

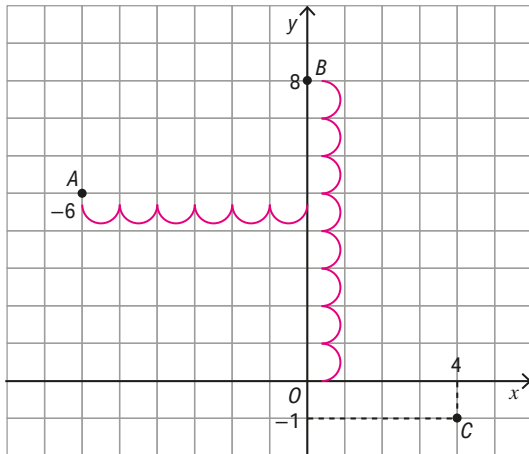
Geometria

Vamos recordar

Ficha 1 Referencial o. n. Oxy . Transformações geométricas

1.1. (B)

1.2.



O ponto C pertence ao 4.º quadrante.

1.3. $B'(0, -8)$

1.4. a) $A_{[AOB]} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$ u. a.

b) $O'(0, 0)$; $A'(6, 5)$; $B'(0, 8)$

2.1. $A(0, 3)$; $B(3, 0)$; $C(3, 3)$ e $O(0, 0)$

2.2. $A'(0, -3)$; $B(3, 0)$; $C'(3, -3)$ e $O(0, 0)$

2.3. (B)

3.1. $x=0$

3.2. $B(0, -2)$ e $D(2, 0)$. Retas BD : $y=ax+b$; pelo ponto B resulta que $b=-2$.

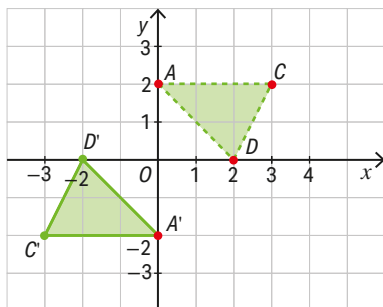
Determinemos o declive: $a = \frac{0 - (-2)}{2 - 0} = 1$

Assim, BD : $y=x-2$

Como $C(3, 2)$, verifiquemos que as suas coordenadas não satisfazem a equação da reta BD .

$2 \neq 3 - 2 = 1$, como se pretendia mostrar. O ponto C não pertence à reta BD .

3.3.



Ficha 2 Pontos e distâncias no plano

pág. 52

MMAT10CAD © Porto Editora

1.1. As coordenadas dos pontos são $B(-1, -2)$ e $C(3, 0)$.

1.2. As coordenadas do ponto médio de $[BC]$ são:

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = (1, -1)$$

1.3. Para determinar o perímetro tenho de calcular a medida entre cada vértice, ou seja, $d(O, B)$, $d(B, C)$ e $d(C, O)$.

$$d(O, B) = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$d(C, O) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2} = 3$$

Logo, o perímetro é:

$$\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3 = 3 + 3\sqrt{5}$$

2.1. (B)

2.2. Para mostrar que o triângulo é isósceles tenho de calcular a medida de cada lado, ou seja, $d(P, Q)$, $d(Q, R)$ e $d(R, P)$.

$$d(P, Q) = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$d(Q, R) = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-(-1))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$d(R, P) = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{0+16} = 4$$

Como $d(P, Q) = d(Q, R)$, o triângulo $[PQR]$ é isósceles.

2.3. Como o triângulo é isósceles, considero $[RP]$ a base e a altura é a distância entre o ponto médio de $[RP]$ e o vértice Q .

Coordenadas do ponto médio de $[RP]$: $\left(\frac{-2+(-2)}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) = (-2, -1)$

Altura = $\sqrt{(-2-2)^2 + (-1-(-1))^2} = \sqrt{16} = 4$

Logo, a área do triângulo é $\frac{4 \times 4}{2} = 8$.

pág. 53

3.1. As coordenadas dos pontos são $A(-1, -1)$ e $C(1, -1)$.

3.2. Os pontos B e D pertencem ao eixo Oy , logo são da forma $(0, y)$. Como o perímetro do losango é 12, o seu lado mede 3.

Temos que $d(A, B) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(0-(-1))^2 + (y-(-1))^2} = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+(y+1)^2} = 3 \Leftrightarrow 1+(y+1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow (y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow y+1 = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow y = -1 \pm\sqrt{8}$

As coordenadas de B e D são $(0, -1-\sqrt{8})$ e $(0, -1+\sqrt{8})$.

3.3. $A(-1, -1)$ e $B(0, -1-\sqrt{8})$, logo o ponto médio tem coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1-1-\sqrt{8}}{2}\right)$.

A reta vertical que passa no ponto médio do segmento $[AB]$ tem equação $x = -\frac{1}{2}$.

4. $\frac{0+2k}{2} = k \wedge \frac{k+3}{2} = 2k \Leftrightarrow k = k \wedge k+3 = 4k \Leftrightarrow 3k = 3 \Leftrightarrow k = 1$

5. $A(-2, a)$; $B(b, 1)$; $C(c, d)$;

$$B \text{ é o ponto médio de } [AC]: \frac{-2+c}{2} = b \wedge \frac{a+d}{2} = 1 \Leftrightarrow -2+c = 2b \wedge a+d = 2$$

$$C \text{ é o ponto médio de } [BD]: \frac{b+7}{2} = c \wedge \frac{-3+1}{2} = d \Leftrightarrow b+7 = 2c \wedge d = -1$$

$$\begin{cases} -2+c = 2b \\ b+7 = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} a+d = 2 \\ d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ d = -1 \end{cases}$$

$A(-2, 3)$; $B(1, 1)$; $C(4, -1)$

Ficha 3 Mediatriz de um segmento de reta

pág. 54

1.1. Se $P(x, y)$ é um ponto da mediatriz de $[DB]$:

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow -4y = -12x \Leftrightarrow y = 3x$$

1.2. Se a reta AD é paralela ao eixo Oy e D tem abcissa -2 , então AD é a reta de equação $x = -2$.

O ponto A pertence à reta de equação $x = -2$ e, como $\overline{AD} = \overline{AB}$, também A pertence à mediatriz de $[DB]$:

$$x = -2 \wedge y = 3x \Leftrightarrow x = -2 \wedge y = -6. \text{ Logo, } A(-2, -6).$$

Como o lado $[BC]$ é paralelo ao lado $[AD]$, o ponto C pertence à reta de equação $x = 4$ e à mediatriz de $[DB]$:

$$x = 4 \wedge y = 3x \Leftrightarrow x = 4 \wedge y = 12. \text{ Logo, } C(4, 12).$$

1.3. Um losango é um paralelogramo. Logo, $A_{[ABCD]} = \frac{D \times d}{2} = \overline{AB} \times h$, em que $D = \overline{AC}$, $d = \overline{BD}$ e h é a medida da altura do paralelogramo relativa à base $[AB]$.

$$D = \overline{AC} = \sqrt{(4+2)^2 + (12+6)^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}; \quad d = \overline{BD} = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10};$$

$$\overline{AB} = \overline{AD} = |4+6| = 10$$

$$A_{[ABCD]} = \frac{6\sqrt{10} \times 2\sqrt{10}}{2} = 6 \times 10 = 60 \text{ e } A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times h = 10h$$

Temos, portanto, $10h = 60$, pelo que $h = 6$.

2.1. $r: y = mx + b$; b = ordenada de $A = 8$.

$C(3, 2) \in r$. Logo, $2 = m \times 3 + 8 \Leftrightarrow m = -2$, pelo que a equação reduzida de r é $y = -2x + 8$.

Como $B(x, 0) \in r$, $0 = -2x + 8 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$. Logo, B tem coordenadas $(4, 0)$.

2.2. Como $(2, 4)$ é o ponto médio de $[AB]$, pois $\left(\frac{0+4}{2}, \frac{8+0}{2}\right) = (2, 4)$, a reta pedida é a mediatriz de $[AB]$.

Se $P(x, y)$ é um ponto da mediatriz de $[AB]$, então:

$$(x+0)^2 + (y-8)^2 = (x-4)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 16y + 64 = x^2 - 8x + 16 + y^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$$

pág. 55

3.1. Se $P(x, y)$ é um ponto da mediatriz de $[AC]$, então:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + (y-7)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

3.2. Dado que o quadrilátero $[ABCD]$ é um losango, $\overline{BA} = \overline{BC}$. Logo, o ponto B pertence à mediatriz de $[AC]$.

Como B também pertence à reta de equação $y = x$, então B é o ponto de interseção das duas retas.

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \wedge y = x \Leftrightarrow 2x = x + 5 \wedge y = x \Leftrightarrow x = 5 \wedge y = 5. \text{ Temos, então, } B(5, 5).$$

- 3.3.** $\overline{AC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{80}$; $\overline{AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{40}$; $\overline{BC} = \overline{AB} = \sqrt{40}$
 ([ABCD] é um losango)
 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{40})^2 + (\sqrt{40})^2 = 80 = \overline{AC}^2$;
 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$. Logo, o ângulo CBA é reto.

Dado que num paralelogramo (um losango é um paralelogramo) os ângulos adjacentes ao mesmo lado são suplementares e os ângulos opostos são iguais, podemos concluir que os quatro ângulos internos do losango [ABCD] são retos. Logo, o losango [ABCD] é um quadrado.

- 4.1.** Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz de [AB].
 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow y = -2x + 5$
- 4.2.** a) $C(0, y)$ pertence à reta de equação $y = -2x + 5$, porque $\overline{AC} = \overline{BC}$:
 $y = -2 \times 0 + 5 \Leftrightarrow y = 5$. Logo, $C(0, 5)$.
 b) $C(x, -3)$ pertence à reta de equação $y = -2x + 5$:
 $-3 = -2x + 5 \Leftrightarrow 2x = 5 + 3 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$. Logo, $C(4, -3)$.
- 4.3.** C é o ponto de interseção das retas $y = -x$ e $y = -2x + 5$.
 Como $y = -x \wedge y = -2x + 5 \Leftrightarrow x = 5 \wedge y = -5$, temos $C(5, -5)$.
 $\overline{AB} = \sqrt{(6+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. A altura do triângulo relativa à base [AB] é $h = \overline{MC}$, sendo M o ponto médio de [AB]. $M(2, 1)$ e $h = \overline{MC} = \sqrt{(5-2)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
 Logo, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{4\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}}{2} = 2 \times 3(\sqrt{5})^2 = 6 \times 5 = 30$.

Ficha 4 Equação reduzida da circunferência

pág. 56

- 1.1.** Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz:
 a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-0)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 b) $(x-0)^2 + (y-3)^2 = (x+4)^2 + (y-5)^2 \Leftrightarrow y = 2x + 8$
- 1.2.** O centro da circunferência é o ponto de interseção das mediatrizes de [AB] e [BC]:
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \wedge y = 2x + 8 \Leftrightarrow x = -5 \wedge y = -2$. O centro da circunferência é o ponto $D(-5, -2)$.
 Raio: $r = \overline{DB} = \sqrt{(-5-0)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
- 1.3.** $M(1, 1)$. O centro da circunferência é o ponto E de interseção da mediatriz de [AB] com o eixo Ox:
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \wedge y = 0 \Leftrightarrow x = -1 \wedge y = 0$, logo $E(-1, 0)$.
 $r = \overline{EM} = \sqrt{(1+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$
 Equação: $(x+1)^2 + y^2 = 5$
- 2.1.** A abscissa de E é 4, substituindo na equação da circunferência de centro A obtemos
 $(4-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 25 \Leftrightarrow y-3 = \pm 5 \Leftrightarrow y = 3 \pm 5$
 Como E tem ordenada negativa as suas coordenadas são $(4, -2)$.
 Como A e B têm a mesma ordenada, temos que E e F também têm a mesma ordenada.
 As coordenadas de F são $(9, -2)$.
- 2.2.** $B(4+5, 3) = (9, 3)$. Equação da circunferência de centro B: $(x-9)^2 + (y-3)^2 = 25$
 $(x-9)^2 + (y-3)^2 = 25 \wedge y = 0 \Leftrightarrow (x-9)^2 = 16 \wedge y = 0 \Leftrightarrow (x=5 \vee x=13) \wedge y = 0$. A abscissa de C é 5.
- 2.3.** $A = A_{[AEFB]} - \frac{1}{4}A_{\text{círculo}} = 5^2 - \frac{\pi \times 5^2}{4} = 25 - \frac{25\pi}{4}$

3.1. Coordenadas: $A(-6, 1)$ e $B(2, -3)$

Declive: $\frac{-3-1}{2-(-6)} = -\frac{1}{2}$

Obtemos $-\frac{1}{2} \times 2 + b = -3 \Leftrightarrow -1 + b = -3 \Leftrightarrow b = -2$

A equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

3.2. $A(-6, 1)$ e $B(2, -3)$; $\overline{AB} = \sqrt{(2+6)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$;
 $r_1 + r_2 = \sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Dado que $\overline{AB} > r_1 + r_2$, podemos concluir que as circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 não se interseçam.

3.3. Centro C , ponto médio de $[AB]$: $C\left(\frac{-6+2}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = C(-2, -1)$; raio: $r_3 = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} = \sqrt{20}$

Equação: $\mathcal{C}_3: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$

3.4. $C(-2, -1)$; $\mathcal{C}_2: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 20$

$(-2-2)^2 + (-1+3)^2 = 20 \Leftrightarrow 16 + 4 = 20$ (verdadeiro)

4.1. $C(1, 3)$: $(1-3)^2 + (3-6)^2 = 13 \Leftrightarrow 4 + 9 = 13$ (verdadeiro); $1 \times (1+6) + 3^2 = 16 \Leftrightarrow 7 + 9 = 16$ (verdadeiro)

Logo, como C pertence a \mathcal{C}_1 e a \mathcal{C}_2 , podemos concluir que C é um ponto de interseção das duas circunferências.

4.2. Centro de \mathcal{C}_1 : $A(3, 6)$

$\mathcal{C}_2: x(x+6) + y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 = 16 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = 25$; centro de \mathcal{C}_2 : $B(-3, 0)$

Se $P(\alpha, \beta)$ é um ponto da mediatriz de $[AB]$, então:

$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow (\alpha-3)^2 + (\beta-6)^2 = (\alpha+3)^2 + \beta^2 \Leftrightarrow -12\alpha - 12\beta = -36 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3$

Ficha 5 Semiplanos

1.1. $r: x=0$

1.2. Ponto médio de $[AB]$: $\left(\frac{0+(-1)}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

Paralela a Ox , portanto t é uma reta horizontal e a sua equação é $y = -1$.

1.3. (D)

A interseção das retas r e t é representada pela condição $x=0 \wedge y=-1$, portanto o ponto de interseção é $(0, -1)$.

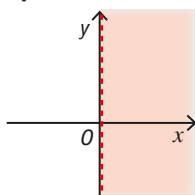
1.4. A equação reduzida tem a expressão: $y = mx + b$

Calcular m : $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-3-1}{0-(-1)} = -4$

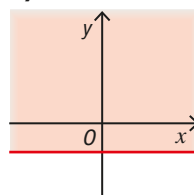
Como A pertence à reta e a sua abcissa é zero, concluímos que a ordenada na origem é -3 .

A equação reduzida da reta AB é $y = -4x - 3$.

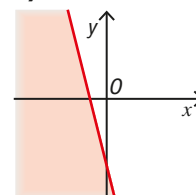
1.5. a)

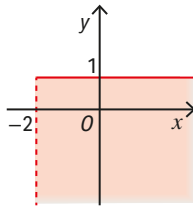
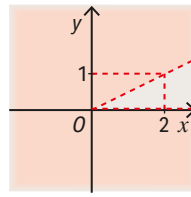
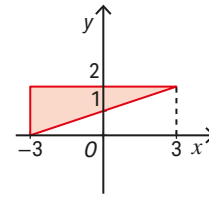


b)



c)



2.1.

2.2.

2.3.


3.1. $x \geq 0 \wedge y \leq 0 \wedge y \geq x - 2$

3.2. $(y \leq 0 \wedge y \geq x - 2) \vee x \leq 0$

3.3. $y \geq x - 2 \wedge (x \leq 0 \vee y \geq 0)$

4. Altura do paralelogramo: $h = 3$.

$$A_{[ABCD]} = 15 \Leftrightarrow \overline{AB} \times h = 15 \Leftrightarrow \overline{AB} \times 3 = 15 \Leftrightarrow \overline{AB} = 5. \text{ Logo, } B(1+5, 0) = (6, 0).$$

$$\text{Reta } BC: m = \frac{3-0}{8-6} = \frac{3}{2}; y-0 = \frac{3}{2}(x-6) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 9. \text{ A reta } AD \text{ é paralela a } BC: y-0 = \frac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\text{Condição: } \frac{3}{2}x - 9 \leq y \leq \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \wedge 0 \leq y \leq 3$$

5.1. $C(0, 2), A(k, 0), B(k, k)$;

$$A_{[OABC]} = 24 \Leftrightarrow \frac{2+k}{2} \times k = 24 \Leftrightarrow 2k+k^2 = 48 \Leftrightarrow k^2+2k-48=0 \Leftrightarrow_{k>0} k=6$$

5.2. $C(0, 2); A(6, 0); B(6, 6)$: reta $CB: y = mx + b; m = \frac{6-2}{6-0} = \frac{2}{3}; b = 2; CB: y = \frac{2}{3}x + 2$

$$\text{Condição: } 0 \leq y \leq \frac{2}{3}x + 2 \wedge 0 \leq x \leq 6$$

5.3. Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz de $[AC]$.

$$d(P, A) = d(P, C) \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-0)^2 = (x-0)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow y = 3x - 8$$

5.4. Dado que $[AFCG]$ é um losango, F e G pertencem à mediatriz de $[AC]$. G pertence ao eixo Oy e F pertence à reta de equação $x = 6$. Ponto $G: x = 0 \wedge y = 3x - 8 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = -8; G(0, -8)$.

$$\text{Ponto } F: x = 6 \wedge y = 3x - 8 \Leftrightarrow x = 6 \wedge y = 10; F(6, 10)$$

6.1. raio $= d(O, A) = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

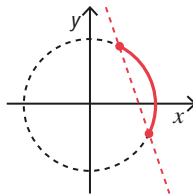
$$\text{A equação da circunferência é } x^2 + y^2 = 5$$

6.2. Tenho de provar que $B(2, -1)$ satisfaz a condição $x^2 + y^2 = 5$

$$2^2 + (-1)^2 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \text{ verdadeira; } B \text{ pertence à circunferência.}$$

6.3. Declive: $\frac{-1-2}{2-1} = -3$; ordenada na origem: $-3 \times 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 5$

$$\text{Equação reduzida da reta } AB: y = -3x + 5$$

6.4.


Ficha 6 Círculo

pág. 60

1. (C)

Resolução: $d(A, P) \leq d(B, A)$ define um círculo de centro A e raio \overline{AB} . Logo, a resposta é C .

2.1. Como a origem tem coordenadas $(0, 0)$, tenho de provar que substituindo na condição obtemos uma proposição verdadeira.

$(0+1)^2 + (0-2)^2 \leq 8 \Leftrightarrow 1+4 \leq 8 \Leftrightarrow 5 \leq 8$, proposição verdadeira. Logo, a origem pertence ao conjunto A .

2.2. Como a ordenada é 4, substituímos na condição o y por 4, obtemos

$$(x+1)^2 + (4-2)^2 \leq 8 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 4 \leq 8 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 4$$

Os números que ao quadrado são menores que 4 são os números entre -2 e 2 , logo

$$(x+1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -2-1 \leq x \leq 2-1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

Logo, a abcissa de B pertence a $[-3, 1]$.

3.1. Centro: $(3, -1)$

Raio: 3

$$(x-3)^2 + (y-(-1))^2 \leq 3^2$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 \leq 9$$

3.2. Centro: $(-3, -1)$

Raio: distância do centro à origem

$$\text{Raio: } \sqrt{(-3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$(x-(-3))^2 + (y-(-1))^2 \leq \sqrt{10}^2$$

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 \leq 10$$

pág. 61

4.1. A condição representa um círculo de centro A e raio \overline{AB} :

$$d(B, A) = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$(x-1)^2 + (y-(-1))^2 \leq \sqrt{17}^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 17$$

4.2. Substituindo na condição anterior as coordenadas de Q , temos de obter uma condição verdadeira.

$(1-1)^2 + (3+1)^2 \leq 17 \Leftrightarrow 0+16 \leq 17 \Leftrightarrow 16 \leq 17$, proposição verdadeira. Logo, Q pertence ao conjunto.

4.3. Por exemplo, $(5, 7)$.

$$(5-1)^2 + (7+1)^2 \leq 17 \Leftrightarrow 16+64 \leq 17 \Leftrightarrow 80 \leq 17, \text{ proposição falsa}$$

Logo $(5, 7)$ não pertence ao conjunto definido na alínea.

5.1. Mediatriz de $[AB]$: $(x+3)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x = -6x + 9 - 12y + 36 \Leftrightarrow y = -x + 3$$

5.2. Declive: $\frac{6}{3} = 2$

Ordenada na origem: 0

A equação da reta s é $y = 2x$.

5.3. O centro da circunferência é o ponto de interseção da mediatriz de $[AB]$ com a reta s .

$$\text{Centro da circunferência: } y = 2x \wedge y = -x + 3 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 2$$

Logo, $C(1, 2)$.

5.4. Centro: (1, 2)

Raio: distância de C a A

$$\text{Raio: } \sqrt{(-3-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq \sqrt{20}^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 20$$

5.5. D é o ponto de interseção das retas r e s.

Como r é paralela a Oy e passa em A tem equação $x = -3$.

Coordenadas de D: $y = 2x \wedge x = -3 \Leftrightarrow x = -3 \wedge y = -6$

Logo, D (-3, -6).

Ficha 7 Geometria no plano e tecnologia

pág. 62

1.1. O triângulo é equilátero.

1.2. Três medidas formam um triângulo se e só se a soma de duas delas é maior que a outra. Neste caso $2+2$ não é maior que 6, logo não é possível obter um triângulo.

1.3. lado1=2

lado2=2

lado3=6

if lado1+lado2 > lado3 and lado3+lado2 > lado1 and lado1+lado3 > lado2:

if lado1 == lado2 == lado3:

print ("O triângulo é equilátero.")

elif lado1 == lado2 or lado1 == lado3 or lado2 == lado3:

print ("O triângulo é isósceles.")

else:

print ("O triângulo é escaleno.")

else:

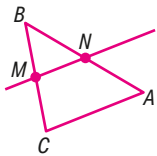
print ("Com essas medidas não é possível formar um triângulo.")

1.4. A condição para classificar um triângulo dado depende de três medidas: a, b, c

- escolher a maior medida, por exemplo, a
- testar se $a^2 = b^2 + c^2$ para ser um triângulo retângulo
- testar se $a^2 < b^2 + c^2$ para ser um triângulo acutângulo
- testar se $a^2 > b^2 + c^2$ para ser um triângulo obtusângulo

pág. 63

2.1.



A reta é estritamente paralela ao lado do triângulo que não foi bisetado.

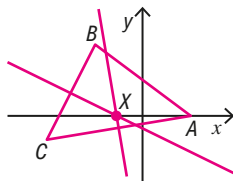
2.2. Duas retas paralelas têm o mesmo declive.

Sejam, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. As coordenadas dos pontos médios de [AB] e [BC] são

$$N\left(\frac{x_B+x_A}{2}, \frac{y_B+y_A}{2}\right) \text{ e } M\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right).$$

$$\text{O declive da reta } AC \text{ é } \frac{y_C-y_A}{x_C-x_A} \text{ e o declive da reta } NM \text{ é } \frac{\frac{y_B+y_C}{2} - \frac{y_B+y_A}{2}}{\frac{x_B+x_C}{2} - \frac{x_B+x_A}{2}} = \frac{y_B+y_C - (y_B+y_A)}{x_B+x_C - (x_B+x_A)} = \frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$$

Como são iguais as retas AC e NM são paralelas.

2.3.


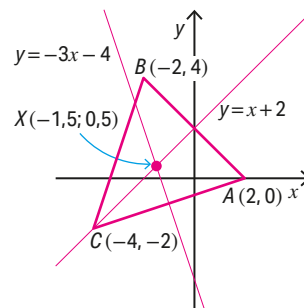
2.4. Mediatriz de $[AB]$: $(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow -4x = 4x - 8y + 16 \Leftrightarrow y = x + 2$

Mediatriz de $[AC]$: $(x-2)^2 + y^2 = (x+4)^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow -4x = 8x + 16 + 4y \Leftrightarrow y = -3x - 4$

Para determinar a interseção resolvo o sistema de equações:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = -3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ 4x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

O ponto de interseção das mediatrizes do triângulo $[ABC]$ tem coordenadas $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.



Avaliação

Ficha 8 Geometria analítica no plano

pág. 64

1.1. A mediatriz de $[AB]$ é dada pela condição:

$$(x-0)^2 + (y-(-3))^2 = (x-(-1))^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow 6y + 2y = 2x + 2 - 9 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{8}$$

1.2. (D)

A mediatriz de $[AB]$ é perpendicular a AB , portanto tem o mesmo declive: $m = \frac{1}{4}$

Como passa em $B(-1, 1)$, substituímos o m e as coordenadas de B e obtemos $\frac{1}{4} \times (-1) + b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}$

A equação reduzida é $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$. Resposta: **(D)**

1.3. (A)

C pertence à reta de equação $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ e tem ordenada zero. Assim, $0 = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = -5$ e $C(-5, 0)$.

1.4. $\overline{AB} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{17}$; $\overline{CB} = \sqrt{(-1+5)^2 + (1+0)^2} = \sqrt{17}$

Como a medida dos catetos é a mesma, o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo isósceles.

1.5. Centro = Coordenadas do ponto médio de $[AC]$: $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$

$$\text{Raio} = \frac{d(A, C)}{2} = \frac{\sqrt{25+9}}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2 = \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$$

$$\text{Equação da circunferência: } \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$$

1.6. $B(-1, 1)$ substitui-se na equação e obtemos $\left(-1 + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{17}{2} \Leftrightarrow \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$

Como satisfaz a condição, o ponto B pertence à circunferência.

1.7. (B)

$$AB: y = -4x - 3$$

$$BC: y = \frac{x}{4} + \frac{5}{4}$$

$$AC: y = -\frac{3}{5}x - 3$$

$$y \leq -4x - 3 \wedge y \leq \frac{x}{4} + \frac{5}{4} \wedge y \geq -\frac{3}{5}x - 3$$

2.1. Como A pertence ao eixo Oy , as coordenadas de A são $(0, y)$ e como também pertence à reta r , temos $2 \times 0 - y = 2 \Leftrightarrow -y = 2 \Leftrightarrow y = -2$
 Como B pertence ao eixo Ox , as coordenadas de B são $(x, 0)$ e como também pertence à reta r , temos $2x - 0 = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$
 As coordenadas são $A(0, -2)$ e $B(1, 0)$.

2.2. Coordenadas do ponto médio de $[AB]$: $C\left(\frac{0+1}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

Portanto, $R\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

2.3. A equação reduzida tem a expressão: $y = mx + b$

$$\text{Calcular } m: m = \frac{y_R - y_B}{x_R - x_B} = \frac{1 - 0}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

Calcular a ordenada na origem: substituir o m e as coordenadas de B na equação $mx + b = y$
 $-\frac{2}{3} \times 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$

A equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.

2.4. (C)

$$(x-0)^2 + (y+2)^2 = (x-1)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y + 4 = -2x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{4}x - \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

2.5. Uma reta perpendicular a r tem de ter o mesmo declive que a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.
 Como os declives, da mediatriz é $-\frac{1}{2}$ e o declive da reta RB é $-\frac{2}{3}$, são diferentes, logo a reta RB não é perpendicular à reta r .

2.6. A área do triângulo $[ABR]$ é igual à soma das áreas dos triângulos $[EAB]$ com $[EAR]$.

$$A_{[EAB]} = \frac{EA \times |x_B|}{2} = \frac{\left(2 + \frac{2}{3}\right) \times 1}{2} = \frac{4}{3}$$

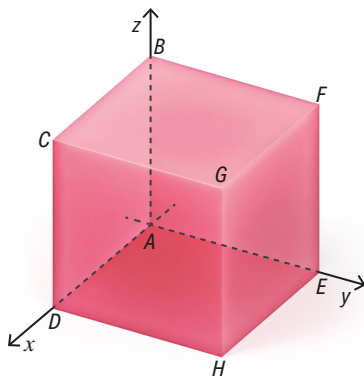
$$A_{[EAR]} = \frac{EA \times |x_R|}{2} = \frac{\left(2 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Portanto, } A_{[ABR]} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

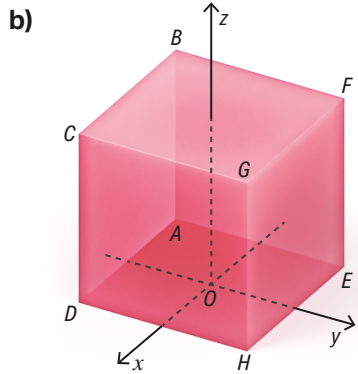
Ficha 9 Referenciais cartesianos no espaço

1.1. Seja a a aresta do cubo. O cubo tem como faces seis quadrados de lado a .
 Área total do cubo $= 6a^2$. Logo, $6a^2 = 24 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$
 Como se trata de uma medida, a aresta do cubo é 2 cm.

1.2. a)

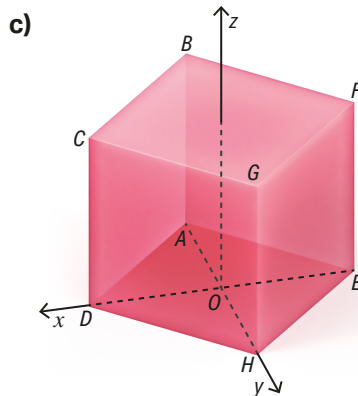


$A(0, 0, 0)$; $B(0, 0, 2)$; $C(2, 0, 2)$; $D(2, 0, 0)$; $E(0, 2, 0)$; $F(0, 2, 2)$; $G(2, 2, 2)$; $H(2, 2, 0)$
 A origem é A ; Eixo xx : AD ; Eixo yy : AE ; Eixo zz : AB



$$A(-1, -1, 0); B(-1, -1, 2); C(1, -1, 2); D(1, -1, 0);$$

$$E(-1, 1, 0); F(-1, 1, 2); G(1, 1, 2); H(1, 1, 0)$$



$$\overline{OD}: a^2 + a^2 = 2^2 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

$$A(0, -\sqrt{2}, 0); B(0, -\sqrt{2}, 2); C(\sqrt{2}, 0, 2); D(\sqrt{2}, 0, 0);$$

$$E(-\sqrt{2}, 0, 0); F(-\sqrt{2}, 0, 2); G(0, \sqrt{2}, 2); H(0, \sqrt{2}, 0)$$

2. $A(-1, 4, 1), B(0, 4, 0), C(-2, 2, 2), D(-1, 1, 3), E(0, 0, 2), F(-1, -3, 1),$
 $G(0, -2, 0), H(-1, -2, -1), I(4, -2, 0), J(5, 0, 0), K(4, -1, -2), L(5, 3, 1),$
 $M(4, 3, -2), N(-1, 1, -2), O(0, 0, 0), P(1, 3, -1), Q(-1, 4, -2)$

- 3.1. $\overline{AB} = \overline{EH} = 4; \overline{AB} \times \overline{AD} = 8 \Leftrightarrow 4 \times \overline{AD} = 8 \Leftrightarrow \overline{AD} = 2;$
 $\overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AF} = 72 \Leftrightarrow 4 \times 2 \times (\overline{OA} + \overline{OF}) = 72 \Leftrightarrow 8 \times (\overline{OA} + 2\overline{OA}) = 72 \Leftrightarrow 3\overline{OA} = 9 \Leftrightarrow \overline{OA} = 3;$
 $\overline{OF} = 2\overline{OA} = 2 \times 3 = 6$

$A(0, 0, -3), B(4, 0, -3), C(4, 2, -3), D(0, 2, -3), E(0, 2, 6), F(0, 0, 6), G(4, 0, 6)$ e
 $H(4, 2, 6)$

- 3.2. $H(4, 2, 6)$
 $E(0, 2, 6)$

Como P pertence a $[HE]$, as suas coordenadas são $(x, 2, 6)$
 O volume da pirâmide $[EFPD]$:

• é um nono do volume do prisma: $\frac{72}{9} = 8$

• $\frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3} = \frac{2 \times x}{2} \times 9 : 3 = 3x$

Temos que, $3x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$.

As coordenadas de P são $(\frac{8}{3}, 2, 6)$.

Ficha 10 Planos paralelos aos planos coordenados. Retas paralelas aos eixos coordenados

pág. 68

MMATOCAD © Porto Editora

1.1. $A(2, 3, 5); B(2, 3, 2); C(2, 6, 2); F(-3, 3, 5); G(-3, 6, 5); H(-3, 6, 2)$

1.2. a) $x = 2$

b) $y = 6$

c) $z = 2$

d) $x = -3$

e) $y = 3$

f) $z = 5$

1.3. a) $x = 2 \wedge y = 3$

b) $y = 6 \wedge z = 2$

c) $x = -3 \wedge z = 5$

1.4. $\overline{AB} = z_A - z_B = 5 - 2 = 3; \overline{BC} = y_C - y_B = 6 - 3 = 3; \overline{AF} = x_A - x_F = 2 - (-3) = 5$

$V_{[ABCDGHEF]} = 3^2 \times 5 = 45$

Condição da aresta $[DG]$: $y = 6 \wedge z = 5 \wedge -3 \leq x \leq 2$, pelo que $P(x, 6, 5)$, com $-3 \leq x \leq 2$.

Base da pirâmide: $[ABCD]$; considere-se a altura da pirâmide: a

$V_{[ABCDP]} = \frac{1}{3} \times 3^2 \times a = 3a$

Como $V_{[ABCDP]} = \frac{1}{5} V_{[ABCDGHEF]}$, temos que $3a = 9 \Leftrightarrow a = 3$

A distância de D a P tem de ser 3, logo a abcissa de P é $2 - 3 = -1$.

As coordenadas de P são $(-1, 6, 5)$.

2.1. $y = 3$

2.2. $x = -1 \wedge z = 5$

pág. 69

3.1. Se U e V pertencem ao eixo Oy e DC é paralela ao eixo Ox e as bases são quadrados de lado $|5 + (-5)| = 10$, então as faces do prisma estão contidas nos planos de equações $z = 5, z = -5, x = 5, x = -5, y = -4$ e $y = 8$.

Portanto: $A(5, -4, -5); B(-5, -4, -5); C(-5, -4, 5); D(5, -4, 5); E(5, 8, 5); F(5, 8, -5); G(-5, 8, -5); H(-5, 8, 5)$

3.2. a) $[FE]: x = 5 \wedge y = 8 \wedge -5 \leq z \leq 5$

b) $[DEHC]: -5 \leq x \leq 5 \wedge -4 \leq y \leq 8 \wedge z = 5$

3.3. Seja M o ponto médio de $[CD]$. $\overline{UM} = 5; \overline{UV} = |8 - (-4)| = 12$

$\overline{MV}^2 = \overline{UM}^2 + \overline{UV}^2 \Leftrightarrow \overline{MV}^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{MV}^2 = 169 \Leftrightarrow \overline{MV} = \sqrt{169} \Leftrightarrow \overline{MV} = 13$

\overline{MV} é a medida da altura do triângulo $[DVC]$, pelo que $A_{[DVC]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{MV}}{2} = \frac{10 \times 13}{2} = 65$.

$A_{\text{lateral}} = 4 \times A_{[DVC]} = 4 \times 65 = 260$ u. a.

4.1. $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} \Leftrightarrow 216 = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \overline{AV} \Leftrightarrow 12 \times (\overline{AO} + \overline{OV}) = 216 \Leftrightarrow \overline{AO} + 9 = 18 \Leftrightarrow \overline{AO} = 9$.

A altura da água é 9 dm.

4.2. $A(0, 0, -9), B(6, 0, -9), C(6, 6, -9), D(0, 6, -9)$ e $V(0, 0, 9)$

4.3. A parte da pirâmide não submersa é uma pirâmide semelhante à pirâmide $[ABCDV]$, sendo a razão de semelhança na redução $r = \frac{\overline{OV}}{\overline{AV}} = \frac{9}{9+9} = \frac{1}{2}$. Logo, $V_{\text{pirâmide exterior}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V_{\text{pirâmide } [ABCDV]} = \frac{1}{8} \times 216 = 27$ e $V_{\text{água no depósito}} = (216 - 27) \text{ dm}^3 = 189 \text{ dm}^3$. Existem no depósito 189 litros de água.

Ficha 11 Distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento de reta no espaço

pág. 70

MMATOCAD © Porto Editora

1.1. $\overline{AB} = \sqrt{(0+1)^2 + (5-3)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9} = 3;$

$\overline{AC} = \sqrt{(2+1)^2 + (4-3)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{10};$

$\overline{BC} = \sqrt{(2-0)^2 + (4-5)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$

O triângulo $[ABC]$ é isósceles.

1.2. $\overline{AB} = \sqrt{(3-5)^2 + (3+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{36} = 6;$

$\overline{AC} = \sqrt{(5-5)^2 + (-6+1)^2 + (7+3)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5};$

$\overline{BC} = \sqrt{(5-3)^2 + (-6-3)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{121} = 11.$

O triângulo $[ABC]$ é escaleno.

1.3. $\overline{AB} = \sqrt{(-2+3)^2 + (2+2)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{81} = 9;$

$\overline{AC} = \sqrt{(6+3)^2 + (-2+2)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{81 \times 2} = 9\sqrt{2};$

$\overline{BC} = \sqrt{(6+2)^2 + (-2-2)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{81} = 9.$

O triângulo $[ABC]$ é isósceles.

2.1. $\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (6+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{98};$

$\overline{AC} = \sqrt{(-2-4)^2 + (0+2)^2 + (1-4)^2} = 7;$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-6)^2 + (1+1)^2} = 7.$

Como $\overline{AC} = \overline{BC}$, o triângulo $[ABC]$ é isósceles; $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 7^2 + 7^2 = 49 + 49 = 98 = \overline{AB}^2.$

Pelo recíproco do teorema de Pitágoras, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C .

2.2. Seja $P(0, 0, z)$. $d(A, P) = d(A, O) \Leftrightarrow \sqrt{(0-4)^2 + (0+2)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (z-4)^2 = 16 \Leftrightarrow_{z>0} z = 8; P(0, 0, 8)$

2.3. Coordenadas de P : $\left(\frac{1+(-2)}{2}, \frac{6+0}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 3, 0\right)$

Coordenadas do ponto médio de $[AP]$: $\left(\frac{4 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2}, \frac{-2+3}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, 2\right)$

3.1. $\overline{AC} = \sqrt{(0,8-2)^2 + (-1+1)^2 + (7,4+1)^2} = \sqrt{1,44+0+70,56} = \sqrt{72}$

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = (\sqrt{72})^2 \Leftrightarrow 2\overline{AB}^2 = 72 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 36 \Leftrightarrow_{AB>0} \overline{AB} = 6.$ A medida da aresta do cubo é 6.

3.2. $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 6 = 72$ u.v.

pág. 71

4.1. $d(A, B) = \sqrt{(2-(-3))^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{26}$

4.2. C pertence ao eixo Oy , portanto $C(0, c, 0)$

Como $d(A, C) = d(B, C) \Leftrightarrow 4 + (c-1)^2 = 9 + c^2 \Leftrightarrow c^2 - 2c + 1 + 4 = 9 + c^2 \Leftrightarrow c = -2$

As coordenadas de C são $(0, -2, 0)$.

4.3. $d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{(0+3)^2 + (-2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Área da base: $\frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}{2} = \frac{13}{2}$

Volume do prisma = $\frac{13}{2} \times \text{altura}$

$26 = \frac{13}{2} \times \text{altura} \Leftrightarrow \text{altura} = 4$

4.4. $x = 0 \wedge y = -2$

4.5. Coordenadas de $F(0, -2, 4)$

Ponto médio de $[FA]$: $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{-2+1}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}, 2\right)$

Equação do plano paralelo a xOz : $y = -\frac{1}{2}$

4.6. Coordenadas: $A(2, 1, 0)$; $E(-3, 0, 4)$; $P(0, y, 0)$

$$d(E, A) = d(E, P) \Leftrightarrow \sqrt{(2+3)^2 + (1-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-y)^2 + (4-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 + 1 + 16 = 9 + y^2 + 16 \Leftrightarrow y^2 = 17 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{17}$$

Como P pertence ao semieixo positivo, as coordenadas são $(0, \sqrt{17}, 0)$.

Ficha 12 Plano mediador

pág. 72

1.1. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador.

$$d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow -4x + 4y = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$

1.2. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador.

$$d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-7)^2 + (z-0)^2 = (x-5)^2 + (y+5)^2 + (z-4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + z^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 10y + 25 + z^2 - 8z + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x + 10x - 14y - 10y + 8z + 9 + 49 - 25 - 25 - 16 = 0 \Leftrightarrow 16x - 24y + 8z - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + z - 1 = 0$$

2.1. $d(M, B) = \frac{1}{2}d(A, B) = \frac{1}{2}\sqrt{(-1-3)^2 + (-6+2)^2 + (3-1)^2} = 3$

2.2. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano α , plano mediador de $[AB]$.

$$d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (y+6)^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow 2x + 2y - z + 8 = 0$$

2.3. $P(k, -3, 3k) \in \alpha \Leftrightarrow 2k + 2 \times (-3) - 3k + 8 = 0 \Leftrightarrow -k - 6 + 8 = 0 \Leftrightarrow k = 2$

3.1. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador de $[BD]$.

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 4x - 4y - 4y - 6z + 4z + 14 - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 8y - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow x - 4y - z + 1 = 0$$

Uma equação do plano mediador é $x - 4y - z + 1 = 0$.

3.2. $A(0, 0, z)$. Como $\overline{AB} = \overline{AD}$, o ponto A pertence ao plano mediador de $[BD]$.

Logo, $0 - 4 \times 0 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$. Portanto, $A(0, 0, 1)$.

3.3. $M\left(\frac{0+1}{2}, \frac{0-1}{2}, \frac{1+6}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

pág. 73

4.1. $y = 2$

4.2. $M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (3, 2, 0)$

4.3. Como BA é uma reta paralela ao eixo Ox , DC é uma reta paralela a Oz . Portanto, D e C têm a mesma abcissa e ordenada que M .

Como M é o centro da base, a distância de M a A é igual à distância de M a D e de M a C .

O ponto M pertence ao plano de equação $z = 0$, logo as coordenadas de D são $(3, 2, 2)$ e as de C são $(3, 2, -2)$.

4.4. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow -2x + 1 = -6x - 4z + 13 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + z - 3 = 0$$

Uma equação do plano pedido é $x + z - 3 = 0$.

4.5. Aresta da base: $d(A, D) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$; Área da base: 8

Como o volume é 16, temos $16 = \frac{1}{3} \times 8 \times h \Leftrightarrow h = 6$.

Como $\overline{EM} = 6$, temos que $y_M - y_E = 6 \Leftrightarrow 2 - 6 = y_E \Leftrightarrow y_E = -4$

E tem a mesma abcissa e cota que M . Logo, as coordenadas de E são $(3, -4, 0)$.

4.5. Os triângulos $[ABE]$ e $[HFE]$ são semelhantes, portanto as suas alturas também são diretamente proporcionais.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HF}} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow \overline{HF} = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$$

Metade de \overline{HF} é $\frac{4}{3}$.

As coordenadas do ponto médio de $[FH]$ são $(3, 0, 0)$, pois o plano CDE tem equação $x = 3$.

As coordenadas dos vértices do quadrado $[FGHI]$ são:

$$F\left(\frac{13}{3}, 0, 0\right); G\left(3, 0, \frac{4}{3}\right); H\left(\frac{5}{3}, 0, 0\right); I\left(3, 0, -\frac{4}{3}\right)$$

Ficha 13 Superfície esférica e esfera

pág. 74

1.1. Superfície esférica de centro $C(0, 0, 0)$ e raio $r = 1$

1.2. Superfície esférica de centro $C(1, -2, 0)$ e raio $r = \sqrt{5}$

1.3. Esfera de centro $C(0, 1, -1)$ e raio $r = 2$

1.4. Esfera de centro $C(-1, 0, \sqrt{2})$ e raio $\sqrt{2}$

2.1. a) $r = \overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2+4)^2 + (1-5)^2} = 6;$ $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 36$

b) Centro: $M(-1, -3, 3); r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 6 = 3;$ $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$

c) $r = d(A, \text{plano } yOz) = |\text{abcissa de } A| = 1;$ $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 1$

d) $r = d(B, \text{plano } xOz) = |\text{ordenada de } B| = |-2| = 2;$ $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$

2.2. Centro $M(-1, -3, 3)$ e raio $r = 3$:

$$x = -1 + 3 \Leftrightarrow x = 2;$$

$$x = -1 - 3 \Leftrightarrow x = -4;$$

$$y = -3 + 3 \Leftrightarrow y = 0;$$

$$y = -3 - 3 \Leftrightarrow y = -6;$$

$$z = 3 + 3 \Leftrightarrow z = 6;$$

$$z = 3 - 3 \Leftrightarrow z = 0$$

3.1. $(x+2)^2 + y^2 + (7-4)^2 \leq 25 \wedge z = 7 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 \leq 16 \wedge z = 7$

Círculo cujo centro é o ponto de coordenadas $(-2, 0, 7)$ e raio 4 contido no plano de equação $z = 7$.

3.2. $-2 - 5 < k < -2 + 5 \Leftrightarrow -7 < k < 3$

3.3. $(x+2)^2 + (-1)^2 + (z-4)^2 \leq 25 \wedge y = -3 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (z-4)^2 \leq 24 \wedge y = -3$.

A secção produzida é um círculo de centro $(-2, -3, 4)$ e $\sqrt{24}$.

A área do círculo é $\sqrt{24}^2 \pi = 24\pi$.

pág. 75

4.1. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2;$

Centro da superfície esférica: $C(1, -2, 3)$. Se a superfície esférica é tangente ao plano xOy , então o raio é dado por $r = |\text{cota de } C| = 3$ e $k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9$

4.2. $(3-1)^2 + (-1+2)^2 + (5-3)^2 = 9 \Leftrightarrow 4 + 1 + 4 = 9$ (V);

$(3-1)^2 + (-3+2)^2 + (5-3)^2 = 9 \Leftrightarrow 4 + 1 + 4 = 9$ (V)

Logo, os pontos A e B pertencem à superfície esférica.

4.3. Se $[AD]$ é um diâmetro da superfície esférica, então o centro, C , é o ponto médio de $[AD]$:

$$\left(\frac{3+x}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{5+z}{2}\right) = (1, -2, 3) \Leftrightarrow x = -1 \wedge y = -3 \wedge z = 1;$$

$$D(-1, -3, 1)$$

4.4. a) Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador.

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 \Leftrightarrow y = -2$$

b) O plano α passa em C . Logo, a secção é uma circunferência de raio 3. O seu comprimento é $2\pi r = 6\pi$.

5.1. $M\left(\frac{4+6}{2}, \frac{6+4}{2}, \frac{-4+6}{2}\right) = (5, 5, 1)$

5.2. O centro da esfera é $M(5, 5, 1)$ e o raio é metade da aresta do cubo.

$$\overline{BC} = \sqrt{(6-4)^2 + (10-6)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{36} = 6; r = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3$$

$$\text{Inequação da esfera: } (x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 \leq 9$$

5.3. a) $(x-6)^2 + (y-10)^2 + (z-0)^2 = (x-6)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 \Leftrightarrow -12y + 12z + 48 = 0 \Leftrightarrow y - z - 4 = 0$
 $\alpha: y - z - 4 = 0$

b) O ponto $M(5, 5, 1)$, centro da esfera, pertence a α dado que $5 - 1 - 4 = 0$. Logo, a secção produzida na esfera pelo plano α é um círculo de raio 3. A sua área é $\pi \times 3^2 = 9\pi$ u. a.

Ficha 14 Geometria no espaço e tecnologia

pág. 76

1.1. O plano é paralelo ao plano yOz .

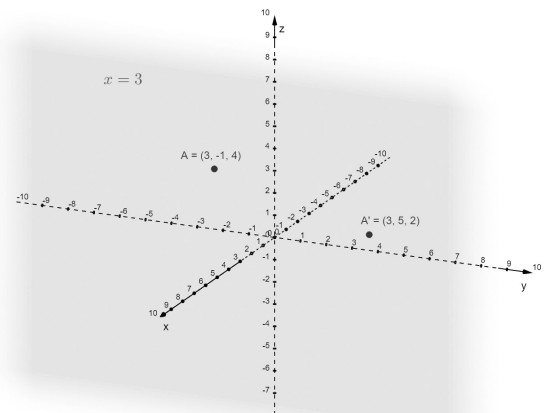
1.2. A abcissa mantém-se e a ordenada e a cota alteram-se.

1.3. Por exemplo, para $y = -2$ obtemos um plano paralelo ao plano xOz .

Nos pontos desse plano, a ordenada mantém-se e a abcissa e a cota variam.

Por exemplo, para $z = 4$ obtemos um plano paralelo ao plano xOy .

Nos pontos desse plano, a cota mantém-se e a abcissa e a ordenada variam.



2.1. A reta é paralela ao eixo Oz .

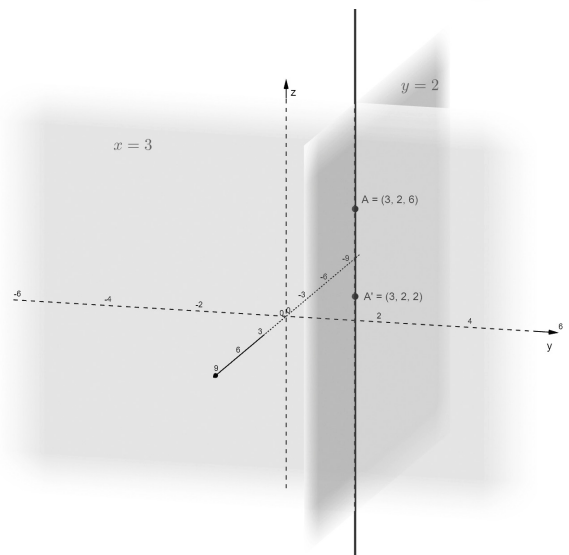
2.2. A abcissa e a ordenada mantêm-se e a cota altera-se.

2.3. Por exemplo, para $y = -2 \wedge z = 1$, obtemos uma reta paralela ao eixo Ox .

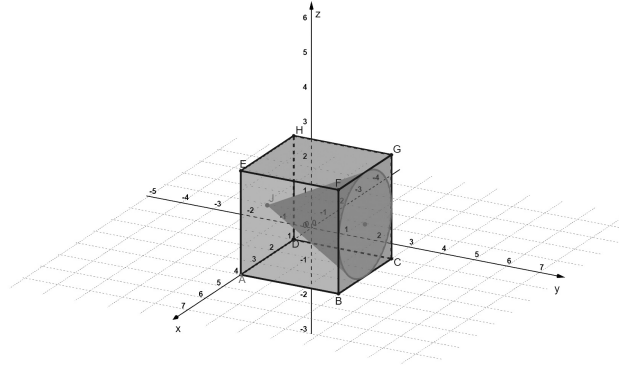
Os pontos dessa reta têm mesma ordenada e a mesma cota enquanto o valor da abcissa muda.

Por exemplo, para $x = 1 \wedge z = -4$ obtemos uma reta paralela ao eixo Oy .

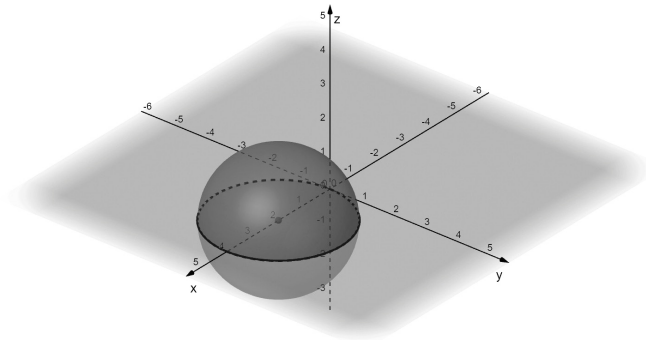
Os pontos dessa reta têm mesma abcissa e a mesma cota enquanto a ordenada varia.



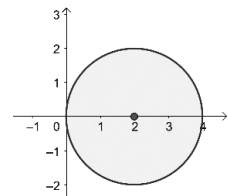
- 3.1. Construindo dois pontos obtenho um cubo.
- 3.2. Preciso de dois pontos e o raio da base.
- 3.3. Tenho de construir dois pontos médios em faces opostas.
E saber quanto é a aresta do cubo, pois o raio da base é metade da aresta do cubo.



4. Com recurso ao GeoGebra 3D, construir a superfície esférica e o plano.



Para ter uma visualização 2D da interseção do plano com a superfície esférica, selecionar a interseção e com o botão direito do rato escolher **Criar vista 2D de c**. Permite visualizar que k varia entre -2 e 2 . Logo, para que a interseção seja uma circunferência, $k \in]-2, 2[$.



Avaliação

Ficha 15 Geometria analítica no espaço

- 1.1. A esfera tem centro $S(-1, -1, 0)$ e raio $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
O centro da esfera, $S(-1, -1, 0)$ é ponto médio do segmento de reta $[AH]$.
Se $A(x, y, z)$, então:
$$\left(\frac{x-3}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+2}{2}\right) = (-1, -1, 0) \Leftrightarrow x=1 \wedge y=-3 \wedge z=-2; A(1, -3, -2)$$
- 1.2. Seja a a medida da aresta do cubo: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$; $\overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CH}^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$
Como $\overline{AH} = 2r = 4\sqrt{3}$, vem: $3a^2 = (4\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 3a^2 = 16 \times 3 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow_{a>0} a = 4$
- 1.3. O plano AGH passa no centro do cubo. Logo, passa no centro da esfera. Assim, a secção produzida na esfera pelo plano AGH é um círculo de raio $r = \sqrt{12}$ e a sua área é $\pi \times (\sqrt{12})^2 = 12\pi$ u. a.
- 1.4. (B)
 $(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 12 \wedge x = -4 \wedge z = 1 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 2 \wedge x = -4 \wedge z = 1$
 $\Leftrightarrow (y = -1 - \sqrt{2} \vee y = -1 + \sqrt{2}) \wedge x = -4 \wedge z = 1$
A reta intersesta nos pontos de coordenadas $(-4, -1 - \sqrt{2}, 1)$ e $(-4, -1 + \sqrt{2}, 1)$.
A distância entre os pontos é $-1 + \sqrt{2} - (-1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

1.5. Coordenadas de $F(1, -3, 2)$

Como FG é paralela a Oy , uma condição da reta é $x = 1 \wedge z = 2$.

1.6. (C)

BGE é o plano mediador do segmento de reta $[FH]$.

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2x - 2y - 6y = 0 \Leftrightarrow 8x - 8y = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$

pág. 79

2.1. A e B pertencem à superfície esférica, pois:

$$(2-1)^2 + (-12+4)^2 + (-5+1)^2 = 81 \Leftrightarrow 1 + 64 + 16 = 81 \text{ (Verdadeiro); o ponto } A \text{ pertence à superfície esférica.}$$

$$(0-1)^2 + (4+4)^2 + (3+1)^2 = 81 \Leftrightarrow 1 + 64 + 16 = 81 \text{ (Verdadeiro); o ponto } B \text{ pertence à superfície esférica.}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-2)^2 + (4+12)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{324} = 18. A \text{ e } B \text{ pertencem à superfície esférica e}$$

$$\overline{AB} = 18 = 2r.$$

Logo, $[AB]$ é um diâmetro da superfície esférica.

2.2. $(-6-1)^2 + (-8+4)^2 + (3+1)^2 = 81 \Leftrightarrow 49 + 16 + 16 = 81$ (Verdadeiro). Logo, o ponto D pertence à superfície esférica.

Se $E(x, y, z)$ e $[DE]$ é um diâmetro dessa superfície esférica, então o centro, $C(1, -4, -1)$, é o ponto médio de $[DE]$:

$$\left(\frac{x-6}{2}, \frac{y-8}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = (1, -4, -1) \Leftrightarrow x-6=2 \wedge y-8=-8 \wedge z+3=-2 \Leftrightarrow x=8 \wedge y=0 \wedge z=-5.$$

$$E(8, 0, -5)$$

2.3. (B)

Um plano paralelo ao plano xOz tem equação da forma $y = a$.

Como o centro tem coordenadas $(1, -4, -1)$ e o raio é 9 , existem dois planos paralelos a xOz

$$y = -4 + 9 \vee y = -4 - 9 \Leftrightarrow y = 5 \vee y = -13$$

2.4. $x^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = (x+6)^2 + (y+8)^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 12x + 36 + y^2 + 16y + 64 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -8y + 16 = 12x + 36 + 16y + 64 \Leftrightarrow 12x + 24y + 84 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 7 = 0$$

2.5. (C)

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 81 \wedge x=7 \wedge y=2 \Leftrightarrow (z+1)^2 = 9 \wedge x=7 \wedge y=2$$

$$\Leftrightarrow (z = -4 \vee z = 2) \wedge x = 7 \wedge y = 2$$

$E(7, 2, -4)$ e $F(7, 2, 2)$, portanto a $d(E, F) = 6$.

Ficha 16 Vetores

pág. 80

1.1. a) $A + \overrightarrow{FE} = A + \overrightarrow{AJ} = \mathbf{J}$

b) $I + \overrightarrow{IL} = I + \overrightarrow{EH} = \mathbf{L}$

c) $\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{JH} = \overrightarrow{FH}$

d) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{IL}$

e) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{IC}$

f) $\overrightarrow{IL} - \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{FE}$

1.2. a) $\|\overrightarrow{HF}\| = 2\|\overrightarrow{AL}\| = 2 \times 4 = 8$

b) $\|\overrightarrow{LI}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

c) $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(2 \times 4)^2 + (3 \times 3)^2} = \sqrt{145}$

d) $\|\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{AH}\| = \|\overrightarrow{HI}\| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$

2.1. $\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{u} + \vec{OE} = \vec{u} + \vec{v}$

2.2. $\vec{AD} = 2\vec{OD} = 2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

2.3. $\vec{EF} = \vec{EO} + \vec{OF} = -\vec{v} + \vec{CO} = -\vec{v} - \vec{u}$

2.4. $\vec{CF} = 2\vec{CO} = 2(-\vec{u}) = -2\vec{u}$

3.1. $= \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v} + \frac{5}{6}\vec{u} + \frac{5}{6}\vec{v} = \frac{6}{6}\vec{u} + \frac{6}{6}\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$

3.2. $-2\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{b} + \vec{a} - \vec{b} = -\vec{a} + 3\vec{b}$

3.3. $= -\frac{2}{3}\vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} = \left(-\frac{2}{3} + 3\right)\vec{x} + \left(2 - \frac{1}{2}\right)\vec{y} = \frac{7}{3}\vec{x} + \frac{3}{2}\vec{y}$

3.4. $= 4\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b} + 6\vec{a} - \frac{3}{15}\vec{b} = 10\vec{a} - \left(\frac{12}{15} + \frac{3}{15}\right)\vec{b} = 10\vec{a} - \vec{b}$

4. $\vec{u} = \vec{BH} + \frac{1}{2}\vec{EJ} = \vec{BH} + \vec{EG} = \vec{BH} + \vec{HK} = \vec{BK} = \vec{OF}$ e $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{ON} + 2\vec{HG} = \vec{OE} + \vec{EC} = \vec{OC}$

Como $\vec{OF} = \frac{3}{2}\vec{OC}$, isto é, $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}$, podemos concluir que $k = \frac{3}{2}$.

5.1. a) $\vec{MN} + \vec{JO} = \vec{MN} + \vec{NH} = \vec{MH}$

b) $\vec{PL} + \vec{AG} = \vec{KA} + \vec{AG} = \vec{KG}$

c) $\vec{LG} + \vec{ST} = \vec{LG} + \vec{GR} = \vec{LR}$

d) $\vec{BF} + \vec{NO} + \vec{RH} = \vec{BF} + \vec{FQ} + \vec{QT} = \vec{BT}$

e) $\vec{KL} - \vec{NT} + \vec{MC} = \vec{ET} + \vec{TN} + \vec{MC} = \vec{EN} + \vec{MC} = \vec{QM} + \vec{MC} = \vec{QC}$

f) $\vec{KR} - \vec{FS} - \vec{MP} = \vec{KR} + \vec{SF} + \vec{FL} = \vec{KR} + \vec{SL} = \vec{KR} + \vec{RK} = \vec{KR} - \vec{KR} = \vec{0}$

5.2. a) $F + \vec{LN} = F + \vec{FR} = R$

b) $R + \vec{PL} + \vec{IB} = R + \vec{PL} + \vec{LM} = R + \vec{PM} = R + \vec{RN} = N$

c) $T + \vec{CM} - \vec{AF} = T + \vec{CM} + \vec{FA} = T + \vec{OG} + \vec{GB} = T + \vec{OB} = T + \vec{TL} = L$

d) $A + \vec{BS} - \vec{RQ} + \vec{LN} = A + \vec{BS} + \vec{QR} + \vec{LN} = A + \vec{BS} + \vec{AI} + \vec{IJ} = A + \vec{BS} + \vec{AJ} = A + \vec{AQ} + \vec{QH} = A + \vec{AH} = H$

6.1. a) $\vec{BD} - 2\vec{MG} = \vec{AC} + 2\vec{GM} = \vec{AC} + \vec{CM} = \vec{AM}$

b) $\vec{FP} - \frac{1}{3}\vec{EH} = \vec{AK} + \frac{1}{3}\vec{HE} = \vec{AK} + \vec{HG} = \vec{AK} + \vec{KJ} = \vec{AJ}$

6.2. a) $\|\vec{FK} - \vec{GB}\| = \|\vec{FK} + \vec{KP}\| = \|\vec{FP}\|$

$\|\vec{FP}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$

b) $\|\vec{HM} - \frac{1}{2}\vec{NB}\| = \|\vec{HM} + \frac{1}{2}\vec{BN}\| = \|\vec{HM} + \vec{MQ}\| = \|\vec{HQ}\|$

$\|\vec{HQ}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

7.1. $\vec{AH} + \vec{GD} = (\vec{AD} + \vec{DH}) + (\vec{GA} + \vec{AD}) = 2\vec{AD} + (\vec{DH} - \vec{DH}) = 2\vec{AD} + \vec{0} = 2\vec{AD}$

7.2. $V_{\text{sólido}} = V_{\text{cubo}} + V_{\text{pirâmide}} \Leftrightarrow 33 = 3^3 + \frac{1}{3} \times 3^2 \times \|\vec{EV}\| \Leftrightarrow \|\vec{EV}\| = 2$

7.3. Os vetores \vec{EV} e \vec{GB} são colineares.

$\|\vec{GB}\| = \|k\vec{EV}\| \Leftrightarrow \|\vec{GB}\| = |k|\|\vec{EV}\| \Leftrightarrow 3 = |k| \times 2 \Leftrightarrow |k| = \frac{3}{2}$

Dado que os vetores \vec{GB} e \vec{EV} têm sentidos opostos, $k < 0$. Portanto, $k = -\frac{3}{2}$.

Ficha 17 Coordenadas de um vetor. Operações

pág. 82

MMALICAD © Porto Editora

1.1. $\vec{w} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - (3, -4) = (1, -\frac{5}{2}) - (3, -4) = (-2, \frac{3}{2})$

1.2. $\vec{x} = \frac{2}{5}(-2, 5) - \frac{1}{5}(3, -4) = (-\frac{4}{5}, 2) - (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = (-\frac{7}{5}, \frac{14}{5})$

1.3. $\frac{3}{2}\vec{u} = 2\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{3}{4}\vec{u} - \frac{1}{6}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{y} = (-2, \frac{53}{12})$

1.4. $-\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{t} - \frac{2}{3}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{t} = \frac{4}{3}\vec{v} - 2\vec{u} \Leftrightarrow \vec{t} = (8, -\frac{46}{3})$

2.1. $\vec{u} = (-3, -5) + (-2, \frac{5}{2}) = (-5, -\frac{5}{2})$

2.2. $\vec{v} = (2, -\frac{5}{2}) - (5, \frac{5}{2}) = (-3, -5)$

2.3. $\vec{t} = 2(2, -\frac{5}{2}) - 3(3, 5) + (-5, -\frac{5}{2}) = (-10, -\frac{45}{2})$

2.4. $\vec{w} = \frac{1}{3}(3, 5) - \frac{2}{5}(-5, -\frac{5}{2}) = (3, \frac{8}{3})$

3.1. $D = A + \vec{BC} = (5, -1) + (-3, -5) = (2, -6)$

3.2. $\vec{w} = \vec{CA} - \vec{DB} = (9, 1) - (-3, 9) = (12, -8);$
 $\|\vec{w}\| = \sqrt{12^2 + (-8)^2} = \sqrt{208} = \sqrt{16 \times 13} = 4\sqrt{13}$

3.3. $\|\vec{CA}\| = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{82}; \|\vec{DB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2} = \sqrt{90};$ Não é um retângulo porque as diagonais são diferentes.

3.4. $M(2, 1); \overline{MD} = \sqrt{(2-2)^2 + (-6-1)^2} = 7; x^2 + y^2 - 4x - 2y - 44 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 49;$
 centro $M(2, 1)$ e raio $r = \overline{MD}$

pág. 83

4.1. $\vec{v} = \lambda\vec{u} \wedge \|\vec{v}\| = 10 \wedge \lambda < 0$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{16+9} = 5; \|\vec{v}\| = 10 \Leftrightarrow \|\lambda\vec{u}\| = 10 \Leftrightarrow |\lambda| \times 5 = 10 \Leftrightarrow |\lambda| = 2 \Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = 2$
 Como $\lambda < 0$, $\lambda = -2$ e $\vec{v} = \lambda\vec{u} = -2(-4, 3) = (8, -6)$.

4.2. $\vec{v} = \lambda\vec{u} \wedge \|\vec{v}\| = 6 \wedge \lambda > 0; \|\vec{v}\| = 6 \Leftrightarrow \|\lambda\vec{u}\| = 6 \Leftrightarrow |\lambda| \times 5 = 6 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{5} \vee \lambda = -\frac{6}{5}$

Como $\lambda > 0$, $\lambda = \frac{6}{5}$ e $\vec{v} = \lambda\vec{u} = \frac{6}{5}(-4, 3) = (-\frac{24}{5}, \frac{18}{5})$

5.1. $(x-4)^2 + (y+4)^2 = (x+3)^2 + (y+5)^2 \Leftrightarrow y = -7x - 1$

5.2. $y = -7x - 1 \wedge x = 0 \Leftrightarrow y = -1 \wedge x = 0.$
 Portanto, o centro do quadrado tem ordenada -1 .

5.3. Seja M o centro do quadrado: $M(0, -1); \vec{MB} = \vec{DM} = (3, 4)$ e $\vec{MC} = \vec{AM} = (-4, 3)$
 $B = M + \vec{MB} = (0, -1) + (3, 4) = (3, 3)$ e $C = M + \vec{MC} = (0, -1) + (-4, 3) = (-4, 2)$

5.4. Centro: $M(0, -1);$ raio: $r = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-4)^2 + (-5+4)^2} = \frac{\sqrt{50}}{2};$ equação: $x^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{2}$

5.5. $\vec{AD} = (-7, -1); \vec{AC} = (-8, 6);$

$3\vec{AD} - 5\vec{u} = 2\vec{AC} \Leftrightarrow 5\vec{u} = 3\vec{AD} - 2\vec{AC} \Leftrightarrow 5\vec{u} = 3(-7, -1) - 2(-8, 6) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5\vec{u} = (-21, -3) + (16, -12) \Leftrightarrow 5\vec{u} = (-5, -15) \Leftrightarrow \vec{u} = (-1, -3)$

6. Se $k = 2$, \vec{u} e \vec{v} não são colineares. Se $k \neq 2$, \vec{u} e \vec{v} são colineares se e somente se $\frac{2k-1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{k-2}$.
 $\frac{2k-1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{k-2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \vee k = 3$

7.1. $B - 2\overrightarrow{BC} = (-1, 2, -2) - 2(4, 2, -6) = (-9, -2, 10)$

7.2. $\overrightarrow{AB} + 2(-2\overrightarrow{BC}) = (3, -1, -4) - 4(4, 2, -6) = (-13, -9, 20)$

7.3. $2\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = 2(3, -1, -4) - \frac{3}{2}(4, 2, -6) = (0, -5, 1)$

7.4. $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} = (7, 1, -10)$

8. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-a, 3, b+3)$; $\overrightarrow{BC} = C - B = (b+1, -6, -9-b)$. Se $a=0$ ou $b=-3$, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} não são colineares.

Para $a \neq 0$ e $b \neq -3$, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} são colineares se $\frac{b+1}{-a} = \frac{-6}{3} = \frac{-9-b}{b+3} \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 3$.

9.1. $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \vec{u} - 2\vec{v} = (6, -4, -3)$

9.2. $\vec{x} = -2\vec{u} - 4\vec{v} = (10, -20, -2)$

9.3. $\vec{y} = \frac{3}{4}\vec{v} + \frac{1}{4}\vec{u} + \overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{13}{8}\right)$

9.4. $\vec{t} = 4\vec{e}_1 + 2\vec{u} - 2\vec{e}_2 + 6\vec{v} = (-10, 24, 3)$

10. Aresta do cubo é 2.

Coordenadas $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$ e $G(0, 2, 2)$

Vetores: $\overrightarrow{AG}(-2, 2, 2)$ e $\overrightarrow{BP}(x-2, y-2, z)$

$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow (x-2, y-2, z) = \frac{3}{4}(-2, 2, 2)$


$$\begin{cases} x-2 = -\frac{3}{2} \\ y-2 = \frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

As coordenadas de $P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

11.1. $\overrightarrow{AB} = (-2, 4, -4)$; $\overrightarrow{AC} = (a-3, -a, a)$; $\frac{a-3}{-2} = \frac{-a}{4} = \frac{a}{-4} \Leftrightarrow 4a - 12 = 2a \Leftrightarrow a = 6$

11.2. $M_{[AB]} = M(2, 3, -4)$; $C = M \Leftrightarrow (a, 1-a, a-2) = (2, 3, -4) \Leftrightarrow a = 2 \wedge a = -2$

A condição é impossível. Logo, não existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual C é o ponto médio de $[AB]$.

11.3. $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$, com $k > 0$ e $\|\overrightarrow{AE}\| = 15$; $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$ 

$\|\overrightarrow{AE}\| = 15 \Leftrightarrow \|k\overrightarrow{AB}\| = 15 \Leftrightarrow |k| \times 6 = 15 \Leftrightarrow |k| = \frac{15}{6} \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}$;

$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} = \frac{5}{2}(-2, 4, -4) = (-5, 10, -10)$; $E = A + \overrightarrow{AE} = (-2, 11, -12)$

12.1. O ponto E é o ponto médio de $[AC]$: $E\left(\frac{6-2}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (2, 3, 2)$

12.2. $\overrightarrow{EF} = (2, 4, 4)$; $\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$

12.3. $\overrightarrow{AC} = (-8, 2, 2)$; $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-8)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{72}$. Se $\|\overrightarrow{AB}\| = x$,
 $x^2 + x^2 = (\sqrt{72})^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow_{x>0} x = 6$

12.4. $V = 108 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \|\overrightarrow{AB}\|^2 \times \|\overrightarrow{EV}\| = 108 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 36 \times \|\overrightarrow{EV}\| = 108 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EV}\| = 9$

- 12.5.** $V = E + \overrightarrow{EV}$; $\overrightarrow{EV} = k\overrightarrow{EF}$, $k > 0$ e $\|\overrightarrow{EV}\| = \|k\overrightarrow{EF}\| = 9$
 $\|k\overrightarrow{EF}\| = 9 \Leftrightarrow |k| \|\overrightarrow{EF}\| = 9 \Leftrightarrow_{k>0} k \times 6 = 9 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$; $\overrightarrow{EV} = \frac{3}{2}(2, 4, 4) = (3, 6, 6)$;
 $V = (2, 3, 2) + (3, 6, 6) = (5, 9, 8)$
- 12.6.** $\overrightarrow{BE} = E - B = (0, -3, 3)$; $D = E + \overrightarrow{ED} = E + \overrightarrow{BE} = (2, 3, 2) + (0, -3, 3) = (2, 0, 5)$

Ficha 18 Equações da reta

pág. 86

- 1.1.** $(x, y) = (0, 1) + k(2, -3)$, $k \in \mathbb{R}$
- 1.2.** $2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$; $(x, y) = (0, 0) + k(1, -2)$, $k \in \mathbb{R}$
- 1.3.** $(x, y) = (0, -2) + k(1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$
- 1.4.** $(x, y) = (-3, 0) + k(0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
- 2.1.** $m = \frac{2}{-1} = -2$; $y - 3 = -2(x + 2) \Leftrightarrow y = -2x - 4 + 3 \Leftrightarrow y = -2x - 1$
- 2.2.** $m = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$; $y = -\frac{2}{5}x$
- 2.3.** $m = 0$ (a reta é horizontal); $y = 4$
- 2.4.** A reta passa no ponto de coordenadas $(-1, 3)$ e tem a direção de $(0, 2)$ (a reta é vertical); $x = -1$
- 3.1.** $(0, y) = (-4, 9) + k(4, -3) \Leftrightarrow k = 1 \wedge y = 6$; $A(0, 6)$;
 $(x, 0) = (-4, 9) + k(4, -3) \Leftrightarrow k = 3 \wedge x = 8$; $B(8, 0)$
- 3.2.** Ponto genérico de r : $(-4 + 4k, 9 - 3k)$; substituindo em s : $y = -2x + 11$, vem
 $9 - 3k = -2(-4 + 4k) + 11 \Leftrightarrow k = 2$, donde $C(4, 3)$.
- 3.3.** Centro: $C(4, 3)$; raio: $r = \overline{OC} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; equação: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$
- 3.4.** Como $(0 - 4)^2 + (6 - 3)^2 = 25$ e $(8 - 4)^2 + (0 - 3)^2 = 25$, $A(0, 6)$ e $B(8, 0)$ pertencem à circunferência.
 O ponto médio de $[AB]$ tem coordenadas $(\frac{0+8}{2}, \frac{6+0}{2}) = (4, 3)$, ou seja, é o centro da circunferência. Logo, $[AB]$ é um diâmetro.
- 3.5.** Reta r : $m = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ e $y - 9 = -\frac{3}{4}(x + 4) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 6$
 Reta s : passa no ponto $(0, 11)$ e tem a direção de $(1, m) = (1, -2)$,
 logo $(x, y) = (0, 11) + k(1, -2)$, $k \in \mathbb{R}$

pág. 87

- 4.1.** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (x - 6)^2 + (y - 7)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5$
- 4.2.** Centro: $M(\frac{2+6}{2}, \frac{-1+7}{2}) = (4, 3)$; raio: $r = \overline{AM} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{20}$;
 equação: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$
 $E(0, 5)$: $(0 - 4)^2 + (5 - 3)^2 = 20 \Leftrightarrow 16 + 4 = 20$ (V). Logo, o ponto E pertence à circunferência.
- 4.3.** $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (2, -6)$; $C = D + \overrightarrow{DC} = (6, 7) + (2, -6) = (8, 1)$
- 4.4.** $\overrightarrow{AC} = C - A = (8 - 2, 1 + 1) = (6, 2)$; s : $(x, y) = (2, -1) + k(6, 2)$, $k \in \mathbb{R}$
- 4.5.** $C(8, 1)$ e r : $y = -\frac{1}{2}x + 5$: $1 = -\frac{1}{2} \times 8 + 5 \Leftrightarrow 1 = -4 + 5 \Leftrightarrow 1 = 1$ (V). Logo, o ponto C pertence à reta r .
- 4.6.** A altura do paralelogramo relativa ao lado $[AD]$ é $[MC]$, pelo que a sua área é igual a $\overline{AD} \times \overline{MC}$.
 $\overline{AD} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (7 + 1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$; $\overline{MC} = \sqrt{(8 - 4)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
 $A_{\text{paralelogramo}} = 4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 8 \times 5 = 40$

5.1. $(12, -12) = (3, -6) + k(3, -2), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow k = 3: R \in r.$
 $(-15, 4) = (3, -6) + k(3, -2), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow k = -6 \wedge k = -5: S \notin r.$

5.2. $(x, 0) = (3, -6) + k(3, -2) \Leftrightarrow k = -3 \wedge x = -6: A(-6, 0);$
 $(0, y) = (3, -6) + k(3, -2) \Leftrightarrow k = -1 \wedge y = -4: B(0, -4)$

Mediatriz de $[AB]: (x+6)^2 + y^2 = x^2 + (y+4)^2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$. O centro da circunferência, C , é o ponto de interseção desta reta com a reta de equação $y = x: y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \wedge y = x \Leftrightarrow x = -5 \wedge y = -5$.

O raio é $r = \overline{AC} = \sqrt{(-5+6)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{26}$. Equação: $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 26$

pág. 88

6.1. $(x, y, z) = (2, 0, 4) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

6.2. $(x, y, z) = (0, 3, 4) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$

6.3. $(x, y, z) = (2, 3, 0) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

6.4. $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

6.5. $(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

6.6. $(x, y, z) = (0, 0, 4) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$

7.1. $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-7)^2 = (x-5)^2 + (y+7)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow 4y + 3z = 0$

7.2. $C\left(\frac{5+5}{2}, \frac{1-7}{2}, \frac{7+1}{2}\right) \Leftrightarrow C(5, -3, 4)$

7.3. $\overrightarrow{CA} = A - C = (5, 1, 7) - (5, -3, 4) = (0, 4, 3); CV: (x, y, z) = (5, -3, 4) + k(0, 4, 3), k \in \mathbb{R}$

7.4. $(x, y, 13) = (5, -3, 4) + k(0, 4, 3) \Leftrightarrow k = 3 \wedge x = 5 \wedge y = 9; V(5, 9, 13)$

7.5. $\|\overrightarrow{CV}\| = \sqrt{0^2 + 12^2 + 9^2} = 15;$

$$V_{\text{cone}} = 125\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi \times \|\overrightarrow{CR}\|^2 \times 15 = 125\pi \Leftrightarrow 5\pi \times \|\overrightarrow{CR}\|^2 = 125\pi \Leftrightarrow \|\overrightarrow{CR}\| = 5$$

7.6. a) $\overrightarrow{PC} = C - P = \left(3, -\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right); \|\overrightarrow{PC}\| = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2} = 5; 4 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 3 \times \frac{4}{5} = -\frac{12}{5} + \frac{12}{5} = 0.$

Logo, $P \in \alpha$. Como $\|\overrightarrow{PC}\| = 5$ e $P \in \alpha$, o ponto P pertence à circunferência que delimita a base do cone.

b) $Q = C + \overrightarrow{CQ} = C + \overrightarrow{PC} = (5, -3, 4) + \left(3, -\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right) = \left(8, -\frac{27}{5}, \frac{36}{5}\right)$

pág. 89

8.1. $D = A + \overrightarrow{GH} = (-2, -6, 4) + (-6, -3, 2) = (-8, -9, 6)$

8.2. $(x, y, z) = (-2, -6, 4) + k(-6, -3, 2), k \in \mathbb{R}$

8.3. $(x, 0, 0) = (-2, -6, 4) + k(-6, -3, 2) \Leftrightarrow x = 10 \wedge k = -2.$
 Ponto de interseção: $(10, 0, 0)$

8.4. $(0, y, z) = (-2, -6, 4) + k(-6, -3, 2) \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3} \wedge y = -5 \wedge z = \frac{10}{3}.$

Ponto de interseção: $\left(0, -5, \frac{10}{3}\right)$

8.5. $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{GH}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7; V = 343 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 7^2 \times \|\overrightarrow{AV}\| = 343 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AV}\| = 21;$

$$\overrightarrow{AV} = k\overrightarrow{GH}, k > 0 \text{ e } \|\overrightarrow{AV}\| = 21. \|\overrightarrow{GH}\| = 7 \Leftrightarrow |k| \times 7 = 21 \Leftrightarrow |k| = 3 \Leftrightarrow k = 3;$$

$$\overrightarrow{AV} = k\overrightarrow{GH} = 3(-6, -3, 2) = (-18, -9, 6) \text{ e } V = A + \overrightarrow{AV} = (-20, -15, 10)$$

- 9.1.** $C(x, y, 7)$
 $(x, y, 7) = (0, 5, -5) + k(1, -3, 6) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k = 2 \wedge x = 2 \wedge y = -1$
 $C(2, -1, 7)$
 V é da forma $V(k, 5 - 3k, -5 + 6k)$ (pertence à reta CV) e pertence ao plano BVD :
 $k - 3(5 - 3k) + 5 = 0 \Leftrightarrow k = 1$
 Para $k = 1$, vem: $V(1, 2, 1)$
- 9.2.** O ponto E , centro da base $[ABCD]$, é a projeção ortogonal do ponto V sobre o plano $ABC: z = 7$.
 Centro da base $[ABCD]: E(1, 2, 7); \overrightarrow{CE} = E - C = (-1, 3, 0); \|\overrightarrow{CE}\| = \sqrt{10}$;
 $A_{\text{base}} = \|\overrightarrow{CB}\|^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 20$. Altura $= \overline{VE} = 6$; $V = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times 20 \times 6 = 40$ u. v.

Vamos recordar

Ficha 19 Triângulos

pág. 90

- 1.1.** Como as medidas dos lados são todas diferentes, o triângulo é escaleno.
 Como os três ângulos são agudos, o triângulo é acutângulo.
- 1.2.** Como as medidas dos lados são todas diferentes, o triângulo é escaleno.
 Como a amplitude de um ângulo é de 90° , o triângulo é retângulo.
- 1.3.** Como dois lados têm a mesma medida, o triângulo é isósceles.
 Como um ângulo é obtuso, o triângulo é obtusângulo.
- 1.4.** Como as medidas dos lados são todas iguais, o triângulo é equilátero e é acutângulo.
- 2.1.** Num paralelogramo, as amplitudes dos ângulos opostos são as mesmas.
 Como o triângulo $[AMD]$ é equilátero, a amplitude de cada ângulo interno é 60° .
 Logo, $\hat{DAB} = \hat{BCD} = 60^\circ$.
 A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° , temos então que:

$$\hat{ADC} = \hat{ABC} = \frac{360 - (60 + 60)}{2} = 120^\circ$$

As amplitudes dos ângulos internos são: $\hat{DAB} = \hat{BCD} = 60^\circ$ e $\hat{ADC} = \hat{ABC} = 120^\circ$.

- 2.2.** Como o triângulo $[AMD]$ é equilátero e M divide $[AB]$ em duas partes iguais, temos que $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{MD}$, portanto o triângulo $[MBD]$ é isósceles, ou seja, temos que $\hat{MDB} = \hat{DBM}$.
 $\hat{BMD} = 180 - 60 = 120^\circ$ e $\hat{MDB} = \hat{DBM} = 30^\circ$.
- 2.3.** Seja $a = \overline{AD} = \overline{BC}$ e como M divide $[AB]$ em duas partes iguais, temos que $\overline{AM} = \overline{MB} = 2a$.
 O perímetro do paralelogramo é $6a$ e como o seu valor é 16 cm obtemos $a = \frac{8}{3}$.
 Concluimos que $\overline{AD} = \overline{BC} = \frac{8}{3}$ cm e $\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{16}{3}$ cm.
- 2.4.** Temos que $\hat{MBD} = 30^\circ$ e que $\hat{ABC} = 120^\circ$, logo $\hat{DBC} = 120 - 30 = 90^\circ$.
 O triângulo $[BCD]$ é um triângulo retângulo.
- 2.2.** $\hat{BMD} = 120^\circ$ e $\hat{MDB} = \hat{DBM} = 30^\circ$.
- 2.3.** $\overline{AD} = \overline{BC} = \frac{8}{3}$ cm e $\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{16}{3}$ cm.
- 2.4.** Triângulo retângulo.

pág. 91

- 2.5.** M divide $[AB]$ em duas partes iguais, temos que $\overline{AM} = \overline{MB}$.
 A altura dos triângulos relativamente a essas bases é a mesma.
 A área dos triângulos $[AMD]$ e $[MBD]$ é a mesma, logo a área do paralelogramo é $4a$ cm².

3.1. a) Triângulo escaleno

b) $\overline{AB} = \sqrt{16} = 4$

Calcular \overline{AP} : $x^2 = 1^2 + 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 17 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{17}$, logo $\overline{AP} = \sqrt{17}$.

Calcular \overline{BP} : $y^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5$, logo $\overline{BP} = 5$.

Perímetro de $[ABP] = 4 + 5 + \sqrt{17} = 9 + \sqrt{17}$

c) Área de $[ABP] = \frac{\overline{AB} \times \text{altura}}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$

3.2. a) Triângulo isósceles

b) $\overline{AB} = 4$. Calcular $\overline{AP} = \overline{BP}$: $x^2 = 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 20 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{20}$, logo $\overline{AP} = \sqrt{20}$.

Perímetro de $[ABP] = 4 + \sqrt{20} + \sqrt{20} = 4 + 4\sqrt{5}$

c) Área de $[ABP] = \frac{\overline{AB} \times \text{altura}}{2} = 8$

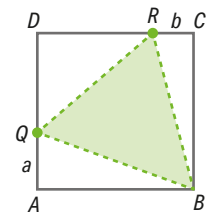
3.3. Para $[ABP]$ ser um triângulo retângulo, o ponto P ou coincide com D ou coincide com C .

3.4. A área do triângulo $[ABP]$, para qualquer posição do ponto P , é sempre 8 cm^2 , porque a base é sempre a mesma, \overline{AB} , e a altura desses triângulos, em relação à base, é sempre igual a \overline{BC} .

3.5. Não, porque o quadrado fica decomposto em três triângulos $[APD]$, $[ABP]$ e $[BCP]$ onde os triângulos $[APD]$ e $[BCP]$ são retângulos e um dos catetos tem a mesma medida que o lado do quadrado. Portanto, $[AP]$ e $[BP]$ hipotenusas dos triângulos $[APD]$ e $[BCP]$, respetivamente, terão sempre comprimento maior que \overline{AB} (lado do quadrado). Concluimos assim que o triângulo $[ABP]$ não pode ser equilátero.

3.6. Se um dos vértices do triângulo coincidir com um dos vértices do quadrado, por exemplo, um dos vértices do triângulo seria B . Agora temos de verificar se existe algum valor positivo para a e b de modo que o triângulo $[BQR]$ seja equilátero. Para \overline{BR} ser igual a \overline{BQ} , temos que $a = b$. Agora temos a condição para garantir que $\overline{QR} = \overline{BQ}$.

$(4 - a)^2 + (4 - a)^2 = a^2 + 16 \Leftrightarrow a^2 - 16a + 16 = 0 \Leftrightarrow a = 8 \pm 4\sqrt{3}$, como $a < 4$, temos que $a = b = 8 - 4\sqrt{3}$.



Ficha 20 Geometria sintética no plano

pág. 92

- 1.1. O triângulo $[ABC]$ é um triângulo acutângulo.
 O triângulo $[DEF]$ é um triângulo retângulo.
 O triângulo $[GHI]$ é um triângulo obtusângulo.

- 1.2. O circuncentro está no interior do triângulo $[ABC]$.
 O circuncentro do triângulo $[DEF]$ é o ponto médio do segmento de reta $[DF]$.
 O circuncentro está no exterior do triângulo $[GHI]$.

2. O paralelogramo $[MNPQ]$ é um retângulo.

3.1. Sejam a e b as medidas dos catetos.

$a + b + 15 = 36 \Leftrightarrow b = 21 - a$

Como o triângulo é retângulo, verifica o Teorema de Pitágoras:

$15^2 = a^2 + (21 - a)^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 42a + 216 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 21a + 108 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 21a = -108 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 21a + \left(\frac{21}{2}\right)^2 = -108 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(a - \frac{21}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a - \frac{21}{2} = \pm\frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 9 \vee a = 12$

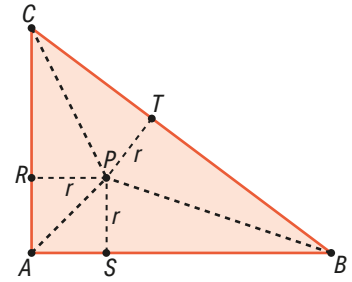
Para $a = 9$ temos $b = 12$ e para $a = 12$ temos $b = 9$.

Os catetos medem, respetivamente, 9 cm e 12 cm.

- 3.2.** Podemos decompor o triângulo $[ABC]$ em três triângulos $[APC]$, $[ABP]$ e $[BCP]$.
A área do triângulo $[ABC]$ é igual à soma das áreas dos três triângulos.
O raio da circunferência vai ser a altura de cada um dos três triângulos relativamente às bases $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$.

$$\text{Temos, } \frac{9 \times 12}{2} = \frac{9 \times r}{2} + \frac{12 \times r}{2} + \frac{15 \times r}{2} \Leftrightarrow 18r = 54 \Leftrightarrow r = 3$$

O raio da circunferência inscrita no triângulo é 3 cm.



MMATOCAD © Porto Editora

pág. 93

- 4.1.** a) A
b) P
c) N
- 4.2.** Como o ortocentro, o baricentro e o circuncentro pertencem à reta AN , AN chama-se reta de Euler.
- 4.3.** Como AN é a reta de Euler, a distância entre o baricentro e o ortocentro é o dobro entre a distância do baricentro e o circuncentro, temos que $2\overline{PN} = \overline{AP}$.
Por outro lado, $\overline{AN} = \overline{AP} + \overline{PN} \Leftrightarrow \overline{AN} = 2\overline{PN} + \overline{PN} \Leftrightarrow \overline{AN} = 3\overline{PN}$.
- 4.4.** a) Circunferência dos nove pontos
b) Os nove pontos da circunferência são:
- 3 pontos médios dos lados (M , N , L);
 - 3 pés das alturas (A e J , pois como o triângulo é retângulo o ortocentro e dois pés das alturas coincidem);
 - 3 pontos médios dos segmentos de reta de cada vértice do triângulo até o ortocentro (como o triângulo é retângulo, estes três pontos coincidem no vértice A).
- O ponto K não faz parte da lista dos nove pontos.
- 4.5.** Como o raio da circunferência de nove pontos é 5, o raio da circunferência circunscrita é 10, portanto $\overline{BC} = 20$.
Seja $\overline{MN} = a$, logo $\overline{AC} = 2a$, pois M e N são os pontos médios de $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente.
Seja $\overline{LN} = b$, logo $\overline{AB} = 2b$, pois L e N são os pontos médios de $[AC]$ e $[BC]$, respetivamente.
Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:
- $$(2a)^2 + (2b)^2 = 20^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 = 400 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 100$$
- Os únicos números inteiros que satisfazem $a^2 + b^2 = 100$ são, por exemplo, $a = 6$ e $b = 8$.
Logo as medidas inteiras dos lados do triângulo $[ABC]$ são 12, 16 e 20.

Avaliação global do tema

Ficha 21

pág. 94

- 1.1. (B)**
A ordenada de B é -2 , substituindo na equação da reta AB , temos $-2 = \frac{3}{2}x + 4 \Leftrightarrow x = -4$, as coordenadas de B ($-4, -2$).
- 1.2.** As coordenadas de A ($0, 4$) e B ($-4, -2$). A circunferência tem centro C , ponto médio de $[AB]$, de coordenadas C ($-2, 1$). raio $= \overline{AC} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$
A equação da circunferência é: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$
- 1.3.** As coordenadas de C ($-2, 1$) e D ($0, -2$). Declive: $\frac{-2 - 1}{0 + 2} = -\frac{3}{2}$. Ordenada na origem: -2
Equação da reta CD : $y = -\frac{3}{2}x - 2$
- 1.4.** As coordenadas de A ($0, 4$) e E ($9, -2$). Vetor diretor: \overrightarrow{AE} ($9, -6$). Ponto: A ($0, 4$)
Equação da reta AE : $(x, y) = (0, 4) + \lambda(9, -6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1.5. (A)

$\overrightarrow{CE}(11, -3)$, como os vetores são colineares temos $\frac{3x-2}{11} = \frac{-k}{-3} \Leftrightarrow -9k+6 = -11k \Leftrightarrow k = -3$

1.6. $y \geq -2 \wedge (x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 13 \wedge y \leq -\frac{2x}{3} + 4 \wedge y \geq -\frac{3x}{2} - 2$

1.7. A área colorida é igual à diferença entre a área do triângulo $[DEF]$ e metade da área do círculo.

$$y = -\frac{2x}{3} + 4 \wedge y = -\frac{3x}{2} - 2 \Leftrightarrow x = -7,2 \wedge y = 8,8$$

$$\text{Área sombreada} = \frac{\overline{DE} \times (y_F + 2)}{2} - \frac{\sqrt{13}^2 \pi}{2} = \frac{9 \times 10,8}{2} - \frac{13\pi}{2} \approx 28,2 \text{ u. a.}$$

pág. 95

2.1. Os pontos A e B pertencem ao plano ABC de equação $x - 2z - 4 = 0$ e pertencem aos eixos Ox e Oz , respetivamente. Temos que $A(x, 0, 0)$ e $B(0, 0, z)$. Substituindo na equação do plano

$$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4, \text{ pelo que } A(4, 0, 0)$$

$$\text{e } -2z - 4 = 0 \Leftrightarrow z = -2, \text{ de onde } B(0, 0, -2).$$

2.2. (D)

A aresta do cubo é $[AB]$, a sua medida é $\sqrt{(4-0)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

2.3. A reta BF é paralela a AE ; o seu vetor diretor é $(1, 0, -2)$.

Uma equação vetorial é $(x, y, z) = (0, 0, -2) + \lambda(1, 0, -2), \lambda \in \mathbb{R}$.

2.4. Como os vetores \vec{u} e \overrightarrow{AE} são colineares, podemos escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AE}(k, 0, -2k)$.

Por outro lado, $[AE]$ é uma aresta do cubo de medida $\sqrt{20}$, ou seja, $\overrightarrow{AE} = \sqrt{20}$.

$$\sqrt{k^2 + (-2k)^2} = \sqrt{20} \Leftrightarrow 5k^2 = 20 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2$$

Seja $E(x, y, z)$, \overrightarrow{AE} tem coordenadas $(x-4, y, z)$.

Para $k = -2$, temos que $(x-4, y, z) = (-2, 0, 4) \Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 0 \wedge z = 4$

Para $k = 2$, temos que $(x-4, y, z) = (2, 0, -4) \Leftrightarrow x = 6 \wedge y = 0 \wedge z = -4$

Como E tem cota positiva, as suas coordenadas são $(2, 0, 4)$.

2.5. (C)

Como $F = B + \overrightarrow{AE} = (0, 0, -2) + (-2, 0, 4) = (-2, 0, 2)$.