Modelos matemáticos para a cidadania

Vamos recordar

Ficha 1 Proporções

1. Podemos calcular a razão:

a) $\frac{\text{preço}}{\text{quantidade}}$ para cada marca. Assim, ficamos a saber qual é o preço a pagar por cada grama.

b) $\frac{\text{quantidade}}{\text{preço}}$ para cada marca. Com isso vamos ficar a saber qual a quantidade de doce que conseguimos comprar com 1 € .

Vamos ver a resposta usando a alínea a).

Marca DAN	Marca NAD
$\frac{2{,}99\text{ €}}{280\text{ g}} \approx 0{,}01068\text{ €/g}$	$\frac{2{,}39\text{ €}}{250\text{ g}} = 0{,}00956\text{ €/g}$

O doce da marca NAD é mais barato.
A Antónia deve comprar, caso pretenda, o doce da marca NAD.
Vamos ver a resposta usando a alínea b).

Marca DAN	Marca NAD
$\frac{280\text{ g}}{2{,}99\text{ €}} \approx 94\text{ g/€}$	$\frac{250\text{ g}}{2{,}39\text{ €}} \approx 105\text{ g/€}$

Concluímos que, com 1 € , a Antónia consegue comprar mais quantidade de doce da marca NAD.

2. Com 3 unidades de cimento e 5 unidades de gesso temos 8 unidades de massa.
Para 8 unidades de massa são precisas 3 unidades de cimento.

$\frac{8}{3} = \frac{30}{x}$ ou $\begin{array}{ccc} 8 & \text{———} & 3 \\ 30 & \text{———} & x \end{array}$ ou $\frac{3}{8} \times 30 = 11{,}25$ kg

$8x = 90 \Leftrightarrow x = \frac{90}{8} \Leftrightarrow x = 11{,}25$ kg

Para 8 unidades de massa são precisas 5 unidades de cimento.

$\frac{8}{5} = \frac{30}{x}$ ou $\begin{array}{ccc} 8 & \text{———} & 5 \\ 30 & \text{———} & x \end{array}$ ou $\frac{5}{8} \times 30 = 18{,}75$ kg

$8x = 150 \Leftrightarrow x = \frac{150}{8} \Leftrightarrow x = 18{,}75$ kg

Portanto, são necessários $11{,}25$ kg de cimento e $18{,}75$ kg de gesso para obter 30 kg de massa.

3. $0{,}3 \times 23 = 6{,}9$
Devem estar pelo menos 7 membros presentes para aprovar uma atividade.

4. Valor do desconto, em euros, $1500 - 1299{,}99 = 200{,}01$.

Desconto, em percentagem, $\frac{200{,}01}{1500} \approx 13\%$

5.1. Percentagem da refeição sem IVA mais IVA: $100\% + 13\% = 113\%$

Valor da refeição sem IVA: $\frac{135{,}3}{1{,}13} \times 100 \approx 119{,}73$ €

5.2. Valor do IVA: $135{,}30 - 119{,}73 = 15{,}57$ € ou $0{,}13 \times 119{,}73 \approx 15{,}57$ €

6.1. Se o carro tem 20% de desconto, significa que $4239{,}20$ € corresponde a $100\% - 20\% = 80\%$.

O preço do carro em dezembro, em € , é $\frac{4239{,}20}{0{,}8} = 5299$ € .

6.2. No mês de setembro, ao preço-base do carro, $4239{,}20$ €, acresce o valor do IVA que será de $4239{,}20 \times 0{,}23 = 975{,}016$ €, totalizando $4239{,}20 + 975{,}016 = 5214{,}216$ €.

No mês de dezembro, ao preço-base do carro, $5299{,}00$ €, acresce o valor do IVA que será de $5299{,}00 \times 0{,}23 = 1218{,}77$ €, totalizando $5299{,}00 + 1218{,}77 = 6517{,}77$ €.

7.1. Com 3 rapazes e 2 raparigas temos no total 5 alunos.
Por cada 5 alunos temos 2 raparigas

$\frac{5}{2} = \frac{120}{x}$ ou $\begin{array}{ccc} 5 & \text{———} & 2 \\ 120 & \text{———} & x \end{array}$ ou $\frac{2}{5} \times 120 = 48$

$5x = 240 \Leftrightarrow x = \frac{240}{5} \Leftrightarrow x = 48$

No 10.º ano, há 48 raparigas inscritas a Matemática A.

7.2. Por cada 5 alunos temos 3 rapazes, logo a razão dos rapazes é $\frac{3}{5} = 0{,}6$.
No 10.º ano, a percentagem de rapazes inscritos à disciplina de Matemática A é 60%.

Ficha 2 Modelos matemáticos nas eleições

pág. 10

1.1.

		Total	Percentagem
Votos expressos	Lista A	29	42,65%
	Lista B	39	57,35%
Votos brancos		0	0,00%
Votos nulos		0	0,00%

1.2. Seja n o número de votos nulos.
Para a Lista B obter mais votos, temos que $39 - n > 29 \Leftrightarrow n < 10$.
Para o resultado das eleições ser o mesmo, o número máximo de votos nulos é 9.

2.1. Votos validamente expressos: $4083 - 9 - 35 = 4039$

2.2. Votos a favor: $4039 \times 0{,}7083 \approx 2861$

2.3. $\frac{21\,665 - 4083 - 9 - 35}{21\,665} \approx 80{,}95\%$

2.4. $\frac{2861}{21\,665} \times 100\% \approx 13{,}21\%$

2.5. Embora a concordância em manter a data do feriado tenha ganho, tendo atingido aproximadamente 71% dos votos, somente cerca de 13% dos inscritos concordam em manter a data do feriado!

pág. 11

3.1. Candidato A: $7 \times 4 + 2 \times 1 + 3 \times 1 = 33$
Candidato B: $7 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 2 = 35$
Candidato C: $7 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 32$
Candidato D: $7 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 20$
O Reitor eleito pelo método de Borda é o candidato B.

3.2. O número total de votos é 12.
Para obter maioria absoluta tem de ter pelo menos metade dos votos mais 1, ou seja, pelo menos $6 + 1 = 7$ votos.

O candidato A tem 7 votos, logo seria o eleito por maioria absoluta.

4.1. Competição A: $5 + 10 = 15$
Competição B: $30 + 10 = 40$
Competição F: $25 + 20 = 45$

A banda, por maioria simples, participaria na competição de futebol.

4.2. Competição A: $20+10=30$
Competição B: $5+25=30$
Competição F: $10+30=40$
A competição menos desejada pela banda é a de futebol.

4.3. Competição A: $(5+10)\times 3+(25+30)\times 2+(20+10)\times 1=185$
Competição B: $(30+10)\times 3+(10+20)\times 2+(5+25)\times 1=210$
Competição F: $(25+20)\times 3+(5+10)\times 2+(10+30)\times 1=205$
A banda, pelo método de Borda, participava na competição de basquetebol.

Ficha 3 Modelos matemáticos na partilha

pág. 12

1.1. Votos validamente expressos: $824+310+112+64+40=1350$
Para obter maioria absoluta o número de votos tem de ser pelo menos metade mais 1, logo tem de ter pelo menos, $\frac{1350}{2}+1=676$ votos.
Como $824>676$, o PS obteve a maioria absoluta.

1.2. Número de votantes: $824+310+112+64+40+63+17=1430$
Número de abstenção: $3855-1430=2425$
Percentagem de abstenção: $\frac{2425}{3855}\times 100=62{,}91\%$

1.3.

Partidos	Votos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
PS	824	824,0	412,0	274,7	206,0	164,8	137,3	117,7	103,0	91,6	82,4	74,9
PPD/PSD	310	310,0	155,0	103,3	77,5	62,0	51,7	44,3	38,8	34,4	31,0	28,2
CDS-PP	112	112,0	56,0	37,3	28,0	22,4	18,7	16,0	14,0	12,4	11,2	10,2
B.E.	64	64,0	32,0	21,3	16,0	12,8	10,7	9,1	8,0	7,1	6,4	5,8
PCP-PEV	40	40,0	20,0	13,3	10,0	8,0	6,7	5,7	5,0	4,4	4,0	3,6

1.4. PS: 7 lugares PPD/PSD: 2 lugares Restantes partidos: 0 lugares

1.5. O quociente do último candidato eleito é $117{,}7$, portanto para que o CDS-PP elegesse um candidato teria de obter, no mínimo, mais 6 votos $\left(112+6=118 \text{ e } \frac{118}{1}=118{,}0>117{,}7\right)$.

1.6. A afirmação do militante do CDS-PP é verdadeira, pois a distribuição dos mandatos seria:
PS: 6 lugares PPD/PSD: 2 lugares CDS-PP: 1 lugar B.E. e PCP-PEV: 0 lugares

pág. 13

2.1. Percentagem de abstenção: $\frac{9\,682\,553-5\,408\,805}{9\,682\,553}\approx 0{,}4414=44{,}14\%$

2.2. **a)** Votos validamente expressos: $5\,408\,805-112\,851-89\,544=5\,206\,410$
Divisor: $\frac{0{,}95\times 5\,206\,410}{230}=21\,504{,}737$

b)

Partidos	N.º de votos	N.º de votos/D	Total de mandatos
A	1 993 921	92,720 08	92
B	1 747 685	81,269 77	81
C	550 892	25,617 24	25
D	445 980	20,738 69	20 + 1
E	81 054	3,769 123	3
F	75 140	3,494 114	2
G	61 632	2,865 973	2 + 1
H	59 995	2,789 85	2 + 1
Total			230

Ficha 4 Modelos matemáticos nos salários

pág. 14

1.1. O 12 representa os 12 meses do ano e o 52 é o número de semanas de um ano.

1.2. **a)** $\frac{760 \times 12}{52 \times 35} \approx 5{,}01\ €$

b) $\frac{920 \times 12}{52 \times 35} \approx 6{,}07\ €$

c) $\frac{1285{,}26 \times 12}{52 \times 35} \approx 8{,}47\ €$

1.3. $\frac{3 \times 6}{7} = 2{,}57\ € / \text{dia}$

1.4. **a)** A remuneração mensal base do Max é $920\ €$, portanto o montante de retenção na fonte é dado por $\textit{Remuneração} \times \textit{Taxa} - \textit{Parcela a abater}$, obtemos assim o valor
$920\ € \times 0{,}21 - 0{,}21 \times 1{,}3 \times (1350{,}22 - 920\ €) = 75{,}749\,94$
Logo, a taxa efetiva mensal de retenção na fonte é $\frac{75{,}749\,94}{920} = 0{,}082\,336\,89 \approx 8{,}234\%$.

pág. 15

b) $\left(\frac{920}{365}\right) \times (21 + 21 + 23 + 20 + 21) = 267{,}18\ €$

c)

Descrição	Quantidade	Valor unitário	Abonos	Descontos
Vencimento-base	21 dias	920,00 €	920,00 €	
Subsídio de alimentação		6,00 €	126,00 €	
ADSE (3,5%)				32,20 €
SS (11%)				101,20 €
IRS (8,234%)				75,75 €
Total			1046,00 €	209,15 €
Total a receber			836,85 €	

d) O Max tem como salário base $920\ €$ por mês e um subsídio de refeição diária no valor de $6\ €$.
Num ano, o Max teria aproximadamente um rendimento bruto de $920 \times 12 + 6 \times 22 \times 12 = 12\,624\ €$.
Como o rendimento anual é inferior a $20\,370{,}4\ €$, o Max, no primeiro ano, fica isento.
O Max no mês de agosto vai receber $836{,}85 + 75{,}75 = 912{,}60\ €$.

e$_1$) Por uma hora recebe $6{,}07\ €$ $\left(= \frac{920 \times 12}{52 \times 35}\right)$.
Como 1 e 8 são feriados acresce ao valor de uma hora 25%, logo cada hora extra tem o valor de $6{,}07\ € + 6{,}07\ € \times 0{,}25 \approx 7{,}59\ €$.

e$_2$)

Descrição	Quantidade	Valor unitário	Abonos	Descontos
Vencimento-base			920,00 €	
Subsídio de Natal			267,18 €	
Subsídio de alimentação	23 dias	6,00 €	138,00 €	
Horas extraordinárias (HE)	8 horas	7,59 €	60,72 €	
ADSE (3,5%)				43,68 €
SS (11%)				137,27 €
IRS (0,0%)				0,00 €
Total de abonos / descontos			1385,90 €	180,95 €
Total a receber			1204,95 €	

Ficha 5 Modelos matemáticos na poupança

pág. 16

1.1. ***MXDom*** – televisão: $\frac{599,99}{1,23} \approx 487,80$ €. $599,99 - 487,80 = 112,19$ €

máquina de café: $\frac{169,99}{1,23} \approx 138,20$ €. $169,99 - 138,20 = 31,79$ €

ELEmax – televisão: $\frac{619,99}{1,23} \approx 504,06$ €. $619,99 - 504,06 = 115,93$ €

máquina de café: $\frac{149,99}{1,23} \approx 121,94$ €. $149,99 - 121,94 = 28,05$ €

1.2. **Compra em *MXDom*:** Compra a televisão por $599,99$ € e recebe um vale de $112,19$ €. Compra a máquina de café e desconta esse vale: $169,99 - 112,19 = 57,80$ €. Portanto, pela televisão e pela máquina de café, a Dona Clotilde vai pagar $599,99 + 57,80 = 657,79$ €.
Compra em *ELEmax*: Compra a televisão por $619,99$ € e recebe um vale de $100,00$ €. Com esse vale compra a máquina de café e desconta esse vale: $149,99 - 100,00 = 49,99$ €. Portanto, pela televisão e pela máquina de café a Dona Clotilde vai pagar $619,99 + 49,99 = 669,98$ €.
Portanto, o valor menor é na loja *MXDom*. A Dona Clotilde deve comprar os 2 eletrodomésticos nesta loja.

1.3. ***MXDom*** – televisão: $\frac{599,99}{1,16} \approx 517,23$ €. $599,99 - 517,23 = 82,76$ €

Compra a televisão por $599,99$ € e recebe um vale de $82,76$ €. Com esse vale compra a máquina de café e desconta o vale: $169,99 - 82,76 = 87,23$ €. Portanto, pela televisão e pela máquina de café, a Dona Clotilde vai pagar $599,99 + 87,23 = 687,22$ €.
ELEmax – a Dona Clotilde vai pagar o mesmo $669,98$ €.
Por isso, a opção mais económica seria a loja *ELEmax*.

1.4. Por exemplo, $\frac{112,19}{599,99} \approx 18,7\%$.

2.1. $7,99$ € por mês, por ano: $7,99 \times 12 = 95,88$ €
No final do ano economiza $95,88 - 59,88 = 36$ €.

pág. 17

2.2. $\frac{59,88}{7,99} = 7,49$
Precisa de 8 meses.

2.3. Uma vantagem de optar pela subscrição anual é o facto de ser mais económica.
Uma desvantagem é o facto de, se quiser utilizar menos de 8 meses, ter sempre de pagar a totalidade.

3.1. Capital acumulado ao fim de 3 anos:
Com juro simples: $C_3 = 5000 + 5000 \times 0,04 \times 3 = 5600,00$ €
Com juro composto: $C_3 = 5000 \times (1 + 0,035)^3 \approx 5543,59$ €
A melhor proposta ao fim de 3 anos é a proposta A.

3.2. <u>Proposta A</u>: Valor do juro simples: $600,00$ €; juro líquido: $600 - 600 \times 0,28 = 432$ €
<u>Proposta B</u>: Valor do juro composto: $543,59$ €; juro líquido: $543,59 - 543,59 \times 0,28 \approx 391,38$ €

3.3. Capital acumulado ao fim de 10 anos:
Com juro simples: $C_{10} = 5000 + 5000 \times 0,04 \times 10 = 7000$ €
Com juro composto: $C_{10} = 5000 \times (1 + 0,035)^{10} \approx 7052,99$ €
A melhor proposta ao fim de 10 anos é a proposta B.

3.4. Significa que a Maria pretende reforçar a conta, portanto a opção que lhe permite entregas adicionais é a proposta A.

Ficha 6 Modelos matemáticos no crédito

pág. 18

1.1. **a)** Por ano, a Fabiana tem de pagar mais $1000 \times 0,06 = 60$ €. A Fabiana deve à avó 1060 €.

b) Como a Fabiana não fez nenhum pagamento, tem de pagar mais $1060 \times 0,06 = 63,60$ €.
A Fabiana deve à avó $1123,60$ €.

1.2. **a_1)** Por cada mês, tem um juro de $\frac{0,06}{12} \times 1000$ € $= 5$ €. Portanto, a Fabiana deve $1000 - 40 = 960$ €.

a_2) Parcela a abater na dívida: $45 \times 12 - 5 \times 12 = 40 \times 12 = 480$ €
Ao fim de 12 meses, a Fabiana deve $1000 - 480 = 520$ €.

a_3) Como, por cada mês, paga um juro de 5 €, o valor a abater por mês, no total, é 40 €.

Por isso, vai demorar $\frac{1000}{40} = 25$ meses a pagar a dívida.

b) Como o valor total, ao fim de dois anos, é 1120 €, a prestação mensal é $\frac{1120}{24} \approx 46,67$ €.

Para a Fabiana pagar em dois anos terá uma prestação mensal de $46,67$ €.

c) Valor mensal do juro: 5 €
Juro nos 40 meses: 40×5 € $= 200$ €

Total da dívida: $1000 + 200 = 1200$ € ou $c_{40} = 1000\left(1 + \frac{0,06}{12} \times 40\right) = 1200$

Valor mensal: $\frac{1200}{40} = 30$ €

A Fabiana vai pagar por mês 30 €.

pág. 19

2.1. 3 anos $= 12 \times 3 = 36$ meses
O António vai pagar $100,19 \times 36 = 3606,84$ €.

2.2. Relativamente ao valor da mensalidade, acrescenta-se custos relativos a impostos e outros encargos. Neste caso, esse valor é $52,80$ €.

3.1. A TAN varia tendo em conta o *spread* e o valor indexante. Nesta proposta, o valor da Euribor é maior que na proposta A, obtendo-se assim um valor superior da TAN.

3.2. O casal deve escolher a proposta A, pois o MTIC desta proposta é mais baixo (com uma diferença de $4735,67$ €).

Ficha 7 Modelos matemáticos e tecnologia

pág. 20

1.1. $1034 + 210 + 676 = 1920$

1.2. Número de representantes da lista M: 3 ; Número de representante da lista A: 2

1.3. **a)** Número de representantes da lista M: 2 ; Número de representantes da lista X: 1 ; Número de representantes da lista A: 2

b) A afirmação do presidente da lista X é verdadeira, pois colocando por ordem decrescente os quocientes, obtínhamos:

Lista M	Lista A	Lista M	Lista A	Lista X	Lista M

$1034,000 > 676,00 > 344,667 > 225,333 > 210,000 > 206,800$

c) A lista X não teria nenhum representante no Conselho Geral.

pág. 21

2.1. No programa em Python (1) aplica-se o **cálculo com juro simples**.
No programa em Python (2) aplica-se o **cálculo com juro composto**.

2.2. Cálculos: $6000 \times 0,035 \times 3 = 630$; $6000 + 630 = 6630$
Respostas:
O valor do juro é 630.
O capital acumulado é 6630.

2.3.
```
capital=6000
taxa=0.035
tempo=3
capacum=capital*(1+taxa)**tempo
juro=capacum–capital
print ("O capital acumulado é:", capacum)
print ("O valor do juro é: ", juro)
```


2.4. O juro capitalizável semestralmente significa que é capitalizado em dois períodos no ano. A taxa de juro semestral é $\frac{0,035}{2}=0,0175$ e o tempo passa para o dobro.
Bastava alterar apenas os valores da taxa para $0,0175$ e o do tempo para 6.

2.5. No (1), o capital acumulado é 6630. Portanto, a taxa de juro efetiva é $\frac{6630}{6000}-1=0,105$, que corresponde a $10,5\%$ $(3\times 3,5\%)$.
No caso (2), o capital acumulado é $6000\times(1-0,035)^3=6652,31$. Portanto, a taxa de juro efetiva é $\frac{6652,31}{6000}-1\approx 0,1087$, que corresponde, aproximadamente, a $10,9\%$.

Avaliação global do tema

Ficha 8

1.1. **(A)**
$231+237+480=948$

1.2. $\frac{480}{948}\times 100\approx 50,63\%$

2.1. **(B)**
$\frac{6080}{134\,490}=0,045$; $\frac{6080}{27\,491}=0,221\,16$; $\frac{6080}{6080}=1$; $\frac{6080}{5927}=1,03$

2.2. **(A)**
$\frac{5927}{27\,491}\times 100\approx 21,56\%$

2.3. A afirmação é verdadeira, pois a percentagem de votos é $\frac{3470}{5927}\times 100\%\approx 58,55\%$.

2.4.

	Norte	Centro	LVT	Alentejo	Algarve	Madeira	Açores
Lista A	4	1	5	1	1	1	0
Lista B	–	–	–	–	–	–	1
Lista C	2	1	4	0	0	0	0

3.1. $\frac{1266,11\times 12}{52\times 40}\approx 7,30$
A afirmação do Bruno é verdadeira.

3.2. $SL=1266,11-0,11\times 1266,11-0,14\times 1266,11=949,58$ €

3.3. Cálculo do salário líquido para um salário bruto de 1106 €:
$SL=1106-0,11\times 1106-0,075\times 1106=901,39$
Apesar da taxa efetiva mensal da retenção ser quase metade, a afirmação do Bruno é falsa, porque recebe mais $48,19$ €.

3.4. Capital acumulado final $=5000\left(1+\frac{0,05}{4}\right)^4\approx 5254,73$ €
Juro: $254,73-61,13=193,6$ €
O Bruno, ao fim de um ano, recebe $193,60$ €.