x$, porque têm o mesmo declive, -1.

Pág. 23

Questão 11

11.1. $A(-3,1)$, $B(3,5)$, $C(3,-2)$

Mediatriz de [AB]:

$(x-(-3))^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-5)^2$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-5)^2$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2-2y+1=$

$=x^2-6x+9+y^2-10y+25$

$\Leftrightarrow -2y+10y=-6x-6x+25-1$

$\Leftrightarrow 8y=-12x+24 \Leftrightarrow y=-\dfrac{12}{8}x+\dfrac{24}{8}$

$\Leftrightarrow \boxed{y=-\dfrac{3}{2}x+3}$

Mediatriz de [BC]:

$(x-3)^2+(y-5)^2=(x-3)^2+(y-(-2))^2$

$\Leftrightarrow (y-5)^2=(y+2)^2 \Leftrightarrow y^2-10y+25=y^2+4y+4$

$\Leftrightarrow -14y=-21 \Leftrightarrow y=\dfrac{21}{14} \Leftrightarrow \boxed{y=\dfrac{3}{2}}$

Interseção das duas mediatrizes

$\begin{cases} y=-\dfrac{3}{2}x+3 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}x+3 \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3=-3x+6 \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=3 \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Resposta: ponto de coordenadas $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

11.2. Circuncentro

Pág. 24

Tarefa 3

1.1. $O(0,0)$ e $A(10\sqrt{5}, -20)$

$\overline{OA} = \sqrt{(10\sqrt{5}-0)^2 + (-20-0)^2} = \sqrt{100 \times 5 + 400}$

$= \sqrt{900} = 30$

1.2. $O(0,0)$ e $B(15,15)$

$\overline{OA} = \sqrt{(15-0)^2 + (15-0)^2} = \sqrt{225+225} =$

$= \sqrt{450} \neq 30$

Logo, o ponto (15,15) não pertence à circunferência.

2. **a)** 30 **b)** 30

c) $30^2 = 900$ **d)** $x^2 + y^2 = 900$

Pág. 25

Questão 12

12.1. $x^2 + y^2 = 4$

$3^2 + 1^2 = 4 \Leftrightarrow 10 = 4$ (falsa)

Como $10 > 4$, conclui-se que $\overline{AC} > 2$, logo A é exterior à circunferência.

12.2. $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$

$(4-2)^2 + (7-5)^2 = 9 \Leftrightarrow 4+4=9 \Leftrightarrow 8=9$ (Falso)

Como $8 < 9$, conclui-se que $\overline{AC} < 3$, logo A é interior à circunferência.

12.3. $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 5$

$(-3+2)^2 + (7-5)^2 = 5 \Leftrightarrow 1+4=5 \Leftrightarrow 5=5$ (verdadeiro)

Conclui-se que $\overline{AC} = \sqrt{5}$, logo A pertence à circunferência.

12.4. $(x+2)^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 8$

$(0+2)^2 + (-2)^2 = 8 \Leftrightarrow 4+4=8 \Leftrightarrow 8=8$ (verdadeiro)

Conclui-se que $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$, logo A pertence à circunferência.

Pág. 26

Questão 13

13.1. $C(5,-1)$; $r^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2, (r>0)$

13.2. $C(-3, \sqrt{2})$; $r^2 = 5 \Leftrightarrow r = \sqrt{5}, (r>0)$

13.3. $C(0, 2)$

$r^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, (r>0)$

13.4. $x^2 + (y+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1$

$C(0,-1)$; $r = 1$

13.5. $x^2 + y^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 100$

$C(0,0)$

$r^2 = 100 \Leftrightarrow r = \sqrt{100} = 10, (r>0)$

Questão 14

14.1. $x^2 + (y-2)^2 + 5 = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 0$

Como o segundo membro é zero, se a equação representasse uma circunferência, o seu raio seria 0. A equação representa o ponto de coordenadas (0,2).

14.2. $2(x+1)^2 + 2(y-3)^2 = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 2$

A equação representa uma circunferência de centro $(-1,3)$ e raio $\sqrt{2}$.

14.3. $-(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = -1$

Como o primeiro membro é não negativo porque é a soma de dois quadrados e o segundo membro é negativo, a equação é impossível, logo representa o conjunto vazio.

14.4. $x^2 + y^2 + 3x - y = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 6$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

A equação representa uma circunferência de centro $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e raio $\sqrt{6}$.

Pág. 27

Questão 15

$A(6,-2)$, $B(8,4)$, $C(6,6)$

15.1. **a)** $M_{[AB]} = \left(\frac{6+8}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (7,1)$

$raio = d(A,M) = \sqrt{(7-6)^2 + (1-(-2))^2}$

$= \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$C_1: (x-7)^2 + (y-1)^2 = 10$

b) O centro da circunferência é o ponto de interseção de $[AB]$ e $[BC]$.

Mediatriz de $[AB]$:

$(x-6)^2 + (y-(-2))^2 = (x-8)^2 + (y-4)^2$

$\Leftrightarrow (x-6)^2 + (y+2)^2 = (x-8)^2 + (y-4)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 =$

$= x^2 - 16x + 64 + y^2 - 8y + 16$

$\Leftrightarrow 4y + 8y = -16x + 12x + 64 + 16 - 36 - 4$

$\Leftrightarrow 12y = -4x + 40 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

Mediatriz de $[BC]$:

$(x-8)^2 + (y-4)^2 = (x-6)^2 + (y-6)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 - 8y + 16 =$

$= x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36$

$\Leftrightarrow -8y + 12y = -12x + 16x + 36 + 36 - 64 - 16$

$\Leftrightarrow 4y = 4x - 8 \Leftrightarrow y = x - 2$

Ponto de interseção das mediatrizes:

$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 = -x + 10 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 16 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

Centro: (4,2)

Raio $= \sqrt{(6-4)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$

$C_2: (x-4)^2 + (y-2)^2 = 20$

15.2. **a)** $(4, 2)$; $C_1: (x-7)^2 + (y-1)^2 = 10$

$(4-7)^2 + (2-1)^2 = 10 \Leftrightarrow (-3)^2 + 1^2 = 10$

$\Leftrightarrow 9 + 1 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$ (verdadeiro)

Logo, o centro da circunferência C_2 pertence à circunferência C_1.

b) $O(0,0)$

$C_2: (x-4)^2 + (y-2)^2 = 20$

$(0-4)^2 + (0-2)^2 = 20 \Leftrightarrow (-4)^2 + (-2)^2 = 20$

$\Leftrightarrow 16 + 4 = 20 \Leftrightarrow 20 = 20$ (verdadeiro)

Logo, a origem do referencial pertence à circunferência C_2.

Questão 16

$A(-6, 5)$, $B(-2, 4)$, $C(-2, -1)$

O circuncentro é o ponto de encontro das mediatrizes de $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$.

Mediatriz de $[AB]$:

$(x-(-6))^2+(y-5)^2=(x-(-2))^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+6)^2+(y-5)^2=(x+2)^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+12x+36+y^2-10y+25=$

$=x^2+4x+4+y^2-8y+16$

$\Leftrightarrow -10y+8y=4x-12x+4+16-36-25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2y=-8x-41 \Leftrightarrow y=4x+\dfrac{41}{2}$

Mediatriz de $[BC]$:

$(x-(-2))^2+(y-4)^2=(x-(-2))^2+(y-(-1))^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-4)^2=(x+2)^2+(y+1)^2$

$\Leftrightarrow y^2-8y+16=y^2+2y+1 \Leftrightarrow -8y-2y=1-16$

$\Leftrightarrow -10y=-15 \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}$

Ponto de interseção das mediatrizes:

$\begin{cases} y=4x+\dfrac{41}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}=4x+\dfrac{41}{2} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=8x+41 \\ \underline{\qquad} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x=-38 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{38}{8} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{19}{4} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Circuncentro: $\left(-\dfrac{19}{4}, \dfrac{3}{2}\right)$

Pág. 28

Tarefas de consolidação 2

1. $A(-3, 1)$, $B(3, 5)$, $C(3, -2)$

1.1. **a)** Mediatriz de $[AB]$:

$(x-(-3))^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-5)^2$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-5)^2$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2-2y+1=$

$=x^2-6x+9+y^2-10y+25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2y+10y=-6x-6x+25-1$

$\Leftrightarrow 8y=-12x+24 \Leftrightarrow y=-\dfrac{12}{8}x+\dfrac{24}{8}$

$\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{2}x+3$

Mediatriz de $[BC]$:

$(x-3)^2+(y-5)^2=(x-3)^2+(y-(-2))^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-5)^2=(x-3)^2+(y+2)^2$

$\Leftrightarrow y^2-10y+25=y^2-4y+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10y-4y=4-25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -14y=-21 \Leftrightarrow y=\dfrac{21}{14} \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}$

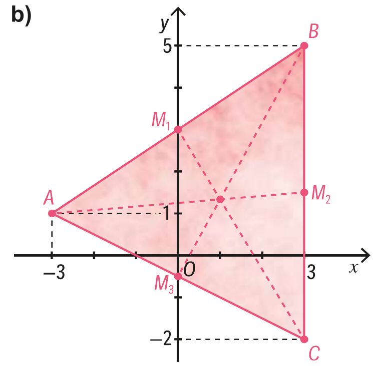
Ponto de interseção das mediatrizes:

$\begin{cases} y=-\dfrac{3}{2}x+3 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}x+3 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3=-3x+6 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=3 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Circuncentro: $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

b)



$M_1\left(\dfrac{-3+3}{2}, \dfrac{1+5}{2}\right)=(0, 3)$

$M_2\left(\dfrac{3+3}{2}, \dfrac{5+(-2)}{2}\right)=\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$

$M_3\left(\dfrac{-3+3}{2}, \dfrac{1+(-2)}{2}\right)=\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

Reta CM_1: $m=\dfrac{-2-3}{3-0}=-\dfrac{5}{3}$; $y=-\dfrac{5}{3}x+3$

Reta AM_2: $m=\dfrac{\frac{3}{2}-1}{3-(-3)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{6}=\dfrac{1}{12}$;

$y=\dfrac{1}{12}x+b$, $A(-3, 1)$;

$1=\dfrac{1}{12}\times(-3)+b \Leftrightarrow 1=-\dfrac{1}{4}+b \Leftrightarrow b=1+\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow b=\dfrac{5}{4}$

$y=\dfrac{1}{12}x+\dfrac{5}{4}$

Interseção das retas CM_1 e AM_2

$\begin{cases} y=-\dfrac{5}{3}x+3 \\ y=\dfrac{1}{12}x+\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{12}x+\dfrac{5}{4}=-\dfrac{5}{3}x+3 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 21x=21 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{12}\times 1+\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{12}+\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{16}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

Baricentro: $\left(1, \dfrac{4}{3}\right)$

1.2. O circuncentro é o centro da circunferência centro $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

O raio é a distância do circuncentro a um dos vértices.

raio $=\sqrt{(-3-1)^2+\left(1-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{(-4)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{16+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{65}{4}}$

$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{65}{4}$

2. $D(0, y)$, $A(-7, 1)$, $C(1, -3)$

2.1. $(x-(-7))^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-(-3))^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+7)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+14x+49+y^2-2y+1=$

$=x^2-2x+1+y^2+6y+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2y-6y=-2x-14x+9-49 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8y=-16x-40 \Leftrightarrow y=-\dfrac{16}{8}x-\dfrac{40}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=2x+5$

2.2. **a)** $y = 2x + 5$

$x = 0\ ;\ y = 2 \times 0 + 5 = 5 \qquad D(0,\ 5)$

b) $M_{[AC]} = \left(\dfrac{-7+1}{2}, \dfrac{1+(-3)}{2}\right) = (-3,\ -1)$

$B(x, y)$

$$\begin{cases} \dfrac{0+x}{2} = -3 \\ \dfrac{5+y}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = -3 \\ 5+y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -7 \end{cases}$$

$B(-6,\ -7)$

c) $D = d(B,D) = \sqrt{(-6-0)^2 + (-7-5)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (-12)^2} = \sqrt{36+144} = \sqrt{180}$

$d = d(A,C) = \sqrt{(-7-1)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{(-8)^2 + 4^2}$

$= \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$

$A = \dfrac{D \times d}{2} = \dfrac{\sqrt{180} \times \sqrt{80}}{2} = \dfrac{\sqrt{14\,400}}{2} = \dfrac{120}{2} = 60$ u.a.

3. $A(-1,\ -2)$, $B(2,\ 0)$, $C(-1,\ y)$

3.1. $(x-(-1))^2 + (y-(-2))^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = (x-2)^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y = -4x - 2x - 1 \Leftrightarrow$

$4y = -6x - 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 6x + 4y + 1 = 0$

3.2. C pertence à mediatriz de [AB]. Assim,

$6 \times (-1) + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow -6 + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y = 5 \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{4} \qquad C\left(-1, \dfrac{5}{4}\right)$

Pág. 29

4. $C(5,8)$; $r_1 = 1$ dm; $r_2 = 3$ dm; $r_3 = 6$ dm

4.1. $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 36$

4.2. Circunferência intermédia

$C(5,8)$; $r_2 = 3$ dm; $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 9$

4.3. Circunferência pequena

$(x-5)^2 + (y-8)^2 = 1 \qquad A(0,\ 11);$

$(0-5)^2 + (11-8)^2 = (-5)^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

B pertence à faixa circular externa: 10 pontos

$B(5,5)$; $(5-5)^2 + (5-8)^2 = 0^2 + (-3)^2 = 9$

B pertence à circunferência de raio 3: 30 pontos

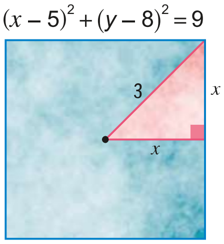
$C(4,\ 2)$;

$(4-5)^2 + (2-8)^2 = (-1)^2 + (-6)^2 = 1 + 36 = 37$

C pertence ao exterior da circunferência maior:
0 pontos

Total: $10 + 30 = 40$ pontos.

5. $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 9$



$3^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow 9 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{9}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{9}{2}}, x > 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Lado do quadrado: $= 2 \times \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$A_{sombreada} = \pi \times 3^2 - (3\sqrt{2})^2 =$

$= 9\pi - 9 \times 2 = 9\pi - 18$

$\approx 10{,}27$ u. a.

6. $A(2,\ 4)$; $C(x,\ -x)$; $P(a,\ b)$

6.1. $d(P,0) = d(P,A) \Leftrightarrow \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}$

$= \sqrt{(a-2)^2 + (b-4)^2}$

Como a soma de dois quadrados é não negativo tem-se que:

$a^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b-4)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = a^2 - 4a + 4 + b^2 - 8b + 16$

$\Leftrightarrow 4a + 8b = 20 \Leftrightarrow a + 2b = 5$

6.2. Equação da mediatriz de $[AO]$: $x + 2y = 5$

C pertence à mediatriz de $[AO]$. Assim,

$x + 2(-x) = 5 \Leftrightarrow x - 2x = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x = 5 \Leftrightarrow x = -5 \qquad C(-5,5)$

6.3. raio $= d(C,A) = \sqrt{(-5-2)^2 + (5-4)^2} =$

$= \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$

$(x+5)^2 + (y-5)^2 = 50$

6.4. $\boxed{x = 0}$

$(0+5)^2 + (y-5)^2 = 50 \Leftrightarrow 25 + (y-5)^2 = 50$

$\Leftrightarrow (y-5)^2 = 25 \Leftrightarrow y - 5 = \pm\sqrt{25}$

$\Leftrightarrow y - 5 = -5 \vee y - 5 = 5 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = 10$

$D(0,10)$

$\boxed{y = 0}$

$(x+5)^2 + (0-5)^2 = 50 \Leftrightarrow (x+5)^2 + 25 = 50$

$\Leftrightarrow (x+5)^2 = 25 \Leftrightarrow x + 5 = \pm\sqrt{25}$

$\Leftrightarrow x + 5 = -5 \vee x + 5 = 5 \Leftrightarrow x = -10 \vee x = 0$

$B(-10,0)$

$M_{[BD]} = \left(\dfrac{0+(-10)}{2}, \dfrac{10+0}{2}\right) = (-5,\ 5) = C$

Logo, $[BD]$ é um diâmetro da circunferência porque contém o centro, C, da circunferência.

Pág. 31

Avaliação formativa 2

1. $P(k,\ 1)$

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

$(k-1)^2 + (1+1)^2 = 4 \Leftrightarrow (k-1)^2 + 4 = 4$

$\Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

Resposta: (C)

2. $r^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}$

$C(1,\ -1)$

Resposta: (A)

3. $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{4}$

$\dfrac{13}{4} = \dfrac{1}{2} \times 2 + \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \dfrac{13}{4} = 1 + \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \dfrac{13}{4} = \dfrac{13}{4}$

(verdadeira)

$3 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{12}{4} \Leftrightarrow 3 = 3$

(verdadeira)

$-\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2} \times (-6) + \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4} = -3 + \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4} = -\dfrac{3}{4}$

(verdadeira)

$5 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \Leftrightarrow 5 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \Leftrightarrow 5 = \frac{10}{4} \Leftrightarrow 5 = \frac{5}{2}$

(falsa)

Resposta: (D)

4. $A(0,\ 1)$, $B(-1,\ -2)$

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = k$

4.1. $(0-4)^2 + (1+2)^2 = k \Leftrightarrow 16 + 9 = k \Leftrightarrow k = 25$

4.2. $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$

$(-1-4)^2 + (-2+2)^2 = 25 \Leftrightarrow (-5)^2 = 25$

$\Leftrightarrow 25 = 25$ (verdadeira)

Logo, B pertence à circunferência.

4.3. $D(x,\ y)$; $C(4,\ -2)$

$$\begin{cases} \frac{0+x}{2} = 4 \\ \frac{1+y}{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ 1 + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -5 \end{cases}$$

$D(8,\ -5)$

4.4. $\overline{AB} = \sqrt{(0-(-1))^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$

$\overline{AD} = \sqrt{(8-0)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36}$

$= \sqrt{100} = 10$

$\overline{BD} = \sqrt{(8-(-1))^2 + (-5-(-2))^2} = \sqrt{9^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$

$10^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{90})^2 \Leftrightarrow 100 = 10 + 90$

$\Leftrightarrow 100 = 100$

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$, logo o triângulo é retângulo em B.

$A_{[ABD]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BD}}{2} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{90}}{2} = \frac{\sqrt{900}}{2} = \frac{30}{2} = 15$ u. a.

4.5. $(x-0)^2 + (y-1)^2 = (x-(-1))^2 + (y-(-2))^2$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4$

$\Leftrightarrow -2y - 4y = 2x + 4 \Leftrightarrow -6y = 2x + 4$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{6}x - \frac{4}{6} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

4.6. O ponto $(1,\ -1)$ não pode ser o incentro porque não está à mesma distância dos lados $[AB]$ e $[BC]$.

4.7. O ortocentro é o ponto de interseção da mediatriz $[AB]$ com a reta de equação $x = 0$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{x}{3} - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$P_1\left(0,\ -\frac{2}{3}\right)$

Mediatriz de $[BC]$:

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow 2x + 8x = 16 - 1$

$\Leftrightarrow 10x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{10} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{x}{3} - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = -\frac{\frac{3}{2}}{3} - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{7}{6} \end{cases} \quad P_2\left(\frac{3}{2},\ -\frac{7}{6}\right)$$

$P_3 = M_{[P_1, P_2]} = \left(\frac{0 + \frac{3}{2}}{2}, \frac{-\frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{6}\right)}{2}\right) = \left(\frac{3}{4},\ -\frac{11}{12}\right)$

$P_4 = M_{[AB]} = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$R = \sqrt{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{12} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{25}{144}} = \sqrt{\frac{125}{72}}$

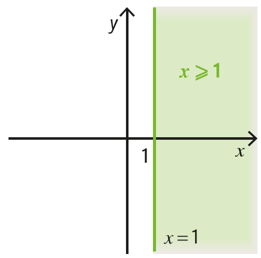
$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{11}{12}\right)^2 = \frac{125}{72}$

Pág. 32

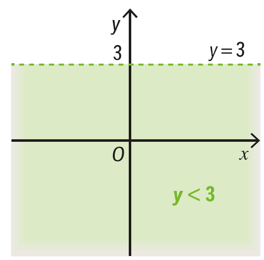
Tarefa inicial 3

1.

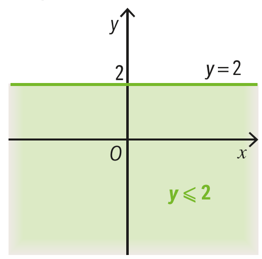
Região 1:



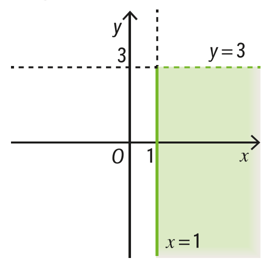
Região 2:



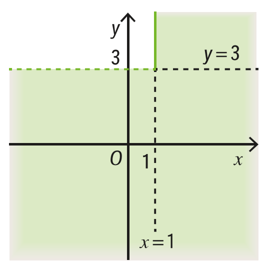
Região 3:



Região 4:



Região 5:



2.1. $A(3,\ 2)$ pertence às regiões 1, 2, 3, 4 e 5.

2.2. $B(2,\ 3)$ pertence às regiões 1 e 5.

3. $P(x,\ y)$

Instrução 2: $y < 3$

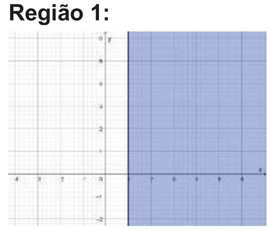
Instrução 3: $y \leqslant 2$

Instrução 4: $x \geqslant 1 \wedge y < 3$

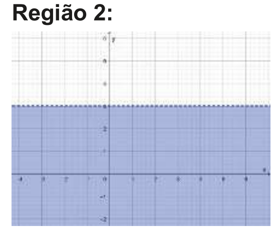
Instrução 5: $x \geqslant 1 \vee y < 3$

4.

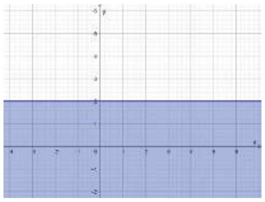
Região 1:



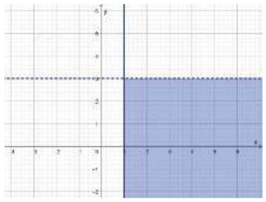
Região 2:



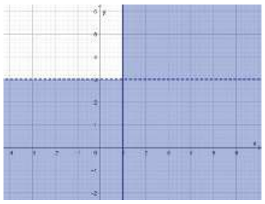
Região 3:



Região 4:



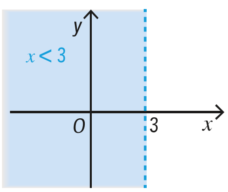
Região 5:



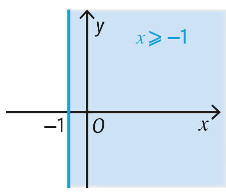
Pág. 34

Questão 17

17.1. $x < 3$

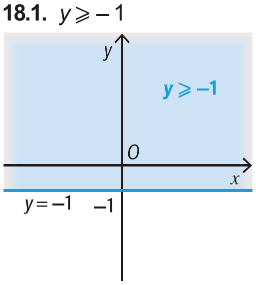


17.2. $x \geqslant -1$

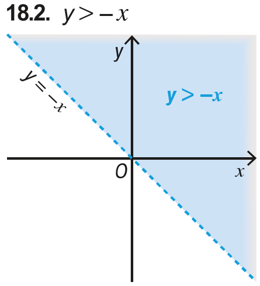


Pág. 34

18.1. $y \geqslant -1$

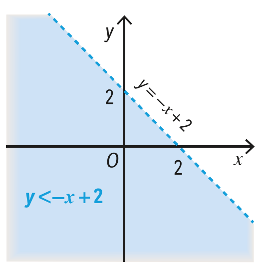


18.2. $y > -x$



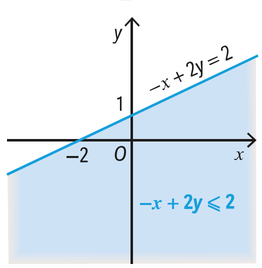
18.3. $y \geqslant -x + 2$

x	$y = -x + 2$
2	0
0	2



18.4. $-x + 2y \leqslant 2 \Leftrightarrow 2y \leqslant x + 2 \Leftrightarrow y \leqslant \frac{1}{2}x + 1$

x	$y = \frac{1}{2}x + 1$
0	1
– 2	0



Questão 19

$A(1,4)$, $B(4,1)$

19.1. Os pontos situados na mediatriz de [AB] são equidistantes de A e de B.
Para os pontos serem mais próximos de A do que de B, têm de ficar no semiplano aberto que contém o ponto A.

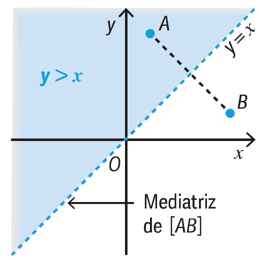
$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = (x - 4)^2 + (y - 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 =$

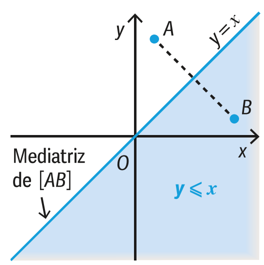
$= x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1$

$\Leftrightarrow -8y + 2y = -8x + 2x \Leftrightarrow -6y = -6x$

$\Leftrightarrow y = x$



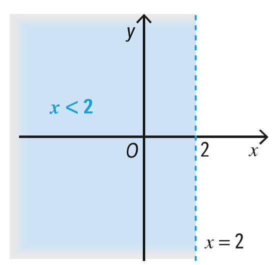
19.2.



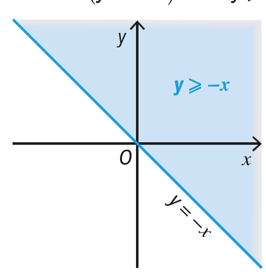
Pág. 36

Questão 20

20.1. $\sim(x \geqslant 2) \Leftrightarrow x < 2$



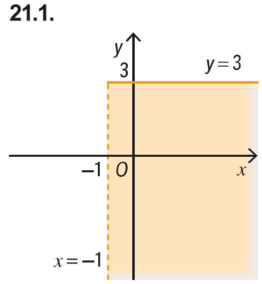
20.2. $\sim(y < -x) \Leftrightarrow y \geqslant -x$



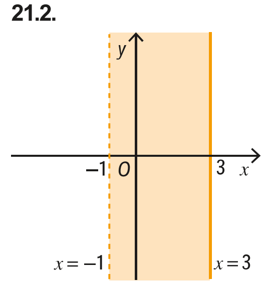
Pág. 37

Questão 21

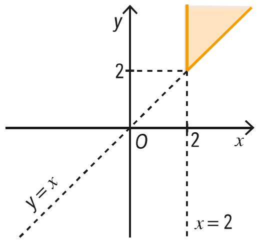
21.1.



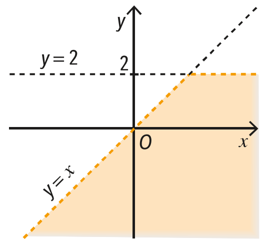
21.2.



21.3.

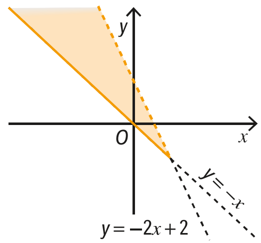


21.4.



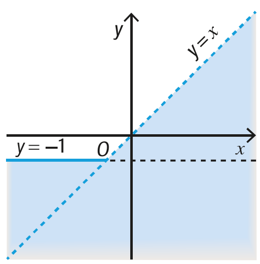
21.5. $y \geqslant -x \wedge y < -2x + 2$

x	$y = -2x + 2$
0	2
1	0



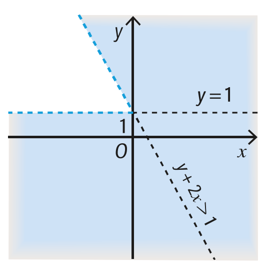
Questão 22

22.1.



22.2. $y + 2x > 1 \vee y < 1$; $y > -2x + 1$

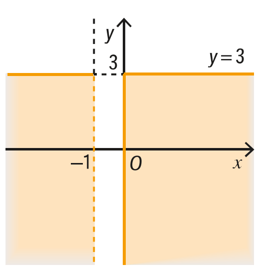
x	$y = -2x + 1$
0	1
$\frac{1}{2}$	0



Pág. 38

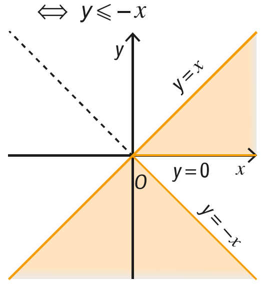
Questão 23

23.1.



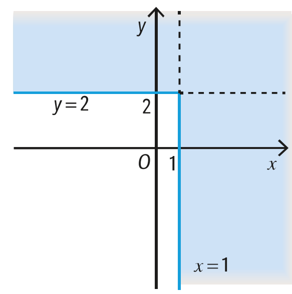
23.2. $(y \leqslant -x \vee y \geqslant 0) \wedge y \leqslant -x$

$\Leftrightarrow y \leqslant -x$

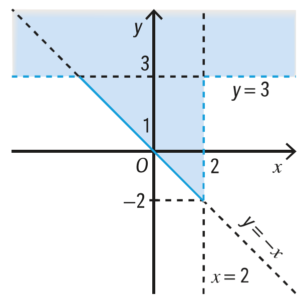


Questão 24

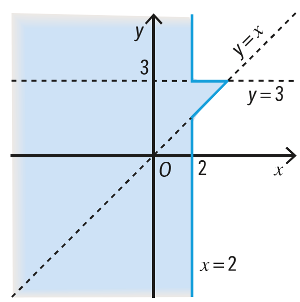
24.1.



24.2.



24.3.



Pág. 39

Questão 25

25.1. $(0,0);(-1,3)$; $m = -3$; $b = 0$

$y = -3x$

$y \leqslant -3x \wedge y \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant y \leqslant -3x$

25.2. $(2,0)$, $(0,2)$; $m = -1$; $b = 2$

$y = -x + 2$

$y \geqslant -x + 2 \wedge x < 2$

25.3. $(0,-2)$, $(2,0)$; $m = 1$; $b = -2$

$y = x - 2$

$(y \geqslant x - 2 \wedge y \leqslant 0) \vee (y \leqslant x - 2 \wedge y \geqslant 0)$

$\Leftrightarrow (x - 2 \leqslant y \leqslant 0) \vee (0 \leqslant y \leqslant x - 2)$

25.4. $(0,0)$, $(-6,4)$; $m = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$; $b = 0$

$y = -\frac{2}{3}x$

$\left(y \geqslant -\frac{2}{3}x \wedge 0 \leqslant y \leqslant 4 \wedge x \leqslant 2\right) \vee \left(x \geqslant 0 \wedge y \leqslant -\frac{2}{3}x\right)$

Pág. 40

Questão 26

26.1. $(x + 3) + y^2 \leqslant 4$

Ponto $(-2,1)$, por exemplo.

$(-2 + 3)^2 + 1^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow 1^2 + 1^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow 2 \leqslant 4$

(verdadeiro)

Logo, o ponto $(-2,1)$ pertence ao círculo.

26.2. Ponto $(-2,2)$, por exemplo.

$(-2+3)^2+2^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow 1^2+2^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow 5 \leqslant 4$ (Falso)

Logo, o ponto $(-2,2)$ não pertence ao círculo, mas ao seu exterior.

Pág. 41

Questão 27

27.1. $A(1,-2)$, $B(3,-4)$

$M_{[AB]}\left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{-2+(-4)}{2}\right) = (2,-3)$

raio $= \overline{AM} = \sqrt{(2-1)^2+(-3-(-4))^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$(x-2)^2+(y-(-3))^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 \leqslant 2$

27.2. $O(0,0)$, $(1,1)$

raio $= \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$

$(x-0)^2+(y-0)^2 > (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 > 2$

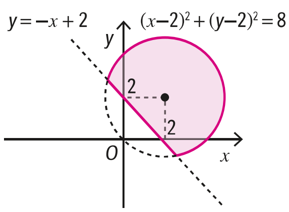
Questão 28

$x^2+y^2<4 \vee x>1 \vee y>0$

Questão 29

$r^2=8 \Leftrightarrow r=\sqrt{8} \Leftrightarrow r=2\sqrt{2}$

$y \geqslant -x+2$



x	$y=-x+2$
0	2
2	0

Pág. 42

Questão 30

30.1. $(x-2)^2+y^2 \geqslant 4 \wedge (x-2)^2+y^2 \leqslant 16$

$\Leftrightarrow 4 \leqslant (x-2)^2+y^2 \leqslant 16$

30.2. $C_1(2,1)$, $C_2(2,0)$

$(x-2)^2+y^2 \geqslant 1 \wedge (x-2)^2+$
$+(y-1)^2 \leqslant 5 \wedge y \leqslant 2$

$\overline{OC_1}^2 = 2^2+1^2$
$\Leftrightarrow \overline{OC_1}^2 = 5$
$\Leftrightarrow \overline{OC_1} = \sqrt{5}$,
$\overline{OC_1} > 0$

30.3. $(-2,0)$, $(0,2)$

$m = \dfrac{2-0}{0-(-2)} = 1$; $b=2$

$y=x+2$

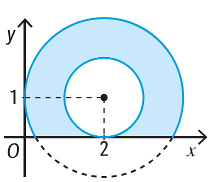
$x^2+y^2>4 \wedge y<x+2 \wedge y>x-2 \wedge$
$\wedge x^2+y^2>4 \wedge x-2<y<x+2$

$(-2,0)$, $(2,0)$
$m=1$;
$b=-2$
$y=x-2$

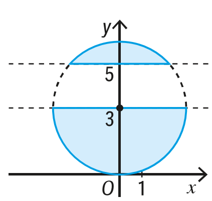
Pág. 43

Questão 31

31.1.



31.2.



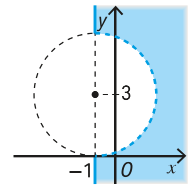
31.3. $x^2+2x+y^2-6y>-1 \wedge x \geqslant -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-6y+9>1+9-1$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1-1+y^2-6x+9-9>-1 \wedge x \geqslant -1$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2>9 \wedge x \geqslant -1$

$C(-1,3)$ e $r=3$



Questão 32

$A(0,3)$ e $B(-5,0)$

$m = \dfrac{0-3}{-5-0} = \dfrac{3}{5}$; $b=3$

$y = \dfrac{3}{5}x+3$

AB: $y = \dfrac{3}{5}x+3$

Circunferência

$C(0,0)$ $r=3$

$x^2+y^2 \geqslant 9 \wedge y \geqslant 0 \wedge y \leqslant \dfrac{3}{5}x+3 \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geqslant 9 \wedge 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{3}{5}x+3 \wedge x<0$

Pág. 44

Tarefas de consolidação 3

1.1. **a)** $6<x<24 \wedge 12<y<30$

b) $(0 \leqslant x \leqslant 6 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 10) \vee$
$(27 \leqslant x \leqslant 36 \wedge 24 \leqslant y \leqslant 30)$

1.2. $P(-k+32, k+2)$

Região azul: $24<x<30 \wedge 6<y<12$

$-k+32>24 \wedge -k+32<30 \wedge k+2<12 \wedge k+2>6$

$\Leftrightarrow -k>-8 \wedge -k<-2 \wedge k<10 \wedge k>4$

$\Leftrightarrow k<8 \wedge k>2 \wedge k<10 \wedge k>4 \Leftrightarrow k \in]4,8[$

2. $\overline{DC}=8$, $A(-4,-3)$, $B(0,-3)$, $C(4,2)$ e $D(-4,2)$

2.1. $A_{[ABC]} = \dfrac{4 \times 5}{2} = 10$ u. a.

2.2. Reta AC:

$m = \dfrac{2-(-3)}{4-(-4)} = \dfrac{5}{8}$

$y = \dfrac{5}{8}x+b$, $C(4,2)$

$2 = \dfrac{5}{8} \times 4+b \Leftrightarrow 2 = \dfrac{5}{2}+b \Leftrightarrow 4 = 5+2b$

$\Leftrightarrow 2b=-1 \Leftrightarrow b=-\dfrac{1}{2}$

$y = \dfrac{5}{8}x-\dfrac{1}{2}$

Reta BC:

$m = \dfrac{2-(-3)}{4-0} = \dfrac{5}{4}$

$y = \dfrac{5}{4}x+b$

$b=-3$

$y = \dfrac{5}{4}x-3$

$y \geqslant -3 \wedge y \leqslant \dfrac{5}{8}x-1 \wedge y \geqslant \dfrac{5}{4}x-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \geqslant -3 \wedge \dfrac{5}{4}x-3 \leqslant y \leqslant \dfrac{5}{8}x-\dfrac{1}{2}$

Pág. 45

3. $(x-k)^2+(y+2)^2 \leqslant k^2+4$

3.1. $(2,0)$

$(2-k)^2+(0+2)^2 \leqslant k^2+4$

$4-4k+k^2+4 \leqslant k^2+4 \Leftrightarrow -4k \leqslant 0$

$\Leftrightarrow 4k \geqslant 4 \Leftrightarrow k \geqslant 1$

Para o ponto (2,1) não pertencer a qualquer círculo desta família, $k<1$, isto é, $k \in]-\infty, 1[$.

3.2. **a)** $k=0$

$x^2+(y+2)^2 \leqslant 4 \qquad A(0,-2)$

b) $x \geqslant 0 \wedge y \leqslant 2x-1 \wedge x^2+(y+2)^2 \leqslant 4$

4.1. $A(0,2)$; $B(0,1)$

$A_{[ABCD]}=\frac{3+2}{2}\times 1=\frac{5}{2}$ u. a.

4.2. $C(2,1)$; $D(3,2)$

$\overline{CD}=\sqrt{(3-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

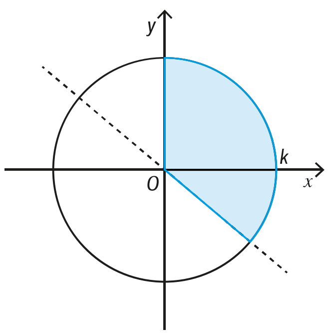
$\left((x-2)^2+(y-1)^2 \leqslant 2 \wedge y>2\right) \vee$

$\wedge \left((x-2)^2+(y-1)^2 \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1 \wedge x<2\right)$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 \leqslant 2 \wedge$

$\wedge [y>2 \vee (0<y<1 \wedge x<2)]$

5.



Raio: k

$A=\frac{1}{4}\pi r^2+\frac{1}{8}\pi r^2=\frac{2}{8}\pi r^2+\frac{1}{8}\pi r^2=\frac{3}{8}\pi r^2$

$A=\frac{3\pi k^2}{8}$

Pág. 47

Avaliação formativa 3

1. (C)

2. (D)

3. $A(x,x)$, $x<0$; $B(1,-3)$, $C(1,2)$

3.1. $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

3.2. $\overline{AC}=\overline{CB} \Leftrightarrow \overline{AC}=5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2}=5$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$(x-1)^2+(x-2)^2=25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+x^2-4x+4=25 \Leftrightarrow 2x^2-6x-20=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 1\times(-10)}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{3-7}{2} \vee x=\frac{3+7}{2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=5$

Como $A \in 3.°$ quadrante, $x=-2$

$A(-2,-2)$

3.3. $B(1,-3)$

$m=\frac{-3-(-2)}{4-0}=-\frac{1}{3}$

$y=-\frac{1}{3}x+b$

$3=-\frac{1}{3}\times 1+b \Leftrightarrow -3=-\frac{1}{3}+b$

$\Leftrightarrow b=-3+\frac{1}{3} \Leftrightarrow b=-\frac{8}{2}$

$y=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$

Resposta: $(x-1)^2+(y-2)^2 \leqslant 25 \wedge y<-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$

Pág. 48

Tarefa inicial 4

AB: $y=-\frac{1}{3}x+b$

$-3=-\frac{1}{3}\times 1+b \Leftrightarrow -3+\frac{1}{3}=b \Leftrightarrow b=-\frac{8}{3}$

$y=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$

$(x-1)^2+(y-2)^2 \leqslant 25 \wedge y<-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$

2. O plano Oxy contém os eixos coordenados Ox e Oy.

3. Plano paralelo a Oxy que passa por P.

Todos os pontos têm a mesma cota de P $(z=4)$.

Plano paralelo a Oxz que passa em P.

Todos os pontos têm a mesma ordenada de P $(y=3)$.

Plano paralelo a Oyz que passa em P.

Todos os pontos têm a mesma abcissa de P $(x=2)$.

Reta paralela ao eixo Ox que passa em P.

Todos os pontos têm a mesma ordenada e a mesma cota de P$(y=3 \wedge z=4)$.

Reta paralela ao eixo Oy que passa em P.

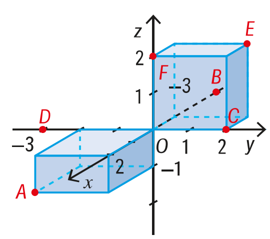
Todos os pontos têm a mesma abcissa e a mesma cota de P$(x=2 \wedge z=4)$.

Reta paralela ao eixo Oz que passa em P.

Todos os pontos têm a mesma abcissa e a mesma cota de P$(x=2 \wedge y=3)$.

Pág. 51

Questão 33



Pág. 52

Questão 34

$O(0,0,0)$; $A(2,0,0)$; $B(2,2,0)$; $C(0,2,0)$

$D(0,2,2)$; $E(0,0,2)$; $F(2,0,2)$; $G(2,2,2)$

Questão 35

$O(0,0,0)$; $A(2,0,-2)$; $B(2,2,-2)$; $C(0,2,-2)$

$D(0,0,-2)$; $E(2,0,0)$; $F(2,2,0)$; $G(0,2,0)$

Pág. 53

Questão 36

$E(4, 0, 2)$; $C(0, 6, 2)$; $D(0, 0, 2)$;

$V_{Prisma} = A_b \times h = \frac{4 \times 6}{2} \times 2 = 24$ u. v.

Questão 37

$\overline{CG} = 6$ cm ; $\overline{BC} = 3$ cm ; $A_{TOTAL} = 216$ cm^2

$2 \times 3\ \overline{AB} + 2 \times 3 \times 6 + 2 \times 6\ \overline{AB} = 216 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\ \overline{AB} + 36 + 12\ \overline{AB} = 216 \Leftrightarrow 18\ \overline{AB} = 180 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 10$

$O(0, 0, 0)$; $A(3, 0, 0)$; $B(3, 10, 0)$; $C(0, 10, 0)$

$D(0, 0, 6)$; $E(3, 0, 6)$; $F(3, 10, 6)$; $G(0, 10, 6)$

Questão 38

38.1. $O(0, 0, 0)$; $A(5, -5, 0)$; $B(5, 0, 0)$; $C(0, -5, 0)$

$D(5, -5, 7)$; $E(5, 0, 7)$; $F(0, 0, 7)$; $G(0, -4, 7)$

38.2. $ABO : z = 0$; $DEF : z = 7$; $BOF : y = 0$; $ACG : y = -5$;

$ABE : x = 5$; $COF : x = 0$

38.3. Face $[COFG]$: $x = 0 \wedge -5 \leqslant y \leqslant 0 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 7$

Face $[ABDE]$: $x = 5 \wedge -5 \leqslant y \leqslant 0 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 7$

Pág. 57

Questão 39

$F(2, 2, 4)$

a) $A(2, -2, 0)$; $B(2, 2, 0)$; $C(-2, 2, 0)$; $D(-2, -2, 0)$

$E(2, -2, 4)$; $F(2, 2, 4)$; $G(-2, 2, 4)$; $H(-2, -2, 4)$

b) $ABF : x = 2$; $BCG : y = 2$; $ABC : z = 0$

$DCG : x = -2$; $ADH : y = -2$; $EFG : z = 4$

c) $AB : x = 2 \wedge z = 0$; $BF : x = 2 \wedge y = 2$

$EH : y = -2 \wedge z = 4$

d) $[AB]$: $x = 2 \wedge y = -2 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 4$

$[DC]$: $x = -2 \wedge z = 0 \wedge -2 \leqslant y \leqslant 2$

$[FG]$: $y = 2 \wedge z = 4 \wedge -2 \leqslant x \leqslant 2$

$\dot{H}G : x = -2 \wedge z = 4 \wedge y \geqslant -2$

$\dot{D}H : x = -2 \wedge y = -2 \wedge z \geqslant 0$

$\dot{B}C : y = 2 \wedge z = 0 \wedge x \leqslant 2$

39.2. a) $EF : x = 2 \wedge z = 4$

Plano Oxz: $y = 0$ Ponto $(2, 0, 4)$

b) $CG : x = -2 \wedge y = 2$

Plano Oxy: $z = 0$ Ponto $(-2, 2, 0)$

c) $FG : y = -2 \wedge z = 4$

Plano Oyz: $x = 0$ Ponto $(0, 2, 4)$

Pág. 58

Tarefas de consolidação 4

1. $G(2, 3, 1)$e $K(2, 1, 4)$

1.1. $O(0, 0, 0)$; $A(2, 0, 0)$; $B(2, 3, 0)$; $C(0, 3, 0)$

$D(0, 3, 1)$; $E(0, 1, 1)$; $F(2, 1, 1)$; $G(2, 3, 1)$

$H(0, 1, 4)$; $I(0, 0, 4)$; $J(2, 0, 4)$; $K(2, 1, 4)$

1.2. a) $IJK : z = 4$

b) $CD : x = 0 \wedge y = 3$

1.3. $P(\alpha^2 - 1, 2 - \alpha, \alpha)$

$BCD : y = 3 \quad 2 - \alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = -1$

$(-1)^2 - 1 = 0$; $2 - (-1) = 3$; $-1 \qquad P(0, 3, -1)$

2.1. $d(A, H) = \frac{d(O, H)}{3} \Leftrightarrow d(O, H) = 3d(A, H)$

Seja $d(O, H) = x$, $d(A, H) = \frac{x}{3}$; $d(O, A) = x - \frac{x}{3} = \frac{2}{3}$

$V_{Cubo\ maior} = x^3$

$V_{Cubo\ menor} = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 = \frac{8}{27}x^3$

$\frac{V_{Cubo\ maior}}{V_{Cubo\ menor}} = \frac{x^3}{\frac{8}{27}x^3} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{27}{8}$

2.2. $d(O, H) = 6$

a) LIJ: $y = 6$

b) $d(O, A) = \frac{2}{3} \times 6 = 4$; AB: $x = 4 \wedge z = 0$

Pág. 59

3. $A(4, 2, -6)$

3.1. $E(4, 0, -4)$; $B(4, 4, -4)$; $H(0, 4, -4)$;

$C(4, 4, 0)$; $I(0, 4, 0)$

3.2. $z = -6$

3.3. $P(-k, 4, k + 1)$

$-k \geqslant 0 \wedge -k \leqslant 4 \wedge k + 1 \leqslant 0 \wedge k + 1 \geqslant -4$

$\Leftrightarrow k \leqslant 0 \wedge k \geqslant -4 \wedge k \leqslant -1 \wedge k \geqslant -5$

$\Leftrightarrow k \in [-4, -1]$

3.4. $x = 2$ e $y = 2$

$V_{Cubo} = 4^3 = 64$

$d(E, A) = \sqrt{(4-4)^2 + (2-0)^2 + (-6-(-4))^2}$

$= \sqrt{4 + (-2)^2} = \sqrt{8}$

$V_{\substack{Prisma\\triangular}} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{8}}{2} \times 4 = 16$

$V_{Casa} = 64 + 16 = 80$ u. v.

$\frac{80}{2} = 40$

$4 \times 4 \times h = 40 \Leftrightarrow h = \frac{40}{16} \Leftrightarrow h = \frac{5}{2}$

$z = -\frac{5}{2}$

Resposta: $x = 2$, $y = 2$ e $z = -\frac{5}{2}$

4. $V = 50$ dm^3; $A_b = 25$ dm^2

4.1. a) $y = 0$

b) $\overline{AB} = 5$; $\overline{BC} = 5$

$x = 5 \wedge y = 5$

c) $V = A_b \times h$

$50 = 25 \times h \Leftrightarrow h = \frac{50}{25} \Leftrightarrow h = 2$

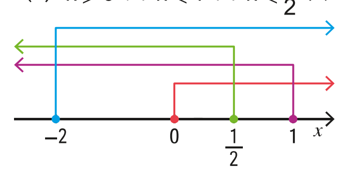
$[FG]$: $x = 5 \wedge z = 2 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 5$

4.2. $P(5k, 1 - 2k, 0)$

$5k \geqslant 0 \wedge 5k \leqslant 5 \wedge 1 - 2k \geqslant 0 \wedge 1 - 2k \leqslant 5$

$\Leftrightarrow k \geqslant 0 \wedge k \leqslant 1 \wedge -2k \geqslant -1 \wedge -2k \leqslant 4$

$\Leftrightarrow k \geqslant 0 \wedge k \leqslant 1 \wedge k \leqslant \frac{1}{2} \wedge k \geqslant -2$



$k \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

4.3. $x = \frac{5}{2}$ ou $y = \frac{5}{2}$

Pág. 61

Avaliação formativa 4

1. **(D)**

2.1. **(B)** **2.2.** **(D)**

3. $G(3, 10, 3)$

3.1. $A(3, 4, -3)$; $B(3, 10, -3)$; $C(-3, 10, -3)$; $D(-3, 4, -3)$; $E(-3, 4, 3)$; $F(3, 4, 3)$; $H(-3, 10, 3)$;

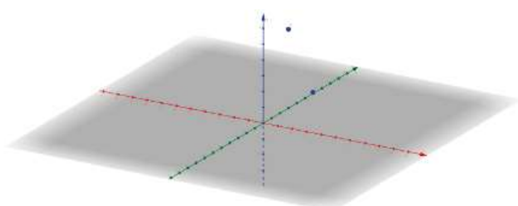
3.2. **a)** $y = 4$
b) $FG: x = 3 \wedge z = 3$
c) $[GH]: y = 10 \wedge z = 3 \wedge -3 \leqslant x \leqslant 3$
d) $\dot{G}H: x = 3 \wedge y = 10 \wedge z \leqslant 3$

3.3. **a)** Reta CH **b)** Segmento de reta $[AB]$
c) Face $[ADEF]$ **d)** Ponto F
e) Semirreta $\dot{C}B$

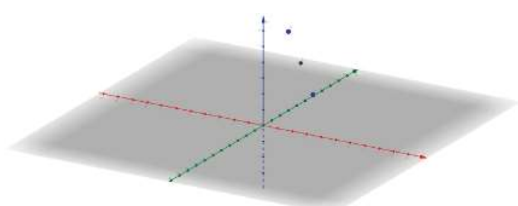
Pág. 62

Tarefa inicial 5

1.



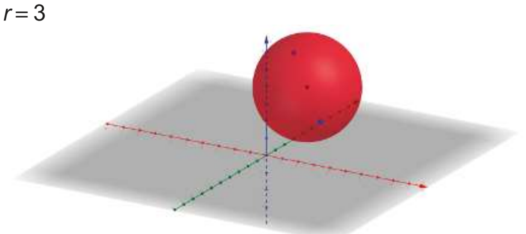
2.



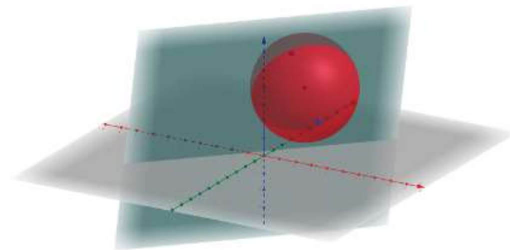
$C(2, 1, 4)$

3.

4. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 9$
$C(2, 1, 4)$
$r = 3$



5. Equação do plano mediador de $[AB]$:
$-2x + 2y + z = 2$.
Círculo de centro $C(2, 1, 4)$ contido no plano mediador de $[AB]$.



6. Não. A interseção pode ser um ponto ou o conjunto vazio.

Pág. 63

Questão 40

$A(-3, 5, 0)$; $B(5, 3, -1)$; $C\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{2}{3}\right)$

40.1. $M_{[AB]}\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{5+3}{2}, \frac{0+(-1)}{2}\right) = \left(1, 4, -\frac{1}{2}\right)$

$M_{[AC]}\left(\frac{-3+\frac{1}{2}}{2}, \frac{5+(-1)}{2}, \frac{0+\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}\right) = \left(\frac{-\frac{5}{2}}{2}, 2, \frac{-\frac{3}{2}}{2}\right)$

$= \left(\frac{-5}{4}, 2, -\frac{2}{6}\right) = \left(\frac{-5}{4}, 2, -\frac{1}{3}\right)$

$M_{[BC]}\left(\frac{5+\frac{1}{2}}{2}, \frac{3+(-1)}{2}, \frac{-1+\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}\right) = \left(\frac{\frac{11}{2}}{2}, 1, \frac{-\frac{5}{3}}{2}\right)$

$= \left(\frac{11}{4}, 1, -\frac{5}{6}\right)$

40.2. $D(x, y, z)$

$\frac{-3+x}{2} = 5 \wedge \frac{5+y}{2} = 3 \wedge \frac{0+z}{2} = -1$
$\Leftrightarrow -3+x = 10 \wedge 5+y = 6 \wedge z = -2$
$\Leftrightarrow x = 13 \wedge y = 1 \wedge z = -2$
$D(13, 1, -2)$

Pág. 64

Questão 41

$A(-2, 1, -4)$; $B(2, 2, -3)$; $C(-1, 5, -3)$; $D(0, 3, -5)$;

41.1. $\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-2)^2 + (-4-(-3))^2}$
$= \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1+1}$
$= \sqrt{18}$

$\overline{AC} = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (1-5)^2 + (-4-(-3))^2}$
$= \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+16+1}$
$= \sqrt{18}$

$\overline{BC} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (2-5)^2 + (-3-(-3))^2}$
$= \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9+9}$
$= \sqrt{18}$

$\overline{AD} = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-3)^2 + (-4-(-5))^2}$
$= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1}$
$= \sqrt{9} = 3$

$\overline{BD} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-3)^2 + (-5-(-5))^2}$
$= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4}$
$= \sqrt{9} = 3$

41.2. **a)** O triângulo $[ABC]$ é equilátero, porque $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$.

b) O triângulo $[ABD]$ é isósceles, porque $\overline{AD}=\overline{BD}$.

$(\sqrt{18})^2=3^2+3^2 \Leftrightarrow 18=9+9 \Leftrightarrow 18=18$ **(V)**

O triângulo $[ABD]$ é retângulo em D porque $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$.

Pág. 65

Questão 42

$A(-5,-15,40)$; $B(-2,10,50)$

42.1. $d(A,O)=\sqrt{(-5-0)^2+(-15-0)^2+(40-0)^2}$

$=\sqrt{(-5)^2+(-15)^2+40^2}=\sqrt{1850}\approx 43$

43 u. c. $=43\times 10=430$ m

$d(B,O)=\sqrt{(-2-0)^2+(10-0)^2+(50-0)^2}$

$=\sqrt{(-2)^2+(10)^2+50^2}=\sqrt{2604}\approx 51$

51 u.c. $=51\times 10=510$ m

Resposta: A Ana encontra-se a 430 metros do alvo e a Beatriz a 510 metros.

42.2. $d(A,B)=\sqrt{(-5-(-2))^2+(-15-10)^2+(40-50)^2}=$

$=\sqrt{(-3)^2+(-25)^2+(-10)^2}=\sqrt{734}\approx 27{,}1$

$27{,}1\times 10=271$ metros

Resposta: A Ana encontra-se a 270 metros de distância da Beatriz.

Pág. 67

Questão 43

43.1. **a)** $y=1 \Leftrightarrow y-1=0$

b) $x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow 2x-3=0$

c) $z=2 \Leftrightarrow z-2=0$

d) $O(0,0,0)$; $F(3,2,4)$

$x^2+y^2+z^2=(x-3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=x^2-6x+9+y^2-4y+4+$
$+z^2-8z+16$

$\Leftrightarrow 6x+4y+8z-9-4-16=0$

$\Leftrightarrow 6x+4y+8z-29=0$

e) $E(3,0,4)$; $G(0,2,4)$

$(x-3)^2+y^2+(z-4)^2=x^2+(y-2)^2+(z-4)^2$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2=x^2+y^2-4y+4$

$\Leftrightarrow -6x+4y+9-4=0 \Leftrightarrow -6x+4y+5=0$

$\Leftrightarrow 6x-4y-5=0$

f) $B(0,2,0)$; $E(3,0,4)$

$x^2+(y-2)^2+z^2=(x-3)^2+y^2+(z-4)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4+z^2=x^2-6x+9+y^2+$
$+z^2-8z+16$

$\Leftrightarrow 6x-4y+8z+4-9-16=0$

$\Leftrightarrow 6x-4y+8z-21=0$

43.2. **a)** Sejam P, Q e R os pontos pedidos, pertencentes aos eixos Ox, Oy e Oz, respetivamente.

$[BE]$: $6x-4y+8z-21=0$

$P(x,0,0)$; $Q(0,y,0)$; $R(0,0,z)$

$y=0$ e $z=0$: $6x-4\times 0+8\times 0-21=0$

$\Leftrightarrow 6x=21 \Leftrightarrow x=\frac{21}{6} \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$

$P\left(\frac{7}{2},0,0\right)$

$x=0$ e $z=0$: $6\times 0-4y+8\times 0-21=0$

$\Leftrightarrow -4y=21 \Leftrightarrow y=-\frac{21}{4}$

$Q\left(0,-\frac{21}{4},0\right)$

$x=0$ e $y=0$: $6\times 0-4\times 0+8z-21=0$

$\Leftrightarrow 8z=21 \Leftrightarrow z=\frac{21}{8}$

$R\left(0,0,\frac{21}{8}\right)$

b) $x=0 \wedge y=-\frac{5}{4}$. Seja S o ponto pedido.

$[BE]$: $6x-4y+8z-21=0$

$x=0$ e $y=-\frac{5}{4}$: $6\times 0-4\times\left(-\frac{5}{4}\right)+8z-21=0$

$\Leftrightarrow 5+8z-21=0 \Leftrightarrow 8z=16 \Leftrightarrow z=2$

$R\left(0,-\frac{5}{4},2\right)$

c) Reta FG: $y=2 \wedge z=4$. Seja T o ponto pedido.

$[BE]$: $6x-4y+8z-21=0$

$y=2$ e $z=4$: $6x-4\times 2+8\times 4-21=0$

$\Leftrightarrow 6x-8+32-21=0 \Leftrightarrow 6x+3=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{6} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ $\qquad T\left(-\frac{1}{2},2,4\right)$

Pág. 69

Questão 44

44.1. Superfície esférica de centro $(3,1,0)$ e raio $\sqrt{3}$.

$(r^2=3 \Leftrightarrow r=\sqrt{3})$

44.2. Esfera de centro $(-1,-2,0)$ e raio 5 $(r^2=25 \Leftrightarrow r=\sqrt{5}\ ,\ r>0)$

Questão 45

$A(1,2,-3)$; $B(-3,6,-1)$

45.1. $r=\overline{AB}$

$\overline{AB}=\sqrt{(1-(-3))^2+(2-6)^2+(-3-(-1))^2}$

$=\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=6$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=36$

45.2. $centro=M_{[AB]}\left(\frac{1+(-3)}{2},\frac{2+6}{2},\frac{-3+(-1)}{2}\right)$

$=(-1,4,-2)$

$raio=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{6}{2}=3$

$(x+1)^2+(y-4)^2+(z+2)^2\leqslant 9$

Pág. 70

Questão 46

46.1. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-30=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4-4+y^2-2y+$
$+1-1+z^2+2z+1-1-30=0$

$\left(\frac{-4}{2}\right)^2=(-2)^2=4$

$\left(\frac{-2}{2}\right)^2=(-1)^2=1$

$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-1)^2-1+$
$+(z+1)^2-1-30=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=36$

Superfície esférica de centro $(2,1,-1)$ e raio 6.

46.2. $x^2+y^2+z^2-6z\leqslant 0$

$\left(\frac{-6}{2}\right)^2=(-3)^2=9$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6z+9-9\leqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+(z-3)^2\leqslant 0$

Esfera de centro $(0,0,3)$ e raio 3.

Questão 47

$x^2+(y-8)^2+(z+1)^2 \leqslant 100$

47.1. Centro $(0, 8, -1)$; raio = 10

47.2.

a) $y=8$

$y=8 \wedge x^2+(y-8)^2+(z+1)^2 \leqslant 100$

$\Leftrightarrow x^2+(8-8)^2+(z+1)^2 \leqslant 100$

$\Leftrightarrow x^2+(z+1)^2 \leqslant 100$

Círculo de centro $(0, 8, -1)$ e raio 10, contido no plano $y=8$.

b) $z=7$

$z=7 \wedge x^2+(y-8)^2+(z+1)^2 \leqslant 100$

$\Leftrightarrow x^2+(y-8)^2+(7+1)^2 \leqslant 100$

$\Leftrightarrow x^2+(y-8)^2 \leqslant 36$

Círculo de centro $(0, 8, 7)$ e raio 6, contido no plano $z=7$.

Questão 48

48.1. $x^2+y^2+z^2-2x+4y \leqslant 11$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2+4y+4-4+z^2 \leqslant 11$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+z^2 \leqslant 11$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+z^2 \leqslant 16$

$\left(-\frac{2}{2}\right)^2=(-1)^2=1$

$\left(\frac{4}{2}\right)^2=2^2=4$

Centro $(1, -2, 0)$ e raio 4

48.2. $x=1+4 \Leftrightarrow x=5$

$x=1-4 \Leftrightarrow x=-3$

Resposta: $x=-3$ e $x=5$

48.3. $x=0 \wedge (x-1)^2+(y+2)^2+z^2 \leqslant 16$

$\Leftrightarrow (0-1)^2+(y+2)^2+z^2 \leqslant 16 \Leftrightarrow (y+2)^2+z^2 \leqslant 15$

Círculo de centro $(0, -2, 0)$ e raio $\sqrt{15}$, contido no plano $x=0$.

Questão 49

$C(1, -2, 2)$; $O(0, 0, 0)$

49.1. raio = $\overline{CO}=\sqrt{(1-0)^2+(-2-0)^2+(2-0)^2}$

$=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9$

49.2. $z=2+3 \Leftrightarrow z=5$

$z=2-3 \Leftrightarrow z=-1$

Resposta: $z=-1$ e $z=5$

49.3. $P(a, a, a)$

$(a-1)^2+(a+2)^2+(a-2)^2=9$

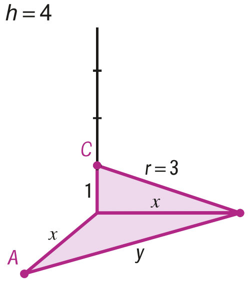
$\Leftrightarrow a^2-2a+1+a^2+4a+4+a^2-4a+4=9$

$\Leftrightarrow 3a^2-2a=0 \Leftrightarrow a(3a-2)=0$

$\Leftrightarrow a=0 \vee 3a-2=0$

$\Leftrightarrow a=0 \vee a=\frac{2}{3}$ $\qquad P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

49.4. $h=4$



$3^2=x^2+1 \Leftrightarrow x^2=8 \Leftrightarrow x=\sqrt{8},\ x>0$

$y^2=\left(\sqrt{8}\right)^2+\left(\sqrt{8}\right)^2 \Leftrightarrow y^2=8+8 \Leftrightarrow y^2=16$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{16},\ y>0 \Leftrightarrow y=4$

$V=\frac{1}{3}\times A_b\times h=\frac{1}{3}\times 4^2\times 4=\frac{64}{3}$ u. v.

Pág. 72

Tarefas de consolidação 5

1. Altura da pirâmide = 2 cm

1.1. $x_V=\frac{2}{2}=1$; $y_V=2\times 2=4$; $z_V=\frac{2}{2}=1$

$V(1, 4, 1)$

1.2. $V_{Sólido}=V_{Cubo}+V_{Pirâmide}$

$2^3+\frac{1}{3}\times 2^2\times 2=\frac{32}{3}$ cm^3

1.3. $E(0, 0, 2)$; $V(1, 4, 1)$

Plano mediador de $[EV]$:

$x^2+y^2+(z-2)^2=(x-1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4z+4=$

$=x^2-2x+1+y^2-8y+16+z^2-2z+1$

$\Leftrightarrow 2x+8y-4z-14=0$

$\Leftrightarrow x+4y-z-7=0$

$P(x, 0, 0)$

$y=0 \wedge z=0 \wedge x+4y-z-7=0$

$\Leftrightarrow x+4\times 0-0-7=0 \Leftrightarrow x=7$; $P(7, 0, 0)$

1.4. Centro $(1, 1, 1)$; $r=1$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \leqslant 1$

1.5. $A(2, 0, 0)$; $(1, 1, 1)$

Raio$=\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{3}$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$

1.6. $V_{Cubo}=8$; $V_{pirâmide}=\frac{8}{3}=\frac{1}{3}\times 8=\frac{1}{3}V_{Cubo}$

$y=\frac{4}{3}$, logo $a=\frac{4}{3}$

1.7. $E(0, 0, 2)$; $B(2, 2, 0)$

Plano mediador de $[EB]$:

$x^2+y^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4z+4=x^2-4x+4+y^2-4y+4+z^2$

$\Leftrightarrow 4x+4y-4z-4=0 \Leftrightarrow x+y-z-1=0$

1.8. **a)** $y=4 \wedge z=1$

b) $F(2, 0, 2)$ $C(0, 2, 0)$

$M_{[FC]}\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right)=(1, 1, 1)$

$z=1$

1.9. $\overline{HI}=\overline{IJ}=\overline{JK}=\overline{KH}$

$B(2, 2, 0)$; $V(1, 4, 1)$; $C(0, 2, 0)$

$M_{[BV]}\left(\frac{2+1}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{0+1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)=H$

$M_{[CV]}\left(\frac{0+1}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{0+1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)=I$

$\overline{IH}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+(3-3)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{2}}=\sqrt{1}=1$

$A=1\times 1=1$ cm^2

1.10. $P(\alpha, \beta, 9)$

$O(0, 0, 0)$; $V(1, 4, 1)$

Plano mediador de $[OV]$:

$x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=x^2-2x+1+y^2-8y+16+z^2-2z+1$

$\Leftrightarrow\ 2x+8y+2z-1-16-1=0$
$\Leftrightarrow\ 2x+8y+2z-18=0 \Leftrightarrow x+4y+z-9=0$
$\alpha+4\beta+9-9=0 \ \Leftrightarrow\ \alpha=-4\beta$

Pág. 73

2.1. $A(1,-1,-9)$
$x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=81$
$1^2+(-1-3)^2+(-9+1)^2=81 \ \Leftrightarrow\ 1+16+64=81$
$\Leftrightarrow\ 81=81$
Logo, o ponto A pertence à superfície esférica.

2.2. $B(x,y)$; $C(0,3,-1)$
$\frac{1+x}{2}=0 \ \wedge\ \frac{-1+y}{2}=3 \wedge \frac{-9+z}{2}=-1$
$\Leftrightarrow\ 1+x=0 \ \wedge\ -1+y=6 \ \wedge\ -9+z=-2$
$\Leftrightarrow\ x=-1 \ \wedge\ y=7 \ \wedge z=7$
$B(-1,7,7)$

2.3. $x=1 \wedge y=11 \wedge x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=81$
$\Leftrightarrow 1^2+(11-3)^2+(z+1)^2=81$
$\Leftrightarrow 1+64+(z+1)^2=81 \Leftrightarrow (z+1)^2=16$
$\Leftrightarrow z+1=\pm\sqrt{16} \Leftrightarrow z+1=-4 \ \vee\ z+1=4$
$\Leftrightarrow z=-5 \ \vee\ z=3$
$D(1,11,-5)$; $E(1,11,3)$
$\overline{CD}=\sqrt{(1-0)^2+(11-3)^2+(-5-(-1))^2}$
$=\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}=\sqrt{81}=9$
$\overline{CE}=\sqrt{(1-0)^2+(11-3)^2+(3-(-1))^2}$
$=\sqrt{1^2+8^2+4^2}=\sqrt{81}=9$
$\overline{DE}=\sqrt{(1-1)^2+(11-11)^2+(-5-3)^2}=\sqrt{(-8)^2}$
$=\sqrt{64}=8$
$P_{[CDE]}=2\times 9+8=26$ u. c.

2.4. Plano Oxy: $z=0$
$z=0 \ \wedge\ x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=81$
$\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2+1^2=81 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=80$
Circunferência de centro $(0,3,0)$ e raio $\sqrt{80}$ contida no plano $z=0$.
$A=\pi\times\left(\sqrt{80}\right)^2=80\pi$ u.a.

3. $A_{Calota}=2\pi r h$; $V_{Calota}=\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$

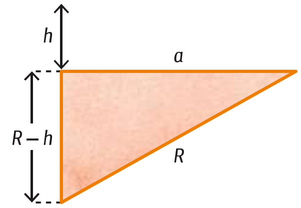
3.1. $S:(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=25$
$\alpha: z=-3$
$S\cap\alpha: z=-3 \ \wedge\ (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=25$
$\Leftrightarrow\ (x+1)^2+(y-1)^2+(-3)^2=25$
$\Leftrightarrow\ (x+1)^2+(y-1)^2=16$
Circunferência de centro $(-1,1,-3)$ e raio 4.

Calota pequena
$A=2\pi\times5\times2=20\pi$ u.a.
$V=\frac{\pi\times2^2}{3}(3\times5-2)=$
$=\frac{4}{3}\pi\times13=\frac{52}{3}\pi$ u.v.

$r^2=(r-h)^2+a^2$
$\Leftrightarrow\ 25=(r-h)^2+16$
$\Leftrightarrow\ (r-h)^2=9$
$\Leftrightarrow\ r-h=\sqrt{9}$, $(r-h>0)$
$\Leftrightarrow\ 5-3=h \ \Leftrightarrow h=2$

Calota grande
$A=2\pi\times5\times7=70\pi$ u.a.
$h_1=5+2=7$
$V=\frac{\pi\times7^2}{3}(3\times5-7)=\frac{49}{3}\pi\times8=\frac{392}{3}\pi$ u.v.

3.2. $V_{Calota}=\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$



$r^2=a^2+(r-h)^2 \Leftrightarrow r^2=a^2+r^2-2hr+h^2$
$\Leftrightarrow\ h^2=2hr-a^2 \Leftrightarrow h^2+a^2=2hr \Leftrightarrow r=\frac{h^2+a^2}{2h}$
$V_{Calota}=\frac{\pi h^2}{3}\left(3\times\frac{h^2+a^2}{2h}-h\right)$
$=\frac{\pi h^2}{3}\left(\frac{3}{2}h+\frac{3a^2}{2h}-h\right)=\frac{3\pi h^3}{6}+\frac{3\pi h^2a^2}{6h}-\frac{\pi h^3}{3}$
$=\frac{3\pi h^3}{6}+\frac{3\pi ha^2}{6}-\frac{2\pi h^3}{6}=\frac{\pi h}{6}(3a^2+h^2)$

Pág. 75

Avaliação formativa 5

1. (C)
$x^2+y^2=\overline{AB}^2 \ \wedge\ z=0$ é uma circunferência de centro na origem do referencial e raio $\overline{AB}$, contida no plano $z=0$.

2. $C(2,5,3)$; $D(2,5,0)$
A e B têm a mesma abcissa, a mesma cota e ordenadas diferentes.
$y_A=5-r$; $y_B=5+r$
Se $r=3$, $y_A=5-3=2$; $y_B=5+3=8$
(B)

3.1. **a)** $x=2 \ \wedge\ y=1$
b) $y=-1$

3.2. $V_{Pedido}=V_{Cubo}-V_{esfera}=2^3-\frac{4}{3}\pi\times1^2\approx 3{,}81$ u. v.

3.3. $P(1,0,1)$; $H(0,-2,2)$
$\overline{PH}=\sqrt{(1-0)^2+(0-(-2))^2+(1-2)^2}$
$=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ u. c.

3.4. $A'(-2,2,0)$; $E'(-2,2,2)$; $H'(0,2,2)$

3.5. $E(2,-2,2)$; $O(0,0,0)$
Plano mediador de $[EO]$:
$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=x^2+y^2+z^2$
$\Leftrightarrow\ x^2-4x+4+y^2+4y+4+z^2-4z+4=x^2+y^2+z^2$
$\Leftrightarrow\ -4x+4y-4z+12=0 \Leftrightarrow\ x-y+z-3=0$

Pág. 76

Tarefa inicial 6

1.1. **a)** Braga e Vila Real, por exemplo.
b) Aveiro e Évora, por exemplo.

1.2. Às 6 horas, o vento soprou de sul para norte com uma intensidade de 10 km/h.
Às 12 horas, soprou de oeste para este, mantendo a intensidade de 10 km/h.
Às 18 horas, soprou de norte para sul e a intensidade ficou reduzida a 5 km/h.

2. Situação I: $\vec{d}$; Situação II: $\vec{c}$
Situação III: $\vec{g}$; Situação IV: $\vec{a}$
Situação V: $\vec{f}$

Pág. 78

Questão 50

50.1. **a)** $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$

b) $\overrightarrow{HG}$, por exemplo.

50.2. $\vec{u} \neq \overrightarrow{FB}$ porque têm direções diferentes.

Pág. 79

Questão 51

51.1. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{EA}$, por exemplo

51.2. $\overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{BC}$, por exemplo

51.3. $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HF}$ e $\overrightarrow{AB}$

Pág. 80

Questão 52

$\|\overrightarrow{AB}\| = 2$ cm ; $\|\overrightarrow{AG}\| = 2{,}5$ cm

52.1. **a)** $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{GF}$, por exemplo

b) $\overrightarrow{FB}$ e $\overrightarrow{BH}$, por exemplo

52.2. $\|\overrightarrow{BH}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CH}\|^2 \Leftrightarrow 2{,}5^2 = 2^2 + \|\overrightarrow{CH}\|^2$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{CH}\|^2 = 6{,}25 - 4 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{CH}\|^2 = 2{,}25$

Como $\|\overrightarrow{CH}\| > 0$, $\|\overrightarrow{CH}\| = \sqrt{2{,}25} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{CH}\| = 1{,}5$ cm.

Pág. 83

Questão 53

53.1. E **53.2.** I **53.3.** H **53.4.** $\overrightarrow{DB}$

53.5. $\overrightarrow{AB}$, por exemplo **53.6.** $\overrightarrow{AC}$

53.7. $\overrightarrow{DG}$, por exemplo **53.8.** $\overrightarrow{HD}$, por exemplo

53.9. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{AF}$, por exemplo

53.10. $\overrightarrow{EC}$, por exemplo

53.11. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HF} = \vec{0} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HF}$, por exemplo

53.12. $\overrightarrow{IH}$, por exemplo **53.13.** $\vec{0}$, por exemplo

Pág. 84

Questão 54

54.1. $\overrightarrow{AN}$, por exemplo

54.2. $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$, por exemplo

53.3. $P + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{FQ} = Q + \overrightarrow{QF} = F$

54.4. $\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{NR} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{NR} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MD}$

54.5. $\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{NE} - \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{EM} = \vec{0}$

Pág. 85

Questão 55

55.1. $3\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{KL}$, por exemplo

55.2. $2(\vec{a} + \vec{b}) = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC}$, por exemplo

55.3. $3(\vec{b} - \vec{a}) = 3(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK}) = 3\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{LF}$

55.4. $-3(\vec{a} + \vec{b}) = -3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = -3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{CP}$

Questão 56

56.1. $\vec{b} = -\frac{6}{4}\vec{a} \Leftrightarrow \vec{b} = -\frac{3}{2}\vec{a}$ e $\vec{a} = -\frac{2}{3}\vec{b}$

56.2. $\vec{c} = -\frac{8}{4}\vec{a} \Leftrightarrow \vec{c} = -2\vec{a}$ e $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{c}$

56.3. $\vec{d} = \frac{3}{4}\vec{a}$ e $\vec{a} = \frac{4}{3}\vec{d}$

Pág. 88

Questão 57

57.1. $3\vec{a} - 2\vec{b} - 3(\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{a} + 3\vec{b}$

$= 3\vec{a} - 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{b} = \vec{b}$

57.2. $-2(3\vec{a}) - 2(\vec{b} - 2\vec{a}) = -6\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{a}$

$= -6\vec{a} + 4\vec{a} - 2\vec{b} = -2\vec{a} - 2\vec{b}$

57.3. $(2-3)\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + 2(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{a} + 2\vec{b}$

$= \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} = \frac{2}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

Questão 58

$\vec{u} = 3\vec{a} - 2(\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a} - 2\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}$

$\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}) - \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{a}$

$= \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{a} - \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{2}\vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

$= \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{b} = \frac{2}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

$\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} = -2\left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = -2\vec{v}$

$\vec{u} = -2\vec{v}$, logo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

$\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} = 2\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) = 2\vec{w}$

$\vec{u} = 2\vec{w}$, logo $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares.

$\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} = -\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) = -\vec{w}$

$\vec{v} = -\vec{w}$, logo $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são colineares.

Questão 59

59.1.

$\frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{IK} - \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{LA}$

$= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KA}$

$= \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AK} = \vec{0}$

59.2. $2\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{CE} - 2\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{CF}$

$= 2\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EC} = 2(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{CF}) + \overrightarrow{EC}$

$= 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}) + \overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$

$= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BF}$

59.3. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BG}$

$= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BJ}$

$= 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BJ}) = 2\overrightarrow{AK}$

Pág. 89

Questão 60

Para provar que [$ABDF$] é um paralelogramo, basta provar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FD}$, pois se um quadrilátero tem dois lados paralelos com o mesmo comprimento, é necessariamente um paralelogramo.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$= 2\overrightarrow{FC} + 2\overrightarrow{CE} = 2(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE}) = 2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD}$

Questão 61

Para provar que $[POMN]$ é um paralelogramo.
Para isso, basta provar que $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{MN}$.
Pelo exemplo 57, sabemos que $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ e que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Logo, $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{MN}$. Então $[POMN]$ é um paralelogramo.

Pág. 90

Tarefas de consolidação 6

1.1. **a)** $\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{LA}$, por exemplo
b) 12

1.2. **a)** $A + \overrightarrow{JH} = N$
b) $M + \overrightarrow{HF} = B$
c) $\overrightarrow{LN} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LE}$, por exemplo
d) $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{MB}$, por exemplo
e) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{MG}$, por exemplo
f) $\overrightarrow{LN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{JH}$, por exemplo

1.3. $\|\overrightarrow{AM}\| = 3$ e $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$
a) $\|\overrightarrow{EL}\| = 2 \times \|\overrightarrow{AB}\| = 2 \times 4 = 8$
b) $\|\overrightarrow{BM}\|^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{BM}\|^2 = 25$
$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{BM}\| = \sqrt{25}, \|\overrightarrow{BM}\| > 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{BM}\| = 5$
c) $\|\overrightarrow{AE}\|^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AE}\|^2 = 100$
$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{100}, \|\overrightarrow{AE}\| > 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AE}\| = 10$
d) $\|\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{NF}\| = \|\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FN}\| = \|\overrightarrow{EN}\| = \|\overrightarrow{BM}\| = 5$

2. $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$ $\vec{u} = \overrightarrow{AG}$ $\vec{v} = \overrightarrow{AK}$

2.1. **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AH} = \vec{u}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$
$= 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF}$
$= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$
$= 3\overrightarrow{AB} + 3\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}\right) = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BK}$
$= 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}\right) = 3\overrightarrow{AK} = 3\vec{v}$

2.2. Como $\vec{u} = 3\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

Pág. 91

3.1. $V_{Cubo} + V_{Pirâmide} = 80 \Leftrightarrow 4^3 + \frac{1}{3} \times 4^2 \times h = 80$
$\Leftrightarrow 64 + \frac{16}{3}h = 80 \Leftrightarrow \frac{16}{3}h = 16 \Leftrightarrow h = \frac{3 \times 16}{16}$
$\Leftrightarrow h = 3$

3.2. **a)** $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BD}\|^2 + 2\|\overrightarrow{BG}\|^2 =$
$= \frac{1}{2} \times 32 + 2 \times 4 = 16 + 8 = 24$

$\overline{BD}^2 = 4^2 = 4^2$
$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 32, \overline{BD} > 0$
$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = \sqrt{32}$

b) $\|\overrightarrow{GI}\|^2 = 3^2 + \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2$
$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{GI}\|^2 = 9 + \frac{32}{4} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{GI}\|^2 = 17, \|\overrightarrow{GI}\| > 0$
$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{GI}\| = \sqrt{17}$

3.3. **a)** $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{EG}$, por exemplo
b) $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HE} = \vec{0}$

3.4. **a)** $B + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IH} = B + \overrightarrow{GH} = C$
b) $I - \frac{3}{4}\overrightarrow{DE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = I + \frac{3}{4}\overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = G$

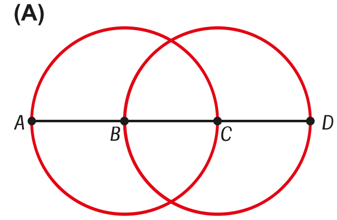
4. $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DE}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$

Pág. 93

1.1. **(B)**

1.2. **a)** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{AC}$, por exemplo
b) $O + \left(2\overrightarrow{FO} - \overrightarrow{OD}\right) + \overrightarrow{BE} = O + \left(2\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}\right) + \overrightarrow{BE}$
$= O + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BE} = O + \overrightarrow{FE} = D$

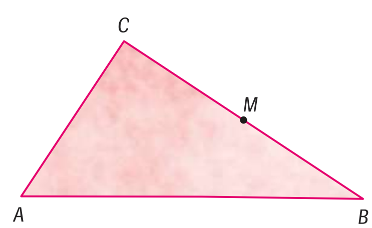
2. **(A)**



3.1. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CV} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CV}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AV}$
$\|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CV}\| = \|\overrightarrow{AV}\| = \|\overrightarrow{DV}\|$
$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DV} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CV} \Leftrightarrow \overrightarrow{BV} = \overrightarrow{AV}$ (F)
(D)

3.2. $\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CV}\right\| = 12$; altura da pirâmide = 12
$\|\overrightarrow{AB}\| = 4$
$V = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 12 = 64$
(A)

4.



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CM}$
$= 2\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}\right) = 2\overrightarrow{AM}$

Pág. 94

Tarefa inicial 7

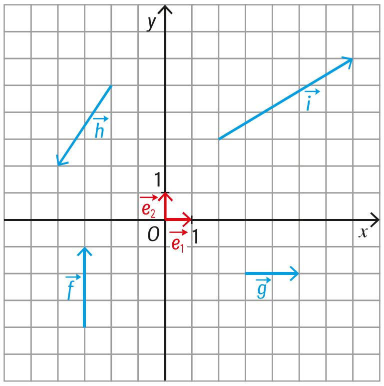
1.1. $\vec{a} = 0\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}$ $\qquad$ $\vec{c} = -2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$
$\vec{b} = 2\overrightarrow{e_1} + 0\overrightarrow{e_2}$ $\qquad$ $\vec{d} = 5\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}$

1.2. $\|\vec{a}\| = 3$; $\|\vec{b}\| = 2$
$\|\vec{c}\|^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\vec{c}\|^2 = 13 \Leftrightarrow \|\vec{c}\| = \sqrt{13}$
$(\|\vec{c}\| > 0)$

$\|\vec{d}\|^2 = 5^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\vec{d}\|^2 = 34 \Leftrightarrow \|\vec{d}\| = \sqrt{34}$

$(\|\vec{d}\| > 0)$

1.3.



$\vec{f} = 0\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$ $\qquad$ $\vec{h} = -2\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$

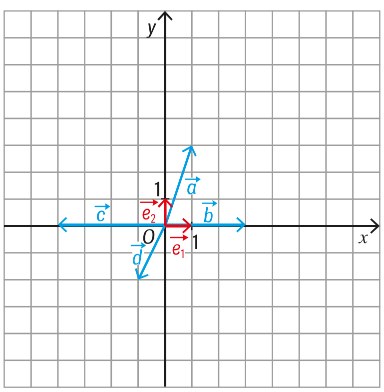
$\vec{g} = 2\vec{e_1} + 0\vec{e_2}$ $\qquad$ $\vec{i} = 5\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$

2. $\overrightarrow{OA} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 5\vec{e_3}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 2\vec{e_3}$

Pág. 96

Questão 62

62.1.



62.2. $\|\vec{a}\|^2 = 1^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 = 10$

$\Leftrightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{10}$ $(\|\vec{a}\| > 0)$

$\|\vec{b}\| = 3$ $\qquad$ $\|\vec{c}\| = 4$

$\|\vec{d}\|^2 = 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow \|\vec{d}\|^2 = 5 \Leftrightarrow \|\vec{d}\| = \sqrt{5}$

$(\|\vec{d}\| > 0)$

Questão 63

63.1. $\overrightarrow{OA}(-3, -2)$; $\overrightarrow{OB}(3, -2)$; $\overrightarrow{OC}(3,0)$; $\overrightarrow{OD}(0,3)$

63.2. $\overrightarrow{AB}(6,0)$; $\overrightarrow{BC}(0,2)$; $\overrightarrow{CD}(-3,3)$;

$\overrightarrow{DE}(-3, -3)$; $\overrightarrow{EA}(0, -2)$

Pág. 98

Questão 64

64.1. $\overrightarrow{OA}(2,0,0)$ $\qquad$ **64.2.** $\overrightarrow{OB}(2,3,0)$

64.3. $\overrightarrow{OC}(0,3,0)$ $\qquad$ **64.4.** $\overrightarrow{OE}(0,0,4)$

64.5. $\overrightarrow{OF}(2,0,4)$ $\qquad$ **64.6.** $\overrightarrow{OG}(2,3,4)$

64.7. $\overrightarrow{AG}(0,3,4)$ $\qquad$ **64.8.** $\overrightarrow{CG}(2,0,4)$

64.9. $\overrightarrow{EG}(2,3,0)$

64.10. $\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{DC} =$

$= \overrightarrow{OB} = (2,3,0)$

64.11. $\overrightarrow{DG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD} = (0,0,4)$

64.12. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = (2,3,0)$

64.13. $2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{DN} =$

$= \overrightarrow{ON} = (1,3,4)$

64.14. $\frac{1}{2}\overrightarrow{FA} - 2\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{AG} =$

$= \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OM} = (2,3,2)$

Pág. 101

Questão 65

$\vec{u}(0,3)$; $\vec{v}(-5,2)$; $\vec{w}(4, -2)$

65.1. $\vec{u} + \vec{v} = (0,3) + (-5, 2) = (0 - 5,\ 3 + 2) = (-5, 5)$

65.2. $\vec{u} - \vec{v} = (0,3) - (-5, 2) = (0,3) + (5, -2) =$

$= (0 + 5, 3 - 2) = (5,1)$

65.3. $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (0,3) + (-5,2) - (4, -2)$

$= (0,3) + (-5,2) + (-4,2) = (0 - 5 - 4, 3 + 2 + 2)$

$= (-9,7)$

65.4. $\vec{u} - (\vec{w} - \vec{v}) = \vec{u} - \vec{w} + \vec{v} = (0,3) - (4, -2) + (-5,2)$

$= (0,3) + (-4,2) + (-5,2) = (0 - 4 - 5, 3 + 2 + 2)$

$= (-9,7)$

65.5. $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(0,3) - 3(-5,2) = (0,6) + (15, -6)$

$= (15,0)$

65.6. $-\vec{u} - [2\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w})] = -\vec{u} - (2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w})$

$= -\vec{u} - 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = -3\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

$= -3(0,3) + (-5,2) - (4, -2)$

$= (0, -9) + (-5,2) + (-4,2)$

$= (0 - 5 - 4, -9 + 2 + 2) = (-9, -5)$

65.7. $-3\vec{u} - 2\left(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) + 3\vec{v} = -3\vec{u} - 2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{v}$

$= -5\vec{u} + 2\vec{v} = -5(0,3) + 2(-5,2)$

$= (0, -15) + (-10,4) = (0 - 10, -15 + 4)$

$= (-10, -11)$

65.8. $-\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{u} + 3\left(\vec{v} - \frac{1}{6}\vec{u}\right)$

$= -\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{u} + 3\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$

$= -\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{v} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$

$= -3(0, 3) + 2(-5, 2) = (0, -9) + (-10, 4)$

$= (0 - 10, -9 + 4) = (-10, -5)$

65.9. $\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{w} - 2(2\vec{u} - 3\vec{v}) = \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{w} - 4\vec{u} + 6\vec{v}$

$= \frac{3}{2}\vec{w} - 4\vec{u} + 6\vec{v} = \frac{3}{2}(4, -2) - 4(0,3) + 6(-5,2)$

$= (6, -3) + (0, -12) + (-30,12)$

$= (6 + 0 - 30, -3 - 12 + 12) = (-24, -3)$

Questão 66

$G(6, -2,4)$; $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{OD}$; $\vec{w} = \overrightarrow{OF}$

66.1. $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF})$

$= \frac{1}{2}[(6, -2,0) + (6,0,4) + (0, -2,4)]$

$= \frac{1}{2}(6+6+0\ ,\ -2+0-2\ ,\ 0+4+4) = \frac{1}{2}(12,-4,8)$

$= (6,-2,4) = \overrightarrow{OG}$

66.2. $2(\vec{x}+\vec{u}) = \vec{v}-\vec{w} \Leftrightarrow 2\vec{x}+2\vec{u} = \vec{v}-\vec{w}$

$\Leftrightarrow 2\vec{x} = -2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w} \Leftrightarrow \vec{x} = -\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{w}$

$\Leftrightarrow \vec{x} = -(6,-2,0)+\frac{1}{2}(6,0,4)-\frac{1}{2}(0,-2,4)$

$\Leftrightarrow \vec{x} = (-6,2,0)+(3,0,2)+(0,1,-2)$

$\Leftrightarrow \vec{x} = (-6+3+0\ ,2+0+1\ ,0+2-2)$

$\Leftrightarrow \vec{x} = (-3,3,0)$

Pág. 103

Questão 67

67.1. $\vec{u}\left(-10,\frac{1}{2}\right)$; $\vec{v}(-5,2)$

$\frac{-10}{-5} = \frac{\frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{4}$ (F)

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

67.2. $\vec{u}(-3\,;1{,}5)$; $\vec{v}(6,-3)$

$\frac{-3}{6} = \frac{1{,}5}{-3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ (V)

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

67.3. $\vec{u}(2,3)$; $\vec{v}(0,6)$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares porque a primeira coordenada de $\vec{u}$ é diferente de zero.

67.4. $\vec{u}(-5,0)$; $\vec{v}(7,0)$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares porque a segunda coordenada dos dois vetores é zero.

67.5. $\vec{u}(-5,0)$; $\vec{v}(0,7)$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares porque a segunda coordenada de $\vec{u}$ é nula e a de $\vec{v}$ não é nula.

Questão 68

$\vec{u}(3,-2)$; $\vec{v}(0{,}6\,;-0{,}4)$; $\vec{w}(a,1)$

68.1. $\frac{3}{0{,}6} = \frac{-2}{-0{,}4} \Leftrightarrow 5 = 5$ (V)

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares. $\vec{u} = 5\vec{v}$

68.2. $\frac{a}{0{,}6} = \frac{1}{-0{,}4} \Leftrightarrow a = \frac{1\times 0{,}6}{-0{,}4} \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$

68.3. $2\vec{u} = 2(3,-2) = (6,-4)$

Resposta: (6, − 4), por exemplo.

Pág. 105

Questão 69

$\vec{u}(0{,}6\,;1\,;-0{,}2)$; $\vec{v}(-3,-5{,}2)$

$\vec{w} = 2\overrightarrow{e_2}-3\overrightarrow{e_2} = (0,2,-3)$; $\vec{t}(m,n,1)$

69.1. $\frac{0{,}6}{-3} = \frac{1}{-5} = \frac{-0{,}2}{2} \Leftrightarrow -0{,}2 = -0{,}2 = -0{,}1$ (F)

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

69.2. Como $\vec{w}$ tem a primeira coordenada nula, para $\vec{w}$ e $\vec{t}$ serem colineares, $\vec{t}$ tem que ter também a primeira coordenada nula e as restantes coordenadas têm que ser diretamente proporcionais.

Assim, $m = 0 \wedge \frac{n}{2} = \frac{1}{-3} \Leftrightarrow m = 0 \wedge -3n = 2$

$\Leftrightarrow m = 0 \wedge n = -\frac{2}{3}$

Pág. 106

Questão 70

$\vec{u}(0{,}5,a)$; $\vec{v}(0{,}2b,3)$

$\frac{5}{2b} = \frac{a}{3} \Leftrightarrow 5\times 3 = a\times 2b \Leftrightarrow \frac{15}{2} = ab$

$a = 1\,,\ b = \frac{15}{2}$

$b = 1, a = \frac{15}{2}$

Questão 71

71.1. $\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

71.2. $\|\vec{b}\| = \sqrt{(-2)^2+(\sqrt{5})^2}\sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$

71.3. $\|\vec{c}\| = \sqrt{(-1{,}5)^2+2^2} = \sqrt{2{,}25+4} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$

71.4. $\|\vec{d}\| = \sqrt{6^2+(-3)^2}$

$= \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

45	3
15	3
5	5
1	

$45 = 3^2\times 5$

71.5. $\|\vec{e}\| = \sqrt{0^2+(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$

71.6. $\|\vec{f}\| = \sqrt{(-5)^2+(5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25+25\times 3} = \sqrt{25+75}$

$= \sqrt{100} = 10$

Questão 72

$\vec{v} = ?$

$\|\vec{v}\| = 1$

$\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} = k(-\sqrt{3},1) \Leftrightarrow \vec{v} = (-\sqrt{3}k,k)$

$\|\vec{v}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(-\sqrt{3}k)^2+k^2} = 1$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$3k^2+k^2 = 1 \Leftrightarrow 4k^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2}$

Se $k = \frac{1}{2}$, $\vec{v}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Se $k = -\frac{1}{2}$, $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Pág. 108

Questão 73

$A(-1,1,2)$; $B(2,-1,6)$; $\vec{u}(4,0,-1)$

73.1. $P = B+2\overrightarrow{AB}+\vec{u}$

$= (2,-1,6)+2(3,-2,4)+(4,0,-1)$

$= (2,-1,6)+(6,-4,8)+(4,0,-1)$

$= (12,-5,13)$

$\overrightarrow{AB} = B-A$

$= (2,-1,6)-(-1,1,2)$

$= (3,-2,4)$

73.2. $\vec{v} = -\frac{1}{2}(3\vec{u}) - \overrightarrow{BA} = -\frac{3}{2}\vec{u}-(-3,2,-4)$

$= -\frac{3}{2}(4,0,-1)-(-3,2,-4) = \left(-6,0\frac{3}{2}\right)+(3,-2,4)$

$= \left(-3,-2,\frac{3}{2}+4\right) = \left(-3,-2,\frac{11}{2}\right)$

$\overrightarrow{BA} = (-3,2,-4)$

73.3. $2\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\vec{w} \Leftrightarrow 2(4,0,-1) = \frac{1}{2}(3,-2,4)+2\vec{w}$

$\Leftrightarrow (8,0,-2) = \left(\frac{3}{2},-1,2\right)+2\vec{w}$

$\Leftrightarrow (8,0,-2)-\left(\frac{3}{2}-1,2\right) = 2\vec{w}$

$\Leftrightarrow \left(8-\frac{3}{2},1,-2-2\right) = 2\vec{w} \Leftrightarrow \left(\frac{13}{2},1,-4\right) = 2\vec{w}$

$\Leftrightarrow \vec{w} = \left(\frac{\frac{13}{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{4}{2}\right) \Leftrightarrow \vec{w}\left(\frac{13}{4},\frac{1}{2},-2\right)$

Questão 74

$\vec{u}(1,a,2)$; $\vec{v}(b-1,2,4)$

74.1. $\vec{v}=2\vec{u} \Leftrightarrow \dfrac{\vec{v}}{\vec{u}}=2$

$\dfrac{b-1}{1}=2 \ \wedge\ \dfrac{2}{a}=2 \Leftrightarrow b-1=2 \ \wedge\ 2=2a$

$\Leftrightarrow b=3 \ \wedge\ a=1\ (a\neq 0)$

Resposta: $a=1$ e $b=3$

74.2. $\|\vec{u}\|=3 \Leftrightarrow \sqrt{1^2+a^2+2^2}=3$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$1+a^2+4=9 \Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow a=\pm 2$

$a=-2$ ou $a=2$

74.3. $\|\vec{u}+\vec{v}\|=6 \Leftrightarrow \|(1,a,2)+(b-1,2,4)\|=6$

$\Leftrightarrow \|(b,a+2,6)\|=6 \Leftrightarrow \sqrt{b^2+(a+2)^2+6^2}=6$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$b^2+(a+2)^2+36=36 \Leftrightarrow b^2+(a+2)^2=0$

Para a soma dos dois quadrados ser zero,

$b=0 \wedge a+2=0 \Leftrightarrow b=0 \wedge a=-2$

Resposta: $a=-2$ e $b=0$

Questão 75

75.1. $\vec{a}(2,-2,6)$; $\vec{b}(-1,-2,3)$

$\dfrac{2}{-1}=\dfrac{-2}{-2}=\dfrac{6}{3} \Leftrightarrow -2=1=2$ (F)

Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são colineares.

75.2. $\vec{c}(0{,}1\,;0{,}2\,;0{,}3)$; $\vec{d}(5,10,15)$

$\dfrac{0{,}1}{5}=\dfrac{0{,}2}{10}=\dfrac{0{,}3}{15} \Leftrightarrow 0{,}02=0{,}02=0{,}02$ (V)

Os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ são colineares.

Questão 76

$\vec{t}=k\vec{z} \Leftrightarrow \vec{t}=k(4,-1,8) \Leftrightarrow \vec{t}=(4k,-k,8k)$

$\|\vec{t}\|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(4k)^2+(-k)^2+(8k)^2}=1$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$16k^2+k^2+64k^2=1 \Leftrightarrow 81k^2=1 \Leftrightarrow k^2=\dfrac{1}{81}$

$\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{\dfrac{1}{81}} \Leftrightarrow k=\pm\dfrac{1}{9}$

Se $k=-\dfrac{1}{9}$: $\vec{t}\left(4\times\left(-\dfrac{1}{9}\right),-\left(-\dfrac{1}{9}\right),8\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)\right)$

$=\left(-\dfrac{4}{9},\dfrac{1}{9},-\dfrac{8}{9}\right)$

Se $k=\dfrac{1}{9}$: $\vec{t}\left(\dfrac{4}{9},-\dfrac{1}{9},\dfrac{8}{9}\right)$

Pág. 109

Questão 77

$A(16,-3,10)$; $B(20,1,3)$; $C(12,2,-1)$; $E(14,13,18)$

77.1. $\overrightarrow{AE}=E-A=(14,13,18)-(16,-3,10)=(-2,16,8)$

77.2. $G=C+\overrightarrow{AE}=(12,2,-1)+(-2,16,8)=(10,18,7)$

77.3. $\overrightarrow{AB}=B-A=(20,1,3)-(16,-3,10)=(4,4,-7)$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{4^2+4^2+(-7)^2}=\sqrt{16+16+49}=\sqrt{81}=9$

$\|\overrightarrow{AE}\|=\sqrt{(-2)^2+16^2+8^2}=\sqrt{4+256+64}=\sqrt{324}=18$

$V=A_b\times h=9^2\times 18=1458$ u.v.

Pág. 110

Tarefas de consolidação 7

1. $A(2,-3)$; $B(-1,4)$; $\vec{u}(-3,4)$

1.1. **a)** $P=A+2\overrightarrow{AB}$

$=(2,-3)+2(-3,7)$

$=(2,-3)+(-6,14)=(-4,11)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=$
$=(-1,4)-(2,-3)=$
$(-3,7)$

b) $\vec{v}=-\vec{u}-6\overrightarrow{BA}=-(-3,4)-6(3,-7)$

$=(3,-4)+(-18,42)=(-15,38)$

$\overrightarrow{BA}=(3,-7)$

c) $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}-3\vec{w} \Leftrightarrow (-3,4)=\dfrac{1}{2}(3,-7)-3\vec{w}$

$\Leftrightarrow (-3,4)-\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{7}{2}\right)=-3\vec{w}$

$\Leftrightarrow \left(-3-\dfrac{3}{2},4+\dfrac{7}{2}\right)=-3\vec{w}$

$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{9}{2},\dfrac{15}{2}\right)=-3\vec{w} \Leftrightarrow \vec{w}=\left(\dfrac{-\frac{9}{2}}{-3},\dfrac{\frac{15}{2}}{-3}\right)$

$\Leftrightarrow \vec{w}=\left(\dfrac{9}{6},-\dfrac{15}{6}\right)=\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{2}\right)$

1.2. $C(-c^2,c+10)$

$\vec{u}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (-3,4)=C-B$

$\Leftrightarrow (-3,4)=\left(-c^2,c+10\right)-(-1,4)$

$\Leftrightarrow (-3,4)=\left(-c^2,c+10\right)+(1,-4)$

$\Leftrightarrow (-3,4)=\left(-c^2+1,c+6\right)\ -c^2+1=-3 \wedge c+6=4$

$\Leftrightarrow -c^2=-4 \ \wedge\ c=-2$

$\Leftrightarrow c^2=4 \ \wedge\ c=-2 \Leftrightarrow c=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow c=\pm 2$

Resposta: $c=-2$

2. $\vec{u}(1,1)$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\dfrac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\|\vec{v}\|}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \|\vec{v}\|=1$

$\|\vec{u}\|\leqslant\|-\sqrt{2}\vec{v}\| \Leftrightarrow \|\vec{u}\|\leqslant|-\sqrt{2}|\|\vec{v}\|$

$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|\leqslant\sqrt{2}\|\vec{v}\|$

(B)

3. $\vec{u}(-1,3)$; $A(0,-2)$; $B(5,0)$; $C(2,3)$

3.1. $D=A+\overrightarrow{BC}=(0,-2)+(-3,3)=(-3,1)$

$\overrightarrow{BC}=C-B$
$=(2,3)-(5,0)$
$=(-3,3)$

3.2. $\|-\vec{u}+\overrightarrow{AC}\|=\|-(-1,3)+(2,5)\|$

$=\|(1,-3)+(2,5)\|$

$=\|(3,2)\|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\overrightarrow{AC}=C-A$
$=(2,3)-(0,-2)$
$=(2,5)$

3.3. $\vec{v}=k\vec{u}$, $k<0 \Leftrightarrow \vec{v}=k(-1,3) \Leftrightarrow \vec{v}=(-k,3k)$

$\|\vec{v}\|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(-k)^2+(3k)^2}=1$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$k^2+9k^2=1 \Leftrightarrow 10k^2=1 \Leftrightarrow k^2=\dfrac{1}{10} \Leftrightarrow k=-\sqrt{\dfrac{1}{10}}$

$\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ $(k<0)$

$\vec{v}=\left(-\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right),3\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)\right) \Leftrightarrow \vec{v}=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10},-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

Pág. 111

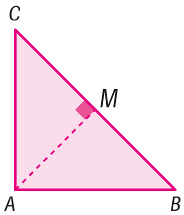
4. $A(-2,5)$; $B(-4,-1)$; $C(4,3)$

4.1. $\overline{AB}=\sqrt{\left(-4-(-2)^2+(-1-5)^2\right)}=\sqrt{(-4+2)^2+(-6)^2}$

$=\sqrt{(-2)^2+36}=\sqrt{40}$

$\overline{AC}=\sqrt{(4-(-2)^2+(3-5)^2)}=\sqrt{(4+2)^2+(-2)^2}$
$=\sqrt{6^2+4}=\sqrt{40}$
$\overline{BC}=\sqrt{(4-(-4)^2+(3-(-1))^2)}=\sqrt{(4+4)^2+(3+1)^2}$
$=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}$
$\overline{AB}=\overline{AC}$, logo o triângulo $[ABC]$ é isósceles.
$(\sqrt{80})^2=(\sqrt{40})^2+(\sqrt{40})^2 \Leftrightarrow 80=40+40 \Leftrightarrow 80=80$
$\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{AC}$, logo o triângulo é retângulo em A .

4.2.



$\overline{CM}=\dfrac{\sqrt{80}}{2}$

$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{CM}^2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{40})^2=\overline{AM}^2+\left(\dfrac{\sqrt{80}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 40=\overline{AM}^2+\dfrac{80}{4}$

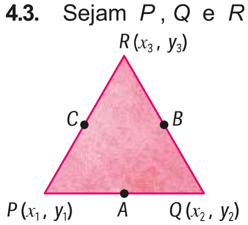
$\Leftrightarrow \overline{AM}^2=40-\dfrac{80}{4} \Leftrightarrow \overline{AM}^2=20$

$\Leftrightarrow \overline{AM}=\sqrt{20}$

$\Leftrightarrow \overline{AM}=2\sqrt{5}$ u. c. $(\overline{AM}>0)$

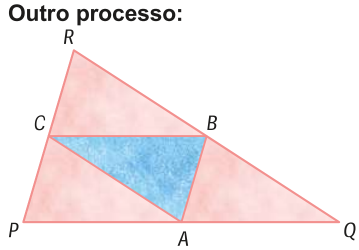
20	2
10	2
5	5
1	

4.3. Sejam P , Q e R os vértices do triângulo.



$\dfrac{x_1+x_3}{2}=4 \wedge \dfrac{y_1+y_3}{2}=3$
$\Leftrightarrow x_1+x_3=8 \wedge y_1+y_3=6$
$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-2 \wedge \dfrac{y_1+y_2}{2}=5$
$\Leftrightarrow x_1+x_2=-4 \wedge y_1+y_2=10$
$\dfrac{x_2+x_3}{2}=-4 \wedge \dfrac{y_2+y_3}{2}=-1$
$\Leftrightarrow x_2+x_3=-8 \wedge y_2+y_3=-2$
$x_1+x_3=8 \Leftrightarrow x_1=8-x_3$
$x_1+x_2=-4 \Leftrightarrow 8-x_3+x_2=-4 \Leftrightarrow x_2=x_3-12$
$x_2+x_3=-8 \Leftrightarrow x_3-12+x_3=-8 \Leftrightarrow 2x_3=4$
$\Leftrightarrow x_3=2$
$x_2=2-12=-10$
$x_1=8-x_3=8-2=6$
$y_1+y_3=6 \Leftrightarrow y_1=6-y_3$
$y_1+y_2=10 \Leftrightarrow 6-y_3+y_2=10 \Leftrightarrow y_2=y_3+4$
$y_2+y_3=-2 \Leftrightarrow y_3+4+y_3=-2 \Leftrightarrow 2y_3=-6$
$\Leftrightarrow y_3=-3$
$y_2=-3+4=1$
$y_1=6-(-3)=9$
$P(6,9)$, $Q(-10,1)$; $R(2,-3)$

Outro processo:



$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}=2\overrightarrow{CR}+2\overrightarrow{RB}$
$=2\left(\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{RB}\right)=2\overrightarrow{CB}$
$P=A+\overrightarrow{BC}=(-2,5)+(8,4)=(6,9)$

$\overrightarrow{BC}=(4,3)-(-4,-1)$
$=(8,4)$
$\overrightarrow{CB}=(-4,-1)-(4,3)$
$=(-8,-4)$
$\overrightarrow{AC}=(4,3)-(-2,5)$
$=(6,-2)$

$Q=A+\overrightarrow{CB}=(-2,5)+(-8,-4)=(-10,1)$
$R=B+\overrightarrow{AC}=(-4,-1)+(6,-2)=(2,-3)$

5. $E(2,2,2)$; $h=2\times 2=4$ u. c.

5.1. **a)** $A(2,0,0)$; $E(2,2,2)$
$\overrightarrow{AE}=E-A=(2,2,2)-(2,0,0)=(0,2,2)$

b) $\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$; $D(2,0,2)$; $C(0,2,0)$
$\overrightarrow{DC}=C-D=(0,2,0)-(2,0,2)=(-2,2,-2)$
$\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{DC}=(1,0,0)+(-2,2,-2)$
$=(1-2,0+2,0-2)=(-1,2,-2)$

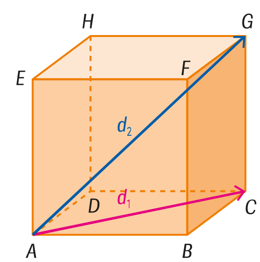
c) $A(2,0,0)$; $D(2,0,2)$; $C(0,2,0)$; $E(2,2,2)$
$\overrightarrow{AD}=D-A=(2,0,2)-(2,0,0)$
$=(2-2,0-0,2-0)=(0,0,2)$
$\overrightarrow{CE}=E-C=(2,2,2)-(0,2,0)=(2,0,2)$
$-3\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=-3(0,0,2)+(2,0,2)$
$=(0,0,-6)+(2,0,2)=(2,0,-4)$

5.2. $P(1,1,-2)$
$\overrightarrow{AP}=P-A=(1,1,-2)-(2,0,0)=(-1,1,-2)$
$\overrightarrow{DR}=\overrightarrow{AP}$
$\Leftrightarrow R-D=(-1,1,-2) \Leftrightarrow R-(2,0,2)=(-1,1,-2)$
$\Leftrightarrow R=(2,0,2)+(-1,1,-2) \Leftrightarrow R=(1,1,0)$

6. $A(8,4,0)$; $B(6,10,3)$; $H(5,-1,8)$

6.1. $\overline{AB}=\sqrt{(8-6)^2+(4-10)^2+(0-3)^2}$
$=\sqrt{2^2+(-6)^2+(-3)^2}=\sqrt{4+36+9}=\sqrt{49}=7$

6.2.



Seja d_1 a medida do comprimento da diagonal de uma das faces do cubo.
$d_1^2=7^2+7^2 \Leftrightarrow d_1^2=49+49 \Leftrightarrow d_1^2=98$
Seja d_2 a medida do comprimento da diagonal espacial.
$d_2^2=98+7^2 \Leftrightarrow d_2^2=147$
$\Leftrightarrow d_2=\sqrt{147} \Leftrightarrow d_2=7\sqrt{3} \quad (d_2>0)$
$\overline{MF}=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

147	3
49	7
7	7
1	

$147=7^2\times 3$

6.3. $\overrightarrow{AB}=B-A=(6,10,3)-(8,4,0)=(-2,6,3)$
$G=H+\overrightarrow{AB}=(5,-1,8)+(-2,6,3)$
$=(5-2,-1+6,8+3)=(3,5,11)$

6.4. $P(k,k+1,k+2)$
$\overrightarrow{AP}=P-A=(k,k+1,k+2)-(8,4,0)$
$=(k-8,k+1-4,k+2)=(k-8,k-3,k+2)$
$\|\overrightarrow{AP}\|=7\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{(k-8)^2+(k-3)^2+(k+2)^2}=7\sqrt{2}$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$(k-8)^2+(k-3)^2+(k+2)^2=(7\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow k^2-16k+64+k^2-6k+9+k^2+4k+4=98$

$\Leftrightarrow 3k^2-18k-21=0$

$\Leftrightarrow k^2-6k-7=0$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times(-7)}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{6\pm\sqrt{36+28}}{2} \Leftrightarrow k=\dfrac{6\pm\sqrt{64}}{2}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{6-8}{2} \vee k=\dfrac{6+8}{2} \Leftrightarrow k=-1 \vee k=7$

Como a ordenada de P é superior à de A, $k=7$

$P(7\,,7+1\,,7+2)$

$P(7,8,9)$

Pág. 113

Avaliação formativa 7

1. $A(-2,0)$; $B(1,5)$; $C(4,3)$

$-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow P-A=(-6,-3)+2(3,5)$

$\Leftrightarrow P=A+(-6,-3)+(6,10)$

$\Leftrightarrow P=(-2,0)+(-6,-3)+(6,10)$

$\Leftrightarrow P=(-2,7)$

Resposta: **(D)**

$\overrightarrow{CA}=A-C$
$=(-2,0)-(4,3)$
$=(-6,-3)$
$\overrightarrow{AB}=B-A$
$=(1,5)-(-2,0)$
$=(3,5)$

2. $E(3,3,3)$

2.1. $\overrightarrow{GB}=B-G=(3,3,0)-(0,0,3)=(3,3,-3)$

Resposta: **(C)**

2.2. **(D)**

3. $A(-1,2)$; $M_{[AB]}=\left(2,\frac{1}{2}\right)$; $B(x,y)$

$\begin{cases}\dfrac{-1+x}{2}=2\\ \dfrac{2+y}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1+x=4\\ 2+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=-1\end{cases}$ $B(5,-1)$

Resposta: **(A)**

4. $\vec{u}(5k+8\,,0\,,5)$; $\vec{v}(2\,,k^2-4\,,k-3)$

$k^2-4=0 \wedge \dfrac{5k+8}{2}=\dfrac{5}{k-3}$

$\Leftrightarrow k^2=4 \wedge (5k+8)(k-3)=10$

$\Leftrightarrow k=\pm2 \wedge 5k^2-15k+8k-24-10=0$

$\Leftrightarrow k=\pm2 \wedge 5k^2-7k-34=0$

$\Leftrightarrow k=\pm2 \wedge k=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times5\times(-34)}}{2\times5}$

$\Leftrightarrow k=\pm2 \wedge k=\dfrac{7\pm\sqrt{49+680}}{10}$

$\Leftrightarrow k=\pm2 \wedge k=\dfrac{7\pm\sqrt{729}}{10}$

$\Leftrightarrow k=\pm2 \wedge \left(k=\dfrac{7-27}{10} \vee k=\dfrac{7+27}{10}\right)$

$\Leftrightarrow k=\pm2 \wedge \left(k=-2 \vee k=\dfrac{17}{5}\right)$

Resposta: $k=-2$

Pág. 114

Tarefa inicial 8

1. $V_1(3\,;-4{,}5\,;0)$; $V_2(3\,;-1{,}5\,;0)$; $V_6(3,-3,6)$

$V_{10}(3,3,4)$; $V_{19}(-3,0,5)$

2. $x=3$

3. $V_1V_5: x=3 \wedge y=-4{,}5$

4. $V_7(3\,;-1{,}5\,;3)$

$\overrightarrow{V_2V_7}=V_7-V_2=(3\,;-1{,}5\,;3)-(3\,;-1{,}5\,;0)=(0,0,3)$

5.1. V_1V_5 ; V_2V_7 ; V_3V_9 ; V_4V_{11}

$V_{12}V_{22}$; $V_{13}V_{20}$; $V_{14}V_{18}$; $V_{15}V_{16}$

5.2. $V_8(3,0,5)$; $V_{19}(-3,0,5)$

$\overrightarrow{V_8V_{19}}=(-3,0,5)-(3,0,5)=(-6,0,0)$, por exemplo.

6. Os vetores são colineares.

7.1. (1,0,0) **7.2.** (0,1,0) **7.3.** (0,0,1)

8. $V=3\times(3\times6\times3)+\dfrac{3\times3}{2}\times6+\dfrac{3\times2}{2}\times6+\dfrac{3\times1}{2}\times6$

$=216$ u. v.

Pág. 115

Questão 78

78.1. $\overrightarrow{OA}=A-O=(35,0,0)-(0,0,0)=(35,0,0)$

Vetor diretor da reta OA : (35,0,0), por exemplo.

78.2. $\overrightarrow{BC}=C-B=(0,35,0)-(35,35,0)=(-35,0,0)$

Vetor diretor da reta BC : $(-35,0,0)$, por exemplo.

78.3. $\overrightarrow{AV}=V-A=(17{,}5\,;17{,}5\,;21)-(35,0,0)$

$=(-17{,}5\,;17{,}5\,;21)$

Vetor diretor da reta AV : $=(-17{,}5\,;17{,}5\,;21)$, por exemplo.

78.4. $\overrightarrow{CV}=V-C=(17{,}5\,;17{,}5\,;21)-(0,35,0)$

$=(17{,}5\,;-17{,}5\,;21)$

Vetor diretor da reta CV : $(17{,}5\,;-17{,}5\,;21)$, por exemplo.

Questão 79

$A(1,2)$; $B(-1,1)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(-1,1)-(1,2)=(-2,-1)$

Vetor diretor da reta AB : $(-2,-1)$, por exemplo.

Pág. 116

Questão 80

$\vec{r}(0,0,1)$, por exemplo.

$s: y=3 \wedge z=4$

$\vec{s}(1,0,0)$, por exemplo.

$\vec{t}(0,1,0)$, por exemplo.

Pág. 117

Questão 81

81.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(2,-3)-(-5,0)=(7,-3)$

$2(7,-3)=(14,-6)$

$-(7,-3)=(-7,3)$

Vetores diretores da reta AB : $(7,-3)\,;(14,-6)\,;$ $(-7,3)$, por exemplo.

$m_{AB}=-\dfrac{3}{7}$

81.2. $\overrightarrow{AB}=B-A=\left(\dfrac{1}{2},-1\right)-(1,4)=\left(\dfrac{1}{2}-1,-5\right)$

$=\left(-\dfrac{1}{2},-5\right)$

$2\left(-\frac{1}{2}, -5\right)=(-1, -10)$

$-\left(-\frac{1}{2}, -5\right)=\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, por exemplo

Vetores diretores da reta AB : $\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$;

$(-1, -10)$; $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, por exemplo.

$m_{AB}=\frac{-5}{-\frac{1}{2}}=10$

Pág. 118

Questão 82

$A\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$; $\vec{v}(-1,4)$

$m=\frac{4}{-1}=-4$

$y=-4x+b$

$3=-4\left(-\frac{1}{2}\right)+b \Leftrightarrow 3=2+b \Leftrightarrow b=1$

$y=-4x+1$

Questão 83

$r: y=-3x+1$

83.1. $m_r=\frac{-3}{1}=-3$

$\frac{a}{1}=-3 \Leftrightarrow a=-3$

$\frac{-2}{b}=-3 \Leftrightarrow -2=-3b \Leftrightarrow b=\frac{2}{3}\ (b\neq 0)$

83.2. $\vec{s}\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

$m_s=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$

$r: y=-3x+1$

$(1, y)$ $y=-3\times 1+1 \Leftrightarrow y=-3+1=-2$ $(1, -2)$

$s: y=6x+b$

$-2=6\times 1+b \Leftrightarrow -2=6+b \Leftrightarrow b=-8$

$y=6x-8$

Questão 84

$A(2,3)$

84.1. Reta horizontal: $y=3$

Vetores diretores: $(1,0)$; $(-1, 0)$ por exemplo.

84.2. Reta vertical: $x=2$

Vetores diretores: $(0,1)$; $(-1, 0)$, por exemplo.

Pág. 119

Questão 85

$y=\frac{x}{5}-1$

85.1. $m_r=\frac{1}{5}$ $(5,1)$; $(-5, -1)$, por exemplo.

85.2. $\vec{s}\left(2, \frac{2}{5}\right)$

$m_s=\frac{\frac{2}{5}}{2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

r e s são paralelas porque têm o mesmo declive.

Pág. 120

Tarefa 4

1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(6,7)-(3,5)=(3,2)$

2. **a)** A **b)** 1,5 **c)** A **d)** –

Pág. 122

Questão 86

$r: y=-x+1$; $s:(x,y)=(1,2)+k(3, -1)$

86.1. $m_r=-1$

$\vec{r}(-1,1)$, por exemplo.

Ponto da reta $(0,1)$, por exemplo.

$(x,y)=(0,1)+k(-1,1), k\in\mathbb{R}$

86.2. $y=-2$

$(x, -2)=(1,2)+k(3, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+3k \\ -2=2-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13 \\ k=4 \end{cases}$

Resposta: $(13, -2)$

86.3. $m_s=-\frac{1}{3}$

$y=-\frac{1}{3}+b$ $(1,2)$

$2=-\frac{1}{3}\times 1+b \Leftrightarrow 2=-\frac{1}{3}+b$

$\Leftrightarrow 2+\frac{1}{3}=b \Leftrightarrow b=\frac{7}{3}$

$s: y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$

86.4. $\begin{cases} y=-x+1 \\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -x+1=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -3x+3=-x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-2 \end{cases}$

Resposta: $(-2,3)$

86.5. **a)** $k=0$; $(x,y)=(1,2)$

Resposta: Representa a semirreta com origem em A e sentido oposto ao do vetor diretor $(3, -1)$.

b) $k=0$; $(x,y)=(1,2)$

$k=2$; $(x,y)=(1,2)+2(3, -1)$

$=(1,2)+(6, -2)=(7,0)$

Resposta: Representa o segmento de reta de extremos $(1,2)$ e $(7,0)$.

Pág. 123

Questão 87

$r: A(1,2)$; $B(-7,0)$

87.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(-7,0)-(1,2)=(-8, -2)$

$(x,y)=(1,2)+k(-8, -2)$, por exemplo.

87.2. $(-3,4)=(1,2)+k(-8, -2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3=1-8k \\ 4=2-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4=-8k \\ 2=-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ k=-1 \end{cases}$

Sistema impossível, logo o ponto C não pertence à reta AB .

Questão 88

$s: A(2,1)$; $B(6, -1)$

88.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(6, -1)-(2,1)=(4, -2)$

$s:(x,y)=(2,1)+k(4, -2)$, $k\in\mathbb{R}$, por exemplo.

88.2. $C(x, -3)$

$(x, -3)=(2,1)+k(4, -2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+4k \\ -3=1-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -4=-2k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+4\times 2 \\ k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ k=2 \end{cases}$

Resposta: $x=10$

88.3. $D(-10,7)$

$(-10,7)=(2,1)+k(4,-2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-10=2+4k\\ 7=1-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-12=4k\\ 6=-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-3\\ k=-3\end{cases}$

Sistema possível, logo o ponto D pertence à reta s.

88.4. $E(x,-x)$

$(x,-x)=(2,1)+K(4,-2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2+4k\\ -x=1-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\underline{\qquad\qquad}\\ -2-4k=1-2k\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\underline{\qquad}\\ -2k=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+4\times\left(-\frac{3}{2}\right)\\ k=-\frac{3}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2-6\\ \underline{\qquad}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\ \underline{\qquad}\end{cases}$

Resposta: $E(-4,4)$

Questão 89

$A(-3,2)$; $r: y=-3x+2$; $B(0,2)$

89.1. **a)** $m_r=-3$

$\vec{r}(1,-3)$

$r:(x,y)=(0,2)+k(1,-3)$, $k\in\mathbb{R}$, por exemplo.

b) $s:(x,y)=(-3,2)+k(1,-3)$, $k\in\mathbb{R}$, por exemplo.

c) $\overrightarrow{AB}=B-A(0,2)-(-3,2)=(3,0)$

$t:(x,y)=(-3,2)+k(3,0)$, $k\in\mathbb{R}$, por exemplo.

89.2. $(x,0)$

$(x,0)=(-3,2)+k(1,-3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-3+k\\ 0=2-3k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\underline{\qquad\qquad}\\ -2=-3k\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-3+\frac{2}{3}\\ k=\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{7}{3}\\ \underline{\qquad}\end{cases}$

Resposta: $\left(-\frac{7}{3},0\right)$

Pág. 124

Questão 90

$r: 3x-y-2=0$

$s:(x,y)=(1,3)+k(2,1)$, $k\in\mathbb{R}$

$t: y=x-1$

90.1. Ponto de interseção com o eixo Oy:

$x=0$: $3\times 0-y-2=0 \Leftrightarrow -y=2 \Leftrightarrow y=-2$

$(0,-2)$

Ponto de interseção com o eixo Ox:

$y=0$: $3x-0-2=0 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

$\left(\frac{2}{3},0\right)$

90.2. $3x-y-2=0 \Leftrightarrow 3x-2=y \Leftrightarrow y=3x-2$

$m_r=3$

$\vec{r}=(1,3)$

$r:(x,y)=(0,-2)+k(1,3)$, $k\in\mathbb{R}$

90.3. $P(k,k^2)$

$3k-k^2-2=0 \Leftrightarrow -k^2+3k-2=0$

$\Leftrightarrow k^2-3k+2=0$

$\Leftrightarrow k=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 1\times 2}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow k=\frac{3-1}{2} \vee k=\frac{3+1}{2}$

$\Leftrightarrow k=1 \vee k=2$

Resposta: $k=1$ ou $k=2$

90.4. $(x,-2)$

$(x,-2)=(1,3)+k(2,1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1+2k\\ -2=3+k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+2\times(-5)\\ -5=k\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1-10\\ \underline{\qquad}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-9\\ \underline{\qquad}\end{cases}$

Abcissa: -9

90.5. $m_s=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x+b$; $(1,3)$

$3=\frac{1}{2}\times 1+b \Leftrightarrow 3=\frac{1}{2}+b \Leftrightarrow 3-\frac{1}{2}=b \Leftrightarrow b=\frac{5}{2}$

Resposta: $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, por exemplo.

90.6. $A(0,-1)$

$y=x-1$

$-1=0-1 \Leftrightarrow -1=-1$ (V)

Logo, o ponto A pertence à reta t.

90.7. $m_t=1$

$p\,//\,t$

$m_p=1$

$y=x+b$; $B(-1,3)$

$3=-1+b \Leftrightarrow b=4$

$y=x+4$

Pág. 125

Questão 91

$s:(x,y)=(-4,2)+k(4,-1)$; $C(8,6)$

91.1. $A(x,0)$

$(x,0)=(-4,2)+k(4,-1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-4+4k\\ 0=2-k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\underline{\qquad\qquad}\\ -2=-k\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-4+4\times 2\\ k=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ \underline{\qquad}\end{cases}$

Abcissa de A é 4. $A(4,0)$

91.2. $M_{[AC]}\left(\frac{4+8}{2},\frac{0+6}{2}\right)=(6,3)$

91.3. M é o ponto médio da diagonal $[AC]$, logo é o ponto médio da diagonal $[DB]$. Assim, D, M e B pertencem ao segmento de reta $[DB]$ e, por isso, são colineares.

91.4. $s\,//\,r$

M pertence à reta s

$s:(x,y)=(6,3)+k(4,-1)$, $k\in\mathbb{R}$

91.5. $y=x$

$(x,x)=(6,3)+k(4,-1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=6+4k\\ x=3-k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\underline{\qquad\qquad}\\ 6+4k=3-k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\underline{\qquad}\\ 5k=-3\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=6+4\times\left(-\frac{3}{5}\right)\\ k=-\frac{3}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6-\frac{12}{5}\\ \underline{\qquad}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{18}{5}\\ \underline{\qquad}\end{cases}$

Resposta: $\left(\frac{18}{5},\frac{18}{5}\right)$

Pág. 126

Questão 92

92.1. **a)** $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0, 8) - (-1, 0, 3) =$
$= (4 + 1, 0 - 0, 8 - 3) = (5, 0, 5)$
$(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(5, 0, 5)\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$

b) $\overrightarrow{BC} = C - B = (-2, 3, 0) - (4, 0, 8) =$
$= (-2 - 4, 3 - 0, 0 - 8) = (-6, 3, -8)$
$(x, y, z) = (4, 0, 8) + k(-6, 3, -8)\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$

c) $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 3, 0) - (-1, 0, 3) =$
$= (-2 + 1, 3 - 0, 0 - 3) = (-1, 3, -3)$
$(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(-1, 3, -3)\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$

92.2. **a)** $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(5, 0, 5) = (-5, 0, -5)$
$(x, y, z) = (4, 0, 8) + k(-5, 0, -5)\ ,\ \ k \in [0, 1]$

b) $\overrightarrow{BC} = (-6, 3, -8)$
$(x, y, z) = (4, 0, 8) + k(-6, 3, -8)\ ,\ \ k \in]-\infty, 1]$

c) $\overrightarrow{AC} = (-1, 3, -3)$
$(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(-1, 3, -3)\ ,\ \ k \in [0, +\infty[$

Pág. 127

Questão 93

93.1. **a)** $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -2, -1) - (2, -5, 0) =$
$= (4 - 2, -2 + 5, -1 - 0) = (2, 3, -1)$
$(x, y, z) = (8, 1, 0) + k(2, 3, -1)\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$

93.2. **a)** $xOy:\ z = 0$
$(x, y, 0) = (8, 1, 0) + k(2, 3, -1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 2k \\ y = 1 + 3k \\ 0 = 0 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \\ k = 0 \end{cases}$$

Ponto de interseção de x com xOy : $(8, 1, 0)$

b) $yOz:\ x = 0$: $z = 0$
$(0, y, z) = (8, 1, 0) + k(2, 3, -1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 8 + 2k \\ y = 1 + 3k \\ z = 0 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -8 \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -4 \\ y = 1 + 3(-4) \\ z = -(-4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -4 \\ y = -11 \\ z = 4 \end{cases}$$

Ponto de interseção de r com yOz : $x = (0, -11, 4)$

c) $z = 2$
$(x, y, 2) = (8, 1, 0) + k(2, 3, -1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 2k \\ y = 1 + 3k \\ 2 = 0 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 4 \\ y = 1 - 6 \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$

Ponto de interseção de r com o plano de equação $z = 2$: $(4, -5, 2)$

93.3. **a)** $y = -2 \wedge z = 1$
$(x, -2, 1) = (8, 1, 0) + k(2, 3, -1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 2k \\ -2 = 1 + 3k \\ 1 = 0 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ 3k = -3 \\ k = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 2(-1) \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ \underline{\quad} \end{cases}$$

A reta x interseta a reta definida por $y = -2 \wedge z = 1$ no ponto de coordenadas $(6, -2, 1)$.

b) $x = 6 \wedge y = 3$
$(6, 3, z) = (8, 1, 0) + k(2, 3, -1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 8 + 2k \\ 3 = 1 + 3k \\ z = 0 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -2 \\ 3k = 2 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Como o sistema é impossível, as retas não se intersetam.

Pág. 128

94.1. BV:
$(x, y, z) = (5, 24, -12) + k(-1, -7, 6)\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$
B pertence ao plano xOy . Então, $B(x, y, 0)$
$(x, y, 0) = (5, 24, -12) + k(-1, -7, 6)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - k \\ y = 24 - 7k \\ 0 = -12 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2 \\ y = 24 - 14 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 10 \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$

$B(3, 10, 0)$

A pirâmide tem altura 6 . Então $V(x, y, 6)$.
$(x, y, 6) = (5, 24, -12) + k(-1, -7, 6)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - k \\ y = 24 - 7k \\ 6 = -12 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \\ 6k = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 3 \\ y = 24 - 21 \\ k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ \underline{\quad} \end{cases}$$

$V(2, 3, 6)$

94.2. E é o centro da base da pirâmide.
Então tem a mesma abcissa e a mesma ordenada que o vértice V e tem cota 0 .
Logo, $V(2, 3, 0)$.

94.3. $D = E + \overrightarrow{ED} = E + \overrightarrow{BE} =$
$= (2, 3, 0) + (-1, -7, 0)$
$= (2 - 1, 3 - 7, 0 + 0)$
$= (1, -4, 0)$
$D(1, -4, 0)$

$\overrightarrow{BE} = E - B$
$= (2, 3, 0) - (3, 10, 0)$
$= (2 - 3, 3 - 10, 0 - 0)$
$= (-1, -7, 0)$

$A = E + \overrightarrow{EA} = E + \overrightarrow{CE}$
$= (2, 3, 0) + (7, -1, 0)$
$= (2 + 7, 3 - 1, 0 + 0)$
$= (9, 2, 0)$
$A(9, 2, 0)$

$\overrightarrow{CE} = E - C$
$= (2, 3, 0) - (-5, 4, 0)$
$= (2 + 5, 3 - 4, 0 - 0)$
$= (7, -1, 0)$

Pág. 129

Questão 95

95.1. $A(3, -1, 1)$
$(3 - 1)^2 + (-1 + 2)^2 + (1 - 3)^2 = 9$
$\Leftrightarrow\ 2^2 + 1^2 + (-2)^2 = 9\ \Leftrightarrow\ 9 = 9$ (verdadeiro)
Logo, A pertence à superfície esférica S .

95.2. $B = C + \overrightarrow{CB} = C + \overrightarrow{AC}$
$= (1, -2, 3) + (-2, -1, 2)$
$= (1 - 2, -2 - 1, 3 + 2)$
$= (-1, -3, 5)$
$B(-1, -3, 5)$

$\overrightarrow{AC} = C - A$
$= (1, -2, 3) - (3, -1, 1)$
$= (1 - 3, -2 + 1, 3 - 1)$
$= (-2, -1, 2)$

95.3. **a)** $\overrightarrow{AC} = (-2, -1, 2)$

AC: $(x, y, z) = (3, -1, 1) + k(-2, -1, 2)$, $k \in \mathbb{R}$
Seja I o ponto de interseção, caso exista, da reta AC com o eixo Ox .
Então, $I(x, 0, 0)$.
$(x, 0, 0) = (3, -1, 1) + k(-2, -1, 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2k \\ 0 = -1 - k \\ 0 = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ k = -1 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Como o sistema é impossível, não existe ponto de interseção da reta AC com o eixo Ox.

b) Seja J o ponto de interseção, caso exista, da reta AC com a reta definida por $x = 5$ e $z = -1$.
Então, $J(5, y, -1)$.
$(5, y, -1) = (3, -1, 1) + k(-2, -1, 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 3 - 2k \\ y = -1 - k \\ -1 = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -2 \\ \overline{} \\ 2k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = -1 + 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ y = 0 \\ \overline{} \end{cases} \qquad J(5, 0, -1)$$

Pág. 130

Tarefas de consolidação 8

1.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -3) - (-1, 2)$
$= (1 + 1, -3 - 2) = (2, -5)$
$\overrightarrow{AB} - 2\vec{u} = (2, -5) - 2(1, -2) =$
$= (2, -5) + (-2, 4) = (2 - 2, -5 + 4)$
$= (0, -1)$
$\left\| \overrightarrow{AB} - 2\vec{u} \right\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

1.2. $\overrightarrow{AC} = -3\vec{u} \Leftrightarrow C - A = -3\vec{u} \Leftrightarrow C = A - 3\vec{u}$
$\Leftrightarrow C = (-1, 2) - 3(1, -2)$
$\Leftrightarrow C = (-1, 2) + (-3, 6)$
$\Leftrightarrow C = (-1 - 3, 2 + 6)$
$\Leftrightarrow C = (-4, 8)$

1.3. $(x, y) = (1, -3) + k(1, -2)$, $k \in \mathbb{R}$
$= (2a - 3, -a + 1) = (1, -3) + k(1, -2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3 = 1 + k \\ -a + 1 = -3 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2a - 4 \\ -a + 1 = -3 - 2(2a - 4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -a + 1 = -3 - 4a + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ 3a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ a = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$a = \frac{4}{3}$

2. f é positiva em:]3,4]

2.1. $\left(\frac{3}{4}, -1\right) = (1, -8) + k\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2}k \\ -1 = -8 - \frac{7}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}k = \frac{3}{4} - 1 \\ \frac{7}{2}k = -8 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}k = -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{2}k = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = -2 \end{cases}$$

Como o sistema é impossível, $\left(\frac{3}{4}, -1\right)$ não pertence à reta r .

2.2. $m_r = \dfrac{-\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = -7$

Opção (B)

2.3. $r : y = -7x + b$
$(1, -8) \in r$
Então, $-8 = -7 \times 1 + b \Leftrightarrow -8 + 7 = b \Leftrightarrow b = -1$
$r : y = -7x - 1$

2.4. $m_s = \frac{2}{1} = 2 \wedge b = 8$
s: $y = 2x + 8$ e $r : y = -7x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -7x - 1 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 8 = -7x - 1 \\ \overline{} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = -9 \\ \overline{} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases}$$

$I(-1, 6)$

3.1. Seja Q um ponto da reta s cuja distância a P é $\sqrt{13}$.
Q pertence a s . Então $Q(x, x + 4)$.
$\overline{PQ} = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(x - 5)^2 + (x + 4 - 4)^2} = \sqrt{13}$
Como o radicando, bem como os dois membros da equação são sempre não negativos, elevando os dois ao quadrado, obtém-se:
$(x - 5)^2 + x^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + x^2 = 13$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{2} \vee x = \dfrac{6}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$
$Q_1(2, 2 + 4)$; $Q_2(3, 3 + 4)$
$Q_1(2, 6)$; $Q_2(3, 7)$
$Q_1(2, 6)$ e $Q_2(3, 7)$ são os pontos da reta s cuja distância a P é $\sqrt{13}$.

3.2. $m_s = 1$
Então, um vetor diretor de s pode ser o vetor de coordenadas $(1, 1)$ ou qualquer um colinear com este.
Assim, só poderá ser verdadeira a opção (A) ou a opção (C).
s: $y = x + 4$
$(0, 2) \curvearrowright 2 = 0 + 4$ (Falso)
$(0, 2)$ não pertence à reta s , pelo que, a opção (A) não pode ser verdadeira.
$(1, 5) \curvearrowright 5 = 1 + 4 \Leftrightarrow 5 = 5$ (verdadeiro)
$(1, 5)$ pertence à reta s e $(2, 2) = 2(1, 1)$
Logo, a opção correta é a opção (C).

3.3. Seja R o ponto da reta s de ordenada 1 .
$R(x, 1)$
$1 = x + 4 \Leftrightarrow x = -3$
$R(-3, 1)$
Equação vetorial da reta r :
$(x, y) = (-3, 1) + k(1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

4.1. $A \in yOz$. Então $A(0, y, z)$.
$(0, y, z) = (-1, 2, 2) + k(-1, 0, 3)$, $k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -1 - k \\ y = 2 + 0k \\ z = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 + 3(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$A(0, 2, -1)$

4.2. O plano que é perpendicular a [AB] e passa pelo seu ponto médio é o plano mediador de [AB].
$(x - 0)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4y+4+\cancel{z^2}+2z+1=$

$=\cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}-2y+1+\cancel{z^2}+10z+25$

$\Leftrightarrow 4x-4y+2y+2z-10z+5-30=0$

$\Leftrightarrow 4x-2y-8z-25=0$

A opção correta é a opção (A).

4.3. Seja $\vec{r}=(-1,0,3)$ um vetor diretor da reta r e $\vec{s}=(2,0,-6)$ um vetor diretor da reta s.

$\frac{2}{-1}=\frac{-6}{3}=-2$ e a segunda coordenada dos dois vetores é nula.

Então $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são colineares, ou seja, as retas r e s poderão ser estritamente paralelas ou coincidentes.

O ponto $(-1,2,2)$ é um ponto da reta r $(-1,2,2)=(-3,2,8)+k(2,0,-6)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-1=-3+2k\\2=2\\2=8-6k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2k=2\\ \overline{}\\6k=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=1\\ \overline{}\\k=1\end{cases}$

$(-1,2,2)$ também é um ponto da reta s.

Então, as retas r e s não são estritamente paralelas. São coincidentes.

5.1. $C=B+\overrightarrow{BC}=B+\overrightarrow{EH}$

$=(-2,1,-1)+(-2,-2,1)$

$=(-2-2,1-2,-1+1)$

$=(-4,-1,0)$

$\overrightarrow{EH}=H-E$

$=(-3,0,4)-(-1,2,3)$

$=(-3+1,0-2,4-3)$

$=(-2,-2,1)$

5.2. BC: (x,y,z)

$=(-2,1,-1)+k(-2,-2,-1)$, $k\in\mathbb{R}$

$=(4,7,-4)=(2,1,-1)+k(-2,-2,-1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4=-2-2k\\7=1-2k\\-4=-1+k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2k=-6\\2k=-6\\k=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-3\\k=-3\\k=-3\end{cases}$

$(4,7,-4)$ pertence à reta BC.

5.3. $\overline{EH}=\|\overrightarrow{EH}\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}$

$=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

$A_{[EHG]}=\frac{3\times 3}{2}=\frac{9}{2}$ u. a.

$V_{[BEHG]}=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times 3=\frac{9}{2}$ u. v.

6.1. Interseção da superfície esférica com o plano $y=k$:

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=16 \wedge y=k$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(k+3)^2+(z-6)^2=16 \wedge y=k$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(z-6)^2=16-(k+3)^2 \wedge y=k$

Para que a interseção da superfície esférica com o plano $y=k$ seja apenas um ponto,

$16-(k+3)^2=0 \wedge k<0$

$\Leftrightarrow (k+3)^2=16 \Leftrightarrow k+3=\pm\sqrt{16} \wedge k<0$

$\Leftrightarrow k=-3-4 \vee k=-3+4 \wedge k<0$

$\Leftrightarrow k=-7 \vee k=1 \wedge k<0$

$\Leftrightarrow k=-7$

$(x-2)^2+(z-6)^2=0 \wedge y=-7$

Logo, $A(2,-7,6)$.

6.2. $\overrightarrow{AC}=C-A=(2,-3,6)-(2,-7,6)$

$=(2-2,-3+7,6-6)=(0,4,0)$

$\overrightarrow{AC}$ ou qualquer vetor colinear com $\overrightarrow{AC}$ é vetor diretor da reta $\overrightarrow{AB}$, por exemplo, o vetor $(0,1,0)$

AB: $(x,y,z)=(2,-7,6)+k(0,1,0)$, $k\in\mathbb{R}$.

Avaliação formativa 8

1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(3,2)-(-3,6)$

$=(3+3,2-6)=(6,-4)$

$\vec{u}=(3,2)$ não é colinear com $\overrightarrow{AB}$.

A opção (A) não é verdadeira.

$m_r=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

$r: y=-\frac{2}{3}x+b$

$A\in r: 6=-\frac{2}{3}\times(-3)+b \Leftrightarrow b=6-2 \Leftrightarrow b=4$

$r: 6=-\frac{2}{3}x+4 \Leftrightarrow 3y=-2x+12$

$\Leftrightarrow 2x+3y-12=0$

A opção (B) é a verdadeira.

2. A reta r é uma reta vertical. Então, tem, como vetor diretor, o vetor $(0,1)$.

Logo, só pode estar representada na opção (B) ou na opção (C).

$(0,1)$ não pertence à reta r.

Então, a opção correta é a opção (C).

3. $C=A+\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow C=(-2,-1)+(9,1)$

$C=(-2+9,-1+1) \Leftrightarrow C=(7,0)$

$\overrightarrow{AD}=D-A=(3,1)-(-2,-1)=$

$=(3+2,1+1)=(5,2)$

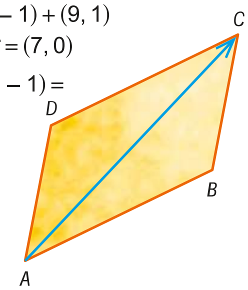
$m_{BC}=m_{AD}=\frac{2}{5}$

BC: $y=\frac{2}{5}x+b$

$C\in BC$: $0=\frac{2}{5}\times 7+b \Leftrightarrow$

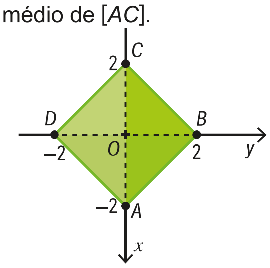
$\Leftrightarrow b=-\frac{14}{5}$

BC: $y=\frac{2}{5}x-\frac{14}{5}$



4.

4.1. O é o ponto médio de $[AC]$.



$B(0,2,0)$; $D(0,-2,0)$

$H=F+\overrightarrow{FH}=F+\overrightarrow{AC}=$

$=(0,0,4)+(-4,0,0)=$

$(-4,0,4)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=$

$=(-2,0,0)-(2,0,0)$

$=(-4,0,0)$

4.2. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CH}=F-A=(0,0,4)-(2,0,0)=(-2,0,4)$

$(x,y,z)=(-2,0,0)+k(-2,0,4)$, $k\in\mathbb{R}$

4.3. $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2}$

$=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

$A_{[ABCD]}=\sqrt{8}^2=8$

$V=\underset{\text{Cota de } f \text{ e de } H}{\underbrace{8\times 4}}=32$ u. v.

$\overrightarrow{AB}=B-A$

$=(0,2,0)-(2,0,0)$

$=(0-2,2-0,0-0)$

$=(-2,2,0)$

Pág. 135

Tarefa de revisão

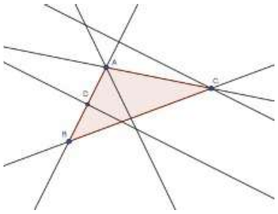
1.1. *E* e *F*

1.2. *B* e *E*

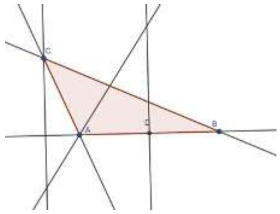
1.3. *CD*

1.4. *A*, *D* e *E*

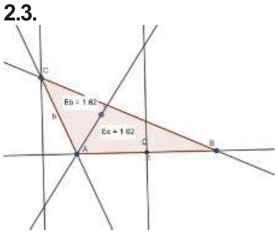
2.1.



2.2.

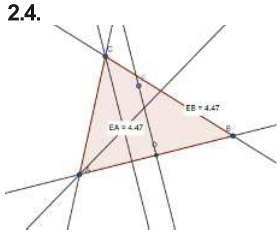


2.3.



As distâncias são iguais.

2.4.

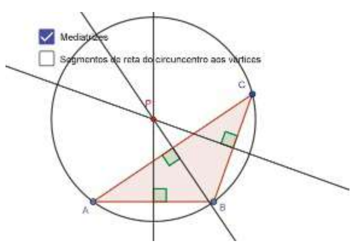


As distâncias são iguais.

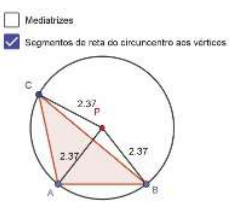
Pág. 136

Tarefa inicial 9

1.



2.



Os comprimentos são iguais. A relação mantém-se.

3. **a)** $\overline{PB}$ **b)** $\overline{PC}$ **c)** $\overline{PB}$ **d)** $\overline{PC}$

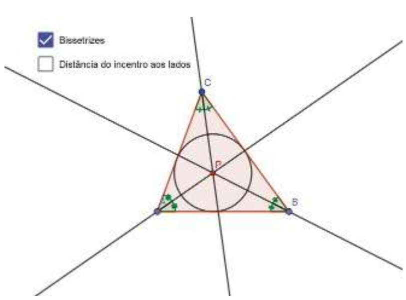
4. Determinando o circuncentro, ou seja, o ponto de encontro das mediatrizes.

5. Determinando o circuncentro e traçando uma circunferência de centro no circuncentro e passando por um dos vértices do triângulo.

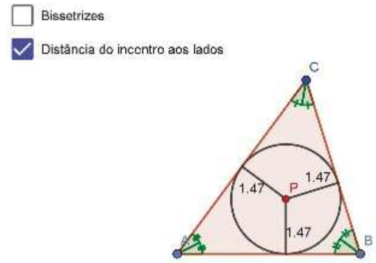
Pág. 138

Tarefa 5

1.



2.



As três distâncias são iguais. Essa relação mantém-se.

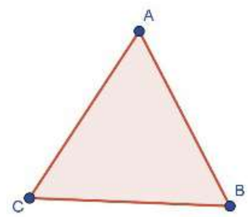
3. **a)** bissetrizes **b)** centro **c)** tangentes

4. O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

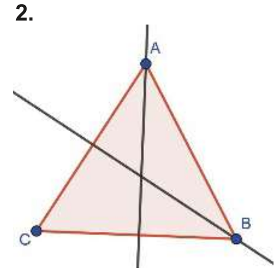
Pág. 140

Tarefa 6

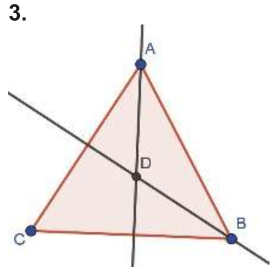
1.



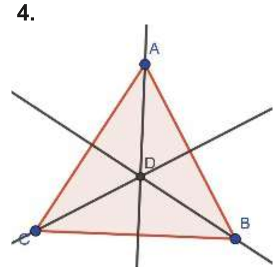
2.



3.



4.



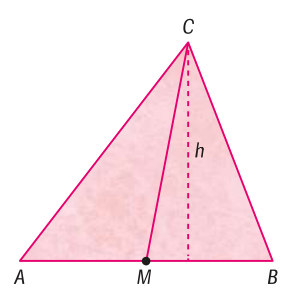
Sim. As três alturas continuam a intersetar-se.

Pág. 141

Tarefa 7

1. Três

2.



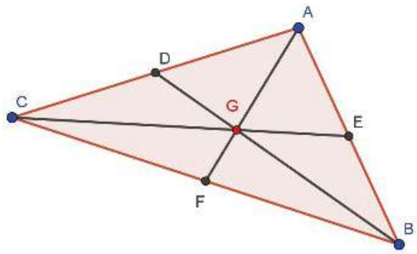
Considere-se o triângulo $[ABC]$.

Seja M o ponto médio de $[AB]$. $\overline{AM} = \overline{MB}$.

h é a altura do triângulo $[ABC]$ relativamente à base $[AB]$ e também é a altura dos triângulos $[AMC]$ e $[MBC]$ relativamente às bases $[AM]$ e $[MB]$ respetivamente.

Os triângulos $[AMC]$ e $[MBC]$ têm a mesma altura e bases com iguais comprimento.
Logo, os dois triângulos têm a mesma área.

3.



Pág. 142

Tarefa 8

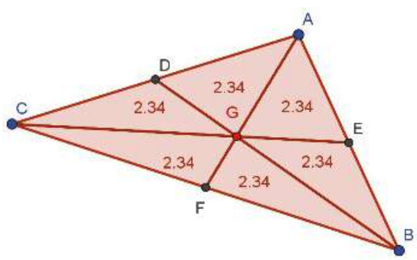
1. Baricentro

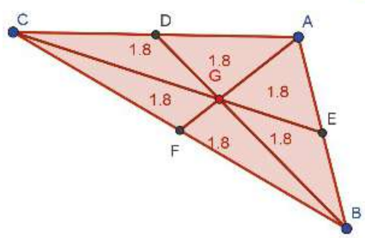
2.1. A mediana $[FC]$ divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos equivalentes.

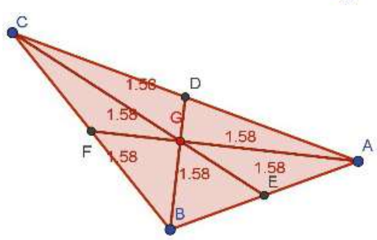
2.2. F é o ponto médio de $[AB]$. Então, $\overline{AF}=\overline{FB}$.
A altura dos dois triângulos é a mesma porque é a distância do baricentro à reta AB. Logo os dois triângulos são equivalentes.

3. O seis triângulos têm a mesma área.

4.







Sim, mantém-se.

Pág. 144

Tarefa 9

1.1. $A_{[APC]}=2A_{[AFP]}$

1.2. **a)** dobro **b)** 2 **c)** $\overline{FP}$
d) $\frac{2}{3}$ **e)** $\frac{2}{3}$ **f)** mediana

2. $\overline{PA}=\frac{2}{3}\overline{DA}$ e $\overline{PB}=\frac{2}{3}\overline{EB}$

Pág. 146

Tarefas de consolidação 9

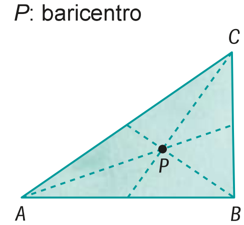
1.1. ortocentro **1.2.** incentro
1.3. circuncentro **1.4.** baricentro
1.5. incentro **1.6.** circuncentro
1.7. baricentro **1.8.** circuncentro

2. Encontrar o circuncentro de um triângulo formado por 3 pontos distintos do arco da circunferência.

3.1. Qualquer triângulo retângulo está inscrito numa semicircunferência em que a hipotenusa é um diâmetro da circunferência. Então o circuncentro encontra-se no ponto médio da hipotenusa.

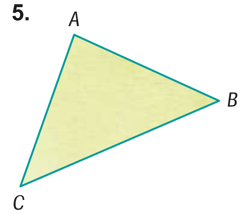
3.2. B

3.3. P: baricentro



4. $I\hat{C}A=38^\circ$
$I\hat{A}C=38^\circ$
$C\hat{I}A=180^\circ-(38^\circ+38^\circ)=104^\circ$

5.



Deve ser encontrado o circuncentro do triângulo $[ABC]$, sendo A, B e C as localidades das três câmaras municipais.
A clínica veterinária deve ser localizada no circuncentro.

6.1. Baricentro.

6.2. $\overline{MC}=9$ cm

$\overline{OC}=\frac{2}{3}\overline{MC} \Leftrightarrow \overline{OC}=\frac{2}{3}\times 9 \Leftrightarrow \overline{OC}=6$ cm

$\overline{MO}=\frac{1}{3}\overline{MC} \Leftrightarrow \overline{MO}=\frac{1}{3}\times 9=3$ cm

Pág. 147

7. $\overline{PD}=12$ cm
$\overline{PB}=\frac{2}{3}\overline{PD} \Leftrightarrow \overline{PB}=\frac{2}{3}\times 12=8$ cm
$\overline{NF}=6$ cm
$\overline{BN}=\frac{2}{3}\overline{NF} \Leftrightarrow \overline{BN}=\frac{2}{3}\times 6=4$ cm
$P_{[BNP]}=\overline{NP}+\overline{BN}+\overline{PB}=9+4+8=21$ cm

8.1. Triângulo equilátero (II).

8.2. Triângulo retângulo isósceles (III).

8.3. Triângulo isósceles não equilátero e triângulo obtusângulo (I e IV).

9.1. Ortocentro

9.2. Desaparece. $B\equiv B'\equiv A'\equiv C'$

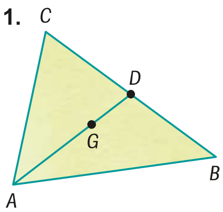
9.3. Incentro

9.4. Não. Se o triângulo for obtusângulo, o incentro do triângulo órtico coincide com o vértice do ângulo inverso obtuso do triângulo $[ABC]$.

Pág. 149

Avaliação formativa 9

1.



$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AD} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AG}}$

Resposta: **(B)**

2.1. **(C)** **2.2.** **(B)**

3. Incentro e baricentro.

4. Circuncentro.

5. $\overline{BC} = 18$ cm

$\overline{BI} = \overline{IC} = 9$ cm

$\overline{AI} = \overline{IB} = 9$

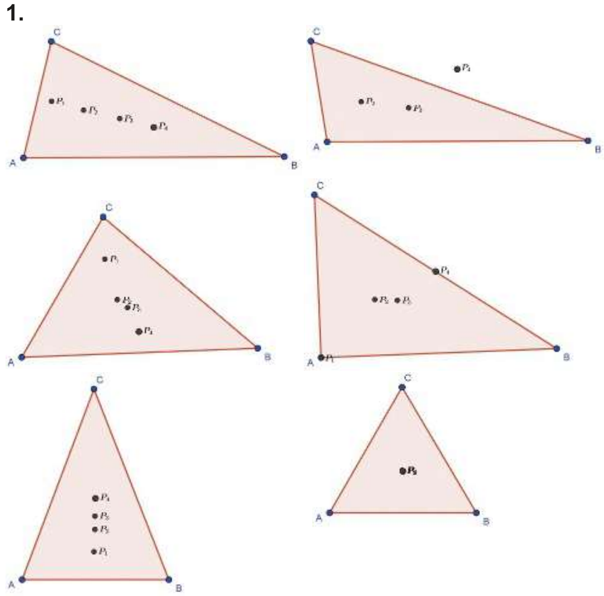
$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AI} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{2}{3}\times 9 \Leftrightarrow \overline{AG} = 6$ cm

6. $A_{[ABC]} = 3\times A_{[JPIC]} = 3\times 12 = 36$ cm^2

Pág. 150

Tarefa inicial 10

1.



Os 4 pontos não são todos colineares, são apenas 3.

2. P_1: ortocentro

P_2: incentro

P_3: baricentro

P_4: circuncentro

3. Três pontos notáveis do triângulo são colineares, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro.

4. **a)** 2

5. **a)** ortocentro

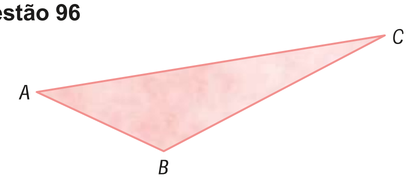
b) baricentro

c) dobro

d) circuncentro

Pág. 151

Questão 96



96.1. Baricentro

96.2. O: Ortocentro

C': Circuncentro

B: Baricentro

$\overline{OC'} = ?$

$\overline{OB} = 3\overline{BC'} - 2 \Leftrightarrow \overline{OB} = 3\times\frac{1}{2}\overline{OB} - 2$

$\Leftrightarrow \overline{OB} - \frac{3}{2}\overline{OB} = -2 \Leftrightarrow 2\overline{OB} - 3\overline{OB} = -4$

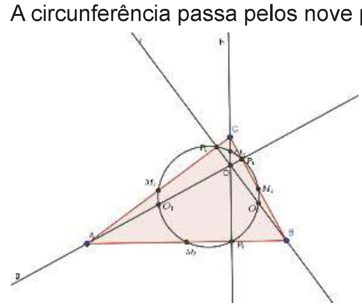
$\Leftrightarrow -\overline{OB} = -4 \Leftrightarrow \overline{OB} = 4$

$\overline{OC'} = 4 + 2 = 6$ cm

Pág. 152

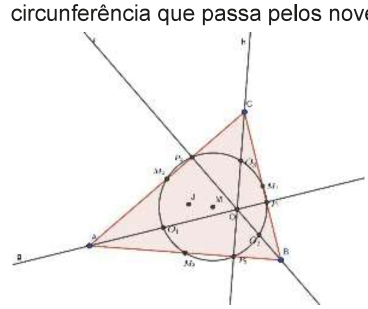
Tarefa 10

1. A circunferência passa pelos nove pontos marcados.

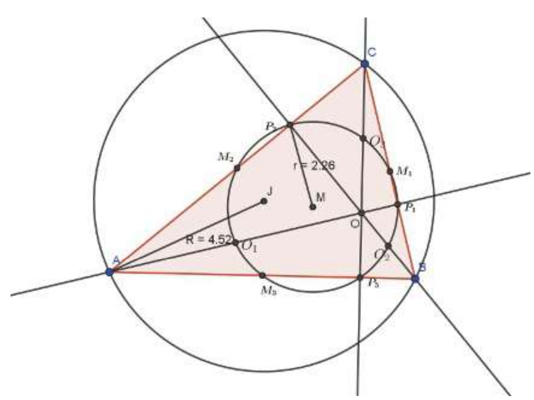


2. A circunferência continua a passar pelos nove pontos.

3. A circunferência é a mesma. M é o centro da circunferência que passa pelos nove pontos.



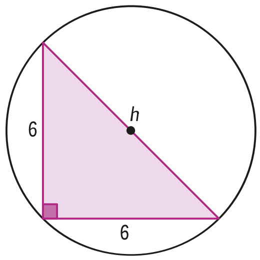
4.



$R = 2r$

Pág. 153

Questão 97



97.1. $h^2 = 6^2 + 6^2 \Leftrightarrow h^2 = 36 + 36$

$\Leftrightarrow h^2 = 72 \Leftrightarrow h = \sqrt{72},\ h > 0$

$\Leftrightarrow h = 2 \times 3\sqrt{2} \Leftrightarrow h = 6\sqrt{2}$

Raio $= \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

97.2. O raio da circunferência dos 9 pontos é metade do raio da circunferência circunscrita.
Assim, o raio da circunferência dos 9 pontos é $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm .

$A_{\odot} = \pi \times r^2 = \pi \times \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi \times \dfrac{9 \times 2}{4} = \dfrac{9}{2}\pi\ \text{cm}^2$

Pág. 154

Tarefas de consolidação 10

1. P – ortocentro
Q – baricentro
R – incentro
S – circuncentro
$\overline{PQ} = 8$ cm ; $\overline{RP} = 7$ cm ; $\overline{RQ} = 2$ cm ; $\overline{RS} = 5{,}4$ cm

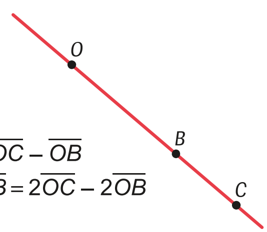
1.1. $P_{[RQP]} = 7 + 8 + 2 = 17$ cm

1.2. $\overline{PQ} = 2\overline{QS} \Leftrightarrow 8 = 2\overline{QS} \Leftrightarrow \overline{QS} = 4$ cm

$P_{[RSQ]} = 2 + 4 + 5{,}4 = 11{,}4$ cm

1.3. $P_{[RSP]} = 12 + 7 + 5{,}4 = 24{,}4$ cm

2. C – circuncentro
B – baricentro
O – ortocentro



$\overline{OB} = 2\overline{BC}$;

$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$

$\overline{OB} = 2\left(\overline{OC} - \overline{OB}\right) \Leftrightarrow \overline{OB} = 2\overline{OC} - 2\overline{OB}$

$\Leftrightarrow 3\overline{OB} = 2\overline{OC}$

$3\left(2x^2 - 1\right) = 2\left(3x^2 - 1\right) \Leftrightarrow \cancel{6x^2} - 3 = \cancel{6x^2} - 2x$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$\overline{OB} = 2 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 1 = 2 \times \dfrac{9}{4} - 1 = \dfrac{9}{2} - 1 = \dfrac{7}{2}$

$\overline{BC} = \dfrac{\overline{OB}}{2} = \dfrac{\frac{7}{2}}{2} = \dfrac{7}{4}$ u. c.

3. E – baricentro
D – ortocentro
F – circuncentro

3.1. $\overline{EA} = 2\overline{EM} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{EA}}{\overline{EM}} = 2$

$\overline{ED} = 2\overline{EF} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{ED}}{\overline{EF}} = 2$

$\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EM}} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \overline{EM} \,.\, \overline{ED} = \overline{EA} \,.\, \overline{EF} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{EM}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{ED}}$

3.2. $\overline{EA} = 10$; $\overline{DF} = 4{,}5$

a) $\overline{EA} = \dfrac{2}{3}\overline{AM} \Leftrightarrow 10 = \dfrac{2}{3}\overline{AM}$

$\Leftrightarrow 30 = 2\overline{AM} \Leftrightarrow \overline{AM} = 15$

$\overline{EM} = \dfrac{1}{3}\overline{AM} \Leftrightarrow \overline{EM} = \dfrac{1}{3} \times 15 \Leftrightarrow \overline{EM} = 5$ u. c.

b) $\overline{EF} = \dfrac{1}{3}\overline{DF} \Leftrightarrow \overline{EF} = \dfrac{1}{3} \times 4{,}5 = 1{,}5$ u. c.

c) $\overline{DE} = 2\overline{EF} \Leftrightarrow \overline{DE} = 2 \times 1{,}5 = 3$

$\overline{DA} = \overline{EA} - \overline{DE} = 10 - 3 = 7$ u.c.

d) $\overline{FM} = \overline{EM} - \overline{EF} = 5 - 1{,}5 = 3{,}5$ u. c.

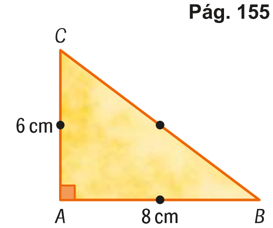
Pág. 155

4. $\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 36 + 64$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 100$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = 10,\ \overline{BC} > 0$



O raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ é $\dfrac{10}{2} = 5$ cm .

O raio da circunferência pedida, circunferência dos nove pontos, é $\dfrac{5}{2}$ cm .

$P = 2\pi r \Leftrightarrow P = 2\pi \times \dfrac{5}{2} = 5\pi$ cm

5.1. P_1 – circuncentro
P_2 – ortocentro
P_3 – ponto médio de $[P_1P_2]$, isto é, o centro da circunferência dos nove pontos.
P_4, P_6 e P_{10} – pontos médios dos lados do triângulo, $[AB]$, $[AC]$ e $[BC]$ respetivamente.
P_7, P_9 e P_{11} – pés das perpendiculares às retas suporte dos lados do triângulo, $[AB]$, $[AC]$ e $[BC]$, respetivamente e que passam pelo vértice oposto, C , B e A respetivamente.
P_5, P_8 e P_{12} – são os pontos médios entre o ortocentro e os vértices, isto é, são os pontos médios de $[P_2B]$, $[P_2A]$ e $[P_2C]$, respetivamente.

5.2. A circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ tem centro em P_1 e passa por A , B e C .
A circunferência dos nove pontos interseta os lados $[AB]$ e $[AC]$ e o ponto A é interior a essa circunferência. Logo, as duas circunferências intersetam-se em dois pontos.

5.3. $\overline{P_1A} = \overline{P_1P_3} + 1{,}5 = 4$ cm $\Leftrightarrow \overline{P_1P_3} = 2{,}5$ cm

a) $\overline{P_1B} = 4$ cm

b) $A = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi\ \text{cm}^2$

c) $\overline{P_1P_2} = 2\overline{P_1P_3} = 2 \times 2{,}5 = 5$ cm

d) O raio da circunferência dos nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita.

$r = \dfrac{\overline{P_1A}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ cm

$p = 2 \times \pi \times 2 = 4\pi$ cm

e) A distância do circuncentro ao baricentro é $\frac{1}{3}$ da distância do circuncentro ao ortocentro. Assim, a distância do circuncentro ao baricentro é $\frac{1}{3}\times 5=\frac{5}{3}$ cm .

6. Num triângulo equilátero, os pontos médios dos lados coincidem com os pés das perpendiculares aos lados que passam pelos vértices do triângulo pelo que os lados do triângulo são tangentes à circunferência dos nove pontos, o que faz com que seja a circunferência inscrita no triângulo.

Pág. 157

Avaliação formativa 10

1. **(B)**

2. **(D)**

3. Q – ortocentro
P – circuncentro

3.1. Os pontos T, U e V são pontos de interseção entre a circunferência dos nove pontos e o triângulo $[ABC]$.
Como os pontos médios dos lados do triângulo são pontos da circunferência dos nove pontos, T, U e V são os pontos médios dos lados do triângulo.

3.2. Os pontos de Euler são os pontos médios dos segmentos de reta de extremidades e ortocentro (Q) e os seus vértices.
Os pontos de Euler são R, S e W.

3.3. O triângulo $[ABQ]$ é isósceles.
S, W e U são pontos médios dos seus lados.
C é o circuncentro do triângulo $[ABQ]$.
A circunferência centrada em C e que contém os pontos S, W e U é a circunferência dos nove pontos do triângulo $[ABQ]$.
A circunferência centrada em C e que contém os vértices do triângulo $[ABQ]$ é a circunferência circunscrita ao triângulo $[ABQ]$, logo o seu raio é o dobro do raio da circunferência dos nove pontos do triângulo $[ABQ]$.

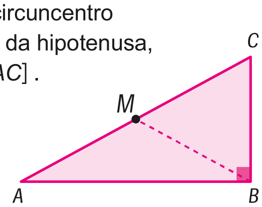
3.4. Seja r o raio da circunferência dos nove pontos

$$\frac{\pi(2r)^2}{\pi r^2}=\frac{\cancel{\pi}\times 4\cancel{r^2}}{\cancel{\pi}\cancel{r^2}}=4$$

Resposta: A razão é 4 .

4. O centro da circunferência dos nove pontos é o ponto médio do segmento de reta de extremos circuncentro e ortocentro do triângulo. O baricentro pertence a esse segmento de reta, mas a distância do ortocentro ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro pelo que o baricentro não pode ser o ponto médio do segmento de reta de extremos circuncentro e ortocentro, logo não pode ser o centro da circunferência dos nove pontos do triângulo.

5. Num triângulo retângulo, o circuncentro encontra-se no ponto médio da hipotenusa, isto é, no ponto médio de $[AC]$.
Como a reta de Euler contém o circuncentro, passa pelo ponto médio de $[AC]$.



Pág. 158

Tarefas complementares

1.1. $A(0,3)$; $B(2,0)$; $C(-2,0)$; $D(0,-3)$
$E(0,0)$; $F(4,2)$; $G(-3,2)$

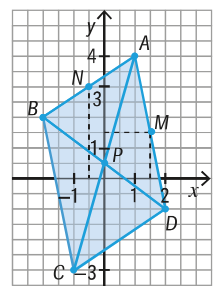
1.2. A, B, C, D e E

1.3. **a)** $(4,-2)$ **b)** $(-4,2)$ **c)** $(-2,2)$
d) $(4,-6)$ **e)** $(4,4)$ **f)** $(-4,-2)$

1.4. **a)** $k^2-7=-7 \wedge 2k+2=2 \Leftrightarrow k^2=0 \wedge 2k=0$
$\Leftrightarrow k=0 \wedge k=0$ Resposta: $k=0$

b) $k^2-7=-3 \wedge 2k+2=6 \Leftrightarrow k^2=4 \wedge 2k=4$
$\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{4} \wedge 2k=4$
$\Leftrightarrow k=\pm 2 \wedge k=2$ Resposta: $k=2$

2.1.



2.2. **a)** $A(1,4)$; $B(x_B, y_B)$; $N\left(-\frac{1}{2},3\right)$

$$\left(\frac{1+x_B}{2},\frac{4+y_B}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},3\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x_B}{2}=-\frac{1}{2} \wedge \frac{4+y_B}{2}=3 \Leftrightarrow 1+x_B=-1 \wedge 4+y_B=6$$

$\Leftrightarrow x_B=-2 \wedge y_B=2$ $B(-2,2)$

$A(1,4)$; $B(x_D, y_D)$; $M\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x_D}{2}=\frac{3}{2} \wedge \frac{4+y_D}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1+x_D=3 \wedge 4+y_D=3$$

$\Leftrightarrow x_D=2 \wedge y_D=-1$ $D(2,-1)$

Ponto médio de $[BD]$, P:

$$P\left(-\frac{2+2}{2},\frac{2+(-1)}{2}\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

b) Ponto médio de $[AC]$

$A(1,4)$; $B(x_C, y_C)$; $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$$\left(\frac{1+x_C}{2},\frac{4+y_C}{2}\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x_C}{2}=0 \wedge \frac{4+y_C}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+x_C=0 \wedge 4+y_C=1$$

$\Leftrightarrow x_C=-1 \wedge y_C=-3$

$C(-1,-3)$

Pág. 159

3.1. $A(1,-2)$; $B(-1,5)$

$$d(A,B)=\sqrt{(1-(-1))^2+(-2-5)^2}$$
$$=\sqrt{2^2+(-7)^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$$

3.2. $A\left(0,-\frac{1}{4}\right)$; $B\left(\frac{1}{3},0\right)$

$$d(A,B)=\sqrt{\left(0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}-0\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{16+9}{144}}=\sqrt{\frac{25}{144}}=\frac{5}{12}$$

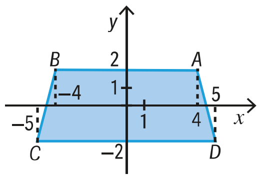
3.3. $A\left(\frac{3}{2},-8\right)$; $B\left(0{,}2\,;\ \frac{2}{5}\right)$

$$d(A,B)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-0{,}2\right)^2+\left(-8-\frac{2}{5}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(1{,}3)^2+\left(-\frac{42}{5}\right)^2}=\sqrt{1{,}69+\frac{1764}{25}}=\sqrt{72{,}25}=8{,}5$$

4. $A(4,2)$; $B(-4,2)$; $C(-5,-2)$; $D(5,-2)$

4.1.



Trapézio isósceles.

4.2. $A_{[ABCD]}=\frac{B+b}{2}\times h=\frac{10+8}{2}\times 4=36$ u. a.

$$d(B,C)=\sqrt{(-4-(-5))^2+[2-(-2)]^2}$$

$$=\sqrt{(-4+5)^2+(2+2)^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$$

$P=10+8+2\sqrt{17}=18+2\sqrt{17}$ u. c.

5.1. $A=\frac{500+400}{2}\times 200+\frac{400+200}{2}\times 100$

$=\frac{900}{2}\times 200+\frac{600}{2}\times 100$

$=90\ 000+30\ 000$

$=120\ 000\ \text{m}^2$

$P=500+2\times\sqrt{50\ 000}+$

$+200+300$

$=1000+2\times\sqrt{50\ 000}\approx 1447$ m

$\overline{AB}^2=100^2+200^2$

$\Leftrightarrow \overline{AB}^2=50\ 000$

Como $\overline{AB}>0$,

$\overline{AB}=\sqrt{50\ 000}$

$\overline{CB}^2=200^2+100^2$

$\Leftrightarrow \overline{CB}^2=50\ 000$

Como $\overline{CB}>0$,

$\overline{CB}=\sqrt{50\ 000}$

5.2. Seja P o ponto onde vai ser plantada a nova árvore.

$P(x,2)$; $C(2,3)$

$d(P,C)=1{,}25 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(2-3)^2}=1{,}25$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(-1)^2}=1{,}25$

Como a soma de dois quadrados é positiva, tem-se que:

$(x-2)^2+1=1{,}5625 \Leftrightarrow (x-2)^2=0{,}5625$

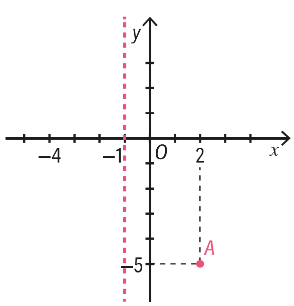
$\Leftrightarrow x-2=\pm\sqrt{0{,}5625} \Leftrightarrow x-2=-0{,}75 \vee x-2=0{,}75$

$\Leftrightarrow x=1{,}25 \vee x=2{,}75$

$P(1{,}25\,;\ 2)$ ou $P(2{,}75\,;\ 2)$

Pág. 160

6. $A(2,-5)$



$k^2-3k-14=-4 \Leftrightarrow k^2-3k-10=0$

$$\Leftrightarrow k=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 1\times(-10)}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2} \Leftrightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{3-7}{2} \vee k=\frac{3+7}{2} \Leftrightarrow k=-2 \vee k=5$$

7. $A(5,3)$; $B(-4,2)$; $O(0,0)$

Seja M o ponto médio de $[AB]$

$$M\left(\frac{5+(-4)}{2},\frac{3+2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$d(M,O)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{5}{2}-0\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{26}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

8. $A(-4,0)$; $D(-2,2)$; $E(2,2)$

$$\begin{cases}\frac{-4+x}{2}=-2\\ \frac{0+y}{2}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4+x=-4\\ y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases} \qquad C(0,4)$$

$$\begin{cases}\frac{x+0}{2}=2\\ \frac{y+4}{2}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y+4=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases} \qquad B(4,0)$$

8.1. $\overline{AB}=\sqrt{(-4-4)^2+(0-0)^2}=\sqrt{(-8)^2}=\sqrt{64}=8$

$\overline{AC}=\sqrt{(-4-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$

$=\sqrt{2^2\times 2^2\times 2}=4\sqrt{2}$

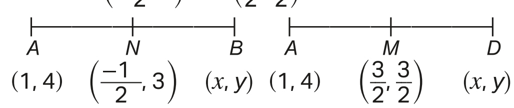
$\overline{BC}=\sqrt{(4-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\overline{BC}\neq\overline{AB}$. O triângulo é isósceles.

8.2. $A_{[CDOE]}=2\times A_{[CDO]}=2\times\frac{\overline{OC}\times|-2|}{2}=4\times 2=8\ \text{m}^2$

9. $A(1,4)$; $N\left(-\frac{1}{2},3\right)$; $M\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

9.1.



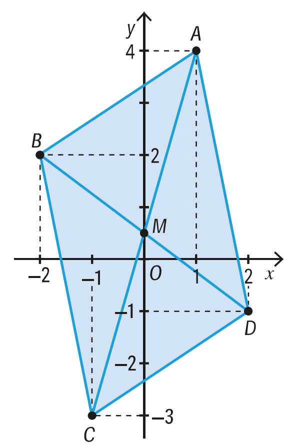
$$\begin{cases}\frac{1+x}{2}=-\frac{1}{2}\\ \frac{4+y}{2}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+x=-1\\ 4+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=2\end{cases} \qquad B(-2,2)$$

$$\begin{cases}\frac{1+x}{2}=\frac{3}{2}\\ \frac{4+y}{2}=\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+x=3\\ 4+y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases} \qquad D(2,-1)$$

Seja M o ponto médio de $[BD]$.

$$M\left(\frac{-2+2}{2},\frac{2+(-1)}{2}\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

9.2.



M é o ponto médio de $[AC]$.

$C(x, y)$

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=0\\ \dfrac{y+4}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1=0\\ y+4=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=-3\end{cases}$$

$C(-1,-3)$

Pág. 161

10. $P(k-2, 5-k)$

10.1. a) $k-2=-4 \Leftrightarrow k=-2$

b) $k-2<0 \wedge 5-k>0 \Leftrightarrow k<2 \wedge -k>-5$

$\Leftrightarrow k<2 \wedge k<5 \Leftrightarrow k<2$

$k \in \left]-\infty, 2\right[$

10.2. $k=-1$; $P(-3, 6)$

$A(-3,-4)$

$A(3,-6)$

$d(A,B)=\sqrt{(-3-3)^2+(-4-(-6))^2}$

$=\sqrt{(-6)^2+(-4+6)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$

$=\sqrt{2^2\times 2\times 5}=2\sqrt{10}$

11. $A(0,0)$; $B(10,0)$; $C(5, 10\sqrt{2})$

11.1. $\overline{AB}=\sqrt{(0-10)^2+(0-0)^2}=\sqrt{(-10)^2}=\sqrt{100}=10$

$\overline{AC}=\sqrt{(0-5)^2+(0-10\sqrt{2})^2}=\sqrt{25+100\times 2}$

$=\sqrt{225}=15$

$\overline{BC}=\sqrt{(10-5)^2+(0-10\sqrt{2})^2}=\sqrt{25+200}=15$

$S=\dfrac{10+15+15}{2}=20$

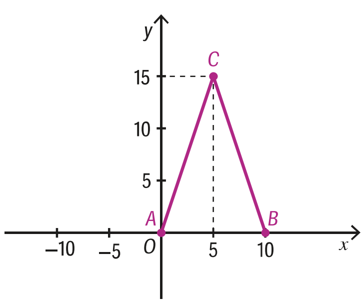
$\sqrt{20(20-10)(20-15)(20-15)}$

$=\sqrt{20\times 10\times 5\times 5}=\sqrt{5000}$

$=\sqrt{2^2\times 2\times 5^2\times 5^2}=2\times 5\times 5\sqrt{2}=50\sqrt{2}$

5000	2
2500	2
1250	2
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

11.2.



$A=\dfrac{10\times 10\sqrt{2}}{2}=50\sqrt{2}$

12. $A(-4,-2)$; $B(0,4)$; $C(x,6)$

12.1. Seja M o ponto médio de $[AB]$.

$M\left(\dfrac{-4+0}{2}, \dfrac{-2+4}{2}\right)=(-2,1)$

$y=3x+b \quad M=(-2,1)$

$1=3\times(-2)+b \Leftrightarrow 1=-6+b \Leftrightarrow b=7$

$y=3x+7$

12.2. Reta AB :

$m=\dfrac{4-(-2)}{0-(-4)}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

$y=\dfrac{3}{2}x+b \quad B(0,4)$

$4=\dfrac{3}{2}\times 0+b \Leftrightarrow b=4$

AB : $y=\dfrac{3}{2}x+4$

$6=\dfrac{3}{2}x+4 \Leftrightarrow 12=3x+8 \Leftrightarrow 4=3x \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}=x$

$C\left(\dfrac{4}{3}, 6\right)$

Seja N o ponto médio de $[BC]$.

$N\left(\dfrac{0+\frac{4}{3}}{2}, \dfrac{4+6}{2}\right)=\left(\dfrac{4}{6}, \dfrac{10}{2}\right)=\left(\dfrac{2}{3}, 5\right)$

$x=\dfrac{2}{3}$ e $y=5$

12.3. $\overline{AC}=\sqrt{\left(-4-\frac{4}{3}\right)^2+(-2-6)^2}=\sqrt{\left(-\frac{16}{3}\right)^2+(-8)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{256}{9}+64} \quad =\sqrt{\dfrac{832}{9}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{832}$

$=\dfrac{1}{3}\times 2\times 2\times 2\times\sqrt{13}$

$=\dfrac{8}{3}\sqrt{13}$

832	2
416	2
208	2
104	2
52	2
26	2
13	13
1	

13. $y=2x$

$P(x, 2x)$; $A(-1,2)$

$d(P,A)=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-(-1))^2+(2x-2)^2}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(2x-2)^2}=2$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$(x+1)^2+(2x-2)^2=2^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1+4$

$x^2-8x+\cancel{4}=\cancel{4} \Leftrightarrow 5x^2-6x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times 5\times 1}}{2\times 5}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-20}}{10} \Leftrightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{16}}{10}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{6-4}{10} \vee x=\dfrac{6+4}{10}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5} \vee x=1 \qquad (1,2)$ e $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$

Pág. 162

14. $A(m^2-1, 2-2m)$

14.1. a) $m^2-1=0 \Leftrightarrow m=-1 \vee m=1$

b) $m^2-1=2-2m \Leftrightarrow m^2+2m-3=0$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 1\times(-3)}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow m=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2}$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{-2-4}{2} \vee m=\dfrac{-2+4}{2}$

$\Leftrightarrow m=-3 \vee m=1$

14.2. $m=\dfrac{1}{2}$

$A\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-1, 2-2\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{4}-1, 2-1\right)=\left(-\dfrac{3}{4}, 1\right)$

a) $M(-1, 1) \quad B(x,y)$

$$\begin{cases}\dfrac{-\frac{3}{4}+x}{2}=-1\\ \dfrac{1+y}{2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{3}{4}+x=-2\\ 1+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3+4x=-8\\ y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\underline{4x=-5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{5}{4}\\ y=1\end{cases} \qquad B\left(-\dfrac{5}{4}, 1\right)$$

b) $D(0\,,\,y)$

$d(M,D)=2 \Leftrightarrow \sqrt{(-1-0)^2+(1-y)^2}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2+(1-y)^2}=2$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$(-1)^2+(1-y)^2=2^2 \Leftrightarrow 1+(1-y)^2=4$

$\Leftrightarrow (1-y)^2=3 \Leftrightarrow 1-y=\pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 1-y=-\sqrt{3} \vee 1-y=+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow y=1+\sqrt{3} \vee y=1-\sqrt{3}$

$D(0\,,\,1+\sqrt{3})$ ou $D(0\,,\,1-\sqrt{3})$

15. $A(3\,,-1)$; $B(6\,,\,1)$; $C(4\,,\,4)$

15.1. a) $D\left(\frac{6+4}{2}\,,\,\frac{1+4}{2}\right)=\left(5\,,\,\frac{5}{2}\right)$

b) O centro das circunferências é o ponto médio de $[AC]$.

Seja M o ponto médio de $[AC]$.

$M\left(\frac{3+4}{2}\,,\,\frac{-1+4}{2}\right)=\left(\frac{7}{2}\,,\,\frac{3}{2}\right)$

15.2. $\overline{AB}=\sqrt{(6-3)^2+\left(1-(-1)^2\right)}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$A_{\text{Quadrado}}=\sqrt{13}^2=13$ u. a.

O raio da circunferência pequena é o comprimento do segmento de reta $[MD]$.

$\overline{MD}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-5\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+(-1)^2}$

$=\sqrt{\frac{9}{4}+1}=\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

O raio da circunferência grande é o comprimento do segmento de reta $[MB]$.

$\overline{MB}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-6\right)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

$A_{\text{sombreada}}=\pi\times\left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2-13+\pi\times\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$=\pi\times\frac{13}{2}-13+\pi\times\frac{13}{4}\approx 17{,}63$ u. a.

16.1. $P=2\pi r+2\pi\frac{r}{2}+2\pi\frac{r}{4}=2\pi\left(r+\frac{r}{2}+\frac{r}{4}\right)$

$=2\pi\times\frac{7}{4}r=\frac{7}{2}\pi r=\frac{7\pi r}{2}$

16.2. $r=4$

Circunferência de menor raio: $r=1$

Seja C_2 o centro da circunferência de maior raio $C_2(4,4)$

$\overline{OC_2}=\sqrt{(0-4)^2+(0-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\overline{CO}=4\sqrt{2}+4+4+1=4\sqrt{2}+9$

Pág. 163

17. $A(2,-4)$; $B(10,0)$; $C(3,4)$

17.1. $(x-2)^2+(y-(-4))^2=(x-10)^2+(y-0)^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+4)^2=(x-10)^2+y^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}+8y+16=\cancel{x^2}-20x+100+\cancel{y^2}$

$\Leftrightarrow 8y=-20x+4x+100-4-16$

$\Leftrightarrow 8y=-16x+80 \Leftrightarrow y=-\frac{16}{8}x+\frac{80}{8}$

$\Leftrightarrow y=-2x+10$

17.2. $M_{[AB]}=\left(\frac{2+10}{2},\frac{-4+10}{2}\right)=(6,-2)$

17.3. $y=-2x+10$; $C(3\,,\,4)$

$4=-2\times3+10 \Leftrightarrow 4=-6+10$

$\Leftrightarrow 4=4$ (verdadeiro)

Logo, C pertence à mediatriz de $[AB]$.

17.4. Como C pertence à mediatriz de $[AB]$, $\overline{BC}=\overline{AC}$.

Logo, o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

17.5. $\left(\sqrt{65}\right)^2=h^2+\left(\frac{\sqrt{80}}{2}\right)^2$

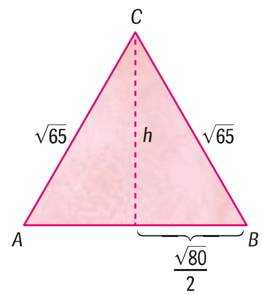
$\Leftrightarrow 65=h^2+\frac{80}{4}$

$\Leftrightarrow 65=h^2+20$

$\Leftrightarrow h^2=45$

Como $h>0$, tem-se que

$h=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$



$A_{[ABC]}=\frac{\sqrt{80}\times\sqrt{45}}{2}=\frac{\sqrt{80\times45}}{2}=\frac{\sqrt{3600}}{2}=\frac{60}{2}$

$=30$ u. a.

18. $A(-5\,,\,0)$; $B(0\,,\,5)$; $C(1\,,-1)$

18.1. $M_{[AB]}=\left(\frac{-5+0}{2},\frac{0+5}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$

$M_{[BC]}=\left(\frac{0+1}{2},\frac{5+(-1)}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},2\right)$

$M_{[AC]}=\left(\frac{-5+1}{2},\frac{0+(-1)}{2}\right)=\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$

18.2. Mediatriz de $[AB]$:

$(x-(-5))^2+(y-0)^2=(x-0)^2+(y-5)^2$

$\Leftrightarrow (x+5)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+10x+\cancel{25}+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-10y+\cancel{25}$

$\Leftrightarrow 10y=-10x$

$\Leftrightarrow y=-x$

Mediatriz de $[BC]$:

$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-5)^2=(x-1)^2+(y-(-1))^2$

$\Leftrightarrow x^2+(y-5)^2=(x-1)^2+(y+1)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-10y+25=\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+2y+1$

$\Leftrightarrow -10y-2y=-2x+1+1-25$

$\Leftrightarrow -12y=-2x-23 \Leftrightarrow y=\frac{2}{12}x+\frac{23}{12}$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{23}{12}$

Interseção das mediatrizes:

$\begin{cases} y=\frac{1}{6}x+\frac{23}{12} \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=\frac{1}{6}x+\frac{23}{12} \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-\frac{1}{6}x=\frac{23}{12} \\ \_\_\_ \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{6}x=\frac{23}{12} \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x=23 \\ \_\_\_ \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{23}{14} \\ y=-\left(-\frac{23}{14}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{23}{14} \\ y=\frac{23}{14} \end{cases}$

Resposta: Circuncentro $\left(-\frac{23}{14},\frac{23}{14}\right)$

19.1. C_1: Centro $(3,-1)$

C_2: Centro $(0,7)$

C_3: Centro $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

19.2. C_1: Raio $= 3$
C_2: Raio $= 1$
C_3: Raio $= \sqrt{3}$

19.3. C_1: $x = 3$
$(3-3)^2 + (y+1)^2 = 9 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 9$
$\Leftrightarrow y+1 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow y+1 = \pm 3$
$\Leftrightarrow y+1 = -3 \vee y+1 = 3 \Leftrightarrow y = -4 \vee y = 2$
$(3, -4)$ e $(3, 2)$, por exemplo.
C_2: $y = 7$
$x^2 + (7-7)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$
$(-1, 7)$ e $(1, 7)$, por exemplo.
C_3: $x = -\frac{1}{2}$
$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \vee y = \sqrt{3}$
$\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$, por exemplo.

Pág. 164

20.1. $(x-1)^2 + (y+2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$
A condição representa uma circunferência de centro $(1, -2)$ e raio 1.

20.2. $(x-3)^2 + 2(y+1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = -1$
O primeiro membro é não negativo, por ser a soma de dois quadrados, e o segundo membro é negativo. A condição é impossível, logo representa o conjunto vazio.

20.3. $4\left[(x+1)^2 + y^2\right] = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 0$
Se a condição representasse uma circunferência, o seu raio seria 0.
A condição representa o ponto de coordenadas $(-1, 0)$.

21. $A(0, 2)$; $B(6, 5)$

21.1. $C(x_c, y_c)$ e B ponto médio de $[AC]$.
$$\begin{cases} \frac{0 + x_C}{2} = 6 \\ \frac{2 + y_C}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 12 \\ 2 + y_C = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 12 \\ y_C = 8 \end{cases}$$
$C(12, 8)$
$D(x_D, y_D)$ e C ponto médio de $[BD]$.
$$\begin{cases} \frac{6 + x_D}{2} = 12 \\ \frac{5 + y_D}{2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + x_D = 24 \\ 5 + y_D = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 18 \\ y_D = 11 \end{cases}$$
$D(18, 11)$

21.2. $m_{AD} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$; $B(6, 5)$
$y = -2x + b$
$5 = -2 \times 6 + b \Leftrightarrow 5 + 12 = b \Leftrightarrow b = 17$
$y = -2x + 17$

22. $A(-2, 1)$; $B(-1, 0)$; $C(4, 5)$

22.1. $\overline{AB} = \sqrt{[-2-(-1)]^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-2+1)^2 + 1} = \sqrt{2}$
$\overline{BC} = \sqrt{(-1-4)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$
$\overline{AC} = \sqrt{(-2-4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2}$
$= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$
$\left(\sqrt{52}\right)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 52 = 50 + 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 52 = 52$ (verdadeira)
$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, logo o triângulo é retângulo em B.

22.2. $A\hat{B}C = 90°$
O ângulo ABC é um ângulo inscrito.
A amplitude do arco compreendido entre os seus lados é o dobro da amplitude do ângulo.
Assim, $\overset{\frown}{AC} = 2 \times 90° = 180°$
logo, $[AC]$ é o diâmetro da circunferência.

22.3. O centro da circunferência é o ponto médio de $[AC]$.
$M_{[AC]} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (1, 3)$
raio $= d(A, M) = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-3)^2}$
$= \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
$(x-1)^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$

Pág. 165

23. $A(3, 4)$; $B(3, -6)$; $C(0, -3)$

23.1. **a)** $\cancel{(x-3)^2} + (y-4)^2 = \cancel{(x-3)^2} + (y-(-6))^2$
$\Leftrightarrow (y-4)^2 = (y+6)^2 \Leftrightarrow \cancel{y^2} - 8y + 16 = \cancel{y^2} + 12y + 36$
$\Leftrightarrow -8y - 12y = 36 - 16 \Leftrightarrow -20y = 20$
$\Leftrightarrow y = -1$
b) $(x-3)^2 + (y-(-6))^2 = (x-0)^2 + (y-(-3))^2$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+6)^2 = x^2 + (y+3)^2$
$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 6x + \cancel{9} + \cancel{y^2} + 12y + 36 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 6y + \cancel{9}$
$\Leftrightarrow 12y - 6y = 6x - 36 \Leftrightarrow 6y = 6x - 36$
$\Leftrightarrow y = x - 6$

23.2. **a)** $\begin{cases} y = -1 \\ y = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -1 = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 5 \end{cases}$
Centro $(5, -1)$
b) $R = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{2^2 + (-5)^2}$
$= \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$
c) $(x-5)^2 + (y-(-11))^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2$
$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+1)^2 = 29$

24. $R^2 = 1225 \underset{(R>0)}{\Longleftrightarrow} r = \sqrt{1225} = 35$

24.1. $C(90, 0)$; $r = 35$
$(x-90)^2 + y^2 = 35^2 \Leftrightarrow (x-90)^2 + y^2 = 1225$

24.2. $P = 2 \times 90 + 2 \times \pi \times 35 \approx 399{,}91$
Resposta: 400 metros

25. $A(-2, -4)$; $T(3, 2)$; $P(x, y)$
Os pontos pertencem a uma circunferência de centro em T e que passa por A. Assim, o raio dessa circunferência é a distância de A e T.
$\overline{AT} = \sqrt{(-2-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-6)^2}$
$= \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$
$(x-3)^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{61}\right)^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 61$
$\Leftrightarrow (x, y) \neq (-2, -4)$

Pág. 166

26. $x^2+(y-3)^2=k+9$

26.1. $k+9>0 \Leftrightarrow k>-9$

$k\in\,]-9,+\infty[$

26.2. $R=3$

$k+9=3^2 \Leftrightarrow k+9=9 \Leftrightarrow k=0$

26.3. $x^2+(y-3)^2=16+9 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=25$

$C(0,-3)$; raio $=5$

Retas paralelas ao eixo Ox :

$y=3-5 \Leftrightarrow y=-2$

$y=3+5 \Leftrightarrow y=8$

Retas paralelas ao eixo Ox :

$x=0+5 \Leftrightarrow x=5$

$x=0-5 \Leftrightarrow x=-5$

27. $x^2+y^2=36$

$A(0,y)$; $B(x,0)$

27.1. $x=0 \quad 0^2+y^2=36 \Leftrightarrow y^2=36 \underset{(y>0)}{\Leftrightarrow} y=\sqrt{36}$

$\Leftrightarrow y=6 \qquad A(0,6)$

$y=0 \quad x^2+0^2=36 \Leftrightarrow x^2=36$

$\underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x^2=\sqrt{36} \Leftrightarrow x=6 \qquad B(6,0)$

27.2. $M\left(\frac{0+6}{2},\frac{6+0}{2}\right)$; $O(0,0)$

$m=\frac{3-0}{3-0}=1$

$b=0$

$y=1x+0 \Leftrightarrow y=x$

27.3. $C(x,x)$ e C pertence à circunferência de equação

$x^2+x^2=36$

$x^2+x^2=36 \Leftrightarrow 2x^2=36 \Leftrightarrow x^2=18$

$\underset{(x<0)}{\Leftrightarrow} x=-\sqrt{18} \Leftrightarrow x=-3\sqrt{2}$

$C\left(-3\sqrt{2},-3\sqrt{2}\right)$

18	2
9	3
3	1
1	

$18=2\times 3^2$

28. $(x+2)^2+(y-3)^2=13$

$A(1,1)$ Centro $(-2,3)$ $B(x,y)$

$\begin{cases}\frac{1+x}{2}=-2\\ \frac{1+y}{2}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+x=-4\\ 1+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-5\\ y=5\end{cases} \qquad B(-5,5)$

29. $A(1,-1)$; $B(2,-3)$; $P(1,k)$

Mediatriz de $[AB]$:

$(x-1)^2+(y-(-1))^2=(x-2)^2+(y-(-3))^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y+3)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+2y+1=\cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}+6y+9$

$\Leftrightarrow 2y-6y=-4x+2x+4+9-1-1$

$\Leftrightarrow -4y=-2x+11 \Leftrightarrow y=\frac{2}{4}x-\frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{11}{4}$

$k=\frac{1}{2}\times 1-\frac{11}{4} \Leftrightarrow k=\underset{(\times 2)}{\frac{1}{2}}-\frac{11}{4} \Leftrightarrow k=-\frac{9}{4}$

Pág. 167

30. $A(1,1)$; $B(-1,3)$

30.1. Bissetriz dos quadrantes ímpares: $y=x$

Mediatriz de $[AB]$:

$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-(-1))^2+(y-3)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x+1)^2+(y-3)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+2y+\cancel{1}=\cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}-6y+9$

$\Leftrightarrow -2y+6y=2x+2x+9-1 \Leftrightarrow 4y=4x+8$

$\Leftrightarrow y=x+2$

Como o declive das duas retas é igual, e igual a 1, as duas retas são paralelas.

30.2. Ponto médio $\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{7}\right)$; $P(x,y)$

$\begin{cases}\frac{-1+x}{\underset{(\times 5)}{2}}=\underset{(\times 2)}{\frac{1}{5}}\\ \frac{3+y}{\underset{(\times 7)}{2}}=\underset{(\times 2)}{\overline{}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5+5x=2\\ 21+7y=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}5x=7\\ 7y=-25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{7}{5}\\ y=-\frac{25}{7}\end{cases} \qquad P\left(\frac{7}{5},-\frac{25}{7}\right)$

30.3. $Q(x,2)$

$\overline{QA}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$(x-1)^2+(2-1)^2=5 \Leftrightarrow (x-1)^2+1=5$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=4 \Leftrightarrow x-1=\pm\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x-1=-2 \vee x-1=2 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=3$

$Q(-1,2)$ ou $Q(3,2)$

30.4. $C(2,6)$

$\overline{AB}=\sqrt{(1-(-1))^2+(1-3)^2}=\sqrt{2^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-2)^2+(1-6)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2}$

$=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-1-2)^2+(3-6)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$

$\left(\sqrt{26}\right)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2+\left(\sqrt{18}\right)^2 \Leftrightarrow 26=8+18$

$\Leftrightarrow 26=26$ (verdadeira)

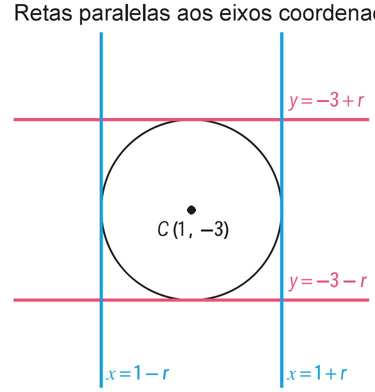
$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

Logo, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B .

31.1. $(x-1)^2+(y+3)^2=r^2$

$C(1,-3)$

Retas paralelas aos eixos coordenados



$x=1+r$

$x=1-r$

$y=-3+r$

$y=-3-r$

Resposta: **(D)**

31.2. $r = 3$

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$

Retas paralelas ao eixo Ox:

$y = -3+3 \Leftrightarrow y = 0$

$y = -3-3 \Leftrightarrow y = -6$

Retas paralelas ao eixo Oy:

$x = 1+3 \Leftrightarrow x = 4$

$x = 1-3 \Leftrightarrow x = -2$

32. $(x-2{,}4)^2 + y^2 = 16$ $A(2{,}4\ ;\ 0)$ $r = 4$

$B(0, y_1)\ ;\ C(0, y_2)\ ;\ D(x, 0)$

$(0-2{,}4)^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow (-2{,}4)^2 + y^2 = 16$

$\Leftrightarrow 5{,}76 + y^2 = 16 \Leftrightarrow y^2 = 10{,}24$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{10{,}24} \Leftrightarrow y = \pm 3{,}2$

$B(0; 3{,}2)\ ;\ C(0; -3{,}2)$

$(x-2{,}4)^2 + 0^2 = 16 \Leftrightarrow (x-2{,}4)^2 = 16$

$\Leftrightarrow x - 2{,}4 = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x - 2{,}4 = -4 \vee x - 2{,}4 = 4$

$\Leftrightarrow x = -1{,}6 \vee x = 6{,}4$

Como D tem abcissa negativa, $D(-1{,}6\ ;\ 0)$.

$A = \dfrac{2 \times 3{,}2 \times 1{,}6}{2} = 5{,}12$ u. a.

Pág. 168

33. $A(1, -2)\ ;\ B(-2, 3)$

33.1. a) $C(x, y)$

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{2} = -2 \\ \dfrac{-2+y}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x = -4 \\ -2+y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 8 \end{cases}$$

$C(-5, 8)$

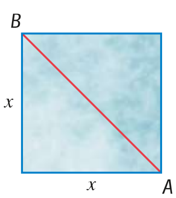
b) $\overline{AB} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-2-3)^2}$

$= \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$(\sqrt{34})^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow 34 = 2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 17$

$A = 17$ u. a.



33.2. $P(\alpha, \beta)$

$(x-1)^2 + (y-(-2))^2 = (x-(-2))^2 + (y-3)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = (x+2)^2 + (y-3)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4}$

$= \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} - 6y + 9$

$\Leftrightarrow 4x + 6y = 4x + 2x + 9 - 1 \Leftrightarrow 10y = 6x + 8$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{6}{10}x + \dfrac{8}{10} \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}$

$\beta = \dfrac{3}{5}\alpha + \dfrac{4}{5}$

34. $\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x+1 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 1 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

Centro $(-1, -1)\ ;\ O(0, 0)$

raio $= \sqrt{(-1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x-(-1))^2 + (y-(-1))^2 = (\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$

35. $y = x - 1\ ;\ y = -x + 5$

O centro da circunferência é o ponto de interseção das mediatrizes.

$\begin{cases} y = x-1 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+5 = x-1 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-x = -1-5 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -6 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Centro $(3, 2)$

36. $A(2, -4)\ ;\ C(x, x)\ ;\ O(0, 0)$

36.1. $(x-2)^2 + (y-(-4))^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} + 8y + 16 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2}$

$\Leftrightarrow -4x + 8y + 20 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y = 5$

36.2. $d(C, O) = d(C, A)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (x-(-4))^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (x+4)^2}$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$2x^2 = (x-2)^2 + (x+4)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{2x^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{x^2} + 8x + 16$

$\Leftrightarrow 4x + 20 = 0 \Leftrightarrow 4x = -20$

$\Leftrightarrow x = -5$ $\qquad C(-5, -5)$

36.3. $d(C, 0) = \sqrt{(-5-0)^2 + (-5-0)^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

Raio $= \sqrt{50}$

$(x-(-5))^2 + (y-(-5))^2 = (\sqrt{50})^2$

$\Leftrightarrow (x+5)^2 + (y+5)^2 = 50$

36.4. $B(x, 0)$, $x < 0$ $\quad D(0, y)$, $y < 0$

$y = 0$

$(x+5)^2 + (0+5)^2 = 50 \Leftrightarrow (x+5)^2 + 5^2 = 50$

$\Leftrightarrow (x+5)^2 = 25 \Leftrightarrow x + 5 = \pm\sqrt{25}$

$\Leftrightarrow x + 5 = -5 \vee x + 5 = 5 \Leftrightarrow x = -10 \vee x = 0$

$B(-10, 0)$

$x = 0$

$(0+5)^2 + (y+5)^2 = 50 \Leftrightarrow 5^2 + (y+5)^2 = 50$

$\Leftrightarrow (y+5)^2 = 25 \Leftrightarrow y + 5 = \pm\sqrt{25}$

$\Leftrightarrow y + 5 = -5 \vee y + 5 = 5 \Leftrightarrow y = -10 \vee y = 0$

$D(0, -10)$

Ponto médio de $[BD]$:

$\left(\dfrac{-10+0}{2}, \dfrac{0+(-10)}{2}\right) = (-5, -5) = C$

Logo, $[BD]$ é um diâmetro da circunferência porque contém o centro, C, da circunferência.

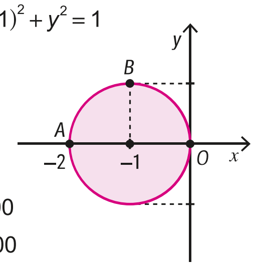
Pág. 169

37. $(x+1)^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$

$C(1, 0)$ $\qquad r = 1$

$A(-2, 0)$ $\qquad B(-1, 1)$

$A = \dfrac{2 \times 1}{2} = 1$ u. a.



38. $D(45, 5)\ ;\ P(65, 15)$

$C_J: (x-15)^2 + (y-20)^2 = 100$

$C_R: (x-40)^2 + (y-25)^2 = 100$

38.1. $A = 80 \times 40 = 3200\ \text{m}^2$

$\dfrac{3200}{1{,}2} \approx 2666$ pessoas

38.2. $C_1(15, 20)$; $C_2(40, 25)$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(40-15)^2 + (25-20)^2}$

$= \sqrt{25^2 + 5^2} = \sqrt{650}$

Distância mínima $= \sqrt{650} - 20 \approx 5{,}5$ m

Distância máxima $= \sqrt{650} + 20 \approx 45{,}5$ m

38.3. Mediatriz de $[PD]$:

$(x-45)^2 + (y-5)^2 = (x-65)^2 + (y-15)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 90x + 2025 + \cancel{y^2} - 10y + 25$

$= \cancel{x^2} - 130x + 4225 + \cancel{y^2} - 30y + 225$

$\Leftrightarrow -10y + 30y = -130x + 90x + 4225 + 225 - 2025 - 25$

$\Leftrightarrow 20y = -40x + 2400 \Leftrightarrow y = -2x + 120$

$(x-15)^2 + (-2x + 120 - 20)^2 = 100$

$\Leftrightarrow (x-15)^2 + (-2x+100)^2 = 100$

$\Leftrightarrow x^2 - 30x + 225 + 4x^2 - 400x + 10\,000 = 100$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 430x + 10\,125 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 86x + 2025 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-(-86) \pm \sqrt{(-86)^2 - 4 \times 1 \times 2025}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{86 \pm \sqrt{-704}}{2}$

Equação impossível, logo a circunferência C_1 e a mediatriz $[DP]$ não se intersetam, isto é, o João nunca está à mesma distância do Pedro e da Daniela.

Pág. 170

39. $(x+2)^2 - 13 + (y-3)^2 = m$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = m + 13$

$m + 13 > 0 \Leftrightarrow m > -13$; $m \in]-13, +\infty[$

40. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$; $C(1, -2)$; raio: 3

$C(4, 3)$; raio 2: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$

Distância entre os centros das duas circunferências:

$d = \sqrt{(4-1)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + (3+2)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

Soma dos raios: $3 + 2 = 5$

$\sqrt{35} > 5$

Como a distância entre os centros das duas circunferências é maior do que a soma dos raios, as duas circunferências não se intersetam, isto é, a interseção é o conjunto vazio.

41. $A(x, -x)$, $x < 0$; $\overline{AB} = 8$; $B(-x, x)$ $O(0, 0)$

41.1. $\overline{OA}^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 32 \underset{(\overline{OA} > 0)}{\Leftrightarrow} \overline{OA} = \sqrt{32}$

$(x-0)^2 + (y-0)^2 - (\sqrt{32})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 32$

41.2. $A = \dfrac{3}{4}\pi \times (\sqrt{32})^2 + \dfrac{8 \times 4}{2} = \dfrac{3}{4}\pi \times 32 + 16$

$= 24\pi + 16$ dm^2

41.3. $h = 2$ m $= 20$ dm

$V = (24\pi + 16) \times 20 \approx 1828$ dm^3 $= 1828$ litros.

Pág. 171

42. $P(1-k, 2k)$

42.1. $2k > 2 \Leftrightarrow k > 1$ $\quad k \in]1, +\infty[$

42.2. $1 - k \geqslant -1 \Leftrightarrow -k \geqslant -2 \Leftrightarrow k \leqslant 2$ $\quad k \in]-\infty, 2]$

42.3. $(0,1)$; $(-1,0)$

$m = \dfrac{0-1}{-1-0} = 1$

$b = 1$

$y = x + 1$

$y \geqslant x + 1$

$2k \geqslant 1 - k + 1 \Leftrightarrow 2k + k \geqslant 2 \Leftrightarrow 3k \geqslant 2 \Leftrightarrow k \geqslant \dfrac{2}{3}$

$k \in \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$

43.1. $A(3,3)$; $B(1,0)$

$m = \dfrac{0-3}{1-3} = \dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{3}{2}x + b$

$0 = \dfrac{3}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$

$x \geqslant 0 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 3 \wedge y \geqslant \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$

43.2. **a)** $A_{[OBAC]} = \dfrac{3+1}{2} \times 3 = 2 \times 3 = 6$ u. a.

b) $x = 0$

$y = \dfrac{3}{2} \times 0 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{2}$

$D\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$

$A_{[CDA]} = \dfrac{3 \times \left(3 + \dfrac{3}{2}\right)}{2} = \dfrac{3 \times \dfrac{9}{2}}{2} = \dfrac{27}{4}$ u. a.

44. $A(1, -2)$; $B(-3, y)$, $y > 0$

44.1. $\overline{AB} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(-3-1)^2 + (y-(-2))^2} = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-4)^2 + (y+2)^2} = 4\sqrt{2}$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$16 + (y+2)^2 = (4\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 16 + (y+2)^2 = 32$

$\Leftrightarrow (y+2)^2 = 16 \Leftrightarrow y + 2 = \pm\sqrt{16}$

$\Leftrightarrow y + 2 = -4 \vee y + 2 = 4 \Leftrightarrow y = -6 \vee y = 2$

A ordenada de B é 2 .

44.2. reta AB :

$m = \dfrac{2-(-2)}{-3-1} = -1$

$y = -x + b$

$-2 = -1 + b \Leftrightarrow b = -1$

$y = -x - 1$

$[AB]$: $y = -x - 1 \wedge -3 \leqslant x \leqslant 1$

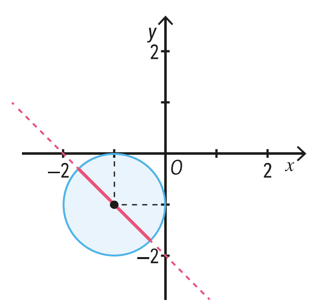
Pág. 172

45. $y + x = -2 \wedge (x+1)^2 + (y+1)^2 \leqslant 1$

$\Leftrightarrow y = -x - 2 \wedge (x+1)^2 + (y+1)^2 \leqslant 1$

$C(-1, -1)$; $r = 1$

x	$y = -x - 2$
0	-2
-2	0



Resposta: **(A)**

46. $A(3,0)$; $B(0,3)$; $C(-3,0)$; $D(0,-3)$; $E(x,-3)$

46.1. reta AB

$m=\frac{3-0}{0-3}=-1$

$b=3$

$y=-x+3$

$-3=-x+3 \Leftrightarrow x=6$

$E(6,-3)$

$A=\frac{6\times 6}{2}-\frac{\pi\times 3^2}{4}=18-\frac{9}{4}\pi$ u. a.

46.2. $(x\geqslant 0 \wedge y\geqslant 0 \wedge y\leqslant -x+3) \vee$

$(x^2+y^2\geqslant 9 \wedge y\leqslant -x+3 \wedge y\geqslant -3 \wedge x\geqslant 0)$

$\Leftrightarrow (x\geqslant 0 \wedge 0\leqslant y\leqslant -x+3) \vee$

$(x^2+y^2\geqslant 9 \wedge -3\leqslant y\leqslant -x+3 \wedge x\geqslant 0)$

46.3. $x\geqslant 0$

$R\left(1,\frac{13}{6}\right)$

$\frac{13}{6}\leqslant -1+3 \Leftrightarrow \frac{13}{6}\leqslant 2$ (Falso)

$S(3,-2)$

$3^2+(-2)^2\geqslant 9 \wedge -3\leqslant -2\leqslant -3+3 \wedge 3\geqslant 0$

$\Leftrightarrow 13\geqslant 9 \wedge -3\leqslant -2\leqslant 0 \wedge 3\geqslant 0$ (verdadeiro)

Resposta: **(D)**

Pág. 173

47.1. $\overline{ED}=0,6-0,51=0,09$

$\overline{EP}=5$

$\frac{\overline{ED}}{\overline{EP}}=\frac{0,09}{5}=0,018$

Resposta: Como $0,018$ está entre $0,015$ e $0,02$, as luzes estão corretamente reguladas.

47.2. reta PD:

$P(-5\,;0,6)$ $D(0\,;0,51)$

$m=\frac{0,51-0,6}{0-(-5)}=-0,018$

$b=0,51$

$y=-0,018x+0,51$

reta PB:

$P(-5\,;0,6)$ $B(-2\,;0)$

$m=\frac{0-0,6}{-2-(-5)}=-0,2$

$y=-0,2x+b$

$0=-0,2\times(-2)+b \Leftrightarrow 0=0,4+b \Leftrightarrow b=-0,4$

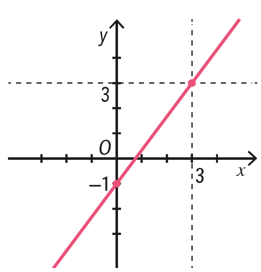
$y=-0,2x-0,4$

Resposta: $y\leqslant -0,018x+0,51 \wedge y\geqslant -0,2x-0,4 \wedge$

$\wedge\, x\leqslant 0 \wedge y\geqslant 0$

48. $y=2x-1$

x	$y=2x-1$
0	-1
$\frac{1}{2}$	0



Resposta: **(B)**

Pág. 174

49. $A_{[ABCD]}=18$ u. a.

$A(2,0)$

49.1. lado $=\sqrt{18}$

$\overline{AC}^2=\left(\sqrt{18}\right)^2+\left(\sqrt{18}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2=18+18$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2=36 \Leftrightarrow \overline{AC}=\sqrt{36}$, $\overline{AC}>0$

$\Leftrightarrow \overline{AC}=6$

$A(2,0)$; $C(8,0)$; $D(5,3)$

$\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=5$

$\overline{BD}=6$

49.2. reta AD:

$m=\frac{3-0}{5-2}=1$

$y=x+b$; $A(2,0)$

$0=2+b \Leftrightarrow b=-2$

$y=x-2$

reta DC:

$m=-1$

$y=-x+b$; $C(8,0)$

$0=-8+b \Leftrightarrow b=8$

$y=-x+8$

Resposta: $y\leqslant x-2 \wedge y\leqslant -x+8 \wedge y\geqslant 0$

50. AB: $x=4$

$B(4,4)$; $C(x,0)$, $x<0$;

AC: $4x+7y=-12$

$\Delta[DEF]\sim\Delta[ABC]$

$r=75\%=\frac{3}{4}$

50.1. $4x+7\times 0=-12 \Leftrightarrow 4x=-12$

$\Leftrightarrow x=-\frac{12}{4} \Leftrightarrow x=-3$ $\quad C(-3,0)$

50.2. $A(4,-4)$

reta AC:

$m=\frac{-4-0}{4-(-3)}=-\frac{4}{7}$

$y=-\frac{4}{7}x+b$; $C(-3,0)$

$0=-\frac{4}{7}\times(-3)+b$

$\Leftrightarrow b=-\frac{12}{7}$

$y=-\frac{4}{7}x-\frac{12}{7}$

reta BC:

$m=\frac{4-0}{4-(-3)}=\frac{4}{7}$

$y=\frac{4}{7}x+b$; $C(-3,0)$

$0=\frac{4}{7}\times(-3)+b$

$\Leftrightarrow b=\frac{12}{7}$

$y=\frac{4}{7}x+\frac{12}{7}$

Resposta: $-\frac{4}{7}x-\frac{12}{7}\leqslant y\leqslant \frac{4}{7}x+\frac{12}{7} \wedge x\leqslant 4$

50.3. a) Seja B' o baricentro, isto é, o ponto de interseção das medianas do triângulo $[ABC]$.

$\overline{CB'}=\frac{2}{3}\times 7 \Leftrightarrow \overline{CB'}=\frac{14}{3}$

$B'(x,0)$

$x=\frac{14}{3}-\overline{CO}=\frac{14}{3}-3=\frac{14}{3}-\frac{9}{3}=\frac{5}{3}$ $\qquad B'\left(\frac{5}{3},0\right)$

b) $A_{[ABC]}=\frac{8\times 7}{2}=28$ u. a.

$\frac{A_{[DEF]}}{A_{[ABC]}}=razão^2 \Leftrightarrow \frac{A_{[DEF]}}{28}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\Leftrightarrow A_{[DEF]}=\frac{9}{16}\times 28 \Leftrightarrow A_{[DEF]}=\frac{63}{4}$ u. a.

$A_{sombreada}=28-\frac{63}{4}=\frac{49}{4}=12,25$ u. a.

Pág. 175

51. $A(0,2)$; $B(-3,1)$; $P\left(\frac{a}{3},2\right)$

Mediatriz de $[AB]$:

$(x-0)^2+(y-2)^2=(x-(-3))^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=x^2+6x+9+y^2-2y+1$

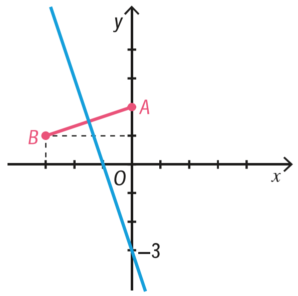
$\Leftrightarrow -4y+2y=6x+9+1-4$

$\Leftrightarrow -2y=6x+6 \Leftrightarrow y=-3x-3$

$y \leqslant -3x-3$

$2 \leqslant -3 \times \frac{a}{3} - 3 \Leftrightarrow 2 \leqslant -a-3 \Leftrightarrow a \leqslant -5$

$a \in]-\infty, -5]$



Resposta: (C)

52.1. $A(3,-4)$; $B(-5,0)$

Mediatriz de $[AB]$:

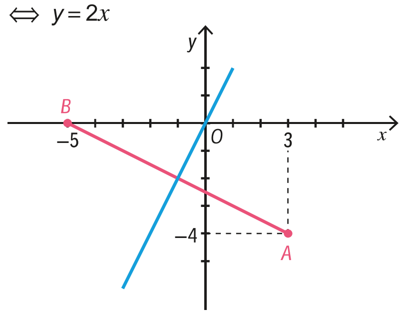
$(x-3)^2+(y-(-4))^2=(x-(-5))^2+(y-0)^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=(x+5)^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+8y+16=x^2+10x+25+y^2$

$\Leftrightarrow 8y=10x+6x+25-9-16 \Leftrightarrow 8y=16x$

$\Leftrightarrow y=2x$



Resposta: $y<2x$

52.2. $M_{[AB]}=\left(\frac{3+(-5)}{2}, \frac{-4+0}{2}\right)=(-1,-2)$

$r=d(A,M)=\sqrt{(3-(-1))^2+(-4-(-2))^2}$

$=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

Equação da circunferência:

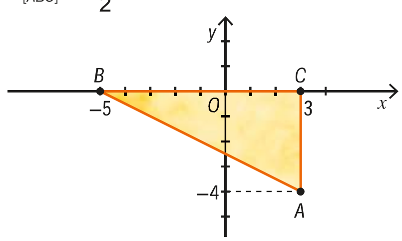
$(x+1)^2+(y+2)^2=20$; $C(3,0)$

$(3+1)^2+(0+2)^2=20 \Leftrightarrow 4^2+2^2=20$

$\Leftrightarrow 16+4=20 \Leftrightarrow 20=20$ (verdadeiro)

Logo, C pertence à circunferência.

$A_{[ABC]}=\frac{3\times 4}{2}=16$ u. a.



53. $A(7,0)$; $B(0,6)$; $C(0,3)$; $D(x,0)$, $x>0$

53.1. reta AB :

$m=\frac{6-0}{0-7}=-\frac{6}{7}$; $b=6$

$y=-\frac{6}{7}x+6$

reta CD :

$y=-\frac{6}{7}x+3$; $0=-\frac{6}{7}x+3 \Leftrightarrow 0=-6x+21$

$\Leftrightarrow 6x=21 \Leftrightarrow x=\frac{21}{6} \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$

$D\left(\frac{7}{2},0\right)$

53.2. $A_{trapézio}=A_{[OAB]}-A_{[OCD]}=\frac{7\times 6}{2}-\frac{\frac{7}{2}\times 3}{2}$

$=21-\frac{21}{4}=\frac{63}{4}$ u. a.

53.3. $-\frac{6}{7}x+3 \leqslant y \leqslant -\frac{6}{7}x+6 \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0$

$x=1$

$-\frac{6}{7}\times 1+3 \leqslant 3 \leqslant -\frac{6}{7}\times 1+6 \Leftrightarrow \frac{15}{7} \leqslant 3 \leqslant \frac{36}{7}$

(Verdadeiro)

$x=4$

$-\frac{6}{7}\times 4+3 \leqslant 3 \leqslant -\frac{6}{7}\times 4+6 \Leftrightarrow -\frac{3}{7} \leqslant 3 \leqslant \frac{18}{7}$

(Verdadeiro)

$x=3$

$-\frac{6}{7}\times 3+3 \leqslant 3 \leqslant -\frac{6}{7}\times 3+6 \Leftrightarrow \frac{3}{7} \leqslant 3 \leqslant \frac{24}{7}$ (Falso)

Resposta: (C)

Pág. 176

54. (B)

55. $x^2+y^2 \leqslant 25 \wedge \sim [x>-3 \wedge x<0]$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leqslant 25 \wedge (x \leqslant -3 \vee x \geqslant 0)$

Resposta: (C)

Pág. 177

56. $x^2+y^2 \leqslant 1 \wedge -x \leqslant y \leqslant x$

Resposta: (A)

57. $C(-2,2)$ $(0,0)$

57.1. $x=0$

57.2. $r=d(c,0)=\sqrt{(-2-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{(-2)^2+2^2}$

$=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$

57.3. $P(\sqrt{3}-2,4)$

$d(P,C)=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2-(-2)\right)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3+4}=$

$=\sqrt{7}<$ raio

Resposta: O ponto P é interior à circunferência representada.

57.4. $(x+2)^2+(y-2)^2 \leqslant 8 \wedge x>0$

Pág. 178

58. (A)

59. $A(3,2)$; $B(8,2)$; $C(0,5)$; $D(7,0)$

59.1. reta r

$m=\frac{0-5}{7-0}=-\frac{5}{7}$; $b=5$

$y=-\frac{5}{7}x+5$

59.2. $d(A,D)=\sqrt{(3-7)^2+(2-0)^2}=\sqrt{(-4)^2+2^2}$

$=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

$d(A,B)=\sqrt{(3-8)^2+(2-2)^2}=\sqrt{(-5)^2+0^2}$

$=\sqrt{25}=5$

Resposta: $y > -\frac{5}{7}x + 5 \wedge (x-3)^2 + (y-2)^2 \leqslant 20 \wedge$
$\wedge (x-8)^2 + (y-2)^2 \leqslant 25$

60. $C\left(-\frac{9}{2}, 3\right)$

60.1. $\left(-\frac{9}{2}, 0\right)$

raio $= \sqrt{\left(-\frac{9}{2} - \left(-\frac{9}{2}\right)\right)^2 + (3-0)^2} = 3$

t: $x = -\frac{9}{2} + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

60.2. $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = 9$; $y = 3$

$\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow x + \frac{9}{2} = \pm\sqrt{9}$

$\Leftrightarrow x + \frac{9}{2} = -3 \vee x + \frac{9}{2} = 3$

$\Leftrightarrow x = -3 - \frac{9}{2} \vee x = 3 - \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{15}{2} \vee x = -\frac{3}{2}$

$\left(-\frac{15}{2}, 3\right)$ ou $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$

60.3. $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + (y-3)^2 \geqslant 9 \wedge -\frac{9}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{3}{2} \wedge 0 \leqslant y \leqslant 3$

Pág. 179

61.1. $E(1, y)$, $y > 0$

Circunferência: $(x-2)^2 + y^2 = 4$; $x = 1$

$(1-2)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow 1 + y^2 = 4$

$\Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}$, $y > 0$

61.2. $A_{[OCDE]} = \frac{4+2}{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ u. a.

61.3. Reta OE : $y = \sqrt{3}x$

Reta ED : $y = \sqrt{3}$

Reta OA : $y = -\sqrt{3}x$

Reta AB : $y = -\sqrt{3}$

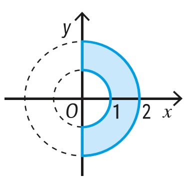
$(x-2)^2 + y^2 \leqslant 4 \wedge$
$\left(y \geqslant \sqrt{3}x \vee y \geqslant \sqrt{3} \vee y \leqslant -\sqrt{3}x \vee y \leqslant -\sqrt{3}\right)$

62. $O(0,0)$; $C(2,1)$

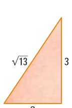
$r = d(C, O) = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leqslant 5 \wedge (y \leqslant 0 \vee x \leqslant 0)$

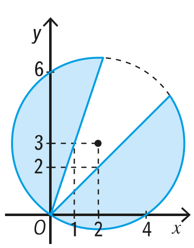
63.1.



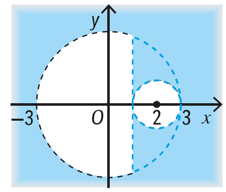
63.2.



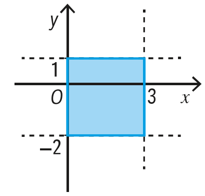
x	$y = 3x$
0	0
1	3



63.3.



63.4.



Pág. 180

64.1. $(x-1)^2 + y^2 \geqslant 1 \wedge (x-2)^2 + y^2 \leqslant 4$

64.2. $C(2,3)$

$\overline{OC} = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2}$

$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

reta OC : $y = \frac{2}{3}x$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 13 \wedge$

$\wedge \left[y \leqslant 0 \vee \left(y \geqslant \frac{2}{3}x \wedge y \geqslant -\frac{3}{2}x + 6\right)\right]$

$(2,3)$; $(0,6)$

$m = \frac{6-3}{0-2} = -\frac{3}{2}$

$b = 6$

$y = -\frac{3}{2}x + 6$

64.3. $x^2 + (y-3)^2 > 9 \wedge y \leqslant x + 3 \wedge x \leqslant 4 \wedge y \geqslant 0$

64.4. $x^2 + (y-4)^2 \geqslant 4 \wedge x^2 + (y-3)^2 \leqslant 9 \wedge y \geqslant x \wedge y \geqslant -x$

65. $C(0, y)$, $y > 0$; $D(x, 0)$, $x > 0$

65.1. $r^2 = 3 \Leftrightarrow r = \sqrt{3}$, $r > 0$

Logo, $C(0, \sqrt{3})$ e a reta CD teria de equação $y = x + \sqrt{3}$, o que não acontece na condição apresentada.

65.2. $x^2 + y^2 \leqslant 2 \wedge x \leqslant y \leqslant x + 2$

Pág. 181

66. $A(10,0)$; $D(2, y)$, $y < 0$

66.1. $(x-5)^2 + y^2 \geqslant 25 \wedge 0 \leqslant x \leqslant 10 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 5$

66.2. $(x-5)^2 + y^2 = 25$

$(2-5)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow (-3)^2 + y^2 = 25$

$\Leftrightarrow 9 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = -4$, $y < 0$

$D(2, -4)$

$(x-10)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16$

$\Leftrightarrow -8y = 20x - 4x + 4 + 16 - 100$

$\Leftrightarrow -8y = 16x - 80 \Leftrightarrow y = -2x + 10$

67. $C(-1, -3)$; $(0,0)$; $A(5,0)$; $B(0, y)$, $y < 0$

$d(C, O) = \sqrt{(-1-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 10$

$(0+1)^2 + (y+3)^2 = 10 \Leftrightarrow 1 + (y+3)^2 = 10$

$\Leftrightarrow (y+3)^2 = 9 \Leftrightarrow y + 3 = \pm\sqrt{9}$

$\Leftrightarrow y + 3 = -3 \vee y + 3 = 3 \Leftrightarrow y = -6 \vee y = 0$

$B(0, -6)$

Reta AB : $m = \frac{-6-0}{0-5} = \frac{6}{5}$; $b = -6$

$y = \frac{6}{5}x - 6$

$(x+1)^2 + (y+3)^2 \geqslant 10 \wedge \frac{6}{5}x - 6 \leqslant y \leqslant 0$

Pág. 182

68. $A(2,-3,0)$; $B(4,0,0)$; $C(0,-2,-3)$; $D(1,3,-2)$; $E(-1,4,3)$; $F(-3,0,-2)$; $G(0,0,3)$; $H(0,-4,3)$

69. $A(1,1,1)$; $B(-1,1,1)$; $C(0,4,2)$; $D(2,4,-1)$; $E(3,2,-1)$

70. $D(0,2,0)$

70.1. $ABC: z=0$; $EFG: z=2$; $ABF: x=2$; $DCG: x=0$; $ADH: y=2$; $BCG: y=4$

70.2. $Face_{[ABCD]}: 0 \leqslant x \leqslant 2 \wedge 2 \leqslant y \leqslant 4 \wedge z=0$

Pág. 183

71. $A(6,0,2)$; $C(0,0,2)$; $B(0,-6,2)$

71.1. $V_{prisma}=36$ u. a. $\Leftrightarrow \frac{6\times 6}{2}\times h=36 \Leftrightarrow 18h=36$
$\Leftrightarrow h=\frac{36}{18} \Leftrightarrow h=2$
$D(6,0,4)$; $E(0,-6,4)$; $F(0,0,4)$

71.2. $Face_{[ACFD]}: 0 \leqslant x \leqslant 6 \wedge y=0 \wedge 2 \leqslant z \leqslant 4$

71.3. plano $DEF: z=4$

72.1. $6\times a^2=54 \Leftrightarrow a^2=9 \Leftrightarrow a=\sqrt{9}, a>0 \Leftrightarrow a=3$

72.2. $O(0,0,0)$; $A(3,0,0)$; $B(3,3,0)$; $C(0,3,0)$; $D(0,3,3)$; $E(0,0,3)$; $F(3,0,3)$; $G(3,3,3)$

72.3. **a)** $BCD: y=3$
b) $FG: x=3 \wedge z=3$
c) $[CD]: x=0 \wedge y=3 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 3$

73. $E(0,-6,3)$; altura = 9

73.1. $z=-6$

73.2. reta $BC: y=0 \wedge z=-6$

73.3. $[DC]: x=-6 \wedge z=-6 \wedge -6 \leqslant y \leqslant 0$

73.4. $\dot{H}D: x=-6 \wedge y=-6 \wedge z \leqslant 3$

73.5. $[ADHE]: y=-6 \wedge -6 \leqslant x \leqslant 0 \wedge -6 \leqslant z \leqslant 3$

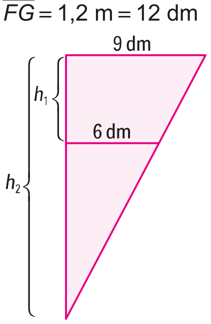
Pág. 184

74. $F(10,10,10)$

74.1. $P(10,3,10)$; $Q(0,7,10)$; $S(5,10,0)$

74.2. **a)** $y=3$ **b)** $x=5$
c) $x=10 \wedge z=10$ **d)** $x=10 \wedge y=3$
e) $x=5 \wedge z=0$
f) $x=0 \wedge y=10 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 10$
g) $x=10 \wedge z=10 \wedge y \geqslant 3$

75.1. $V_{reservatório}=2052$ litros
$\overline{DC}=1{,}8$ m $=18$ dm
$\overline{FG}=1{,}2$ m $=12$ dm

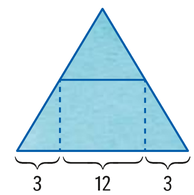


$\frac{9}{6}=\frac{h_2}{h_1} \Leftrightarrow 9h_1=6h_2$
$\Leftrightarrow h_1=\frac{6}{9}h_2$
$\Leftrightarrow h_1=\frac{2}{3}h_2$

$V_{reservatório}=2052 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\times 18^2\times h_2-\frac{1}{3}\times 12^2\times\frac{2}{3}h_2=2052$
$\Leftrightarrow 108h_2-32h_2=2052 \Leftrightarrow 76h_2=2052 \Leftrightarrow h_2=27$

A pirâmide $[ABCDV]$ em altura 27 dm .
$h_1=\frac{3}{2}\times 27=18$ dm
A pirâmide $[EFGHV]$ tem altura 18 dm .
Assim, o plano que contém a face $[ABCD]$ tem de equação $z=27$.
Assim, o plano que contém a face $EFGH$ tem de equação $z=18$.

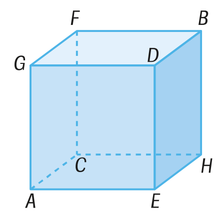
75.2. $E(3,3,18)$; $F(15,3,18)$; $G(15,15,18)$; $H(3,15,18)$



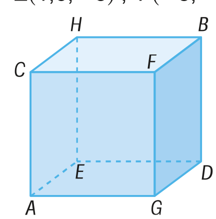
75.3. **a)** Face $[EFGH]$
b) Aresta $[DC]$
c) Semirreta $\dot{A}B$

Pág. 185

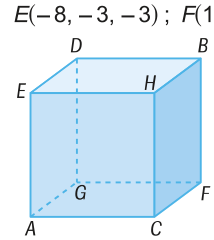
76. $6\times l^2=486 \Leftrightarrow l^2=81 \Leftrightarrow l=\sqrt{81}, l>0 \Leftrightarrow l=9$



$A(1,-3,-3)$; $B(-8,6,6)$; $C(-8,-3,-3)$; $D(1,6,6)$; $E(1,6,-3)$; $F(-8,-3,6)$; $G(1,-3,6)$; $H(-8,6,-3)$



$A(1,-3,-3)$; $B(-8,6,6)$; $C(1,-3,6)$; $D(-8,6,-3)$; $E(-8,-3,-3)$; $F(1,6,6)$; $G(1,6,-3)$; $H(-8,-3,6)$



$A(1,-3,-3)$; $B(-8,6,6)$; $C(1,6,-3)$; $D(-8,-3,6)$; $E(1,-3,6)$; $F(-8,6,-3)$; $G(-8,-3,-3)$; $H(1,6,6)$

77. $A(x,0,0)$; $C(0,y,0)$
$S:(x-2)^2+(y-2)^2+(z-8)^2=72$
$V_{[VDEFG]}=\frac{1}{8}V_{[VDABC]} \Leftrightarrow \frac{V_{[VDEFG]}}{V_{[VDABC]}}=\frac{1}{8}$
Razão de semelhança $=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$

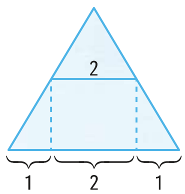
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$72=2^2\times 2\times 3^2$
$\sqrt{72}=2\times 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

77.1. $C(2,2,8)$; raio : $\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

77.2. $A(4,0,0)$; $B(4,4,0)$; $C(0,4,0)$

77.3. razão semelhança : $r = \frac{1}{2}$



$\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{1}{2} \times 4 \Leftrightarrow \overline{DE} = 2$

$h_2 = \frac{1}{2} \times h_1 \Leftrightarrow h_2 = \frac{1}{2} \times 8 \Leftrightarrow h_2 = 4$

$D(3,1,4)$; $E(3,3,4)$; $F(1,3,4)$; $G(1,1,4)$

77.4. $V(2,2,8)$; $M_{[OA]}(2,0,0)$

$d(V,M) = \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2 + (8-0)^2}$

$= \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$

A linha descrita é uma circunferência de centro $(2,0,0)$ e raio $\sqrt{68}$.

A condição que a define é:

$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 68 \wedge x = 2$

Pág. 186

78. $(10,8,15)$, ponto da face $[ABGF]$, logo $A(10,0,0)$

$M_{[EB]}(a,9,c)$

$E(0,0,z)$; $B(10,y,0)$

$\frac{0+y}{2} = 9 \Leftrightarrow y = 18$

$B(10,18,0)$

$\overline{AD} = 2\sqrt{206}$

$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow (2\sqrt{206})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$

$\Leftrightarrow 4 \times 206 = 18^2 + 10^2 + \overline{CD}^2$

$\Leftrightarrow 824 = 324 + 100 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 400$

$\Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{400}$, $\overline{CD} > 0 \Leftrightarrow \overline{CD} = 20$

$V = A_b \times h = 10 \times 18 \times 20 = 3\,600 \text{ cm}^3 = 3{,}6 \text{ dm}^3$

$= 3{,}6$ litros

79. $A(0,0,2)$; $B(0,4,0)$; $C(-2,5,2)$

79.1. $\overline{AC} = \sqrt{(0-(-2))^2 + (0-5)^2 + (2-2)^2}$

$= \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 0^2} = \sqrt{29}$

$\overline{AB} = \sqrt{(0-0)^2 + (0-4)^2 + (2-0)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$\overline{BC} = \sqrt{(0-(-2))^2 + (4-5)^2 + (0-2)^2}$

$= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow (\sqrt{29})^2 = (\sqrt{20})^2 + 3^2$

$\Leftrightarrow 29 = 20 + 9 \Leftrightarrow 29 = 29$ (verdadeiro)

Logo, o triângulo [ABC] é retângulo em B.

79.2. $A = \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{3 \times \sqrt{20}}{2}$

$= \frac{3 \times 2\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5}$ u. a.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 4 \\ 1 & \end{array}$$

$20 = 2^2 \times 5$

$\sqrt{20} = 3\sqrt{5}$

80. $A(0,-4,0)$; $C(4,0,0)$

$V_{pirâmide} = 32 \text{ cm}^3$

80.1. $G(4,-4,z)$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_b \times h \Leftrightarrow 32 = \frac{1}{3} \times 4^2 \times h$

$\Leftrightarrow 96 = 16h \Leftrightarrow h = 6$

$G(4,-4,6)$

$O(0,0,0)$; $A(0,-4,0)$; $B(4,-4,0)$; $C(4,0,0)$;

$D(4,0,6)$; $E(0,0,6)$; $F(0,-4,6)$

80.2. **a)** BAF : $y = -4$

b) GF : $y = -4 \wedge z = 6$

c) $[BC]$: $x = 4 \wedge z = 0 \wedge -4 \leqslant y \leqslant 0$

80.3. $(0,y,0)$; $G(4,-4,6)$

$\sqrt{(0-4)^2 + (y-(-4))^2 + (0-6)^2} = 14$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-4)^2 + (y+4)^2 + (-6)^2} = 14$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$16 + (y+4)^2 + 36 = 196 \Leftrightarrow (y+4)^2 = 144$

$y + 4 = \pm\sqrt{144} \Leftrightarrow y + 4 = -12 \vee y + 4 = 12$

$\Leftrightarrow y = -16 \vee y = 8$

$(0,-16,0)$ e $(0,8,0)$

Pág. 187

81. $U(2,2,2)$

81.1. $Q(a-1, b^2-2, c^2+2c-3)$; $Q(2,2,0)$

$a - 1 = 2 \wedge b^2 - 2 = 2 \wedge c^2 + 2c - 3 = 0$

$\Leftrightarrow a = 3 \wedge b^2 = 4 \wedge c = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow a = 3 \wedge b = \pm\sqrt{4} \wedge c = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$

$\Leftrightarrow a = 3 \wedge b = \pm 2 \wedge c = \frac{-2 \pm 4}{2}$

$\Leftrightarrow a = 3 \wedge b = \pm 2 \wedge c = \frac{-2-4}{2} \vee c = \frac{-2+4}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{a = 3} \wedge \boxed{b = \pm 2} \wedge \boxed{c = -3} \vee \boxed{c = 1}$

Resposta: $a = 3$; $b = \pm 2$ e $c = -3$ ou $c = 1$

81.2. **a)** $x = 2$

b) $y = 2 \wedge z = 2$

c) $x = 2 \wedge y = 0 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 2$

81.3. $O(0,0,0)$; $U(2,2,2)$

$x^2 + y^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4$

$\Leftrightarrow 4x + 4y + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 3 = 0$

82. $G(6,12,6)$

82.1. $E(0,0,6)$; $B(6,12,0)$

82.2. $x^2 + y^2 + z^2 = (x-6)^2 + (y-12)^2 + z^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 36 =$

$= x^2 - 12x + 36 + y^2 - 24y + 144 + z^2$

$\Leftrightarrow 12x + 24y - 12z - 144 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - z - 12 = 0$

82.3. $R(6,y_R,6)$; $S(0,y_s,6)$; $T(0,y_T,0)$; $U(6,y_U,0)$

$x + 2y - z - 12 = 0$

$x = 6$ e $z = 6$: $6 + 2y_R - 6 - 12 = 0 \Leftrightarrow 2y_R = 12$

$\Leftrightarrow y_R = 6$ $\quad R(6,6,6)$

$x = 0$ e $z = 6$: $0 + 2y_S - 6 - 12 = 0 \Leftrightarrow 2y_S = 18$

$\Leftrightarrow y_S = 9$ $\quad S(0,9,6)$

$x = 0$ e $z = 0$: $0 + 2y_T - 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 2y_T = 12$

$\Leftrightarrow y_T = 6$ $\quad T(0,6,0)$

$x = 6$ e $z = 0$: $6 + 2y_U - 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 2y_U = 6$

$\Leftrightarrow y_U = 3$ $\quad U(6,3,0)$

Pág. 188

83. $C(3,2,-4)$

$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=r^2$

$z=0 \wedge (x-3)^2+(y-2)^2+(0+4)^2=r^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=r^2-16$

$r^2-16=3^2 \Leftrightarrow r^2=25 \Leftrightarrow r=\sqrt{25}$, $r>0$

$\Leftrightarrow r=5$

84.1. $0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 6 \leqslant y \leqslant 7 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 1$

84.2. $A(2,4,2)$; $O(0,0,0)$

Plano mediador de $[AO]$:

$(x-2)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=x^2+y^2+z^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-8y+16+z^2-4z+4=x^2+y^2+z^2$

$\Leftrightarrow -4x-8y-4z+24=0 \Leftrightarrow x+2y+z-6=0$

84.3. $(4,4,4)$; $(0,0,7)$

$r=\sqrt{(4-0)^2+(4-0)^2+(4-7)^2}=\sqrt{16+16+9}=\sqrt{41}$

$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2 \leqslant 41$

85. $A(0,-1,5)$

O ponto $(17,0,0)$ pertence ao plano mediador $[AB]$.

Assim, $2\times 17+3\times 0+3\times 0+d=0 \Leftrightarrow d=-34$

Equação do plano mediador de $[AB]$:

$2x+3y+3z-34=0$

O ponto médio, M , de $[AB]$ pertence à reta

$y=2 \wedge z=8$

Assim, $2x+3\times 2+3\times 8-34=0$

$\Leftrightarrow 2x=-6-24+34 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$

$M(2,2,8)$; $B(x,y,z)$

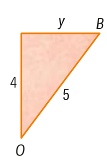
$\dfrac{0+x}{2}=2 \wedge \dfrac{-1+y}{2}=2 \wedge \dfrac{5+z}{2}=8$

$\Leftrightarrow x=4 \wedge -1+y=4 \wedge 5+z=16$

$\Leftrightarrow x=4 \wedge y=5 \wedge z=11$ $\quad B(4,5,11)$

Pág. 189

86.1. $A(0,-3,4)$;
$B(0,3,4)$;
$C(0,-3,-4)$;
$D(0,3,4)$



$5^2=4^2+y^2 \Leftrightarrow 25=16+y^2$
$\Leftrightarrow y^2=9$
$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{9}$
$\Leftrightarrow y=\pm 3$

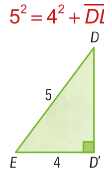
86.2. a) $[AB]$: $x=0 \wedge z=4 \wedge$
$\wedge -3 \leqslant y \leqslant 3$

b) $x^2+y^2 \leqslant 9 \wedge z=-4$

86.3. $V_{cilindro}=A_b \times h=\pi \times 3^2 \times 8=72\pi$ u. v.

87. $E(4,8,0)$

87.1. $A(4,0,0)$;
$B(0,0,-3)$;
$C(0,0,3)$;
$D(0,8,3)$;
$E(4,8,0)$;
$F(0,8,-3)$



$5^2=4^2+\overline{DD'}^2 \Leftrightarrow \overline{DD'}^2=25-16$
$\Leftrightarrow \overline{DD'}^2=9,\ \overline{DD'}>0$
$\Leftrightarrow \overline{DD'}=\sqrt{9}$
$\Leftrightarrow \overline{DD'}=3$

87.2. $V=A_b \times h=\dfrac{\overline{DF}\times\overline{ED'}}{2}\times 8=\dfrac{6\times 4}{2}\times 8=96$ u. v.

87.3. raio $=\overline{AD}=\sqrt{(4-0)^2+(0-8)^2+(0-3)^2}$

$=\sqrt{16+64+9}=\sqrt{89}$

$x^2+(y-8)^2+(z-3)^2=89$

87.4. $(x,0,0)$

Plano mediador de $[ED]$:

$(x-4)^2+(y-8)^2+z^2=x^2+(y-8)^2+(z-3)^2$

$\Leftrightarrow x^2-8x+16+z^2=x^2+z^2-6z+9$

$\Leftrightarrow -8x+6z+16-9=0 \Leftrightarrow -8x+6z+7=0$

$y=0 \wedge z=0 \wedge -8x+6z+7=0$

$\Leftrightarrow -8x+6\times 0+7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{8}$ $\quad \left(\dfrac{7}{8},0,0\right)$

87.5. Plano FDB : $x=0$

$x=0 \wedge (x-4)^2+(y-8)^2+z^2=25$

$\Leftrightarrow (0-4)^2+(y-8)^2+z^2=25$

$\Leftrightarrow 16+(y-8)^2+z^2=25 \Leftrightarrow (y-8)^2+z^2=9$

Circunferência de centro $(0,8,0)$ e raio 3 contida no plano $x=0$.

$P=2\pi r=2\pi\times 3=6\pi$ u. c.

Pág. 190

88. $A\left(1,\sqrt{3},0\right)$; $B(-2,0,0)$; $B\left(1,-\sqrt{3},0\right)$; $D\left(0,0,2\sqrt{2}\right)$

$\overline{AB}=\sqrt{(1-(-2))^2+\left(\sqrt{3}-0\right)^2+(0-0)^2}$

$=\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

12	2
6	2
3	3
1	

$\overline{AC}=\sqrt{(1-1)^2+\left(\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right)^2+(0-0)^2}$

$=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{AD}=\sqrt{(1-0)^2+\left(\sqrt{3}-0\right)^2+\left(0-2\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{1+3+8}=\sqrt{12}$

$=2\sqrt{3}$

$\overline{CB}=\sqrt{(-2-1)^2+\left(0-\left(-\sqrt{3}\right)\right)^2+(0-0)^2}$

$=\sqrt{(-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{CD}=\sqrt{(1-0)^2+\left(-\sqrt{3}-0\right)^2+\left(0-2\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2+\left(-2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{1+3+8}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{BD}=\sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2+\left(0-2\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$12=2^2\times 3$

88.2. Plano mediador de $[CD]$:

$(x-1)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2+z^2=x^2+y^2+\left(z-2\sqrt{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2\sqrt{3}y+3+z^2=$

$=x^2+y^2+z^2-4\sqrt{2}z+8$

$\Leftrightarrow -2x+2\sqrt{3}y+4\sqrt{2}z+1+3-8=0$

$\Leftrightarrow -2x+2\sqrt{3}y+4\sqrt{2}z-4=0$

$\Leftrightarrow -x+\sqrt{3}y+2\sqrt{2}z-2=0$

$A\left(1,\sqrt{3},0\right)$

$1-\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\sqrt{2}\times 0+2=0$

$\Leftrightarrow 1-3+2=0 \Leftrightarrow 0=0$ (verdadeiro)

A pertence ao plano mediador de $[CD]$.

$B(-2,0,0)$

$-2-\sqrt{3}\times 0-2\sqrt{2}\times 0+2=0$

$\Leftrightarrow -2+2=0 \Leftrightarrow 0=0$ (verdadeiro)

B pertence ao plano mediador de $[CD]$.

Logo, a aresta $[AB]$ está contida no plano mediador da aresta $[CD]$.

89.1. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 \leqslant k^2-3 \wedge z=k$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2+(k-1)^2 \leqslant k^2-3$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2 \leqslant k^2-3-(k-1)^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2 \leqslant k^2-3-\left(k^2-2k+1\right)$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2 \leqslant k^2-3-k^2+2k-1$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2 \leqslant 2k-4$

$2k-4=0 \Leftrightarrow 2k=4 \Leftrightarrow k=2$

89.2. $2k-4>0 \Leftrightarrow 2k>4 \Leftrightarrow k>2,\ k\in]2,+\infty[$

89.3. $2k-4<0 \Leftrightarrow 2k<4 \Leftrightarrow k<2,\ k\in]-\infty,2[$

90. $P_{círculo\ máximo} = 40\ 030$ km

90.1. $P=2\pi r \Leftrightarrow 40\ 030=2\pi r \Leftrightarrow r\approx 6371$ km

$x^2+y^2+z^2 \leqslant 6371^2$

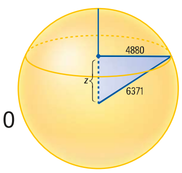
90.2. $x^2+y^2 \leqslant 4880^2 \wedge z=4096$

$6371^2=4889^2+z^2$

$\Leftrightarrow z^2=16\ 775\ 241$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{16\ 775\ 241},\ z>0$

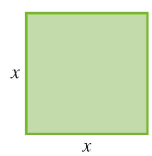
$\Leftrightarrow z\approx 4096$



Pág. 191

91.1. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são colineares porque têm a mesma direção.

91.2. $\|\overrightarrow{AG}\|=1500$ m



$1500^2=(4x)^2+(6x)^2$

$\Leftrightarrow 2\ 250\ 000=16x^2+36x^2$

$\Leftrightarrow 2\ 250\ 000=52x^2$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{2\ 250\ 000}{52},\ x>0 x\approx 208$ m

$208\times 10=2080$

Resposta: O comprimento do percurso feito pelo casal Neves foi de 2080 metros.

92.1. $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$, por exemplo.

92.2. $V_{pirâmide}=360\ \text{cm}^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times 9\times 12\times h=360$

$\Leftrightarrow 36h=360 \Leftrightarrow h=10$ cm

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2=9^2+12^2$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2=81+144 \Leftrightarrow \overline{AC}=\sqrt{255},\ \overline{AC}>0$

$\Leftrightarrow \overline{AC}=15$

$\overline{AM}=\frac{15}{2}$

$\overline{AV}^2=\overline{AM}^2+\overline{MV}^2 \Leftrightarrow \overline{AV}^2=\left(\frac{15}{2}\right)^2+10^2$

$\Leftrightarrow \overline{AV}^2=\frac{225}{4}+100 \Leftrightarrow \overline{AV}^2=\frac{625}{4}$

$\Leftrightarrow \overline{AV}=\sqrt{\frac{625}{4}},\ \overline{AV}>0 \Leftrightarrow \overline{AV}=\frac{25}{2}$

$\Leftrightarrow \overline{AV}=12{,}5 \qquad \|\overrightarrow{AV}\|=12{,}5$

93. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

Resposta: (B)

94.1. $F+\overrightarrow{DB}=E$

94.2. $F-\overrightarrow{DE}=F+\overrightarrow{ED}=A$

94.3. $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}$

94.4. $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CE}$, por exemplo.

94.5. $\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$

94.6. $C+\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EC}=F+\overrightarrow{CE}=D$

Pág. 192

95.1. **a)** $\overrightarrow{GL}$, por exemplo.

b) $\overrightarrow{IF}$, $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{JG}$

95.2. **a)** $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BE}$, por exemplo.

b) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}$

c) $\overrightarrow{HL}-\overrightarrow{JE}=\overrightarrow{HL}+\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{HL}+\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{HC}$, por exemplo.

d) $\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{IG}$, por exemplo.

e) $A+\overrightarrow{IL}=E$

f) $L-\overrightarrow{JE}=L+\overrightarrow{EJ}=L+\overrightarrow{LC}=C$

g) $G+\overrightarrow{BI}=G+\overrightarrow{GK}=K$

h) $H+\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{BJ}=H+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{JB}=H+\overrightarrow{LJ}+\overrightarrow{LB}=$

$=H+\overrightarrow{LB}+H=J$

96.1. $A-\overrightarrow{HL}=A+\overrightarrow{LH}=A+\overrightarrow{AJ}=J$; Resposta: (C)

96.2. $\overrightarrow{AK}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AL}$

Resposta: (C)

97.1. **a)** $\overrightarrow{FB}$ e $\overrightarrow{CG}$, por exemplo.

b) $\overrightarrow{FB}$ e $\overrightarrow{PD}$, por exemplo.

c) $\overrightarrow{FB}$ e $\overrightarrow{GA}$, por exemplo.

97.2. **a)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AG}$, por exemplo.

b) $\overrightarrow{RO}+\overrightarrow{FL}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{PS}$, por exemplo.

c) $\overrightarrow{QH}-\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{QH}+\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{QH}-\overrightarrow{QH}=\vec{0}$

d) $2\overrightarrow{IM}+3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BM}$, por exemplo.

e) $F+\overrightarrow{DO}=F+\overrightarrow{FQ}=Q$

f) $M-\overrightarrow{CK}=M+\overrightarrow{KC}=M+\overrightarrow{ME}=E$

g) $A+2\overrightarrow{AH}=A+\overrightarrow{AO}=O$

h) $H+\overrightarrow{FR}-\overrightarrow{NT}=H+\overrightarrow{HT}+\overrightarrow{TN}=T+\overrightarrow{TN}=N$

Pág. 193

98.1. A altura do professor é o dobro da distância do seu centro de gravidade ao solo.

A distância do centro de gravidade do professor ao solo é dada por $0{,}86\|\vec{C}\|$, uma vez que o vetor $\vec{C}$ tem direção vertical.

Como $\|\vec{C}\|=1$, a altura do professor é dada por $2\times 0{,}86=1{,}72$ metros.

98.2. Distância do professor à parede das janelas, $[ADEF]$, é 1 metro e à parede $[BCHG]$ é $7-1=6$ metros. A distância do professor à parede $[ABGF]$ é 4,25 m e à parede do quadro, $[CDEH]$, é $7-4{,}25$ $=2{,}75$ metros. Logo, o professor está mais perto da parede das janelas.

99. Resposta: (C)

100.1. $-\vec{a}-2\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$

$=-\vec{a}-2\vec{a}+2\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=-3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}+\vec{b}$

$=-\frac{6}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}=-\frac{7}{2}\vec{a}+3\vec{b}$

100.2. $-\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{a}-4\vec{b}\right)=-\vec{a}+3\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

$=-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{b}=-\frac{2}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}+5\vec{b}=-\frac{3}{2}\vec{a}+5\vec{b}$

100.3. $-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\frac{1}{3}\left(2\vec{b}-3\vec{a}-2\vec{b}\right)=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{a}$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

Pág. 194

101.1. a) $B=A+\overrightarrow{AB}$, por exemplo.

b) $H=A+\overrightarrow{AH}$

c) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}$, por exemplo.

d) $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{HG}-\overrightarrow{HE}$, por exemplo.

101.2. $\|\overrightarrow{AC}\|^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{BC}\|^2$

$\|\overrightarrow{AC}\|^2=2\|\overrightarrow{AB}\|^2$

$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BC}\|}$

• $\|\overrightarrow{AH}\|^2=\|\overrightarrow{AC}\|^2+\|\overrightarrow{CH}\|^2=2\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AB}\|^2$

$=3\|\overrightarrow{AB}\|^2$

$\boxed{\|\overrightarrow{CH}\|=\|\overrightarrow{AB}\|}$

$\|\overrightarrow{AH}\|^2=3\|\overrightarrow{AB}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AH}\|=\sqrt{3\|\overrightarrow{AB}\|^2}$;

$\|\overrightarrow{AH}\|>0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AH}\|=\sqrt{3}\|\overrightarrow{AB}\|$

101.3. $\alpha=?$; $\beta=?$

$\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CM}$

$\alpha=\frac{1}{2}$ e $\beta=-1$

102.1. a) $A+\left(\overrightarrow{AF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}\right)=A+\left(\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}\right)$

$=A+\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DI}\right)=A+\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}\right)=A+\overrightarrow{AB}=B$

b) $E+2\left(\overrightarrow{AF}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}\right)=E+2\left(\overrightarrow{AF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\right)$

$=E+2\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CH}\right)=E+2\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}\right)=E+2\overrightarrow{AE}$

$=E+\overrightarrow{AF}=E+\overrightarrow{EB}=B$

102.2. a) $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{EB}$ $\quad\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}=k\overrightarrow{EB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{EB}$

$\overrightarrow{DC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{EB}$

$k=\frac{3}{2}$

b) $\overrightarrow{AH}=k\left(\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{FA}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=k\left(\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{BE}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{LE}$

$\overrightarrow{AH}=-\frac{2}{1}\overrightarrow{LE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=-2\overrightarrow{LE}$

$k=-2$

103. $\vec{u}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-\frac{3}{2}\left(\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$=-2\vec{a}+\vec{b}$

$3\vec{u}=3\left(-2\vec{a}+\vec{b}\right)=-6\vec{a}+3\vec{b}$

$-3\vec{u}=6\vec{a}-3\vec{b}$

$\vec{w}=-6\vec{a}+3\vec{b}$ ou $\vec{w}=6\vec{a}-3\vec{b}$

104. $\|\vec{u}\|=5$

$\|\vec{u}+2\vec{v}\|=9$

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares e com o mesmo sentido, $\|2\vec{v}\|=4 \Leftrightarrow |2|\times\|\vec{v}\|=4 \Leftrightarrow 2\times\|\vec{v}\|=4$

$\|\vec{v}\|=2$

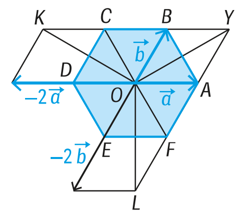
$\|\vec{u}+\vec{v}\|=5+2=7$

Pág. 195

105.1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=2\vec{b}-\vec{a}$

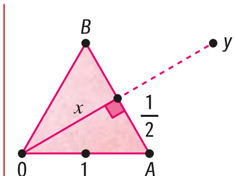
105.2.



105.3. $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\vec{b}+\vec{a}$

$\|\overrightarrow{DB}\|=\|\overrightarrow{OY}\|=\sqrt{3}$

$\|\overrightarrow{DB}\|^2=(\sqrt{3})^2=3$



$1^2=x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2=1-\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}, x>0$

$\|\overrightarrow{OY}\|=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

105.4. $\overrightarrow{CB}=k\overrightarrow{MD}$

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{DO}$

$=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}+\overrightarrow{DO}$

$=\overrightarrow{DO}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{HD}$

$\overrightarrow{DO}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{MD}$, logo $k=-\frac{2}{3}$

106.1. a) $\overrightarrow{OC}=2\vec{y}$

b) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=-\vec{y}+\vec{x}$

c) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\vec{x}+\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}=2\vec{y}+\overrightarrow{MA}=2\vec{y}-\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM}=\vec{x}+\overrightarrow{AM}+2\vec{y}-\overrightarrow{AM}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}=\vec{x}+2\vec{y} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{x}+\vec{y}$

d) $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\left(-\vec{y}+\vec{x}\right)=-\frac{1}{3}\vec{y}+\frac{1}{3}\vec{x}$

106.2. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH}=\vec{y}+\left(-\frac{1}{3}\vec{y}+\frac{1}{3}\vec{x}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OH}=\vec{y}-\frac{1}{3}\vec{y}+\frac{1}{3}\vec{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{2}{3}\vec{y}$

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{x}+\vec{y}$

$\overrightarrow{OH}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{x}+\vec{y}\right)$

$\overrightarrow{OH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$

Logo, $\overrightarrow{OH}$ e $\overrightarrow{OM}$ são colineares.

107. Para provar que A , C e F são colineares, basta provar que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AF}$ são colineares.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG}$

$=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}=3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=3\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AB}$, logo $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares assim como os pontos A , C e F .

Pág. 196

108. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}$
$=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

109.1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DG}$
$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{DG}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CB}$

109.2. $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BG}+\vec{u}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{GB}+\vec{u}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GB}+\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\vec{u}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}+\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}=-\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \vec{u}=\overrightarrow{DA}$

109.3. $\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}\|\neq\|\overrightarrow{AC}\|+\|\overrightarrow{CH}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AH}\|\neq\|\overrightarrow{AC}\|+\|\overrightarrow{CH}\|$
Seja a a medida do comprimento da aresta do cubo.
$\|\overrightarrow{AC}\|^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{BC}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2=a^2+a^2$
$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2=2a^2$, $\|\overrightarrow{AC}\|>0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{2}\,a$
$\|\overrightarrow{CH}\|=a$
$\boxed{\|\overrightarrow{AC}\|+\|\overrightarrow{CH}\|=\sqrt{2}\,a+a}$
$\|\overrightarrow{AH}\|^2=\|\overrightarrow{AC}\|^2+\|\overrightarrow{CH}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AH}\|^2=(\sqrt{2}\,a)^2+a^2$
$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AH}\|^2=2a^2+a^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AH}\|^2=3a^2$,
$\|\overrightarrow{AH}\|>0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AH}\|=\sqrt{3}\,a$
$\|\overrightarrow{AH}\|=\sqrt{3}\,a$
Logo, $\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}\|\neq\|\overrightarrow{AC}\|+\|\overrightarrow{CH}\|$

110.1. $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{ID}$
$=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{GI}$

110.2. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$
$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}\right)$
$=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$ pela alínea 123.1.
$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{BG}$
$=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GB}\right)=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AG}+\vec{0}\right)=\overrightarrow{AG}$

111.1. $\overrightarrow{DE}=\vec{y}$

111.2. $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\vec{x}+\vec{y}$

111.3. $\overrightarrow{BE}=-\vec{x}$

111.4. $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{5}\vec{x}$

$\overrightarrow{EB}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{x}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow 8\vec{x}=5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{8}{5}\vec{x}=\overrightarrow{AB}$

111.5. $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\vec{y}-\frac{3}{5}\vec{x}$

$\overrightarrow{EA}=-\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA}=-\frac{3}{8}\times\frac{8}{5}\vec{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA}=-\frac{3}{5}\vec{x}$

Pág. 197

112.1. $\vec{a}=2\vec{e_1}+2\vec{e_2}$
$\vec{b}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$
$\vec{c}=3\vec{e_1}+0\vec{e_2}$
$\vec{d}=0\vec{e_1}-3\vec{e_2}$

112.2. $\vec{a}(2,2)$; $\vec{b}(3,2)$; $\vec{c}(3,0)$; $\vec{d}(0,-3)$

113.1. $\overrightarrow{OA}(-2,2)$; $\overrightarrow{OB}(-3,-3)$; $\overrightarrow{OC}(5,1)$;
$\overrightarrow{OD}(2,4)$; $\overrightarrow{OE}(1,-1)$

113.2. **a)** $\overrightarrow{AB}(-1,-5)$ **b)** $\overrightarrow{CD}(-3,3)$
c) $\overrightarrow{DA}(-4,-2)$ **d)** $\overrightarrow{CA}(-7,1)$
e) $\overrightarrow{AE}(3,-3)$ **f)** $\overrightarrow{ED}(1,5)$

113.3. $\overrightarrow{BA}(1,5)$; $\overrightarrow{DC}(3,-3)$; $\overrightarrow{AD}(4,2)$; $\overrightarrow{AC}(7,-1)$;
$\overrightarrow{EA}(-3,3)$; $\overrightarrow{DE}(-1,-5)$

114. $\vec{V}(2,3,-2)$

Pág. 198

115.1. $\overrightarrow{OA}(0,-2,0)$

115.2. $\overrightarrow{OB}(2,-2,0)$

115.3. $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OF}=(2,-2,3)$

115.4. $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CF}=(0,-2,3)$

115.5. $\overrightarrow{CB}-\left(\overrightarrow{GF}-\overrightarrow{BF}\right)=\overrightarrow{CB}-\left(\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}\right)=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{GB}$
$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{CG}=(0,0,3)$

115.6. $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EA}$
$=\vec{0}=(0,0,0)$

116. $\vec{u}(3,-4)$; $\vec{v}(2,-1)$

116.1. $\vec{u}+\vec{v}=(3,-4)+(2,-1)=(3+2,-4-1)=(5,-5)$

116.2. $\vec{u}-\vec{v}=(3,-4)-(2,-1)=(3,-4)+(-2,1)=$
$=(3-2,-4+1)=(1,-3)$

116.3. $\vec{u}+3\vec{v}=(3,-4)+3(2,-1)=(3,-4)+(6,-3)$
$=(3+6,-4-3)=(9,-7)$

116.4. $-2\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=-2(3,-4)+\frac{1}{2}(2,-1)$
$=(-6,8)+\left(1,-\frac{1}{2}\right)=\left(-6+1,8-\frac{1}{2}\right)=\left(-5,\frac{15}{2}\right)$

116.5. $\vec{u}-\left(\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{3}{4}\vec{v}\right)=\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{3}{4}\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{3}{4}\vec{v}=$
$=\frac{1}{2}(3,-4)-\frac{3}{4}(2,-1)=\left(\frac{3}{2},-2\right)+\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$
$=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2},-2+\frac{3}{4}\right)=\left(0,-\frac{5}{4}\right)$

116.6. $\vec{e_1}+\vec{u}-\left(2\vec{e_2}-\vec{v}\right)=\vec{e_1}+\vec{u}-2\vec{e_2}+\vec{v}$
$=(1,0)+(3,-4)-2(0,1)+(2,-1)$
$=(1,0)+(3,-4)+(0,-2)+(2,-1)$
$=(1+3+0+2,0-4-2-1)=(6,-7)$

117. $V(0,0,3)$; $\overline{AC}=\sqrt{72}$

117.1. $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AD}^2 \Leftrightarrow (\sqrt{72})^2=2\overline{AD}^2 \Leftrightarrow 72=2\overline{AD}^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 36=\overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{AD}=\sqrt{36}$, $\overline{AD}>0 \Leftrightarrow \overline{AD}=6$
$V=\frac{1}{3}A_b\times h=\frac{1}{3}\times 6^2\times 3=36$ u. v.

117.2. **a)** $CD: y=0 \wedge z=0$
b) $[DA]: x=6 \wedge 0\leqslant y\leqslant 6 \wedge z=0$
c) $\dot{C}V: x=0 \wedge y=0 \wedge z\geqslant 0$

117.3. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AV}=\overrightarrow{CV}$
$\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AV}\|=\|\overrightarrow{CV}\|=3$

Pág. 199

118.1. a) $\vec{a}(8,2)$; $\vec{c}(-4,-1)$

$\frac{8}{-4}=\frac{2}{-1} \Leftrightarrow -2=-2$ (verdadeiro)

$\vec{a}$ e $\vec{c}$ são colineares.

b) $\vec{b}\left(\frac{2}{3},-1\right)$; $\vec{d}\left(-1,\frac{3}{2}\right)$

$\frac{\frac{2}{3}}{-1}=\frac{-1}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$ (verdadeiro)

$\vec{b}$ e $\vec{d}$ são colineares.

118.2. $\vec{a}(8,2)$; $\vec{b}\left(\frac{2}{3},-1\right)$

$\frac{8}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{-1} \Leftrightarrow \frac{24}{2}=-2$ (falso)

Logo, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são colineares.

119. $\vec{u}(2,1,a)$; $\vec{v}(4,b-1,4)$

119.1. $\vec{v}=2\vec{u} \Leftrightarrow \frac{\vec{v}}{\vec{u}}=2$

$\frac{b-1}{1}=2 \wedge \frac{4}{a}=2,\ a\neq 0$

$\Leftrightarrow b-1=2 \wedge 4=2a \Leftrightarrow b=3 \wedge a=2$

Resposta: $a=2$ e $b=3$

119.2. $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{v} \Leftrightarrow \frac{\vec{u}}{\vec{v}}=\frac{1}{2}$

$\frac{a}{4}=\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{b-1}=\frac{1}{2},\ b-1\neq 0$

$\Leftrightarrow 2a=4 \wedge b-1=2 \Leftrightarrow b=3 \wedge a=2$

Resposta: $a=2$ e $b=3$

120. $\vec{a}(2,3)$; $\vec{b}(1,1)$

120.1. $\|\vec{u}\|=\sqrt{52}$

$\vec{u}=k\vec{a},\ k>0$ porque $\vec{u}$ e $\vec{a}$ têm sentidos contrários.

$\vec{u}=k(2,3) \Leftrightarrow \vec{u}=(2k,3k)$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{52} \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2+(3k)^2}=\sqrt{52}$

Com a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$4k^2+9k^2=52 \Leftrightarrow 13k^2=52 \Leftrightarrow$

$k^2=4 \Leftrightarrow k=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow k=\pm 2$

Como $k<0$, $k=-2$ e

$\vec{u}\,(2\times(-2),3\times(-2))=(-4,-6)$

120.2. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(2,3)+(1,1)=(2+1,\ 3+1)=(3,\ 4)$

$\vec{v}=k\vec{c}$ e $\|\vec{v}\|=1$

$\vec{v}=k(3,4) \Leftrightarrow \vec{v}=(3k,\ 4k)$

$\|\vec{v}\|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(3k)^2+(4k)^2}=1$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$9k^2+16k^2=1 \Leftrightarrow 25k^2=1 \Leftrightarrow k^2=\frac{1}{25} \Leftrightarrow k=\pm\frac{1}{5}$

Se $k=-\frac{1}{5}$: $\vec{v}\left(3\times\left(-\frac{1}{5}\right),4\times\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$

Se $k=\frac{1}{5}$: $\vec{v}\left(3\times\frac{1}{5},4\times\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

120.3. $\|\vec{a}+\lambda\vec{e_1}\|=5 \Leftrightarrow \|(2,3)+\lambda(1,0)\|=5$

$\Leftrightarrow \|(2,3)+(\lambda,0)\|=5 \Leftrightarrow \|(2+\lambda,3)\|=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2+\lambda)^2+3^2}=5$

Como a soma de dois quadrados é não negativa, tem-se que:

$(2+\lambda)^2+9=25 \Leftrightarrow (2+\lambda)^2=16$

$\Leftrightarrow 2+\lambda=\pm\sqrt{16} \Leftrightarrow 2+\lambda=-4 \vee 2+\lambda=4$

$\Leftrightarrow \lambda=-6 \vee \lambda=2$

121. $\vec{u}(1,2,a)$; $\vec{v}(2,b-3,6)$

121.1. $\vec{v}=2\vec{u} \Leftrightarrow \frac{\vec{v}}{\vec{u}}=2$

$\frac{b-3}{2}=2 \wedge \frac{6}{a}=2 \Leftrightarrow b-3=4 \wedge 6=2a,\ a\neq 0$

$\Leftrightarrow b=7 \wedge a=3$

Resposta: $a=3$ e $b=7$

121.2. $\|\vec{v}\|=7 \Leftrightarrow \sqrt{2^2+(b-3)^2+6^2}=7$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$4+(b-3)^2+36=49 \Leftrightarrow (b-3)^2=9 \Leftrightarrow b-3=\pm\sqrt{9}$

$\Leftrightarrow b-3=-3 \vee b-3=3 \Leftrightarrow b=0 \vee b=6$

Resposta: $b=0$ ou $b=6$

121.3. $\|\vec{u}-\vec{v}\|=1 \Leftrightarrow \|(1,2,a)-(2,b-3,6)\|=1$

$\Leftrightarrow \|(1-2,2-b+3,a-6)\|=1$

$\Leftrightarrow \|(-1,-b+5,a-6)\|=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2+(-b+5)^2+(a-6)^2}=1$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$1+(-b+5)^2+(a-6)^2=1$

$\Leftrightarrow (-b+5)^2+(a-6)^2=0$

Para a soma de dois quadrados ser zero:

$-b+5=0 \wedge a-6=0 \Leftrightarrow b=5 \wedge a=6$

Resposta: $a=6$ e $b=5$

122. $\vec{u}(5,2)$; $A(k,k+4)$; $B(2,3)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,3)-(k,k+4)$

$=(2-k,3-k-4)=(2-k,-k-1)$

$\frac{2-k}{2}=\frac{-k-1}{2} \Leftrightarrow 2(2-k)=5(-k-1)$

$\Leftrightarrow 4-2k=5k-5 \Leftrightarrow -2k+5k=-5-4$

$\Leftrightarrow 3k=-9 \Leftrightarrow k=-3$

Pág. 200

123. $\vec{u}(a,b,0)$; $\vec{v}(2,c,0)$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{5}$; $\vec{u}$ e $\vec{v}$ colineares ; $\|\vec{u}\|=5$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2^2+c^2+0^2}=\sqrt{5}$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$4+c^2=5 \Leftrightarrow c^2=1 \Leftrightarrow c=\pm\sqrt{1} \Leftrightarrow c=\pm 1$

Como $c\in\mathbb{R}^+$, $\boxed{c=1}$

$\vec{u}(a,\ b,\ 0)$ e $\vec{v}(2,\ 1,\ 0)$

$\|\vec{u}\|=5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=5$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$a^2+b^2=5$

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, $\frac{a}{2}=\frac{b}{1} \Leftrightarrow \frac{a}{2}=b$

Então,

$\begin{cases} a^2+b^2=25 \\ b=\frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\frac{a^2}{4}=25 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2+a^2=100 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 = 100 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 20 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{20},\ a \in \mathbb{R}^+ \\ \_\_\_\_ \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{5} \\ b = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{5} \\ b = \sqrt{5} \end{cases}$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$20 = 2^2 \times 5$

Resposta: $a = 2\sqrt{5}$, $b = \sqrt{5}$ e $c = 1$.

124. $\|\vec{u}\| = 1{,}5$; $\vec{v}(2\,;2\,;3{,}5)$

$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k(2\,;2\,;3{,}5) \Leftrightarrow \vec{u} = (2k\,;2k\,;3{,}5k)$

$\|\vec{u}\| = 1{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + (2k)^2 + (3{,}5k)^2} = 1{,}5$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$4k^2 + 4k^2 + 12{,}25k^2 = 1{,}5^2 \Leftrightarrow 20{,}25k^2 = 2{,}25$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{3}$

Se $k = -\frac{1}{3}$: $\vec{u} = \left(2\times\left(-\frac{1}{3}\right); 2\times\left(-\frac{1}{3}\right); 3{,}5\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

$= \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}\right)$

Se $k = \frac{1}{3}$: $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right)$

125. $A(0, -2)$; $B(-1{,}3)$; $\vec{u}(3{,}2)$

125.1. $P = A - \frac{1}{2}\vec{u} = (0, -2) - \frac{1}{2}(3{,}2)$

$= (0, -2) + \left(-\frac{3}{2}, -1\right) = \left(0 - \frac{3}{2}, -2 - 1\right) = \left(-\frac{3}{2}, -3\right)$

$Q = B - 2\vec{u} = (-1{,}3) - 2(3{,}2) = (-1{,}3) + (-6, -4)$

$= (-7, -1)$

125.2. $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-7, -1) - \left(-\frac{3}{2}, -3\right)$

$= \left(-7 + \frac{3}{2}, -1 + 3\right) = \left(-\frac{11}{2}, 2\right)$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(-\frac{11}{2}, 2\right) = \left(-\frac{11}{4}, 1\right)$

125.3. $\vec{u}(3{,}2)$; $\vec{v} = \vec{e_1} - (k-2)\vec{e_2}$

$\vec{v}(1, -k+2)$

$\frac{1}{3} = \frac{-k+2}{2} \Leftrightarrow 2 = -3k + 6 \Leftrightarrow 3k = 4 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$

126. $A(2{,}4{,}0)$; $F(-1{,}2{,}6)$; $\overrightarrow{BC}(2{,}6{,}3)$

126.1. $D = A + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow D = (2{,}4{,}0) + (2{,}6{,}3)$

$\Leftrightarrow D = (4{,}10{,}3)$

126.2. $E = F + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow E = (-1{,}2{,}6) + (2{,}6{,}3)$

$\Leftrightarrow E = (1{,}8{,}9)$

126.3. $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$

$\|\overrightarrow{BF}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AF}\|^2$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{BF}\|^2 = 7^2 + 7^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{BF}\|^2 = 98$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{BF}\| = \sqrt{98}$

$V = \frac{1}{3}A_b \times h = \frac{1}{3} \times 7^2 \times \sqrt{98} \approx 161{,}7$ u. v.

126.4. $\vec{u}(1{,}2{,}3)$; $\vec{v}(1{,}0{,}3)$; $\vec{w}(0{,}0, -1)$

$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BC} = (2{,}6{,}3)$

$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = (2{,}6{,}3)$

$\Leftrightarrow a(1{,}2{,}3) + b(1{,}0{,}3) + c(0{,}0, -1) = (2{,}6{,}3)$

$\Leftrightarrow (a{,}2a{,}3a) + (b{,}0{,}3b) + (0{,}0, -c) = (2{,}6{,}3)$

$\Leftrightarrow (a + b{,}2a{,}3a + 3b - c) = (2{,}6{,}3)$

$\Leftrightarrow a + b = 2 \wedge 2a = 6 \wedge 3a + 3b - c = 3$

$\Leftrightarrow b = 2 - a \wedge a = 3 \wedge 3a + 3b - c = 3$

$\Leftrightarrow b = 2 - 3 \wedge a = 3 \wedge 3a + 3b - c = 3$

$\Leftrightarrow b = -1 \wedge a = 3 \wedge 3 \times 3 + 3 \times (-1) - c = 3$

$\Leftrightarrow b = -1 \wedge a = 3 \wedge 6 - c = 3$

$\Leftrightarrow b = -1 \wedge a = 3 \wedge c = 3$

127. $\vec{u}(2, -1, m)$; $\vec{v}\left(-\frac{1}{3}, n, 2\right)$

127.1. $\dfrac{2}{-\frac{1}{3}} = -6$

$\frac{-1}{n} = -6 \wedge \frac{m}{2} = -6 \Leftrightarrow -1 = -6n \wedge m = -12,\ n \neq 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{1}{6} \wedge m = -12$

127.2. $m = -2$; $\vec{u}(2, -1, -2)$

$\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} = k(2, -1, -2) \Leftrightarrow \vec{v} = (2k, -k, -2k)$

$\|\vec{v}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + (-k)^2 + (-2k)^2} = 1$

Como a soma dos quadrados é não negativa, tem-se que:

$4k^2 + k^2 + 4k^2 = 1 \Leftrightarrow 9k^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{3}$

Se $k = -\frac{1}{3}$: $\vec{v}\left(2\times\left(-\frac{1}{3}\right); -\left(-\frac{1}{3}\right); -2\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

$= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Se $k = \frac{1}{3}$: $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

128.1. $A(-2{,}3)$; $B(1, -1)$; $D(4{,}5)$

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1) - (-2{,}3) = (3, -4)$

b) $\overrightarrow{AD} = D - A = (4{,}5) - (-2{,}3) = (6{,}2)$

c) $\overrightarrow{BD} = D - B = (4{,}5) - (1, -1) = (3{,}6)$

128.2. a) $M = D + \overrightarrow{BA} = (4, 5) + (-3, 4) = (1, 9)$

b) $N = A + \overrightarrow{BD} = (-2, 3) + (3, 6) = (1, 9)$

c) $P = D + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (4, 5) + \frac{1}{2}(3, -4)$

$= (4, 5) + \left(\frac{3}{2}, -2\right) = \left(4 + \frac{3}{2}, 3\right) = \left(\frac{11}{2}, 3\right)$

128.3. $\overrightarrow{AD} = (6, 2)$

$C = B + \overrightarrow{AD} = (1, -1) + (6, 2) = (7, 1)$

129. $A(2, -1)$; $B(3, 7)$; $C(4, k)$

Para A e B e C serem colineares, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ têm de ser colineares.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 7) - (2, -1) = (1, 8)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (4, k) - (2, -1) = (2, k + 1)$

$\frac{k+1}{8} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow k + 1 = 16 \Leftrightarrow k = 15$

130. $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, a\right)$; $\vec{v}\left(b, \frac{3}{4}\right)$; $\vec{w}(-1, 3)$

130.1. a) $\dfrac{\frac{1}{2}}{-1} = \dfrac{a}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{a}{3} \Leftrightarrow 2a = -3 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$

b) $\dfrac{b}{-1} = \dfrac{\frac{3}{4}}{3} \Leftrightarrow -b = \frac{3}{12} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}$

130.2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, a\right) + \left(b, \frac{3}{4}\right) = (-1, 3)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}+b, a+\frac{3}{4}\right)=(-1, 3)$

$\begin{cases}\frac{1}{2}+b=-1\\ a+\frac{3}{4}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+2b=-2\\ 4a+3=12\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2b=-3\\ 4a=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-\frac{3}{2}\\ a=\frac{9}{4}\end{cases}$

$\vec{u}\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$; $\vec{v}\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$\vec{u}-\vec{v}=\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)-\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}, \frac{9}{4}-\frac{3}{4}\right)=\left(2, \frac{3}{2}\right)$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|=\left\|\left(2, \frac{3}{2}\right)\right\|=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$

$\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$

131. $A(-3, 3)$; $B(5, -1)$; $C(3, 4)$; $D(7, a)$

131.1. Reta AD contém o ponto $O(0, 0)$

$m=\frac{3-0}{-3-0}=-1$

$y=-x$

$a=-7$

131.2. Para $[AB]$ e $[CD]$ serem as bases do trapézio, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm de ser colineares.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(5, -1)-(-3, 3)=(8, -4)$

$\overrightarrow{CD}=D-C=(7, a)-(3, 4)=(4, a-4)$

$\frac{4}{8}=\frac{a-4}{-4} \Leftrightarrow 8(a-4)=-4\times 4$

$\Leftrightarrow 8a-32=-16 \Leftrightarrow 8a=16 \Leftrightarrow a=2$

Pág. 202

132. $A(3, 2, 3)$

132.1. $B(2, 6, 2)$; $C(-1, 6, 2)$; $D(-1, 3, 2)$

132.2. a) $M_{[AH]}=\left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{3+6}{2}, \frac{2+5}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BG}=(-3, 3, 0)+(0, 0, 3)=(-3, 3, 3)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(-1, 6, 2)-(2, 3, 2)=(-3, 3, 0)$

$\overrightarrow{BG}=G-B=(2, 6, 5)-(2, 6, 2)=(0, 0, 3)$

c) $A+\overrightarrow{BH}=(2, 3, 2)+(-3, 0, 3)=(-1, 3, 5)$

$\overrightarrow{BH}=H-B=(-1, 6, 5)-(2, 6, 2)=(-3, 0, 3)$

d) $\overrightarrow{FG}+3\overrightarrow{GC}=(0, 3, 0)+3(-3, 0, -3)$

$=(0, 3, 0)+(-9, 0, -9)=(-9, 3, -9)$

$\overrightarrow{FG}=G-F=(2, 6, 5)-(2, 3, 5)=(0, 3, 0)$

$\overrightarrow{GC}=C-G=(-1, 6, 2)-(2, 6, 5)=(-3, 0, -3)$

e) $A-2\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{GH}\right)=$

$=(2, 3, 2)-2[(-3, 0, 0)-(-3, 0, 0)]$

$=(2, 3, 2)-2(0, 0, 0)=(2, 3, 2)$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(-1, 6, 2)-(2, 6, 2)=(-3, 0, 0)$

$\overrightarrow{GH}=H-G=(-1, 6, 5)-(2, 6, 5)=(-3, 0, 0)$

f) $(B-G)-\overrightarrow{FA}=[(2, 6, 2)-(2, 6, 5)]-(0, 0, -3)$

$=(0, 0, -3)-(0, 0, -3)=\vec{0}$

$\overrightarrow{FA}=A-F=(2, 3, 2)-(2, 3, 5)=(0, 0, -3)$

132.3. a) $\overrightarrow{AH}=H-A=(-1, 6, 5)-(2, 3, 2)$

$=(-3, 3, 3)$

$\|\overrightarrow{AH}\|=\sqrt{(-3)^2+3^2+3^2}$

$=\sqrt{9+9+9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

$27=3^2\times 3$

b) $\overrightarrow{AB}=B-A=(2, 6, 2)-(2, 3, 2)=(0, 3, 0)$

$\overrightarrow{CH}=H-C=(-1, 6, 5)-(-1, 6, 2)=(0, 0, 3)$

$\overrightarrow{FG}=(0, 3, 0)$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{FG}=(0, 3, 0)-(0, 0, 3)+(0, 3, 0)$

$=(0, 3, -3)+(0, 3, 0)=(0, 6, -3)$

$\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{FG}\right\|=\|(0, 6, -3)\|$

$=\sqrt{0^2+6^2+(-3)^2}=$

$=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$

$45=3^2\times 5$

133. $A(16, -3, 10)$ $B(20, 1, 3)$ $C(12, 2, -1)$ $E(14, 13, 18)$

133.1. $G=C+\overrightarrow{AE}=(12, 2, -1)+(-2, 16, 8)=(10, 18, 7)$

$\overrightarrow{AE}=E-A=(14, 13, 18)-(16, -3, 10)=(-2, 16, 8)$

133.2. $M_{[AG]}=\left(\frac{16+10}{2}, \frac{-3+18}{2}, \frac{10+7}{2}\right)=\left(13, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}\right)$

133.3. $\overrightarrow{AB}=B-A=(20, 1, 3)-(16, -3, 10)=(4, 4, -7)$

$\overrightarrow{CG}=G-C=(10, 18, 7)-(12, 2, -1)=(-2, 16, 8)$

$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CG}=(4, 4, -7)-2(-2, 16, 8)$

$=(4, 4, -7)+(4, -32, -16)=(8, -28, -23)$

$\left\|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CG}\right\|=\|(8, -28, -23)\|$

$=\sqrt{8^2+(-28)^2+(-23)^2}$

$=\sqrt{64+784+529}$

$=\sqrt{1377}=9\sqrt{17}$

$\begin{array}{r|l} 1377 & 3 \\ 459 & 3 \\ 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$

$1377=3^2\times 3^2\times 17$

133.4. $P\in x=8 \wedge y=1$

$P(8, 1, z)$

$\overrightarrow{AP}=P-A=(8, 1, z)-(16, -3, 10)=(-8, 4, z-10)$

$\|\overrightarrow{AP}\|=9 \Leftrightarrow \sqrt{(-8)^2+4^2+(z-10)^2}=9$

Como a soma de quadrados é não negativa, tem-se que:

$64+16+(z-10)^2=81 \Leftrightarrow (z-10)^2=1$

$\Leftrightarrow z-10=\pm 1 \Leftrightarrow z-10=-1 \vee z-10=1$

$\Leftrightarrow z=9 \vee z=11$

Resposta: $P(8, 1, 9)$ ou $P(8, 1, 11)$

133.5. $\overrightarrow{AE}=(-2, 16, 8)$

$\|\overrightarrow{AE}\|=\sqrt{(-2)^2+16^2+8^2}=\sqrt{4+256+64}$

$=\sqrt{324}=18$

$\overrightarrow{AB}=(4, 4, -7)$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{4^2+4^2+(-7)^2}=\sqrt{16+16+49}$

$=\sqrt{81}=9$

$V=A_b\times h=9^2\times 18=1458$ u. v.

133.6. $(x-16)^2+(y+3)^2+(z-10)^2=81$

Pág. 203

134. $r:\ y=(m-1)x+2$

$s:\ y=(x, y)=(0, 3)+k(2, m)$, $k\in\mathbb{R}$

Para as retas r e s serem paralelas têm que ter o mesmo declive.

$m_r = m - 1$; $m_s = \dfrac{m}{2}$

$m - 1 = \dfrac{m}{2} \Leftrightarrow 2m - 2 = m \Leftrightarrow m = 2$

135. $A\left(-\dfrac{3}{2}, \sqrt{8}\right)$ $B\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$

135.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = \left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{2}\right) - \left(-\dfrac{3}{2}, \sqrt{8}\right)$

$= \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}, \sqrt{2} - \sqrt{8}\right) - (2, \sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = (2, -\sqrt{2})$

$-3(2, -\sqrt{2}) = (-6, 3\sqrt{2})$

Resposta: (B)

135.2. AB : $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + b$

$\sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2} + b \Leftrightarrow \sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} + b$

$\Leftrightarrow b = \sqrt{2} + \dfrac{1}{4}\sqrt{2} = \dfrac{5}{4}\sqrt{2}$

$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{5}{4}\sqrt{2}$

Ordenada na origem: $x = 0$; $y = \dfrac{5}{4}\sqrt{2}$

$r^2 = \dfrac{25}{8} \underset{(r>0)}{\Leftrightarrow} r = \dfrac{5}{\sqrt{8}} = \dfrac{5}{2\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

Logo, a ordenada na origem é igual ao raio.

135.3. $r \parallel AB$

$m_r = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

O declive da bissetriz dos quadrantes pares $(y = -x)$ é -1 .

Logo, a reta r não é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

136. r : $A(2, 3)$ $\vec{v}\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$

s : $y = 2x - 1$

136.1. $P_1 = A + 2\vec{v} = (2, 3) + 2\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$

$= (2, 3) + (-1, 4) = (1, 7)$

$P_2 = A - 2\vec{v} = (2, 3) - 2\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$

$= (2, 3) + (1, -4) = (3, -1)$

$\vec{v_1} = 2 \times \vec{v} = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right) = (-1, 4)$

$\vec{v_2} = -2\vec{v} = (1, -4)$

Pontos: $(1, 7)$ e $(3, -1)$ p.e.

Vetores: $(-1, 4)$ e $(1, -4)$ p.e.

136.2. Equação vetorial:

$(x, y) = (2, 3) + k\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$, $k \in \mathbb{R}$

Equação reduzida: $m_r = \dfrac{2}{-\dfrac{1}{2}} = -4$

$y = -4x + b$

$(2, 3)$

$3 = -4 \times 2 + b \Leftrightarrow 3 = -8 + b \Leftrightarrow b = 11$

$y = -4x + 11$

136.3. $m_s = 2$

$\vec{s}(1, 2)$

Ponto $(0, -1)$

s : $(x, y) = (0, -1) + k(1, 2)$, $k \in \mathbb{R}$

136.4. $\begin{cases} y = -4x + 11 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ -4x + 11 = 2x - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ -6x = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \times 2 + 11 \\ x = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -8 + 11 \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$ $A(2, 3)$

A reta vertical que passa em A : $x = 2$

Pág. 204

137.1. AB : $(3, 0)$ p.e.

AC : $(0, -2)$ p.e.

137.2. a) $(x, y) = (5, 1) + k(3, 0)$; $k \in \mathbb{R}$ p.e.

b) $(x, y) = (5, 10) + k(0, -2)$; $k \in \mathbb{R}$ p.e.

c) $\overrightarrow{DE} = E - D = (10{,}5\ ;\ 2) - (10, 0) = (0{,}5\ ;\ 2)$

$(x, y) = (10, 0) + k(0{,}5\ ;\ 2)$; $k \in \mathbb{R}$ p.e.

d) $\overrightarrow{CD} = D - C = (10, 0) - (5, 6) = (5, -6)$

$(x, y) = (5, 6) + k(5, -6)$; $k \in \mathbb{R}$ p.e.

138.1. $m = -2$

Resposta: (B)

138.2. $(0, y)$

$(0, y) = (-3, 4) + k(1, -2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -3 + k \\ y = 4 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ y = 4 - 2 \times 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ y = 4 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ y = -2 \end{cases}$

Ponto $(0, -2)$

139. $B(0, y_B, 0)$; $C(0, y_C, 0)$; $A(-4, -3, 0)$

139.1. $\overrightarrow{OA} = A - O = (-4, -3, 0)$

$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$\|\overrightarrow{OB}\| = 5$

$B(0, 5, 0)$; $C(0, -5, 0)$

139.2. r : $x = 0 \wedge y = 5$

Vetor diretor da reta r : $(0, 0, 1)$, p.e.

r : $(x, y, z) = (0, 5, 0) + k(0, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ p.e.

139.3. $V = 200\pi \Leftrightarrow A_b \times h = 200\pi \Leftrightarrow \pi r^2 \times h = 200\pi$

$\Leftrightarrow \pi 5^2 h = 200\pi \Leftrightarrow h = \dfrac{200\pi}{25\pi}$

$\Leftrightarrow h = 8$ $D(0, 5, 8)$

Pág. 205

140.1. a) $(x, y, z) = (40;\ 40;\ 0{,}1) + k(4;\ -1{,}3;\ -0{,}09)$, $k \in \mathbb{R}$

b) Plano yOz : $x = 0$

Seja P o ponto de interseção da reta com o plano yOz .

Então, $P(0, y, z)$

$(0, y, z) = (40;\ 40;\ 0{,}1) + k(4;\ -1{,}3;\ -0{,}09)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 40 + 4k \\ y = 40 - 1{,}3k \\ z = 0{,}1 - 0{,}09k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = -40 \\ \text{——} \\ \text{——} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -10 \\ y = 40 + 1{,}3 \times 10 \\ z = 0{,}1 + 0{,}09 \times 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ y = 40 + 13 \\ z = 0{,}1 + 0{,}90 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ y = 53 \\ z = 1 \end{cases}$ $P(0, 53, 1)$

140.2. $45 + 0{,}1 + 7{,}32 + 0{,}1 = 52{,}52$ m

$53 > 52{,}52$

Não foi golo. A bola passou à direita da baliza.

141.1. $K\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{1+1}{2}\right)=(2,1)$

141.2. $\overrightarrow{AM}=M-A=(2,1)-(-1,4)=(2+1,1-4)=(3,-3)$

$m=\frac{-3}{3}=-1$

$AM:\ y=-x+b$

$M\in AM:\ 1=-2+b \Leftrightarrow b=3$

$AM:\ y=-x+3$

$C(5,-2)$

$-2=-5+3 \Leftrightarrow -2=-2$ (verdadeiro)

Então, C pertence à reta AM.

141.3. $\overrightarrow{AB}=B-A=(-1,1)-(-1,4)$

$=(-1+1,1-4)=(0,-3)$

$\overrightarrow{DC}=C-D=(5,-2)-(5,1)$

$=(5-5,-2-1)=(0,-3)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(5,-2)-(-1,4)$

$=(5+1,-2-4)=(6,-6)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ e entre A, B, C e D não há três pontos colineares.

Logo, $[ABCD]$ é um paralelogramo.

142.1. $A(0,y)$

$(0,y)=(-3,6)+k(3,-2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}0=-3+3k\\ y=6-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3k=3\\ \text{——}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=1\\ y=6-2\times 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{——}\\ y=6-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{——}\\ y=4\end{cases}$ $\quad A(0,4)$

$B(x,0)=(-3,6)+k(3,-2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-3+3k\\ 0=6-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{——}\\ 2k=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3+3\times 3\\ k=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\ k=3\end{cases}$

$B(6,0)$

142.2. Seja M o ponto médio de $[AB]$ e, consequentemente, o centro da circunferência.

$M\left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+0}{2}\right)=(3,2)$

$\overline{AM}=\sqrt{(3-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

Equação da circunferência:

$(x-3)^2+(y-2)^2=13$

142.3. $C=M+\overrightarrow{MC}=M+\overrightarrow{EM}$

$=(3,2)+(2,3)=(3+2,2+3)$

$=(5,5)$

$\overrightarrow{EM}=M-A$
$=(3,2)-(1,-1)$
$=(3-1,2+1)$
$=(2,3)$

142.4. $\overrightarrow{AB}=B-A=(6,0)-(0,4)=$

$=(6-0,0-4)=(6,-4)$

$m=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$ e $b=4$

$AB:\ y=-\frac{2}{3}x+4$

$DC:\ y=5$

Condição que define a parte colorida da figura:

$(x-3)^2+(y-2)^2\leqslant 13 \wedge y\geqslant -\frac{2}{3}x+4 \wedge y\leqslant 5$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2\leqslant 13 \wedge -\frac{2}{3}x+4\leqslant y\leqslant 5$

Pág. 206

143.1. $m_r=\frac{2}{-1}=-2$

$s:\ y=-2x+b=B(5,0)\in s:\ 0=-2\times 5+b \Leftrightarrow b=10$

$s:\ y=-2x+10 \Leftrightarrow 2x+y=10$

Opção (B)

143.2. Ponto genérico da reta r: $(7-k,2+2k)$

C pertence à reta r e à mediatriz de $[AB]$ uma vez que está à mesma distância de A e de B.

Mediatriz de $[AB]$:

$(x-3)^2+(y-4)^2=(x-5)^2+(y-0)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+6x+9+\cancel{y^2}-8y+16=\cancel{x^2}-10x+25+\cancel{y^2}$

$\Leftrightarrow -8y=-6x-10x+25-25$

$\Leftrightarrow -8y=-16x \Leftrightarrow y=2x$

$2+2k=2(7-k) \Leftrightarrow 2+2k=14-2k$

$\Leftrightarrow 4k=12 \Leftrightarrow k=3$

$C(7-3,2+2\times 3)=(4,8)$

144.1. $A(1,2)$

$(1,2)=(0,5)+k(-1,2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1=0-k\\ 2=5+2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-1\\ 2k=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-1\\ k=-\frac{3}{2}\end{cases}$

Como o sistema é impossível, A não pertence a r.

144.2. $P(x,7)$

$(x,7)=(0,5)+k(-1,2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0-k\\ 7=5+2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{——}\\ 2k=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ k=1\end{cases}$

$P(-1,7)$

$\overrightarrow{AP}=P-A=(-1,7)-(1,2)$

$=(-1-1,7-2)=(-2,5)$

$\|\overrightarrow{AP}\|^2=\sqrt{(-2)^2+5^2}^{\,2}=\sqrt{4+25}^{\,2}=\sqrt{29}^{\,2}=29$

144.3. $m_r=\frac{2}{-1}=-2$ e $b=5$

$r:\ y=-2x+5$

Seja I o ponto de interseção das retas r e s.

$\begin{cases}y=-2x+5\\ y=3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x=-2x+5\\ \text{——}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x=5\\ \text{——}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=3\times 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$ $\quad I(1,3)$

A distância de I a Ox é 3. Se a circunferência é tangente a Ox, então o raio é 3.

$(x-1)^2+(y-3)^2=3^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=9$

145.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(-6,2)-(0,4)=$

$=(-6-0,2-4)=(-6,-2)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(8,10)-(0,4)=$

$=(8-0,10-4)=(8,6)$

$\frac{8}{-6}\neq\frac{6}{-2}$

$\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ não são colineares. Então os pontos A, B e C não são colineares e consequentemente, definem um triângulo.

145.2. O centro da circunferência é o circuncentro do triângulo, ou seja, o ponto de interseção das suas mediatrizes.

Mediatriz de $[AB]$:

$(x-0)^2+(y-4)^2=(x+6)^2+(y-2)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-8y+16=\cancel{x^2}+12x+36+\cancel{y^2}-4y+4$

$\Leftrightarrow\ -8y+4y=12x+40+16$

$\Leftrightarrow\ -4y=12x+24\ \Leftrightarrow\ y=-3x-6$

Mediatriz de $[AC]$:

$(x-0)^2+(y-4)^2=(x-8)^2+(y-10)^2$

$\Leftrightarrow\ x^2+y^2-8y+16=x^2-16x+64+y^2-20y+100$

$\Leftrightarrow\ -8y+20y=-16x+164-16$

$\Leftrightarrow\ 12y=-16x+148\ \Leftrightarrow\ 3y=-4x+37$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x-6 \\ 3y=-4x+37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ 3(-3x-6)=-4x+37 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ -9x-18=-4x+37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ -5x=55 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ x=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3(-11)-6 \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=27 \\ x=-11 \end{cases}$$

Coordenadas do centro: $(-11, 27)$

145.3. $\overrightarrow{AB}=B-A=(-6,2)-(0,4)$

$=(-6-0, 2-4)=(-6,-2)$

$m_r=\dfrac{-2}{-6}=\dfrac{1}{3}$

$r:\ y=\dfrac{1}{3}x+b$

$C(8,10)\in r$: $10=\dfrac{1}{3}\times 8+b\ \Leftrightarrow\ 10-\dfrac{8}{3}=b$

$\Leftrightarrow\ b=\dfrac{22}{3}$

r: $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{22}{3}$

145.4. $\overrightarrow{AB}=(-6,-2)$

$\vec{u}=(-2,1)$

$\overrightarrow{AB}-\vec{u}=(-6,-2)-(-2,1)$

$=(-6+2,-2-1)=(-4,-3)$

$\|\overrightarrow{AB}-\vec{u}\|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

146.1. $m_r=\dfrac{1}{3}$

$r:\ y=\dfrac{1}{3}x+b$

$(6,1)\in r:\ 1=\dfrac{1}{3}\times 6+b\ \Leftrightarrow\ 1-2=b\ \Leftrightarrow\ b=-1$

$r:\ y=\dfrac{1}{3}x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}x-1 \\ y=2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x-1=2x+4 \\ \text{——} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=6x+12 \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x=15 \\ \text{——} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2(-3)+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases} \quad A(-3,-2)$$

146.2. $B(x,0)$

$(x,0)=(6,1)+k(3,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6+3k \\ 0=1+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6+3(-1) \\ k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ k=-1 \end{cases}$$

$x_B=3$

146.3. $C=B+\overrightarrow{BC}=B+\overrightarrow{AD}$

$=(3,0)+(3,6)=(3+3,0+6)$

$=(6,6)$

$\overrightarrow{AD}=D-A$
$=(0,4)-(-3,-2)$
$=(0+3,4+2)$
$=(3,6)$

146.4. $m_s=2$

Um vetor diretor da reta s é, por exemplo, $\vec{s}=(1,2)$ ou qualquer um que seja colinear com $\vec{s}$.

Então, restam as opções (B) e (C).

$(0,-2)$ não pertence à reta s, uma vez que a reta s é uma reta oblíqua de ordenada na origem igual a 4.

$0=2(-2)+4\ \Leftrightarrow\ 0=0$ (verdadeiro)

$(-2,0)\in s$

A opção correta é a opção (C).

147.1. $A=T+\overrightarrow{TA}=T+\overrightarrow{IR}$

$=(-4,4)+(-3,2)$

$=(-4-3,4+2)$

$=(-7,6)$

$\overrightarrow{IR}=R-I$
$=(-5,3)-(-2,1)$
$=(-5+2,3-1)$
$=(-3,2)$

147.2. $\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+(-2)^3}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$\vec{w}=k\vec{v}$

$\|\vec{w}\|=\|k\vec{v}\|\ \Leftrightarrow\ |k|\times\|\vec{v}\|=1\ \Leftrightarrow\ |k|\times\sqrt{5}=1$

$\Leftrightarrow\ |k|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ \Leftrightarrow\ |k|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\Leftrightarrow\ k=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\vee k=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\vec{w}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}(1,-2)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},-2\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

ou

$\vec{w}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}(1,-2)=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},2\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

147.3. $(x+5)^2+(y-3)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow\ \cancel{x^2}+10x+25+\cancel{y^2}-6y+9=$
$\cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}-2y+1$

$\Leftrightarrow -6y+2y=4x-10x+5-34$

$\Leftrightarrow -4y=-6x-29\ \Leftrightarrow\ y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{29}{4}$

$m=\dfrac{3}{2}$

$(2,3)$ é um vetor diretor da mediatriz de $[RI]$

Equação vetorial da mediatriz de $[RI]$:

$(x,y)=\left(0,\dfrac{29}{4}\right)+k(2,3)$, $k\in\mathbb{R}$

148.1. $M_{[AC]}=\left(\dfrac{-4+2}{2},\dfrac{0-2}{2}\right)=(-1,-1)$

$m_r=\dfrac{2}{-1}=-2$

$r:\ y=-2x+b$

$(-1,-1)\in r:\ -1=-2(-1)+b\Leftrightarrow -1-2=b\Leftrightarrow b=-3$

148.2. $r:\ y=-2x-3\ \Leftrightarrow\ 2x+y+3=0$

1.º processo

Se r é a mediatriz de $[AB]$, qualquer um dos seus pontos se encontra à mesma distância de A e de B, incluindo o ponto médio de $[AC]$ $(-1,-1)$.

B pertence a Oy. Então $B(0,y)$, $y>0$

$\overline{AM}=\overline{BM}\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{(-4+1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{(0+1)^2+(y+1)^2}$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{9+1}=\sqrt{1+(y+1)^2}\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1+(y+1)^2}=\sqrt{10}$

Como o radicando, bem como os dois membros da equação são sempre não negativos, elevando os dois ao quadrado, obtém-se

$1+(y+1)^2=10\ \Leftrightarrow\ (y+1)^2=9\ \Leftrightarrow\ y+1=\pm 3$

$\Leftrightarrow\ y=-1-3\vee y=-1+3 \underset{(y>0)}{\Leftrightarrow} y=2$

Logo, $y_B=2$.

2.° processo

A reta r contém os pontos médios de dois lados do triângulo, $[AB]$ e $[AC]$, logo é paralela ao terceiro lado, $[BC]$.

Assim, a reta BC tem o mesmo declive da reta r.

$m_r = -2$

$BC:\ m = -2$

$y = -2x + b\ ;\ C(2, -2)$

$-2 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 2$

$y = -2x + r\ ;\ B(0, y)$

$x = 0\ ;\ y = -2 \times 0 + 2 = 2$

A ordenada de B é 2.

148.3. 1.° processo

O ponto médio de AC pertence à mediatriz de $[AC]$ e à mediatriz de $[AB]$. Então é o ponto de interseção das mediatrizes do triângulo $[ABC]$.

Logo, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2) - (-4, 0) = (0 + 4, 2 - 0) = (4, 2)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$

$A_{[ABC]} = \dfrac{\sqrt{20} \times \sqrt{20}}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$ u. a.

2.° processo

$M_{[AC]} = (-1, -1)$

Altura do triângulo: $\overline{BM}$

$\overline{BM} = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

Base do triângulo: $\overline{AC}$

$\overline{AC} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$

$A_{[ABC]} = \dfrac{\sqrt{10} \times \sqrt{40}}{2} = \dfrac{\sqrt{400}}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$ u. a.

148.4. $\dfrac{a + 1}{-1} = \dfrac{2a}{2} \Leftrightarrow -a - 1 = a \Leftrightarrow 2a = -1$

$\Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Opção (A)

149.1. Plano mediador de $[AC]$:

$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 + \cancel{(z - 0)^2} =$

$(x - 0)^2 + (y - 2)^2 + \cancel{(z - 0)^2}$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4$

$\Leftrightarrow -4x + 4y = 0 \Leftrightarrow x = y$

$B(x, y, 0)$

$(x, y, 0) = (3, 3, 0) + k(1, 1, -1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 3 + k \\ 0 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ k = 0 \end{cases}\quad B(3, 3, 0)$

$x_B = y_B$.

Então, B pertence ao plano mediador de $[AC]$.

149.2. V é um ponto de Oz. Então, $V(0, 0, z)$.

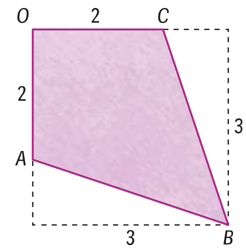
$V \in BV$

$(0, 0, z) = (3, 3, 0) + k(1, 1, -1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3 + k \\ 0 = 3 + k \\ z = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -3 \\ z = 3 \end{cases}\quad V(0, 0, 3)$

149.3. $A_b = 3^2 - 2 \times \dfrac{1 \times 3}{2} = 9 - 3 = 6$ u. a.

$V_{[OABCV]} = \dfrac{1}{3} \times 6 \times 3 = 6$ u. v.



Pág. 209

150. $(4, 1, 0) \in r$ e $(4, 1, 0) \in s$

Logo, o ponto $(4, 1, 0)$ é ponto de interseção das reta r e s.

Seja $\vec{r} = (0, 0, 1)$ um vetor diretor da reta r e $\vec{s} = (4, 1, 0)$ um vetor diretor da reta s.

$\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares.

Logo, as retas r e s não têm a mesma direção e, consequentemente, não são coincidentes.

151.1. $A = F + \overrightarrow{FA} = F + \overrightarrow{HC}$

$= (12, 1, 4) + (-4, 2, -4)$

$= (12 - 4, 1 + 2, 4 - 4)$

$= (8, 3, 0)$

$\overrightarrow{HC} = C - H$

$= (2, 3, 6) - (6, 1, 10)$

$= (2 - 6, 3 - 1, 6 - 10)$

$= (-4, 2, -4)$

151.2. a) $C(2, 3, 6)\ \overrightarrow{HC} = (-4, 2, -4)$

$\overrightarrow{HC}$ é um vetor diretor de CH.

$r: (x, y, z) = (2, 3, 6) + k(-4, 2, -4),\ k \in \mathbb{R}$

b) Plano yOz: $x = 0$

seja I o ponto de interseção da reta r com o plano yOz.

$I(0, y, z)$

$(0, y, z) = (2, 3, 6) + k(-4, 2, -4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 - 4k \\ y = 3 + 2k \\ z = 6 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 2 \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ y = 3 + 1 \\ z = 6 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases}\qquad I(0, 4, 4)$

151.3. $F(12, 1, 4)$

$\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{HC} = (-4, 2, -4)$ é um vetor diretor da reta AF.

$AF: (x, y, z) = (12, 1, 4) + k(-4, 2, -4),\ k \in \mathbb{R}$

$(14, 0, 6) = (12, 1, 4) + k(-4, 2, -4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 14 = 12 - 4k \\ 0 = 1 + 2k \\ 6 = 4 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = -2 \\ 2k = -1 \\ 4k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{2} \\ k = -\dfrac{1}{2} \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

O sistema é possível.

Logo, $(14, 0, 6)$ pertence à reta e obtém-se para $k = -\dfrac{1}{2}$.

151.4. $C(2, 3, 6)$

$(2 - 4)^2 + (3 + 1)^2 + (6 - 2)^2 = k$

$\Leftrightarrow (-2)^2 + 4^2 + 4^2 = k$

$\Leftrightarrow k = 4 + 16 + 16 \Leftrightarrow k = 36$

152.1. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}\right)$

$= \overrightarrow{EA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$

$= \frac{1}{2}(1, 1, -5) + \frac{1}{2}(-5, 1, 1)$

$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$= \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$= (-2, 1, -2)$

152.2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}$

$= -(1, 1, -5) + (-5, 1, 1) = (-1, -1, 5) + (-5, 1, 1)$

$= (-1 - 5, -1 + 1, 5 + 1) = (-6, 0, 6)$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$A_{[ABCD]} = \frac{6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{2} = \frac{36 \times 2}{2} = 36$ u. a.

$\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$

$V_{[ABCDF]} = \frac{1}{3} \times 36 \times 3 = 36$ u. v.

152.3. Reta paralela a AC e que passa em $D(-2, -1, 1)$:

$(x, y, z) = (-2, -1, 1) + k(-6, 0, 6)$, $k \in \mathbb{R}$

$z = 0$: Seja P o ponto de interseção da reta com o plano $z = 0$.

$P(x, y, 0)$

$(x, y, 0) = (-2, -1, 1) + k(-6, 0, 6)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 6k \\ y = -1 \\ 0 = 1 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ 6k = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 1 \\ y = -1 \\ k = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{cases} \quad P(-1, -1, 0)$

Pág. 210

153.1. $r = \frac{h}{3} \Leftrightarrow r = \frac{8{,}1}{3} = 2{,}7$ cm

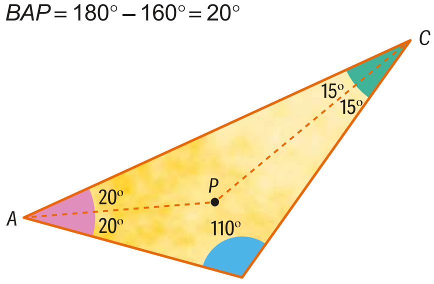
153.2. $r = \frac{2}{3} \times h \Leftrightarrow r = \frac{2}{3} \times 8{,}1 = 5{,}4$

$d = 2 \times r = 2 \times 5{,}4 = 10{,}8$ cm

154.1. *B*	**154.2.** *T*	**154.3.** *C*
154.4. *A*	**154.5.** *J*	**154.6.** *J*

155. $15° + 15° + 110° + 20° = 160°$

$B\hat{A}P = 180° - 160° = 20°$



$\dot{A}P$ é a bissetriz do ângulo BAC.

$\dot{C}P$ é a bissetriz do ângulo ACB.

Logo, P é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo $[ABC]$, ou seja, é o incentro do triângulo.

156.1. Medianas

156.2. a) $\overline{CP} = 3{,}4$ cm $\Leftrightarrow \frac{2}{3}\overline{CF} = 3{,}4$

$\Leftrightarrow 2\overline{CF} = 10{,}2 \Leftrightarrow \overline{CF} = 5{,}1$

$\overline{PF} = \frac{1}{3}\overline{CF} = \frac{1}{3} \times 5{,}1 = 1{,}7$ cm

ou

$\frac{2}{3}\overline{CF} = 3{,}4 \Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{3}\overline{CF} = 3{,}4 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\overline{CF} = \frac{3{,}4}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\overline{CF} = 1{,}7$

$\overline{PF} = 1{,}7$ cm

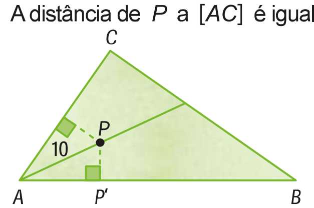
b) $\overline{FC} = 5{,}1$ cm

c) $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AD} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{2}{3} \times 7 \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{14}{3}$ cm

d) $\overline{PD} = \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{1}{3} \times 7 = \frac{7}{3}$ cm

Pág. 211

157. A distância de P a $[AC]$ é igual à distância de P a P'.



$\frac{5}{4}\overline{PP'} = 10 \Leftrightarrow 5\overline{PP'} = 40 \Leftrightarrow \overline{PP'} = 8$ u. c.

158.1. $39^2 = 36^2 + \overline{MP}^2 \Leftrightarrow \overline{MP}^2 = 1521 - 1296$

$\Leftrightarrow \overline{MP}^2 = 225 \Leftrightarrow \overline{MP} = \sqrt{225}, \overline{MP} > 0$

$\Leftrightarrow \overline{MP} = 15$ cm

158.2. $36 : 2 = 18$

$\overline{AP}^2 = 18^2 + 15^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 324 + 225$

$\Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 549 \underset{(\overline{AP} > 0)}{\Leftrightarrow} \overline{AP} = \sqrt{549} \Leftrightarrow \overline{AP} = 3\sqrt{61}$ cm

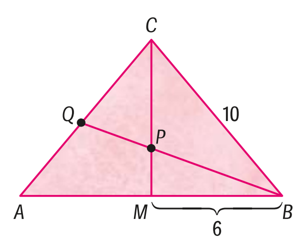
158.3. $\overline{AB} = \frac{1}{3}\overline{AP} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{61} = \sqrt{61}$ cm

158.4. $A_{[MAP]} = \frac{\overline{MA} \times \overline{MP}}{2} = \frac{18 \times 15}{2} = 135$ cm^2

158.5. $A_{[MNP]} = \frac{\overline{MN} \times \overline{MP}}{2} = \frac{36 \times 15}{2} = 270$ $(270 : 3 = 90)$

$A_{[ANCB]} = A_{[BAN]} + A_{[BNC]} = 90$ cm^2

159.



$\begin{array}{r|l} 388 & 2 \\ 194 & 2 \\ 97 & 97 \\ 1 & \end{array}$

$10^2 = 6^2 + \overline{CM}^2 \Leftrightarrow \overline{CM}^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow \overline{CM}^2 = 64$

$\Leftrightarrow \overline{CM} = \sqrt{64}, \overline{CM} > 0 \Leftrightarrow \overline{CM} = 8$

$\overline{PM} = \frac{1}{3} \times 8 = \frac{8}{3}$

$\overline{PB}^2 = 6^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{PB}^2 = 36 + \frac{64}{9} \Leftrightarrow \overline{PB}^2 = \frac{388}{9}$

$\Leftrightarrow \overline{PB} = \sqrt{\frac{388}{9}}, \overline{PB} > 0 \Leftrightarrow \overline{PB} = \frac{\sqrt{388}}{9}$

$\Leftrightarrow \overline{PB} = \frac{2\sqrt{97}}{3} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \frac{1}{3}\sqrt{97}$

O comprimento da mediana $[BQ]$ é

$\frac{2}{3}\sqrt{97}+\frac{1}{3}\sqrt{97}=\sqrt{97}$

160.1. Baricentro

160.2. É também baricentro.

161.1. Triângulos equiláteros.

161.2. Triângulos isósceles, não equilátero.

162. Q: incentro
R: baricentro
P: circuncentro
Reta de Euler: reta PR

163. Triângulo acutângulo:
$\overline{CB}=1{,}6$ cm
$\overline{OB}=2\times 1{,}6=3{,}2$ cm
$\overline{OC}=1{,}6+3{,}2=4{,}8$ cm
Triângulo retângulo:
$\overline{OC}=4{,}5$ cm
$\overline{BC}=\frac{\overline{OC}}{3}=\frac{4{,}5}{3}=1{,}5$ cm
$\overline{OB}=2\times 1{,}5\text{ cm}=3$ cm
Triângulo obtusângulo:
$\overline{OB}=4{,}8$ cm
$\overline{BC}=\frac{\overline{OB}}{2}=\frac{4{,}8}{2}=2{,}4$ cm
$\overline{OC}=4{,}8+2{,}4=7{,}2$ cm

164.1. Mediana

164.2. D – Circuncentro
E – Baricentro
G – Ortocentro

164.3. $\overline{DG}=3$; $\overline{DA}=4{,}2$

a) $\overline{DE}=1$ cm **b)** $\overline{EG}=2$ cm

c) $\overline{DF}=\frac{3}{2}=1{,}5$ cm **d)** $\overline{FG}=1{,}5$ cm

e) $\overline{EF}=\overline{DF}-\overline{DE}=1{,}5-1=0{,}5$ cm

f) $\overline{DB}=\overline{DA}=4{,}2$ cm **g)** $\overline{DC}=4{,}2$ cm

h) $\overline{FM_1}=\frac{\overline{DC}}{2}=\frac{4{,}2}{2}=2{,}1$ cm

165.1. Localiza-se no ponto médio de $[BC]$.

165.2. Localiza-se no ponto A.

165.3. Um coincide com o vértice A.
Os outros dois são os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[AC]$.

165.4. Como a circunferência dos nove pontos passa pelos pontos de Euler e o ortocentro coincide com um desses pontos, a circunferência passa pelo ortocentro do triângulo. De igual forma, como o circuncentro coincide com o ponto médio de $[BC]$ e a circunferência dos nove pontos passa por esse ponto médio, então passa pelo circuncentro do triângulo.

165.5. O segmento de reta $[AM]$ está contido no segmento de reta $[AD]$ e tem metade do seu comprimento.

Tarefas de aprofundamento

1.1. **a)** $D\left(\frac{1+7}{2},\frac{2+1}{2}\right)=\left(4,\frac{3}{2}\right)$

$E\left(\frac{7+4}{2},\frac{1+6}{2}\right)=\left(\frac{11}{2},\frac{7}{2}\right)$

$F\left(\frac{1+4}{2},\frac{2+6}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},4\right)$

b) $\overrightarrow{DC}=C-D=(4,6)-\left(4,\frac{3}{2}\right)$

$=\left(4-4,6+\frac{3}{2}\right)=\left(0,\frac{9}{2}\right)$

Mediana $[CD]$: $x=4$

$\overrightarrow{AE}=E-A=\left(\frac{11}{2},\frac{7}{2}\right)-(1,2)=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$

$m_{AE}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

AE: $y=\frac{1}{3}x+b$

$A(1,2)\in AE$: $2=\frac{1}{3}\times 1+b \Leftrightarrow b=2-\frac{1}{3} \Leftrightarrow b=\frac{5}{3}$

AE: $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

$\begin{cases}x=4\\ y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=\frac{9}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases}$

$G(4,3)$

c) $G=\left(\frac{1+7+4}{3},\frac{2+1+6}{3}\right)=\left(\frac{12}{3},\frac{9}{3}\right)=(4,3)$

1.2. **a)** 2 **b)** $D-G$
c) $3G$ **d)** $A+B$

2.1. **a)** Ao conjunto vazio.
b) À circunferência.
c) Se $r_1\neq r_2$, a interseção é o conjunto vazio.
Se $r_1=r_2$, a interseção é a própria circunferência.

2.2. **a)** Se $\overline{C_1C_2}<r_1-r_2$, as circunferências não se intersetam, ou seja, a interseção é o conjunto vazio.
Se $\overline{C_1C_2}=r_1-r_2$, as circunferências intersetam-se num ponto.
Se $\overline{C_1C_2}>r_1-r_2$, as circunferências intersetam-se em dois pontos.
b) Se $\overline{C_1C_2}>r_1+r_2$, as circunferências não se intersetam, ou seja, a interseção é o conjunto vazio.
Se $\overline{C_1C_2}=r_1+r_2$, as circunferências intersetam-se num ponto.
Se $\overline{C_1C_2}<r_1+r_2$, as circunferências intersetam-se em dois pontos.

Tarefa 1

1.1. **a)** $(y_b-y_a)/(x_b-x_a)$
b) $y_a-m\times x_a$

1.2.

```
xA = float ( input ( "xA = ? " ) )
yA = float ( input ( "yA = ? " ) )
xB = float ( input ( "xB = ? " ) )
yB = float ( input ( "yB = ? " ) )
m = (yB-yA)/(xB-xA)
b = yA-m*xA
print ( "m = ",m )
print ( "b = ",b )
```

```
xA = ? 1
yA = ? 5
xB = ? 2
yB = ? 7
m =  2.0
b =  3.0
```

1.3. **a)**

```
xA = float ( input ( "xA = ? " ) )
yA = float ( input ( "yA = ? " ) )
xB = float ( input ( "xB = ? " ) )
yB = float ( input ( "yB = ? " ) )
m = (yB-yA)/(xB-xA)
b = yA-m*xA
print ( "m = ",m )
print ( "b = ",b )
print ( 'y = ', m , 'x + ', b )
```

```
xA = ? -3
yA = ? 0
xB = ? 1
yB = ? -4
m =  -1.0
b =  -3.0
y =  -1.0 x +  -3.0
```

Pág. 217

b) Se $b<0$, escreve $y=mx+b$.
Por exemplo, se $b=-3$, $y=mx-3$.
Evita que se escreva, por exemplo, $y=-1x+-3$, escrevendo $y=-1x-3$.

```
xA = float ( input ( "xA = ? " ) )
yA = float ( input ( "yA = ? " ) )
xB = float ( input ( "xB = ? " ) )
yB = float ( input ( "yB = ? " ) )
m = (yB-yA)/(xB-xA)
b = yA-m*xA
print ( "m = ",m )
print ( "b = ",b )
if b < 0 :
  print ( 'y = ', m , 'x', b )
else:
  print ( 'y = ', m , 'x + ', b )
```

```
xA = ? -3
yA = ? 0
xB = ? 1
yB = ? -4
m =  -1.0
b =  -3.0
y =  -1.0 x -3.0
```

2.1. **a)** Se as abcissas de A e de B forem iguais, escreve que a reta é vertical e indica a sua equação.
b) Se a reta não for vertical, ou seja, se as abcissas de A e de B não forem iguais, escreve a equação reduzida da reta.

2.2. $A(3,5)$; $B(-4,-2)$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(-4,-2)-(3,5)$$
$$=(-4-3,-2-5)=(-7,-7)$$

2.3.

```
xA = 3
yA = 5
xB = -4
yB = -2
if xA == xB :
  print ( 'A reta que passa pelos dois pontos é vertical: x = ', xA )
else:
  m = ( yB - yA ) / ( xB - xA )
  b = yA - m * xA
  if b < 0 :
    print ( 'y = ', m , 'x', b )
  else:
    print ( 'y = ', m , 'x + ', b )
print ( 'Uma equação vetorial da reta é: (x,y)=(',xA,',',yA,')+k(',xB-xA,',',yB-yA,'),k∈ℝ')
```

```
y =  1.0 x +  2.0
Uma equação vetorial da reta é: (x,y)=( 3 , 5 )+k( -7 , -7 ),k∈ℝ
```

$y=1.0x+2.0$
$(x,y)=(3,5)+k(-7,-7)$, $k\in\mathbb{R}$

2.4. **a)**

```
xA = -1
yA = 1
xB = -1
yB = 2
if xA == xB :
  print ( 'A reta que passa pelos dois pontos é vertical: x = ', xA )
else:
  m = ( yB - yA ) / ( xB - xA )
  b = yA - m * xA
  if b < 0 :
    print ( 'y = ', m , 'x', b )
  else:
    print ( 'y = ', m , 'x + ', b )
print ( 'Uma equação vetorial da reta é: (x,y)=(',xA,',',yA,')+k(',xB-xA,',',yB-yA,'),k∈ℝ')
```

```
A reta que passa pelos dois pontos é vertical: x =  -1
Uma equação vetorial da reta é: (x,y)=( -1 , 1 )+k( 0 , 1 ),k∈ℝ
```

A reta que passa pelos dois pontos é vertical: $x=-1$
Uma equação vetorial da reta é:
$(x,y)=(-1,1)+k(0,1)$, $k\in\mathbb{R}$

b)

```
xA = -1
yA = 1
xB = 2
yB = 1
if xA == xB :
  print ( 'A reta que passa pelos dois pontos é vertical: x = ', xA )
else:
  m = ( yB - yA ) / ( xB - xA )
  b = yA - m * xA
  if b < 0 :
    print ( 'y = ', m , 'x', b )
  else:
    print ( 'y = ', m , 'x + ', b )
print ( 'Uma equação vetorial da reta é: (x,y)=(',xA,',',yA,')+k(',xB-xA,',',yB-yA,'),k∈ℝ')
```

```
y =  0.0 x +  1.0
Uma equação vetorial da reta é: (x,y)=( -1 , 1 )+k( 3 , 0 ),k∈ℝ
```

$y=0.0x+1.0$
Uma equação vetorial da reta é:
$(x,y)=(-1,1)+k(3,0)$, $k\in\mathbb{R}$

Pág. 218

Tarefa 2

1.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(4,10)-(0,2)$
$=(4-0,10-2)=(4,8)$

1.2.

i	$A+i\vec{u}$	Coordenada do ponto
0	$A+0\vec{u}$	$(0,2)+0(1,2)=(0,2)$
1	$A+1\vec{u}$	$(0,2)+1(1,2)=(1,4)$
2	$A+2\vec{u}$	$(0,2)+2(1,2)=(2,6)$
3	$A+3\vec{u}$	$(0,2)+3(1,2)=(3,8)$
4	$A+4\vec{u}$	$(0,2)+4(1,2)=(4,10)$

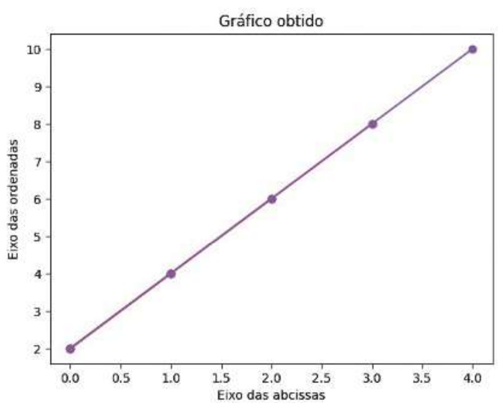
1.3. Determinavam-se as coordenadas do vetor $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{AB}}{5}$ e as coordenadas dos pontos da forma $A+i\vec{u}$, com $i\in\{0,1,2,3,4,5\}$

Determinavam-se as coordenadas do vetor $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{AB}}{n}$ e as coordenadas dos pontos da forma $A+i\times\vec{u}$, com $i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$

1.4. **a)** 0, 1, 2, 3, e 4

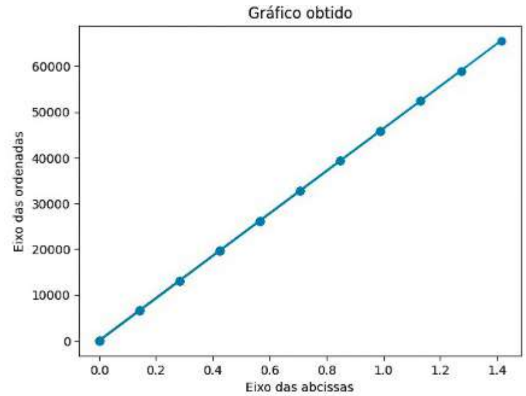
b)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
xA=0
yA=2
xB=4
yB=10
n=4
xu=(xB-xA)/n
yu=(yB-yA)/n
xx=[]
yy=[]
for i in range (n+1) :
  xx=xx+[xA+i*xu]
  yy=yy+[yA+i*yu]
  plt.xlabel('Eixo das abcissas')
  plt.ylabel('Eixo das ordenadas')
  plt.title('Gráfico obtido')
  plt.plot(xx,yy,'o-')
```



c)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
xA=0
yA=math.pi
xB=math.sqrt(2)
yB=4**8
n=10
xu=(xB-xA)/n
yu=(yB-yA)/n
xx=[]
yy=[]
for i in range (n+1) :
  xx=xx+[xA+i*xu]
  yy=yy+[yA+i*yu]
  plt.xlabel('Eixo das abcissas')
  plt.ylabel('Eixo das ordenadas')
  plt.title('Gráfico obtido')
  plt.plot(xx,yy,'o-')
```



d) xA = –2 ; yA = 4 ; xB = 2 ; yB = –4

n = 10

plt.xlabel ('Eixo Ox')

plt.ylabel ('Eixo Oy')

2.1. O Filipe definiu mal as variáveis porque as coordenadas devem ser números reais e o número de partes em que se divide o segmento de reta deve ser um número inteiro positivo.

2.2.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
xA=float(input("xA=?"))
yA=float(input("yA=?"))
xB=float(input("xB=?"))
yB=float(input("yB=?"))
n=int (input("n=?"))
xu=(xB-xA)/n
yu=(yB-yA)/n
xx=[]
yy=[]
for i in range (n+1) :
  xx=xx+[xA+i*xu]
  yy=yy+[yA+i*yu]
  plt.xlabel('Eixo Ox')
  plt.ylabel('Eixo das ordenadas')
  plt.title('Gráfico obtido')
  plt.plot(xx,yy,'o-')
```

Pág. 220

Avaliação global 1

1. $r:\ y=2x$

Circunferência de centro $C(1,2)$ e raio igual a 5 :

$(x-1)^2+(y-2)^2=25$

$(x-1)^2+(2x-2)^2=25 \Leftrightarrow (x-1)^2+[2(x-1)]^2=25$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+4(x-1)^2=25 \Leftrightarrow 5(x-1)^2=25$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=5 \Leftrightarrow x-1=\pm\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1-\sqrt{5} \vee x=1+\sqrt{5}$

Sejam A e B os pontos de interseção da reta r com a circunferência.

$A(1-\sqrt{5},2-2\sqrt{5})$ **e** $B(1+\sqrt{5},2+2\sqrt{5})$

$\overline{AB}=\sqrt{\left(1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})\right)^2+\left(2+2\sqrt{5}-(2-2\sqrt{5})\right)^2}$

$=\sqrt{\left(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}\right)^2+\left(2+2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2+\left(4\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{4\times5+16\times5}=\sqrt{100}=10$

Opção (D)

2. D e F têm abcissa nula. Opção (B)

3. Centro (3,4, – 3) e raio $= \sqrt{16} = 4$ Opção (D)

4. Opção (B)
O plano de equação $y = 2$ não passa pelo centro.

5. $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE}$ Opção (D)

6. $\vec{u} = \overrightarrow{KL} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{JE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HC}$
$= \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$
$\alpha = 2$ e $\beta = -1$
Opção (D)

7. $\overrightarrow{CD} = D - C = (-1,0,1) - (1,-1,2) =$
$(-1-1, 0+1, 1-2) = (-2,1,-1)$
$\frac{a}{-2} = \frac{2}{1} = \frac{b}{-1} \Leftrightarrow a = -4 \wedge b = -2$ Opção (C)

8. $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
$\vec{v} = k \cdot \vec{u}$
$\|\vec{v}\| = \|k \cdot \vec{u}\| \Leftrightarrow |k| \times \|\vec{u}\| = \frac{5}{4} \Leftrightarrow |k| \times \sqrt{5} = \frac{5}{4}$
$\Leftrightarrow |k| = \frac{5}{\sqrt{5} \times 4} \Leftrightarrow |k| = \frac{5\sqrt{5}}{4 \times 5} \Leftrightarrow |k| = \frac{\sqrt{5}}{4}$
$\Leftrightarrow k = -\frac{\sqrt{5}}{4} \vee k = \frac{\sqrt{5}}{4}$
Se $k = \frac{\sqrt{5}}{4}$, $\vec{v} = \frac{\sqrt{5}}{4}(-1,2) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ Opção (B)

Pág. 221

9. r é uma reta vertical. Então, o seu vetor diretor é da forma $(0,k)$.
Opção (D)

10. A e B têm a mesma abcissa. Então a mediatriz é uma reta paralela ao eixo Ox, tendo por vetor diretor qualquer um da forma $(k,0)$.
Seja M o ponto médio de $[AB]$.
$M\left(\frac{2+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (2,1)$
M pertence à mediatriz. Opção (D).

Pág. 222

Avaliação global 2

1.1. Para que a inequação defina uma esfera de raio 6,
$5 - k = 6^2$
$5 - k = 6^2 \Leftrightarrow -k = 36 - 5 \Leftrightarrow k = -31$

1.2. $A(-3,6,-4)$
$(-3+1)^2 + (6-2)^2 + (-4)^2 = 36$
$\Leftrightarrow (-2)^2 + 4^2 + 4^2 = 36$
$\Leftrightarrow 4 + 16 + 16 = 36 \Leftrightarrow 36 = 36$ (verdadeiro)
Então, A pertence à superfície esférica.
$B(3,-2,-2)$
$(3+1)^2 + (-2-2)^2 + (-2)^2 = 36 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 16 + 16 + 4 = 36 \Leftrightarrow 36 = 36$ (verdadeiro)
Logo, B pertence à superfície esférica.

1.3. $\overline{AB} = \sqrt{(3+3)^2 + (-2-6)^2 + (-2+4)^2}$
$= \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{36+64+4} = \sqrt{104}$
$\sqrt{104} < 12$. Logo, $[AB]$ não é um diâmetro da superfície esférica.

1.4. M e N são pontos da reta definida por $x = -1 \wedge y = 2$.
Então, são da forma $(-1,2,z)$.
M e N pertencem à superfície esférica de equação $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 36$
$(-1+1)^2 + (2-2)^2 + z^2 = 36 \Leftrightarrow z^2 = 36 \Leftrightarrow z = \pm 6$
$M(-1,2,-6)$ e $N(-1,2,6)$
$\overline{MN} = |6-(-6)| = |12| = 12$

1.5. $A(-3,6,-4)$ e $B(3,-2,-2)$
$(x+3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2$
$= (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 + z^2 + 8z + 16$
$= x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 + 4z + 4$
$\Leftrightarrow 6x + 6x - 12y - 4y + 8z - 4z + 52 - 8 = 0$
$\Leftrightarrow 12x - 16y + 4z + 44 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + z + 11 = 0$

2.1. Sejam A e B de coordenadas (x_A, y_A) e (x_B, y_B), respetivamente.
$A \in AO$, então $A\left(x_A, -\frac{1}{2}x_A\right)$
$B \in BO$, então $B(x_B, 2x_B)$
$y_B = 2y_A \Leftrightarrow 2x_B = 2\left(-\frac{1}{2}x_A\right) \Leftrightarrow 2x_B = -x_A$
$\Leftrightarrow x_A = -2x_B$
Então, $A(-2x_B, x_B)$ e $B(x_B, 2x_B)$.
Se $[AB]$ é um diâmetro da circunferência, então $[ABO]$ é um triângulo retângulo em O.
$A_{[ABO]} = 10 \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = 10 \Leftrightarrow \overline{OA} \times \overline{OB} = 20$
$\overline{OA} = \sqrt{(-2x_B - 0)^2 + (x_B - 0)^2} = \sqrt{4x_B{}^2 + x_B{}^2} = \sqrt{5x_B{}^2}$
$\overline{OB} = \sqrt{(x_B - 0)^2 + (2x_B - 0)^2} = \sqrt{x_B{}^2 + 4x_B{}^2} = \sqrt{5x_B{}^2}$
$\overline{OA} \times \overline{OB} = 20 \Leftrightarrow \sqrt{5x_B{}^2} \times \sqrt{5x_B{}^2} = 20$
$\Leftrightarrow \sqrt{25x_B{}^4} = 20 \Leftrightarrow 5x_B{}^2 = 20$
$\Leftrightarrow x_B{}^2 = 4 \Leftrightarrow x_B = \pm 2$
$x_B > 0$. Então, $x_B = 2$.
$A(-2 \times 2, 2)$ e $B(2, 2 \times 2)$
$A(-4,2)$ e $B(2,4)$

2.2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,4) - (-4,2) = (2+4, 4-2) = (6,2)$
$\vec{u} = \frac{1}{2}(6,2) = (3,1)$ é um vetor diretor de AB
$(x,y) = (-4,2) + k(3,1)$, $k \in \mathbb{R}$

2.3. Seja C o centro da circunferência.
$C\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (-1,3)$
$\overline{OC} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$
Equação da circunferência:
$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10$

3. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{FI} = -\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$
$(2\lambda + 1) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{DH} \Leftrightarrow (2\lambda + 1) \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow 2\lambda + 1 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\lambda = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{4}$

Pág. 223

4.1. **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$
b) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DF}$
c) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$

4.2. $3\times 3\times \overline{AB}=72 \Leftrightarrow \overline{AB}=\frac{72}{9} \Leftrightarrow \overline{AB}=8$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\overline{AB}=8$

5.1. $\overrightarrow{BE}=E-B=(-3,0,4)-(-2,1,-1)$

$=(-3+2,0-1,4+1)=(-1,-1,5)$

$\overrightarrow{BF}=F-B=(-1,2,3)-(-2,1,-1)$

$=(-1+2,2-1,3+1)=(1,1,4)$

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=(-1,-1,5)+(1,1,4)$

$=(-1+1,-1+1,5+4)=(0,0,9)$

$\|\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}\|=9$

5.2. **a)** $C=E+\overrightarrow{EC}=E+\overrightarrow{FB}=E-\overrightarrow{BF}=(-3,0,4)-(1,1,4)$

$=(-3-1,0-1,4-4)=(-4,-1,0)$

b) $\overrightarrow{BE}=(-1,-1,5)$

$(2,2,-10)=-2(-1,-1,5)$

Logo, o vetor $(2,2,-10)$ é colinear com $\overrightarrow{BE}$ e, consequentemente, um vetor diretor de BE.

$B(-2,1,-1)\in BE$

Equação vetorial da reta BE:

$(x,y,z)=(-2,1,-1)+k(2,2,-10)$, $k\in \mathbb{R}$

c) $B(-2,1,-1)$

$-2-1+3=0 \Leftrightarrow 0=0$ (verdadeiro)

B pertence ao plano dado

$E(-3,0,4)$

$-3-0+3=0 \Leftrightarrow 0=0$ (verdadeiro)

E pertence ao plano dado

$F(-1,2,3)$

$-1-2+3=0 \Leftrightarrow 0=0$ (verdadeiro)

F pertence ao plano dado

Como B, E e F são três pontos não colineares do plano dado e três pontos não colineares definem um plano, $x-y+3=0$ é uma equação do plano BFE.

5.3. Seja P um ponto de Ox.

Então, $P(x,0,0)$.

Se P é equidistante de E e de F, então pertence ao plano mediador de $[EF]$.

Plano mediador de $[EF]$:

$(x+3)^2+(y-0)^2+(z-4)^2=(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2+z^2-8z+16$

$=x^2+2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9$

$\Leftrightarrow 6x-2x+4y-8z+6z-14+25=0$

$\Leftrightarrow 4x+4y-2z+11=0$

$P(x,0,0)$

$4x+4\times 0-2\times 0+11=0 \Leftrightarrow 4x=-11 \Leftrightarrow x=-\frac{11}{4}$

$P\left(-\frac{11}{4},0,0\right)$

5.4. $\overrightarrow{BC}=C-B=(-4,-1,0)-(-2,1,-1)$

$=(-4+2,-1-1,0+1)=(-2,-2,1)$

BC: $(x,y,z)=(-2,1,-1)+k(-2,-2,1), k\in \mathbb{R}$

a) Ponto genérico de BC:

$(-2-2k,1-2k,-1+k), k\in \mathbb{R}$

$-2-2k-(1-2k)-(-1+k)+1=0$

$\Leftrightarrow -2-2k-1+2k+1-k-1=0 \Leftrightarrow -k=3$

$\Leftrightarrow k=-3$

Ponto de interseção de BC com o plano definido por $x-y-z+1=0$:

$(-2-2(-3),1-2(-3),-1+(-3))=(4,7,-4)$

b) Oz: $x=0\wedge y=0$

$-2-2k=0\wedge 1-2k=0 \Leftrightarrow -2k=2\wedge -2k=-1$

$\Leftrightarrow k=-1\wedge k=\frac{1}{2}$

Como o sistema é impossível, não existe ponto de interseção de BC com o eixo Oz.

5.5. $\overline{GH}=\overline{FG}=\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}$

$=\sqrt{9}=3$

$A_b=\frac{3\times 2}{2}=\frac{9}{2}$ u. a.

$V_{[FHGD]}=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times 3=\frac{9}{2}$ u. v.

Questões tipo exame

1.1. $\overline{AB}=\sqrt{(1-7)^2+(11-3)^2}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=\sqrt{36+64}$

$=\sqrt{100}=10$

$\overline{BC}=\sqrt{(-2-1)^2+(15-11)^2}=$

$=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

1.2. $\overrightarrow{AB}=B-A=(1,11)-(7,3)=(1-7,11-3)=(-6,8)$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(-2,15)-(1,11)=(-2-1,15-11)$

$=(-3,4)$

$\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{BC}$

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares. Então, os pontos A, B e C pertencem à mesma reta.

1.3. $A(7,3)$ e $B(1,11)$

$(x-7)^2+(y-3)^2=(x-1)^2+(y-11)^2$

$\Leftrightarrow x^2-14x+49+y^2-6y+9$

$=x^2-2x+1+y^2-22y+121$

$\Leftrightarrow -6y+22y=14x-2x+122-58$

$\Leftrightarrow 16y=12x+64 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+4$

1.4. **a)** D é equidistante de A e de B.

Então, pertence à mediatriz de $[AB]$.

$D\in Oy$. Então, $D(0,y)$.

$y=\frac{3}{4}\times 0+4=4$

$D(0,4)$

b) $\overline{AD}=\sqrt{(0-7)^2+(4-3)^2}=\sqrt{(-7)^2+1^2}=\sqrt{49+1}$

$=\sqrt{50}$

Equação da circunferência de centro D e raio $\overline{DA}$:

$x^2+(y-4)^2=50$

c) D pertence à mediatriz de $[AB]$.

Logo, encontra-se à mesma distância de A e de B. Então, pertence à circunferência de centro D e de raio $\overline{AD}$.

C pertence à mesma reta que A e B. Então, se A e B são pontos da circunferência, C não pode pertencer a essa circunferência.

1.5. **a)** $M\left(\frac{7+1}{2},\frac{3+11}{2}\right)=(4,7)$

$\overline{AM} = \sqrt{(4-7)^2+(7-3)^2} = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16}$
$= \sqrt{25} = 5$
Equação da circunferência de centro em D e raio
$\overline{AM}$: $x^2+(y-4)^2 = 25$

b) Como D pertence à mediatriz de $[AB]$, AM é perpendicular a $[AB]$ e M pertence à circunferência.
Então, AB é tangente à circunferência.

1.6. Área da coroa circular:
$A_{C_1} - A_{C_2} = \pi \times \sqrt{50}^2 - \pi \times 5^2 = 50\pi - 25\pi = 25\pi$ u. a.

2.1. **a)** $\overline{AC} = \sqrt{(5-2)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2} =$
$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
$\overline{BC} = \sqrt{(-1-2)^2+(6-2)^2} = \sqrt{(-3)^2+4^2} =$
$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
Logo, A e B pertencem à circunferência.
$\overline{AB} = \sqrt{(-1-5)^2+(6+2)^2} = \sqrt{(-6)^2+8^2} = \sqrt{36+64}$
$= \sqrt{100} = 10$
$\overline{AB} = 10 = 2 \times 5 = 2r$
Como A e B pertencem à circunferência e $\overline{AB} = 2r$, $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

b) $\overrightarrow{OC}$ é um vetor diretor da reta CD
$\overrightarrow{OC} = (2,2)$
$m_{CD} = \frac{2}{2} = 1$
$O \in CD$. Então CD: $y = x$
Logo, a reta CD é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

2.2. D pertence à reta CD: $D(x,x)$
D pertence à circunferência de equação
$(x-2)^2+(y-2)^2 = 25$
$(x-2)^2+(x-2)^2 = 25 \Leftrightarrow 2(x-2)^2 = 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x-2 = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}$
$\Leftrightarrow x = 2 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \vee x = 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $x < 0$.
Então $x = 2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$
$D\left(2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

2.3. $\overrightarrow{BC} = C - B = (2,2) - (-1,6) = (2+1, 2-6) = (3,-4)$
$m_{BC} = -\frac{4}{3}$
BC: $y = -\frac{4}{3}x + b \wedge C \in BC$
$2 = -\frac{4}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow 2 = -\frac{8}{3} + b \Leftrightarrow b = \frac{14}{3}$
BC: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$
Condição que define a parte sombreada:
$(x-2)^2+(y-2)^2 \leqslant 25 \wedge y \leqslant -\frac{4}{3}x + \frac{14}{3} \wedge y \geqslant x$

Pág. 225

3.1. $C(2,2)$ e $r = 2$
$(x-2)^2+(y-2)^2 = 4$

3.2. $B = (2, 2+2) = (2,4)$
$D = (0,2)$
$\overrightarrow{BD} = D - B = (0,2) - (2,4) = (0-2, 2-4) = (-2,-2)$
$\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$\vec{u} = k \cdot \overrightarrow{BD}$
$\|\vec{u}\| = \|k \cdot \overrightarrow{BD}\|$
$\Leftrightarrow 4 = |k| \times 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |k| = \frac{4}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow |k| = \frac{2}{\sqrt{2}}$
$\Leftrightarrow |k| = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow k = \sqrt{2} \vee k = -\sqrt{2}$
$\vec{u} = \sqrt{2}(-2,-2) = (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$
ou
$\vec{u} = -\sqrt{2}(-2,-2) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

3.3. **a)** Mediatriz de $[BD]$:
$(x-2)^2+(y-4)^2 = x^2+(y-2)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 4y + 4$
$\Leftrightarrow -8y + 4y = 4x - 16 \Leftrightarrow -4y = 4x - 16$
$\Leftrightarrow y = -x + 4$
-1 é o declive da mediatriz de $[BD]$.
$\frac{\pi}{-\pi} = -1$ é o declive da reta dada.
As duas retas têm o mesmo declive.
Logo, são paralelas.

b) Área sombreada: $\frac{1}{4}A_{circulo} - A_{[BCD]}$
$= \frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 - \frac{2 \times 2}{2} = (\pi - 2)$ cm^2

4.1. Mediatriz de $[BC]$:
$x^2+(y+3)^2 = (x-4)^2+(y+5)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25$
$\Leftrightarrow 6y - 10y = -8x + 41 - 9 \Leftrightarrow -4y = -8x + 32$
$\Leftrightarrow y = 2x - 8$
$m = 2$. Então $(1,2)$ é um vetor diretor da mediatriz de $[BC]$.
$-4 = 2 \times 2 - 8 \Leftrightarrow -4 = -4$ (verdadeiro)
$(2,-4)$ pertence à mediatriz de $[BC]$
Então, $(x,y) = (2,-4) + k(1,2)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da mediatriz de $[BC]$.

4.2. O centro da circunferência é o circuncentro do triângulo $[ABC]$, ou seja, é o ponto de interseção das suas mediatrizes.
Mediatriz de $[AB]$: $A(0,7)$ e $B(0,-3)$
$(x-0)^2+(y-7)^2 = (x-0)^2+(y+3)^2$
$\Leftrightarrow y^2 - 14y + 49 = y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow -14y - 6y = 9 - 49$
$\Leftrightarrow -20y = -40 \Leftrightarrow y = 2$
Seja I o ponto de interseção das mediatrizes de $[AB]$ e de $[BC]$.
$\begin{cases} y = 2 \\ y = 2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 2 = 2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 2x = 2 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases}$
$I(5,2)$
Logo, o centro da circunferência tem coordenadas $(5,2)$.

4.3. $\vec{u} = \overrightarrow{CD} = 2 \cdot \overrightarrow{CI}$
$= 2(1,7) = (2,14)$
Opção (C)

$\overrightarrow{CI} = I - C$
$= (5,2) - (4,-5)$
$= (5-4, 2+5)$
$= (1,7)$

4.4. $E(x,0)$
$r:\ y=2x-8$
$0=2x-8 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$
$E(4,0)$
$F(0,y)$
$y=2\times 0-8 \Leftrightarrow y=-8$
$F(0,-8)$
Como C e E têm a mesma abcissa, CE é paralela a OF e $\overline{CE}=|0+5|=5$.
$\overline{FC}=\sqrt{(0-4)^2+(-8+5)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=$
$=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$
$\overline{FC}=\overline{CE}$. Logo, $[EFC]$ é um triângulo isósceles.
$A_{[EFC]}=A_{[OFCE]}-A_{[OFE]}$
$=\frac{8+5}{2}\times 4-\frac{8\times 4}{2}=26-16=10$ u. a.

Pág. 226

5.1. r é a mediatriz de $[AD]$.
$A(2,-1)$ e $D(6,7)$
$(x-2)^2+(y+1)^2=(x-6)^2+(y-7)^2$
$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1$
$=x^2-12x+36+y^2-14y+49$
$\Leftrightarrow 2y+14y=4x-12x+85-5$
$\Leftrightarrow 16y=-8x+80 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+5$

5.2. **a)** Seja F o centro da circunferência de diâmetro $[AD]$.
$F\left(\frac{2+6}{2},\frac{-1+7}{2}\right)=(4,3)$
$r=\overline{AF}=\sqrt{(4-2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=$
$=\sqrt{20}$
Equação da circunferência de diâmetro $[AD]$:
$(x-4)^2+(y-3)^2=20$
b) $E(0,5)$
$(0-4)^2+(5-3)^2=20 \Leftrightarrow (-4)^2+2^2=20$
$\Leftrightarrow 16+4=20 \Leftrightarrow 20=20$ (verdadeiro)
Então, E pertence à circunferência de diâmetro $[AD]$.
c) Seja G o outro ponto de interseção da circunferência com o eixo Oy.
$G(0,y)$
$(0-4)^2+(y-3)^2=20 \Leftrightarrow (-4)^2+(y-3)^2=20$
$\Leftrightarrow (y-3)^2=20-16 \Leftrightarrow (y-3)^2=4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y-3=\pm 2 \Leftrightarrow y=3-2 \vee y=3+2$
$\Leftrightarrow y=1 \vee y=5 \qquad G(0,1)$
$\overline{EG}=5-1=4$ u. c.

5.3. $C=D+\overrightarrow{DC}=D+\overrightarrow{AB}=(6,7)+(2,-6)$
$=(6+2,7-6)=(8,1)$

5.4. $\overrightarrow{AC}=C-A=(8,1)-(2,-1)=(8-2,1+1)=(6,2)$

5.5. $C(8,1)$
$1=-\frac{1}{2}\times 8+5 \Leftrightarrow 1=-4+5 \Leftrightarrow 1=1$ (verdadeiro)
Então, C pertence à reta r.

5.6. $C(8,1)$
$(8-4)^2+(1-3)^2=20 \Leftrightarrow 4^2+(-2)^2=20$
$\Leftrightarrow 16+4=20 \Leftrightarrow 20=20$ (verdadeiro)
C pertence à circunferência de diâmetro $[AD]$.
Então, $[ADC]$ é um triângulo retângulo em C e $\overline{DC}=\overline{AC}$, porque C pertence à mediatriz de $[AD]$.
$\overline{DC}=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$
$A_{[ACD]}=\frac{\sqrt{40}\times\sqrt{40}}{2}=\frac{40}{2}=20$ u. a.
$A_{[ABCD]}=2\cdot A_{[ABCD]}=2\times 20=40$ u. a.

Pág. 227

6.1. $y=4 \wedge z=4 \wedge 0\leqslant x\leqslant 4$

6.2. $E(4,4,4)$ e $G(0,0,4)$
$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=x^2+y^2+(z-4)^2$
$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-8y+16=x^2+y^2$
$\Leftrightarrow -8x-8y+32=0 \Leftrightarrow x+y-4=0$

6.3. $A(4,0,0)$ e $F(0,4,4)$
$\overrightarrow{AF}=F-A=(0,4,4)-(4,0,0)=(0-4,4-0,4-0)$
$=(-4,4,4)$
$\overrightarrow{AF}=-8\vec{u}$
Logo, $\overrightarrow{AF}$ e $\vec{u}$ são colineares.

6.4. **a)** $x=1 \wedge y=1$
$(1-2)^2+(1-2)^2+(z-2)^2=4$
$\Leftrightarrow (-1)^2+(-1)^2+(z-2)^2=4$
$\Leftrightarrow (z-2)^2=4-1-1 \Leftrightarrow (z-2)^2=2$
$\Leftrightarrow z-2=\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow z=2\pm\sqrt{2}$
$P\left(1,1,2-\sqrt{2}\right)$ e $P\left(1,1,2+\sqrt{2}\right)$
$\overline{PQ}=\left|2+\sqrt{2}-\left(2-\sqrt{2}\right)\right|=\left|2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}\right|$
$=\left|2\sqrt{2}\right|=2\sqrt{2}$
b) $r=2$. Então, o comprimento do diâmetro da circunferência é $2\times 2=4$ u. c.
$2\sqrt{2}\neq 4$
Logo, $[PQ]$ não é um diâmetro da circunferência.

6.5. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2\leqslant 4 \wedge z=1$
$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+(1-2)^2\leqslant 4 \wedge z=1$
$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 4-1 \wedge z=1$
$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 3 \wedge z=1$
Círculo de centro $(2,2,1)$ e raio $\sqrt{3}$, contido no plano de equação $z=1$.

Pág. 228

7.1. $E=A+\overrightarrow{AE}=A+\overrightarrow{BH}$
$=(-2,1,-2)+(5,3,4)$
$=(-2+5,1+3,-2+4)$
$=(3,4,2)$
Opção (A)

$\overrightarrow{BH}=H-B$
$=(3,0,5)-(-2,-3,1)$
$=(3+2,0+3,5-1)$
$=(5,3,4)$

7.2. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2$
$\Leftrightarrow y^2-2y+1+z^2+4z+4=y^2+6y+9+z^2-2z+1$
$\Leftrightarrow -2y-6y+4z+2z+5-10=0$
$\Leftrightarrow -8y+6z-5=0 \Leftrightarrow 8y-6z+5=0$

7.3. $8\times 4k-6\times 2k+5=0 \Leftrightarrow 32k-12k=-5$
$\Leftrightarrow 20k=-5 \Leftrightarrow k=-\frac{5}{20} \Leftrightarrow k=-\frac{1}{4}$
Opção (C)

7.4. $\overrightarrow{AB}=B-A=(-2,-3,1)-(-2,1,-2)$
$=(-2+2,-3-2,1+2)=(0,-4,3)$

AB: $(x,y,z)=(-2,1,-2)+k(0,-4,3),\ k\in\mathbb{R}$

$Q(-2,1-4k,-2+3k)$

$d(A,Q)=15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-2+2)^2+(1-4k-1)^2+(-2+3k+2)^2}=15$

$\Leftrightarrow \sqrt{0^2+(-4k)^2+(3k)^2}=15 \Leftrightarrow \sqrt{16k^2+9k^2}=15$

$\Leftrightarrow \sqrt{25k^2}=15$

Como o radicando, bem como os dois membros da equação são não negativos, elevando os dois ao quadrado, obtém-se:

$25k^2=225 \Leftrightarrow k^2=\frac{225}{25} \Leftrightarrow k^2=9 \Leftrightarrow k=\pm 3$

Se $k=3$, $Q(-2,1-4\times 3,-2+3\times 3)$

$Q(-2,-11,7)$

$\overline{BQ}=\sqrt{(-2+2)^2+(-11+3)^2+(7-1)^2}=$

$=\sqrt{0^2+(-8)^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10<15$

Se $k=-3$, $Q(-2,1-4(-3),-2+3(-3))$

$Q(-2,13,-11)$

$\overline{BQ}=\sqrt{(-2+2)^2+(13+3)^2+(-11-1)^2}=$

$=\sqrt{0^2+16^2+(-12)^2}$

$=\sqrt{256+144}=\sqrt{400}=20>15$

Então, $Q(-2,13,11)$.

7.5. **a)** C, G, E

São vértices do cubo cuja distância a H é igual a $\overline{HG}$.

b) $\overrightarrow{AB}=(0,-4,3)$

$r=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{0^2+(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$(x-3)^2+y^2+(z-5)^2=25 \wedge x=0$

$\Leftrightarrow (0-3)^2+y^2+(z-5)^2=25 \wedge x=0$

$\Leftrightarrow 9+y^2+(z-5)^2=25 \wedge x=0$

$\Leftrightarrow y^2+(z-5)^2=16 \wedge x=0$

Circunferência de centro $(0,0,5)$ e raio 4 contida no plano de equação $x=0$.

8.1. $G=F+\overrightarrow{FG}=F+\overrightarrow{DC}$
$=(1,-2,-3)+(-6,-3,2)$
$=(1-6,-2-3,-3+2)$
$=(-5,-5,-1)$

Opção (B)

$\overrightarrow{DC}=C-D$
$=(-4,-1,8)-(2,2,6)$
$=(-4-2,-1-2,8-6)$
$=(-6,-3,2)$

8.2. $F(1,-2,-3)$

$(1,-2,-3)=(7,1,-5)+k(6,3,-2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=7+6k \\ -2=1+3k \\ -3=-5-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6k=6 \\ 3k=-3 \\ 2k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ k=-1 \\ k=-1 \end{cases}$

F pertence à reta r

$G(-5,-5,-1)$

$(-5,-5,-1)=(7,1,-5)+k(6,3,-2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5=7+6k \\ -5=1+3k \\ -1=-5-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6k=-12 \\ 3k=-6 \\ 2k=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-2 \\ k=-2 \\ k=-2 \end{cases}$

G pertence à reta r

Como F e G pertencem à reta r e dois pontos definem uma reta, a reta r é a reta FG.

8.3. Plano $xOy: z=0$

$(x,y,0)=(7,1,-5)+k(6,3,-2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=7+6k \\ y=1+3k \\ 0=-5-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ 2k=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ k=-\frac{5}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=7+6\left(-\frac{5}{2}\right) \\ y=1+3\left(-\frac{5}{2}\right) \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7-15 \\ y=1-\frac{15}{2} \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=-\frac{13}{2} \end{cases}$

Ponto de interseção de r com xOy: $\left(-8,-\frac{13}{2},0\right)$

8.4. $\overrightarrow{DC}=(-6,-3,2)=\overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{FV}=k\cdot\overrightarrow{FG},\ k>0$

$\|\overrightarrow{FG}\|=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{36+9+4}=\sqrt{49}=7$

$\|\overrightarrow{FV}\|=\|k\cdot\overrightarrow{FG}\| \Leftrightarrow 14=|k|\times\|\overrightarrow{FG}\|$

$\Leftrightarrow |k|\times 7=14 \Leftrightarrow |k|=2 \Leftrightarrow k=-2 \vee k=2$

$k>0$. Então, $k=2$.

$\overrightarrow{FV}=2(-6,-3,2) \Leftrightarrow V-F=(-12,-6,4)$

$\Leftrightarrow V=F+(-12,-6,4)$

$\Leftrightarrow V=(1,-2,-3)+(-12,-6,4)$

$\Leftrightarrow V=(1-12,-2-6,-3+4)$

$\Leftrightarrow V=(-11,-8,1)$

9.1. Como a pirâmide é quadrangular regular, o plano BVD é o plano mediador de $[AC]$.

$(x+2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=(x-0)^2+(y-1)^2+(z+4)^2$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2+2y+1+z^2-8z+16$
$=x^2+y^2-2y+1+z^2+8z+16$

$\Leftrightarrow 4x+2y+2y-8z-8z+5-1=0$

$\Leftrightarrow 4x+4y-16z+4=0 \Leftrightarrow x+y-4z+1=0$

9.2. Como V pertence à reta dada, é da forma $V(k,2,k)$.

V pertence ao plano BVD.

$k+2-4k+1=0 \Leftrightarrow -3k=-3 \Leftrightarrow k=1$

$V(1,2,1)$

9.3. $M\left(\frac{-2+0}{2},\frac{-1+1}{2},\frac{4-4}{2}\right)=(-1,0,0)$

$\overrightarrow{MV}=(1,2,1)-(-1,0,0)=(1+1,2-0,1-0)=(2,2,1)$

Equação da reta MV:

$(x,y,z)=(-1,0,0)+k(2,2,1)$, $k\in\mathbb{R}$

9.4. $\overline{AC}=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-1)^2+(4+4)^2}$
$=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+8^2}=\sqrt{4+4+64}=\sqrt{72}$

$A_{[ABC]}=\dfrac{\sqrt{72}\times\frac{\sqrt{72}}{2}}{2}=\frac{72}{4}=18$ u. a.

$A_{[ABCD]}=2\times A_{[ABC]}=2\times 18=36$ u. a.

$\|\overrightarrow{VH}\|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

$V_{[ABCDV]}=\frac{1}{3}\times 36\times 3=36$ u. v.

9.5. Se E é o centro da superfície esférica que passa em A e C, então está à mesma distância de A e de C, ou seja, pertence ao plano mediador de $[AC]$ que é o plano BVD.

$E\in Ox$. Então, $E(x,0,0)$.

$x+0-4\times 0+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

$E(-1,0,0)$

$\overline{AE}=\sqrt{(-1+2)^2+(0+1)^2+(0-4)^2}$
$=\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}$

Superfície esférica de centro em E e que passa por A e C: $(x+1)^2+y^2+z^2=18$

Pág. 233

Tarefa 1

1. P_1 – Quarto de banho 1
P_2 – Quarto 1
P_3 – Open space

2.1. $x=4$, $x=8$, $y=0$, $y=12$, $z=0$, $z=3$

2.2. $0 \leqslant x \leqslant 3{,}2 \wedge y=2{,}6 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 3$

Tarefa 2

Open space

$V=4\times 12\times 3=144\text{ m}^3$; Potência: 24 000 BTU/h

Quarto 1

$V=2{,}8\times 4\times 3=33{,}6\text{ m}^3$; Potência: 7000 BTU/h

Pág. 234

Tarefa 3

1. $B(8,12,0)$; $E(4\,;\,2{,}6\,;\,0)$; $L(3{,}2\,;\,9{,}2\,;\,0)$