MÁXIMO

11.º ano

Matemática A

Maria Augusta Ferreira Neves
Ana Machado
Bruno Roque
Pedro Rocha Almeida
António Pinto Silva
Luís Guerreiro

Contagem

Porto Editora

Pág. 7

1.1. $\underset{\text{entrada}}{3}\times\underset{\text{prato principal}}{4}\times\underset{\text{sobremesa}}{3}=36$

A Leonor pode fazer 36 refeições diferentes.

1.2. $\underset{\text{prato principal}}{4}\times\underset{\text{acompanhamento}}{2}\times\underset{\text{bebida}}{2}=16$

A Susana pode fazer 16 refeições diferentes.

1.3. $\underset{\text{prato principal}}{4}\times\underset{\text{acompanhamento}}{2}\times\underset{\text{sobremesa}}{3}\times\underset{\text{bebida}}{2}=48$

O João pode fazer 48 refeições diferentes.

2.

	×	Cubo azul −3	−2	−1	0	1	2
Cubo verde	−1	3	2	1	0	−1	−2
	0	0	0	0	0	0	0
	1	−3	−2	−1	0	1	2
	2	−6	−4	−2	0	2	4
	3	−9	−6	−3	0	3	6
	4	−12	−8	−4	0	4	8

1. Princípios gerais de contagem

Pág. 8

1. Seriam necessários que voassem 6 pombos.

2. Teriam que voar $n+1$ pombos.

Pág. 9

1. Vermelhas: 5 ; azuis: 7 . Há 5 bolas não azuis. Se forem retiradas $5+1=6$ bolas, é garantido que sai pelo menos uma bola azul.

2. Vermelhas: 4 ; azuis: 5 ; amarelas: 6 . Há 9 bolas não amarelas. Se forem retiradas $9+2=11$ bolas, é garantido que saem pelo menos duas bolas amarelas.

3. Na pior das hipóteses, nos primeiros três lançamentos saem as cores azul, vermelha e amarela (não necessariamente por esta ordem). Portanto, o quarto lançamento repete uma das cores já saídas. Logo, como há três cores possíveis, lançando o dado $3+1=4$ vezes, é garantido que pelo menos uma das cores se repete.

Pág. 10

4. Se retirarmos duas meias da gaveta, podem ser as duas brancas, as duas pretas ou uma branca e uma preta. Se retirarmos duas meias brancas ou duas meias pretas, o problema fica resolvido, mas se retirarmos uma branca e uma preta, para garantirmos que sai um par de meias da mesma cor, temos que retirar $2+1=3$ meias.

5. $\dfrac{2n}{2}+1=5 \Leftrightarrow n+1=5 \Leftrightarrow n=4$

Resposta: $n=4$

6.1. $\underset{\text{espadas}}{1}\quad\underset{\text{paus}}{1}\quad\underset{\text{copas}}{1}\quad\underset{\text{ouros}}{1}$

Existem 4 naipes de cartas. $1\times 4=4$.
Se escolher 4 cartas, pode acontecer que haja uma de cada naipe, ou seja, não haja duas do mesmo naipe. Se juntarmos mais uma carta, ficamos com a certeza que haja pelo menos duas cartas do mesmo naipe.
$1\times 4+1=5$ cartas.
O número mínimo de cartas é 5.

6.2. $\underset{\text{espadas}}{2}\quad\underset{\text{paus}}{2}\quad\underset{\text{copas}}{2}\quad\underset{\text{ouros}}{2}$

Existem 4 naipes de cartas. $2\times 4=8$.
Se escolher 8 cartas, pode acontecer que haja duas de cada naipe, ou seja, não haja 3 do mesmo naipe. Se juntarmos mais uma carta, ficamos com a certeza que haja pelo menos 3 cartas do mesmo naipe.
$2\times 4+1=9$ cartas.
O número mínimo de cartas é 9.

Pág. 11

7. Existem 3 cores (amarelo, azul e vermelho). Existem 4 números (1, 2, 3, 4) em cada cor. Se retirarmos 9 fichas, podemos retirar 3 fichas amarelas, 3 fichas azuis e 3 fichas vermelhas, logo o requisito de pelo menos 4 fichas da mesma cor não é cumprido. Assim, para retirarmos pelo menos 4 fichas da mesma cor temos que retirar pelo menos <u>10 fichas</u>.
Se retirarmos 8 fichas, podemos retirar duas com o número 1, duas com o número 2, duas com o número 3 e duas com o número 4, logo o requisito de três fichas com o mesmo número não é garantido. Assim, para retirarmos 3 fichas com o mesmo número temos que retirar pelo menos <u>9 fichas</u>.
Se retirarmos 10 fichas, será garantido que temos 4 fichas da mesma cor e 3 fichas com o mesmo número.
O menor número de fichas que devem ser retiradas para garantir as condições pedidas é 10.

Pág. 13

8.1. 8: número de hipóteses de escolher a primeira letra;
7: número de hipóteses de escolher a segunda letra;
6: número de hipóteses de escolher a terceira letra;
5: número de hipóteses de escolher a quarta letra.
$8\times7\times6\times5=1680$

O João pode formar 1680 palavras.

8.2. Como são impostas condições à primeira letra é por aí que devemos começar.
$3\times7\times6\times5=630$
A vogal pode ser selecionada de 3 maneiras diferentes (O, U, A), sendo 7 o número de hipóteses de escolher a segunda letra, 6 o número de hipóteses de escolher a terceira letra e 5 o número de hipóteses de escolher a quarta letra.

O João pode formar 630 palavras.

8.3. Como são impostas condições à última letra é por aí que devemos começar.
$\underset{(2)}{7}\times6\times5\times\underset{(1)}{7}=1470$
(1) todas as letras exceto P;
(2) todas as letras, incluindo o P, exceto a última letra.

O João pode formar 1470 palavras.

8.4. Vamos começar pela primeira e última letras.
$\underset{(1)}{5}\times\underset{(3)}{6}\times5\times\underset{(2)}{4}=600$
(1) para a primeira letra temos 5 possibilidades (P,R,T,G,L);
(2) para a quarta letra temos 4 possibilidades pois uma das consoantes já foi utilizada na primeira letra;
(3) todas as letras exceto as duas já usadas no início e no fim da palavra.

O João pode formar 600 palavras.

8.5. $\underset{(1)}{5}\times\underset{(2)}{3}\times\underset{(3)}{2}\times\underset{(4)}{4}=120$
(1) cinco possibilidades (P,R,T,G,L);
(2) três possibilidades (O,U,A);
(3) duas das vogais ainda não utilizadas;
(4) quatro das consoantes ainda não utilizadas.

O João pode formar 120 palavras.

8.6.
$\underline{\overset{O}{A}}\ \underline{\overset{A}{O}}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$ ou $\underline{\quad}\ \underline{\overset{O}{A}}\ \underline{\overset{A}{O}}\ \underline{\quad}$ ou $\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\overset{O}{A}}\ \underline{\overset{A}{O}}$

$\underset{(1)}{3}\times\underset{(2)}{2}\times\underset{(3)}{6}\times\underset{(4)}{5}=180$
(1) o número de possibilidades de colocar o bloco AO ou AO na sequência $\left({}_{\uparrow}P\,{}_{\uparrow}R\,{}_{\uparrow}\right)$;
(2) troca de posição entre as letras A e O;
(3) seis possibilidades (P, R, T, U, G, L);
(4) cinco letras disponíveis.

O João pode formar 180 palavras.

Pág. 14

9.1. $\underset{(1)}{9}\times\underbrace{10\times10\times10}_{(2)}\times\underset{(3)}{1}\times\underset{(4)}{1}\times\underset{(5)}{1}=9000$
(1) este algarismo só não pode ser 0;
(2) pode ser qualquer algarismo de 0 a 9;
(3) este algarismo tem de ser igual ao terceiro;
(4) este algarismo tem de ser igual ao segundo;
(5) este algarismo tem de ser igual ao primeiro.

Existem 9000 números.

9.2. $\underset{(1)}{9}\times\underbrace{9\times8\times7}_{(2)}\times1\times1\times1=4536$
(1) 9 hipóteses, só não pode ser 0;
(2) diferente dos anteriores.

Existem 4536 números.

10.1. $\underset{(1)}{3}\times\underbrace{4\times4\times4}_{(2)}=192$
(1) 3 hipóteses (2, 1, 9);
(2) 4 hipóteses (2, 0, 1, 9).

Pode escrever 192 números.

10.2. $\underset{(1)}{3}\times\underbrace{3\times2\times1}_{(2)}=18$
(1) não pode ser 0;
(2) diferentes dos anteriores.

Pode escrever 18 números.

Pág. 15

11.1. $\underset{(1)}{5}\times\underbrace{6\times6\times6\times6}_{(2)}\times\underset{(3)}{2}=12\,960$
(1) não pode ser 0;
(2) qualquer um dos seis algarismos;
(3) pode ser 0 ou 5.

São múltiplos de 5, 12 960 números.

11.2. $\underset{(1)}{3}\times\underbrace{2\times1}_{(2)}\times\underset{(3)}{3}\times\underbrace{1\times1}_{(4)}=18$
(1) algarismos ímpares (1, 3, 5);
(2) diferentes dos anteriores;
(3) algarismos pares (0, 2, 4);
(4) iguais ao quarto algarismo.

Têm 18 números.

11.3. $\underset{(1)}{1}\times\underbrace{2\times2\times2\times2\times2}_{(2)}=32$
(1) o algarismo 1;
(2) algarismos 0 ou 1.
$32-\underset{(3)}{1}=31$,

em que (3) é a situação em que todos os algarismos são 1.
São formados apenas pelos algarismos 0 e 1, 31 números.

Pág. 16

12.1. $\underset{(1)}{\underline{10}} \times \underset{(2)}{\underline{1}} \times \underset{(3)}{\underline{7}} \times \underbrace{6 \times 5}_{(4)} = 2100$

(1) qualquer um dos 10 algarismos (0 a 9);
(2) só há uma alternativa, igual ao primeiro;
(3) há 7 alternativas para símbolo;
(4) símbolos diferentes dos anteriores.

O Rui pode criar 2100 *passwords*.

12.2. Se não podem ficar 2 algarismos seguidos, eles vão ocupar a 1.ª, a 3.ª e a 5.ª posições.

$\underset{(1)}{\underline{10}} \times \underset{(2)}{\underline{7}} \times \underset{(1)}{\underline{10}} \times \underset{(3)}{\underline{6}} \times \underset{(1)}{\underline{10}} = 42\,000$

(1) 10 opções (0 a 9);
(2) 7 opções para o 1.º símbolo;
(3) 6 opções para o segundo símbolo (tem que ser diferente do símbolo utilizado anteriormente).

O Rui pode criar 42 000 *passwords*.

12.3. $\underset{(1)}{2} \times \underbrace{7 \times 1}_{(2)} \times \underbrace{10 \times 9 \times 8}_{(3)} = 10\,080$

(1) duas posições possíveis para os símbolos, ou no início ou no fim;
(2) dois símbolos iguais;
(3) três algarismos diferentes.

O Rui pode criar 10 080 *passwords*.

Pág. 17

13.1. $\underbrace{2 \times 1}_{(1)} \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{(2)} = 12$

(1) maneiras de colocar os rapazes;
(2) maneiras de colocar as raparigas.

Podem colocar-se de 12 maneiras diferentes.

13.2. $\underbrace{2 \times 1}_{(1)} \times \underbrace{2 \times 1}_{(2)} = 4$

(1) maneiras de colocar os rapazes;
(2) maneiras de colocar as duas raparigas.

Podem colocar-se de 4 maneiras diferentes.

14.1. Vamos começar por colocar as raparigas.

$\underset{(1)}{2} \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{(2)} \times \underbrace{2 \times 1}_{(3)} = 24$

(1) pode ser Raparigas – Rapazes ou Rapazes – Raparigas
(2) as três raparigas podem escolher os 3 lugares de $3 \times 2 \times 1$ maneiras;
(3) os dois rapazes podem escolher os dois lugares de 2×1 maneiras.

Podem colocar-se de 24 maneiras diferentes.

14.2. $\underset{(1)}{3} \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{(2)} \times \underbrace{2 \times 1}_{(3)} = 36$

(1) maneiras de colocar o grupo das raparigas (à direita, no meio e à esquerda);
(2) maneiras de ordenar as raparigas;
(3) maneiras de ordenar os rapazes.

Podem-se colocar de 36 maneiras diferentes.

14.3. O grupo dos rapazes ficam seguidos em 4 situações.

$\uparrow$ Rapariga $\uparrow$ Rapariga $\uparrow$ Rapariga $\uparrow$

$\underset{(1)}{4} \times \underbrace{2 \times 1}_{(2)} \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{(3)} = 48$

(1) número de posições que os rapazes podem ocupar para ficarem juntos;
(2) maneiras de ordenar os rapazes;
(3) maneiras de ordenar as raparigas.

Podem colocar-se de 48 maneiras.

Pág. 19

15.1. Para o número ser par com 4 algarismos ímpares, o algarismo das unidades tem que ser 0, 2, 4, 6 ou 8 e os restantes algarismos têm que ser ímpares, 1, 3, 5, 7, 9.

$\underset{(1)}{\underline{4}} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{(2)} \times \underset{(3)}{\underline{5}} = 2500$

(1) pode ser qualquer algarismo ímpar exceto o 1;
(2) pode ser qualquer algarismo ímpar (1, 3, 5, 7, 9);
(3) pode ser qualquer algarismo par (0, 2, 4, 6, 8).

Existem 2500 números nessas condições.

15.2. Para o número ser par, o algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6 ou 8. Vamos considerar dois casos, um em que o algarismo das unidades é 0 e outro em que o algarismo das unidades é 2, 4, 6, ou 8.

1.º caso: $\underbrace{9 \times 8 \times 7 \times 6}_{(1)} \times \underset{(2)}{\underline{1}} = 3024$

(1) algarismos diferentes
(2) algarismo 0.

2.º caso: $\underset{(1)}{\underline{8}} \times \underbrace{8 \times 7 \times 6}_{(2)} \times \underset{(3)}{\underline{4}} = 10752$

(1) algarismo diferente de 0 e diferente do algarismo das unidades;
(2) algarismos diferentes e diferentes do primeiro e último;
(3) algarismo par diferente de zero.

Têm $3024 + 10752 = 13776$ números.

Pág. 20

16.1. $\underset{(1)}{9} \times \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{(2)} = 90000$

(1) diferente de 0;
(2) qualquer algarismo.

São 90 000 números.

16.2. $\underset{(1)}{8} \times \underbrace{9 \times 9 \times 9 \times 9}_{(2)} = 52488$

(1) qualquer algarismo diferente de 0 e 1;
(2) qualquer algarismo diferente de 1.

Não figura o 1 em 52 488 números.

16.3. $\underset{(1)}{90000} - \underset{(2)}{52488} = 37512$

(1) todos os números naturais com cinco algarismos;
(2) números em que não figura o algarismo 1

O 1 aparece pelo menos uma vez em 37 512 números.

Pág. 21

17.1. 8 cartas no total.

Dama Rei

Rei ___ ___ ___ Dama

$\underset{(1)}{2} \times \underbrace{6 \times 5 \times 4}_{(2)} = 240$

(1) o número de maneiras de colocar o Rei e a Dama;
(2) cartas diferentes (exceto o Rei e a Dama).

São possíveis 240 sequências.

17.2.

Ás ___ ___ ___ ___

$\underset{(1)}{3} \times \underset{(2)}{2} \times \underbrace{5 \times 4}_{(3)} = 120$

(1) o número de posições em que o bloco Rei-Dama pode ocupar;
(2) o número de maneiras de ordenar o Rei e a Dama;
(3) cartas diferentes (exceto Rei, Dama e Ás).

São possíveis construir 120 sequências.

17.3. Se figurar apenas o Rei (e não a Dama) temos:

$\underset{(1)}{5} \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3}_{(2)} = 1800$ sendo (1) número de posições que o Rei pode ocupar e (2) cartas diferentes (exceto Rei e Dama).

Se figurar apenas a Dama (e não o Rei), temos o mesmo número de possibilidades, 1800.

Se figurar o Rei e a Dama, temos:

$\underset{(1)}{5} \times \underset{(2)}{4} \times \underbrace{6 \times 5 \times 4}_{(3)} = 2400$

(1) número de posições que o Rei pode ocupar;
(2) número de posições que a Dama pode ocupar;
(3) cartas diferentes (exceto Rei e Dama).

$2 \times 1800 + 2400 = 6000$

É possível construir 6000 sequências.

Outro processo:

$\underbrace{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}_{(1)} - \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}_{(2)} = 6000$

(1) todas as sequências de 5 cartas que são possíveis construir com as 8 cartas selecionadas;
(2) número de sequências onde não figuram nem o Rei nem a Dama.

Pág. 22

18.1. a) $\frac{15!}{14!} = \frac{15 \times 14!}{14!} = 15$

b) $\frac{11! - 9!}{8!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8! - 9 \times 8!}{8!} =$

$= \frac{8!(990-9)}{8!} = 981$

c) $\frac{700 \times 48!}{50!} = \frac{700 \times 48!}{50 \times 49 \times 48!} = \frac{7 \times 100}{50 \times 49} = \frac{2}{7}$

d) $\frac{99! \times 98!}{100! \times 97!} = \frac{99! \times 98 \times 97!}{100 \times 99! \times 97!} = \frac{98}{100} = \frac{49}{50}$

18.2. $\frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n^2+n)(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)! - (n+1)!}{(n^2+n)(n-1)!} =$

$= \frac{(n+1)!(n+2-1)}{(n^2+n)(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!(n+1)}{n(n+1)(n-1)!} = n+1$

Pág. 23

19.1. O número de maneiras de ordenar os 5 rapazes é $5! = 120$. O número de maneiras de ordenar as 5 raparigas é $5! = 120$. Temos duas maneiras para colocar rapazes e raparigas alternamente, rapaz- rapariga ou rapariga-rapaz:

$120 \times 120 \times 2 = 28\,800$

Os jovens podem dispor-se de 28 800 maneiras diferentes.

19.2. Os 3 irmãos podem ser ordenados de $3!$ maneiras diferentes. Os restantes 7 jovens podem ser ordenados de $7!$ maneiras diferentes.

Temos 8 maneiras de colocar na fila o grupo dos 3 irmãos.

$3! \times 7! \times 8 = 241\,920$

Os jovens podem dispor-se de 241 920 maneiras diferentes.

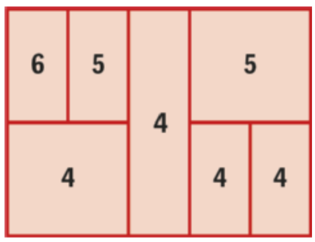
Pág. 24

Tarefas de consolidação 1

1.1. Se retirar 15 bolas, não é garantido que saiam duas bolas de cores diferentes, pois podem sair todas vermelhas. Se retirarmos $15+1=16$ é garantido que saem pelo menos duas bolas de cores diferentes.

1.2. Há 18 bolas não vermelhas. Se forem retiradas $18+1=19$ é garantido que sai pelo menos uma bola de cor vermelha. Há 23 bolas não azuis. Se forem retiradas $23+1=24$, é garantido que sai pelo menos uma bola azul. Há 25 bolas não douradas. Se forem retiradas $25+1=26$ bolas, é garantido que sai pelo menos uma bola dourada. Logo, o número mínimo de bolas que se devem retirar da caixa para garantir que saia pelo menos uma bola de cada cor é 26.

2.



$6 \times 5^2 \times 4^2 = 38\,400$

O Nuno pode pintar o desenho de 38 400 maneiras diferentes.

3. Bombons de limão: 9; Bombons de manga: 7; Bombons de baunilha: 5. A avó pode colocar no saco entre 0 e 9 bombons de limão, ou seja, tem 10 possibilidades de escolha da quantidade de bombons de limão a colocar no saco. Tem 8 possibilidades de escolher a quantidade de bombons de manga a colocar no saco (entre 0 e 7). Tem 6 possibilidades de escolher a quantidade de bombons de baunilha a colocar no saco (entre 0 e 5). Assim, existem $10 \times 8 \times 6 = 480$ possibilidades de colocar bombons no saco. Como a avó quer colocar no saco pelo menos 1 bombom, temos que substrair uma unidade que corresponde à situação de não colocar nenhum bombom no saco. $480 - 1 = 479$
Então, 479 é o número de maneiras diferentes de compor o conteúdo do saco.

4. Vamos colocar uma pedra na primeira linha e ela pode ocupar 8 posições diferentes. De seguida, vamos colocar uma pedra na 2.ª linha e ela pode ocupar 7 posições diferentes, uma vez que não pode estar na mesma coluna que a pedra anterior. E assim sucessivamente até chegarmos à última pedra para a qual só resta uma casa disponível.
$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8! = 40320$
As peças podem ser colocadas de 40 320 maneiras diferentes.

Pág. 25

5. Como os presentes são iguais e os sacos são iguais e têm que ter pelo menos um presente, o número de maneiras de distribuir os presentes pelos 4 sacos é o número de maneiras de distribuir os 2 presentes que sobram depois de colocar um presente em cada saco. Temos assim duas situações: ou colocamos os 2 presentes que sobram num dos sacos, ficando um saco com 3 presentes e 3 sacos com um presente cada ou, dos dois presentes colocamos 1 em cada saco, ficando 2 sacos com 1 presente e 2 sacos com 2 presentes.
Portanto, podemos distribuir os presentes pelos sacos, de modo que fique pelo menos um em cada saco, de duas formas diferentes.

6. 1.ª situação: escolhe o top verde

$\underset{(1)}{2} \times \underset{(2)}{3} \times \underset{(3)}{2} = 12$

(1) número de possibilidades de escolher o top verde;
(2) número de possibilidades de escolher a saia (não pode ser azul);
(3) número de possibilidades de escolher os sapatos.

2.ª situação: não escolher o top verde

$\underset{(1)}{3} \times \underset{(2)}{4} \times \underset{(3)}{2} = 24$

(1) número de possibilidades de escolher os tops (vermelho, rosa, laranja);
(2) número de possibilidades de escolher as saias;
(3) número de possibilidades de escolher os sapatos.

$12 + 24 = 36$

A Bia pode escolher um top, uma saia e uns sapatos, nestas condições, de 36 maneiras diferentes.

7. Números maiores que 30 000 com 5 algarismos:

$\underset{(1)}{\underline{3}} \times \underbrace{\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2}}_{(2)} = 360$

(1) 3 possibilidades (3, 4, ou 5);
(2) algarismos diferentes.

Números com 6 algarismos:

$\underset{(1)}{\underline{5}} \times \underbrace{\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1}}_{(2)} = 600$

(1) só não pode ser 0;
(2) algarismos diferentes.

$360 + 600 = 960$

É possível formar 960 números.

8. $\underset{(1)}{2!} \times \underset{(2)}{4!} \times \underset{(3)}{5} = 240$

(1) número de maneiras de ordenar os namorados;
(2) número de maneiras de ordenar os 4 amigos.
(3) número de maneiras de colocar o par de namorados na sequência

Os 6 amigos podem sentar-se de 240 maneiras diferentes.

9.1. $\dfrac{2 \times 99!}{100!} = \dfrac{2 \times 99!}{100 \times 99!} = \dfrac{2}{100} = \dfrac{1}{50}$

9.2. $\dfrac{5!}{6!} + \dfrac{11!}{12!} + \dfrac{0!}{2!} = \dfrac{5!}{6 \times 5!} + \dfrac{11!}{12 \times 11!} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$

Pág. 27

Avaliação formativa 1

1. _ $\underline{E}$ _ _ _

$\underset{P}{1} \times \underset{A}{3} = 3$

_ _ $\underline{E}$ _ _

$\underset{P}{2} \times \underset{A}{2} = 4$

_ _ _ $\underline{E}$ _

$\underset{P}{3} \times \underset{A}{1} = 3$

$(3 + 4 + 3) \times \underset{(1)}{2} = 20$

(1) P pode trocar com A

É possível colocar as chaves no chaveiro de 20 formas diferentes.

2.

ALGARISMOS	LETRAS
$\underline{1}\,\underline{0}\,\underline{2}\,\underline{9}\,\underline{6} \times \underline{5}$	$\underline{4}\,\underline{a}\,\underline{3}$

4 → Já utilizamos 1, 0, 2, 9

30 → $6 \times 5 = 30$

12 → $4 \times 3 = 12$

360 → $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

3. A opção correta é a (B).

$\boxed{\text{A}}$ $5\times3\times4\times2 \rightarrow$ levar 1 prato de carne, 1 prato de peixe, uma sobremesa doce e uma de fruta ou levar dois pratos de carne diferentes e dois de peixe diferentes.
$\boxed{\text{C}}$ $5+4+3+2 \rightarrow$ levar 1 prato de carne ou 1 de peixe ou uma sobremesa doce ou uma de fruta.
$\boxed{\text{D}}$ $(5\times3)+(4\times2) \rightarrow$ levar 2 pratos principais um de carne e um de peixe ou levar uma sobremesa doce e uma de fruta.

4. Na pior das hipóteses distribuem-se 4 alunos por grupo.

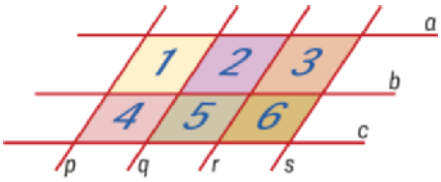
$\boxed{4}$ $\boxed{4}$ $\boxed{4}$ $\boxed{4}$

$5\times4=20$ alunos. Faltam distribuir 2 alunos que podem fazer parte de 2 grupos diferentes, ficando 2 grupos com 5 elementos e 3 grupos com 4 elementos, ou podem os 2 integrar o mesmo grupo ficando 1 com 6 elementos e 4 grupos com 4 elementos. Em qualquer dos casos, pelo menos um dos grupos ficou com 5 ou mais elementos.

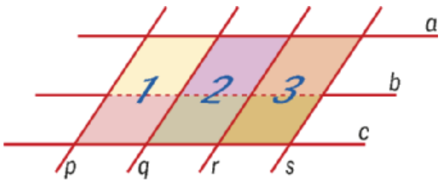
2. Arranjos, permutações e combinações

Pág. 28

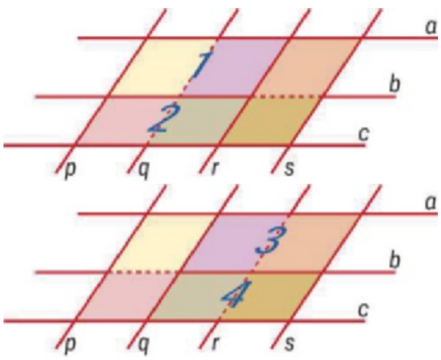
1.



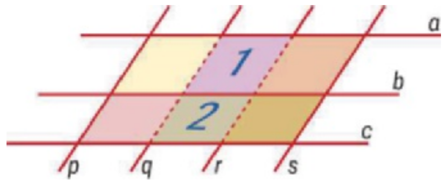
6 paralelogramos



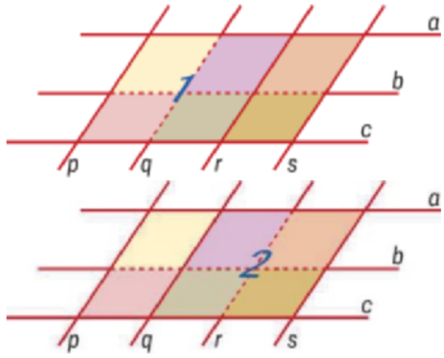
3 paralelogramos



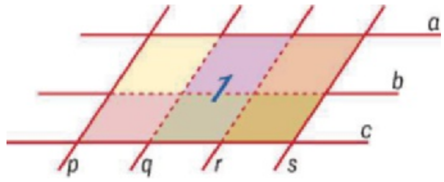
4 paralelogramos



2 paralelogramos



2 paralelogramos



1 paralelogramo

$6+3+4+2+2+1=18$

No total há 18 paralelogramos.

2. Duas retas do conjunto *A* podem ser escolhidas de seis maneiras: $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$.

No conjunto *B* há dez possibilidades: $\{p,q\}$, $\{p,r\}$, $\{p,s\}$, $\{p,t\}$, $\{q,r\}$, $\{q,s\}$, $\{q,t\}$, $\{r,s\}$, $\{r,t\}$, $\{s,t\}$.

$6\times10=60$ paralelogramos.

Pág. 29

20.1. $^2A'_{10}=2^{10}=1024$

É possível obter 1024 sequências diferentes.

20.2. $^2A'_9\times1=2^9=512$

É possível obter 512 sequências que terminam em *E*.

20.3. $1\times{}^2A'_8\times1=2^8=256$

É possível obter 256 sequências que começam por *N* e terminam em *E*.

Pág. 30

21.1. No caminho de *A* para *C*, existem 7 pontos onde o morador tem de escolher uma de duas opções: seguir pela esquerda ou seguir pela direita

$^{2}A'_{7} = 2^{7} = 128$

Existem 128 trajetos de *A* para *C*.

21.2. No caminho de *A* para *B*, existem 4 pontos onde o morador tem de escolher uma de 2 opções e no trajeto de *B* para *C* existem 2 desses pontos, uma vez que de *B* não se pode passar pelo caminho que se chegou de *A*."

$^{2}A'_{4} \times {}^{2}A'_{2} = 2^{4} \times 2^{2} = 2^{6} = 64$

Existem 64 trajetos de *A* para *C* que passam por *B*.

21.3. O número de trajetos que vão de *A* para *C* e não passam por *B* é a diferença entre o número total de trajetos de *A* para *C* (calculado em **21.1.**) e o número de trajetos de *A* para *C* e que passam por *B* (calculado em **21.2.**).

$128 - 64 = 64$

Existem 64 trajetos de *A* para *C* sem passar por *B*.

22. Para cada miniatura há duas possibilidades de escolha da prateleira onde a colocar.

$^{2}A'_{6} = 2^{6}$

Como, em cada prateleira tem de ficar pelo menos uma miniatura, temos que subtrair os casos em que ficam todas as miniaturas na mesma prateleira.

$^{2}A'_{6} - 2 = 64 - 2 = 62$

Logo, existem 62 maneiras diferentes de dividir as miniaturas, pelas duas prateleiras de modo que, cada uma tenha pelo menos uma miniatura.

23. Para cada miniatura há duas possibilidades de escolha da caixa onde a colocar.

$^{2}A'_{10} = 2^{10}$

Como, em cada caixa, tem que ficar, pelo menos, uma miniatura, temos que subtrair o número de casos em que ficam todas as miniaturas na mesma caixa.

$^{2}A'_{10} - 2 = 2^{10} - 2 = 1024 - 2 = 1022$.

Logo, existem 1022 formas diferentes de distribuir as 10 miniaturas pelas duas caixas de modo que cada caixa tenha pelo menos uma miniatura.

Pág. 31

24.1. É possível formar $^{26}A'_{4}$ sequências de quatro letras e $^{10}A'_{3}$ sequências de 3 algarismos.

Logo, é possível formar

$^{26}A'_{4} \times {}^{10}A'_{3} = 26^{4} \times 10^{3} = 456\,976\,000$ códigos diferentes.

24.2. $^{5}A'_{4} \times {}^{10}A'_{2} \times 5 = 5^{4} \times 10^{2} \times 5 = 312\,500$

$^{5}A'_{4}$: Para cada uma das letras, há 5 possibilidades (a, e, i, o ou u).

$^{10}A'_{2}$: Para cada um dos dois primeiros algarismos, há 10 possibilidades.

5: número de possibilidades para o último algarismo (0, 2, 4, 6 ou 8).

Há 312 500 códigos em que as letras são vogais e o número é par.

25. Para cada um dos oito itens, há dois registos possíveis (0 ou 5).

Então, o resultado de um teste pode ser registado de $^{2}A'_{8} = 2^{8} = 256$ maneiras diferentes.

26.1. Para cada dígito do código, existem 10 escolhas possíveis.

Então, é possível formar $^{10}A'_{4} = 10^{4} = 10\,000$ PIN diferentes.

26.2. $^{10}A'_{2} \times 1 \times 1 = 10^{2} = 100$

$^{10}A'_{2}$: Sequências de 2 algarismos para ocupar os 2 primeiros dígitos do PIN.

1: O penúltimo algarismo tem de ser igual ao segundo.

1: O último algarismo tem de ser igual ao primeiro.

É possível formar 100 PIN que sejam capicuas.

26.3. $^{10}A'_{4}$ é o número total de códigos que é possível formar.

$\underset{1.^{o}A}{10} \times \underset{2.^{o}A}{9} \times \underset{3.^{o}A}{8} \times \underset{4.^{o}A}{7} = 5040$

Existem 5040 códigos PIN com todos os algarismos diferentes.

Então, $10\,000 - 5040 = 4960$, é o número de códigos PIN com pelo menos dois algarismos iguais.

26.4. Existem $^{10}A'_{3}$ sequências de 3 algarismos para ocupar as 1.ª, 2.ª e 4.ª posições do código PIN.

Para a 3.ª posição, existe apenas uma (tem que ser igual ao algarismo da 2.ª posição).

Assim, existem $^{10}A'_{3} \times 1 = 1000$ códigos PIN que tenham os algarismos do meio iguais.

26.5. Existem 10 possibilidades de escolha do 1.º algarismo e cada um dos restantes tem que ser diferente do anterior.

$\underset{1.^{o}A}{10} \times \underset{2.^{o}A}{9} \times \underset{3.^{o}A}{9} \times \underset{4.^{o}A}{9} = 7290$

Existem 7290 códigos PIN que não têm algarismos consecutivos iguais.

Pág. 32

27.1. Se os números são constituídos só por algarismos ímpares, os dois primeiros algarismos só podem ser 91 ou 93.

$\underset{(1)}{1} \times \underset{(2)}{2} \times \underset{(3)}{{}^5A'_7} = 2 \times 5^7 = 156\,250$

(1) O 1.º algarismo é 9.
(2) O 2.º algarismo pode ser 1 ou 3.
(3) Restantes algarismos: qualquer um entre 1, 3, 5, 7 e 9.

É possível atribuir 156 250 números de telemóvel constituídos apenas por algarismos ímpares.

27.2. Para que o número tenha exatamente dois algarismos pares, teremos que separar em dois casos: ou o segundo algarismo é 1 ou 3 ou é 6.

- Se o 2.º algarismo é 1 ou 3:

$1 \times 2 \times 5 \times {}^5A'_5 \times 5 \times 6 = 2 \times 6 \times 5^7$

1 $(1.^{\text{o}}\text{ A})$: Algarismo 9.
2 $(2.^{\text{o}}\text{ A})$: Algarismos 1 ou 3.
5 $(3.^{\text{o}}\text{ A})$: Qualquer algarismo par.
${}^5A'_5$ $(4.^{\text{o}}\text{ A a } 8.^{\text{o}}\text{ A})$: qualquer algarismo ímpar.
5 $(9.^{\text{o}}\text{ A})$: Qualquer algarismo par.
6: Número de posições do algarismo par colocado na 3.ª posição.

- Se o 2.º algarismo é 6:

$1 \times 1 \times {}^5A'_6 \times 5 = 5^6 \times 5 = 5^7$

1 $(1.^{\text{o}}\text{ A})$: Algarismo 9.
1 $(2.^{\text{o}}\text{ A})$: Algarismo 6.
${}^5A'_6$ $(3.^{\text{o}}\text{ A até } 8.^{\text{o}}\text{ A})$: Qualquer algarismo ímpar (1, 3, 5, 7 ou 9).
5 $(9.^{\text{o}}\text{ A})$: qualquer algarismo par.

$2 \times 6 \times 5^7 + 5^7 = 1\,015\,625$

É possível atribuir 1 015 625 números de telemóvel que sejam pares e tenham exatamente dois algarismos pares.

28. Para cada um dos elementos do júri há 3 possibilidades de escolha do candidato a passar a final.

Logo, há ${}^3A'_6 = 3^6 = 729$ maneiras diferentes de se estabelecer a votação.

29. $9 \times {}^{10}A'_4$: é o número total de números de 5 algarismos.

$9 \times {}^{10}A'_3 \times 1$: é o número total de números de 5 algarismos em que o algarismo das unidades é o 5.

9: O primeiro algarismo não pode ser 0.

$8 \times {}^9A'_4$: é o número total de números de 5 algarismos onde não figura o algarismo 5.

8: o primeiro algarismo não pode ser 0 nem 5.

Logo, há $9 \times {}^{10}A'_4 - 9 \times {}^{10}A'_3 - 8 \times {}^9A'_4 = 28\,512$ números de cinco algarismos em que figura o algarismo 5, não sendo este o algarismo das unidades.

Pág. 33

30.1. $2 \times P_4 + P_3 = 2 \times 4! + 3! = 2 \times 4 \times 3! + 3! =$
$= (8+1) \times 3! = 9 \times 3 \times 2 \times 1 = 54$

30.2. $5 \times P_6 - 20 \times P_5 = 5 \times 6! - 20 \times 5! =$
$= 5 \times 6 \times 5! - 20 \times 5! =$
$= (30 - 20) \times 5! = 10 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 1200$

30.3. $\dfrac{P_6}{P_4} + P_2 = \dfrac{6!}{4!} + 2! = \dfrac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} + 2 \times 1 = 30 + 2 = 32$

30.4. $\dfrac{P_{10}}{P_3 \times P_7} = \dfrac{10!}{3! \times 7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{3 \times 2 \times 1 \times \cancel{7!}} = \dfrac{720}{6} = 120$

Pág. 34

31.1. $5 \times P_4 \times P_6 = 5 \times 4! \times 6! = 86\,400$

5: número de escolhas do lugar a ser ocupado por um homem na fila da frente.

P_4: número de maneiras de ordenar as mulheres.

P_6: número de maneiras de ordenar os homens.

Há 86 400 maneiras das 10 pessoas ocuparem os 10 lugares de forma que as mulheres fiquem na fila da frente.

31.2. $4 \times P_2 \times P_8 \times 2 = 4 \times 2! \times 8! \times 2 = 645\,120$

4: número de escolhas possíveis, em cada fila, dos lugares a ocupar pelo casal (1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, ou 4 e 5).

P_2: número de maneiras de ordenar o casal.

P_8: número de maneiras de ordenar as outras 8 pessoas.

2: número de escolhas da fila a ser ocupada pelo casal.

Há 645 120 maneiras das 10 pessoas ocuparem os 10 lugares de forma que as duas pessoas que formam um casal fiquem juntas.

32.1. $P_3 \times P_6 = 3! \times 6! = 4320$

P_3: Número de maneiras de ordenar as 3 bolas azuis no início da fila.

P_6: número de maneiras de ordenar as 6 bolas cor-de-rosa.

É possível colocar as bolas em fila de modo que as azuis fiquem em primeiro lugar de 4320 maneiras.

32.2. $7 \times P_3 \times P_6 = 7 \times 3! \times 6! = 30\,240$

7: Número de escolhas dos lugares a ocupar pelas bolas azuis (1, 2 e 3; 2, 3 e 4; 3, 4 e 5; 4, 5 e 6; 5, 6 e 7; 6, 7 e 8 ou 7, 8 e 9)

P_3: Número de maneiras de ordenar as 3 bolas azuis.

P_6: número de maneiras de ordenar as 6 bolas cor-de-rosa.

É possível colocar as bolas em fila de modo que as bolas azuis fiquem juntas de 30 240 formas diferentes.

32.3. Há $9!$ maneiras de ordenar as nove bolas.
Há 30 240 casos em que as bolas azuis ficam todas juntas (visto em **32.2.**).
Logo, há $9!-30\,240=332\,640$ maneiras de ordenar as bolas de forma que pelo menos uma das bolas azuis fique separada das restantes.

Pág. 35

33.1. P_8 é o número de maneiras diferentes de ordenar as 8 letras diferentes.
$P_8=8!=40\,320$
Logo, existem 40 320 anagramas da palavra NUMERADO.

33.2. $4\times P_6\times 3=4\times 6!\times 3=8640$
4: número de maneiras de escolher a vogal do início.
P_6 : número de maneiras de ordenar as restantes 6 letras.
3: número de maneiras de escolher a vogal que ficará no fim.
Então, existem 8640 anagramas da palavra NUMERADO que começam e terminam numa vogal.

33.3. $P_5\times 6=5!\times 6=720$
P_5 : número de maneiras de ordenar as letras E, R, A, D e O
6: número de maneiras de intercalar o bloco $\boxed{\text{NUM}}$ entre as restantes letras E R A D O.
Logo, há 720 anagramas da palavra NUMERADO com as letras N, U e M juntas e por esta ordem.

33.4. $P_3\times P_5\times 6=3\times 5!\times 6=4320$
P_3 : números de maneiras de ordenar as letras NUM.
P_5 : número de maneiras de ordenar as letras ERADO.
6: número de maneiras de intercalar o bloco $\boxed{\text{NUM}}$ entre as restantes letras E R A D O.
Então, há 4320 anagramas da palavra NUMERADO que têm as letras N, U e M juntas por qualquer ordem.

33.5. Uma vez que a letra N está no primeiro lugar e a letra O está no último, resta ocupar os lugares do meio com as restantes 6 letras e estas podem todas trocar entre si.
Assim, existem $P_6=6!=720$ anagramas da palavra NUMERADO que começam por N e terminam em O.

33.6. $P_4\times P_4\times 2=4!\times 4!\times 2=1152$
P_4 : número de maneiras de ordenar as 4 vogais.
P_4 : número de maneiras de ordenar as 4 consoantes.
2: O anagrama pode começar por uma vogal ou por uma consoante.
Logo, existem 1152 anagramas da palavra NUMERADO em que as consoantes e as vogais aparecem alternadas.

Pág. 36

34.1. P_7 é o número de maneiras de ordenar as 7 pessoas.
$P_7=7!=5040$
Existem 5040 maneiras de sentar as 7 pessoas numa fila de 7 lugares.

34.2. $P_4\times P_3\times 2=4!\times 3!\times 2=288$
P_3 : número de maneiras de ordenar as 3 raparigas.
P_4 : Número de maneiras de ordenar os 4 rapazes.
2: pode ser rapazes-raparigas ou raparigas--rapazes.
Existem 288 maneiras de sentar as 7 pessoas numa fila de 7 lugares, de forma que tanto os rapazes como as raparigas ocupem lugares seguidos.

35.1. $P_6\times P_4\times 2=6!\times 4!\times 2=34\,560$
P_6 : número de maneiras de ordenar os livros de Matemática A.
P_4 : número de maneiras de ordenar os livros de Biologia.
2: Podem estar os livros de Matemática A a esquerda dos de Biologia ou ao contrário.
Então, existem 34 560 maneiras de arrumar os 10 livros de forma que os da mesma disciplina fiquem juntos.

35.2. $P_6\times P_4\times 7=6!\times 4!\times 7=120\,960$
P_6 : número de maneiras de ordenar os 6 livros de Matemática A.
P_4 : número de maneiras de ordenar os 4 livros de Biologia.
7: Número de maneiras de escolher os lugares para colocar o bloco dos 4 livros de Biologia entre os livros de Matemática A ou nos extremos da fila.
Então, existem 120 960 formas de colocar os 10 livros na prateleira de modo que os de Biologia fiquem juntos.

35.3. P_{10} é o número de maneiras de ordenar os livros de ordenar os 10 livros.
$P_{10}=10!=3\,628\,800$
O número de maneiras de arrumar os livros de forma que pelo menos um dos livros de Biologia fique separado dos restantes é a diferença entre o

número total de maneiras de ordenar os 10 livros e o número de maneiras de os arrumar de forma que os de Biologia fiquem juntos (visto em **35.2.**).

$3\,628\,800 - 120\,960 = 3\,507\,840$

Logo, existem 3 507 840 maneiras de arrumar os 10 livros de modo que pelo menos um dos livros de Biologia fique separado dos restantes.

Pág. 38

36.1. Pretende-se escolher, ordenadamente e sem repetição, 3 alunos entre os 26 da turma.

${}^{26}A_3 = 15\,600$

É possível formar 15 600 comissões.

36.2. $14 \times {}^{25}A_2 = 8400$

14: Número de maneiras de escolher uma das 14 alunas para ocupar o cargo de presidente.

${}^{25}A_2$: Número de maneiras de escolher ordenadamente 2 dos restantes 25 alunos para ocuparem os cargos de tesoureiro e de responsável pelas relações-públicas.

É possível formar 8400 comissões em que o presidente é uma rapariga.

36.3. ${}^{14}A_3$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente 3 das 14 raparigas.

${}^{14}A_3 = 2184$

Então, é possível formar 2184 comissões formadas só por raparigas.

36.4. ${}^{12}A_3$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente 3 dos 12 rapazes.

${}^{12}A_3 = 1320$

Então, é possível formar 1320 comissões formadas só por rapazes.

36.5. O número de comissões mistas que é possível formar é a diferença entre o número total de comissões possíveis de formar e o número de comissões formadas só por rapazes ou só por raparigas.

$15\,600 - (2184 + 1320) = 15\,600 - 3504 = 12\,096$

Então, é possível formar 12 096 comissões mistas.

37. ${}^{6}A_4 \times P_8$

${}^{6}A_4$: representa o número de formas diferentes de escolher ordenadamente 4 dos 6 lugares da segunda fila para colocar os 4 rapazes. Para cada uma destas escolhas, existem P_8 maneiras diferentes de distribuir ordenadamente as 8 raparigas pelos 8 lugares restantes.

${}^{8}A_6 \times P_6$

${}^{8}A_6$: representa o número de formas diferentes de escolher ordenadamente 6 das 8 raparigas para colocar na primeira fila. Para cada uma destas escolhas, existem P_6 maneiras diferentes de ocupar os 6 lugares da segunda fila com os restantes 6 alunos (4 rapazes e 2 raparigas).

Pág. 39

38.1. $P_4 \times P_3 \times 2 = 4! \times 3! \times 2 = 288$

P_4 : Número de maneiras de ordenar as 4 raparigas.

P_3 : Número de maneiras de ordenar os 3 rapazes.

2: Os rapazes podem ficar a esquerda ou a direita das raparigas.

Existem 288 maneiras de dispor lado a lado as 7 pessoas de forma que tanto os rapazes como as raparigas ocupem lugares seguidos.

38.2. $P_4 \times P_3 \times 4 = 4! \times 3! \times 4 = 576$

P_4 : Número de maneiras de ordenar as 4 raparigas.

P_3 : Número de maneiras de ordenar os 3 rapazes.

4: Número de possibilidades de colocar o grupo das 4 raparigas entre 2 rapazes ou nos extremos.

$_{\uparrow}\text{M}_{\uparrow}\text{M}_{\uparrow}\text{M}_{\uparrow}$

Existem 576 maneiras de dispor lado a lado as 7 pessoas de forma que as raparigas ocupem lugares seguidos.

38.3. Uma vez que a pessoa mais alta fica no meio, resta-nos distribuir as restantes 6 pessoas pelos 6 lugares ainda disponíveis.

$6!$ é o número de maneiras de ordenar as restantes 6 pessoas.

$6! = 720$

Existem 720 maneiras de dispor lado a lado as 7 pessoas de forma que o mais alto fique no lugar do meio.

38.4. Como há mais uma rapariga do que rapazes, para que não fiquem pessoas do mesmo género em lugares seguidos, terão que rapazes e raparigas ficar alternados, ficando raparigas nos extremos.

F M F M F M F

$\text{P}_4 \times \text{P}_3 = 4! \times 3! = 144$

P_4 : Número de maneiras de dispor ordenadamente as 4 raparigas.

P_3 : Número de maneiras de dispor ordenadamente os 3 rapazes.

Existem 144 maneiras de dispor lado a lado as 7 pessoas de forma que não fiquem pessoas do mesmo género em lugares seguidos.

38.5. $P_2 \times P_5 \times 6 = 2! \times 5! \times 6 = 1440$

P_2 : Número de maneiras de dispor ordenadamente o João e a Joana.

P_5 : Número de maneiras de dispor ordenadamente as outras 5 pessoas.

6: Número de maneiras de colocar o João e a Joana juntos entre duas das restantes 5 pessoas ou nos extremos. $_\uparrow X_\uparrow X_\uparrow X_\uparrow X_\uparrow X_\uparrow$

Existem 1440 formas de dispor, lado a lado as 7 pessoas de forma que o João e a Joana fiquem um ao lado do outro.

Pág. 40

39. Situação 1 – Expressão B

$P_4 \times P_3 \times 5$

P_4 : Número de maneiras de ordenar as 4 bolas amarelas.

P_3 : número de maneiras de ordenar as 3 bolas azuis.

5: número de posições possíveis para colocar as três bolas azuis seguidas (nos extremos ou entre duas bolas amarelas). $_\uparrow A_\uparrow A_\uparrow A_\uparrow A_\uparrow$

Situação 2 – Expressão C

$P_4 \times {}^3A_2 \times {}^5A_2$

P_4 : Número de maneiras de ordenar as 4 bolas amarelas.

${}^3A_2$: número de maneiras de escolher ordenadamente 2 das 3 bolas azuis para ficarem juntas.

${}^5A_2$: número de maneiras de escolher ordenadamente 2 posições para colocar o conjunto das 2 bolas azuis e a terceira bola azul separada destas (nos extremos ou entre duas bolas amarelas). $_\uparrow A_\uparrow A_\uparrow A_\uparrow A_\uparrow$

Situação 3 – Expressão A

$P_4 \times {}^5A_3$

P_4 : Número de maneiras de ordenar as 4 bolas amarelas.

${}^5A_3$: número de maneiras de escolher ordenadamente 3 posições para colocar as 3 bolas azuis separadas (nos extremos ou entre duas bolas amarelas).

Pág. 41

40.1. ${}^5A_3 \times {}^6A_2 = 1800$

${}^5A_3$ escolha ordenada de 3 lugares na sequência para as três figuras;

${}^6A_2$ escolha ordenada de 2 cartas entre as 6 cartas não figuras para os dois lugares restantes.

Assim, é possível construir 1800 sequências de 5 cartas de modo que as três figuras façam parte da sequência.

40.2. ${}^9A_5$ é o número total de maneiras de ordenar 5 das 9 cartas.

${}^6A_5$ é o número de maneiras de ordenar 5 das 6 cartas que não são figuras.

O número de sequências de cinco cartas que é possível construir de modo que haja pelo menos uma figura será a diferença entre estes dois valores.

${}^9A_5 - {}^6A_5 = 15\,120 - 720 = 14\,400$

Logo, é possível construir 14 400 sequências de modo que pelo menos uma das figuras faça parte da sequência.

40.3. Para calcular o número de sequências possíveis de construir de modo que a primeira carta não seja o rei e a última seja uma figura, poderemos separar em dois casos: ou a última carta é o rei ou a última carta é uma das outras figuras.

– Se a última carta é o rei:

${}^8A_4 \times 1$

${}^8A_4$: número de maneiras de ordenar 4 das 8 cartas restantes para ocupar as 4 primeiras posições.

1: a última carta é o rei.

– Se a última carta é uma das outras figuras:

$7 \times {}^7A_3 \times 2 = 14 \times {}^7A_3 = 2940$

7: número de cartas que poderão ocupar a 1.ª posição (não pode ser o rei nem a figura que está no fim).

${}^7A_3$: Número de maneiras de ordenar 3 das restantes 7 cartas para ocupar as posições do meio.

2: Número de figuras que poderão ficar no fim.

$1680 + 2940 = 4620$

É possível construir 4620 sequências de 5 cartas de modo que a primeira carta não seja o rei e a última seja uma figura.

Pág. 43

41.1. ${}^8C_4 = \dfrac{8!}{4! \times (8-4)!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4 \times 3 \times 2 \times 4!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} =$

$= 7 \times 2 \times 5 = 70$

41.2. ${}^{30}C_{25} = \dfrac{30!}{25! \times (30-25)!} =$

$= \dfrac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25!}{25! \times 5!} =$

$= \dfrac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 29 \times 7 \times 27 \times 26 = 142\,506$

42. Temos de escolher 3 tipos de fruta de um conjunto de 5.

Como a ordem da escolha não interessa podemos fazê-lo de ${}^5C_3$ formas diferentes.

$${}^{5}C_3 = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10$$

Podemos fazer 10 sumos diferentes, misturando, em quantidades iguais, três dos 5 tipos de fruta.

43.1. Um octógono tem 8 vértices e 8 lados.

$${}^{8}C_2 - 8 = 28 - 8 = 20$$

↑A↑A↑A↑A↑ ${}^{8}C_2$: número de segmentos de reta que se podem formar com extremos nos vértices do octógono (não interessa a ordem).
8: número de lados do octógono.
Um octógono tem 20 diagonais.

43.2. Um dodecágono tem 12 vértices e 12 lados.

$${}^{12}C_2 - 12 = 66 - 12 = 54$$

${}^{12}C_2$: número de segmentos de reta que se podem formar com extremos nos vértices do dodecágono (não interessa a ordem).
12: Número de lados do dodecágono.
Um dodecágono tem 54 diagonais.

Pág. 44

44.1. A comissão será formada por 3 rapazes e 3 raparigas.

$${}^{14}C_3 \times {}^{7}C_3 = 364 \times 35 = 12\,740$$

${}^{14}C_3$: número de maneiras de escolher 3 raparigas em 14.
${}^{7}C_3$: número de maneiras de escolher 3 rapazes em 7.
Podem ser formadas 12 740 comissões com o mesmo número de rapazes e raparigas.

44.2. A comissão será formada pelo delegado, o subdelegado e 4 outros alunos da turma. Não interessa a ordem.

$${}^{2}C_2 \times {}^{19}C_4 = 3876$$

${}^{2}C_2$: o delegado e o subdelegado fazem parte da comissão.
${}^{19}C_4$: número de maneiras de escolher 4 dos restantes 19 alunos da turma.
Podem ser formadas 3876 comissões das quais o delegado e o subdelegado fazem parte.

44.3. O número de comissões com pelo menos um rapaz e pelo menos uma rapariga é a diferença entre o número total de comissões e o número de comissões com elementos todos do mesmo género.

$${}^{21}C_6 - \left({}^{14}C_6 + {}^{7}C_6\right) = 54\,264 - (3003 + 7) =$$
$$= 54\,264 - 3010 = 51\,254$$

${}^{21}C_6$: número total de comissões que é possível formar.
${}^{14}C_6$: número de comissões que se podem formar só com raparigas.
${}^{7}C_6$: número de comissões que se podem formar só com rapazes.
É possível formar 51 254 comissões com pelo menos um rapaz e pelo menos uma rapariga.

44.4. Para que a comissão tenha elementos dos dois géneros, mas mais raparigas do que rapazes, poderá ter 4 raparigas e 2 rapazes ou 5 raparigas e 1 rapaz.

$${}^{14}C_4 \times {}^{7}C_2 + {}^{14}C_5 \times {}^{7}C_1 = 1001 \times 21 + 2002 \times 7 =$$
$$= 21\,021 + 14\,014 = 35\,035$$

${}^{14}C_4 \times {}^{7}C_2$: número de comissões formadas por 4 raparigas e 2 rapazes.
${}^{14}C_5 \times {}^{7}C_1$: números de comissões formadas por 5 raparigas e 1 rapaz.
É possível formar 35 035 comissões com elementos dos 2 géneros mas com mais raparigas do que rapazes.

45.1. O número de equipas de 4 pessoas que se podem formar com pelo menos um rapaz é a diferença entre o número total de equipas de 4 pessoas e o número total de equipas com 4 raparigas.

$${}^{10}C_4 - {}^{7}C_4 = 210 - 35 = 175$$

${}^{10}C_4$: número total de comissões de 4 pessoas do grupo de 10 amigos.
${}^{7}C_4$: número de comissões de 4 pessoas formadas por raparigas.
É possível formar uma equipa de quatro pessoas com pelo menos um rapaz de 175 maneiras diferentes.

45.2. Para que a equipa de 4 pessoas tenha mais raparigas do que rapazes, poderá ter 3 raparigas e um rapaz ou apenas 4 raparigas.

$${}^{7}C_3 \times {}^{3}C_1 + {}^{7}C_4 = 35 \times 3 + 35 = 140$$

${}^{7}C_3 \times {}^{3}C_1$: número de comissões formadas por 3 raparigas e 1 rapaz.
${}^{7}C_4$: número de comissões formadas por 4 raparigas.
É possível formar uma equipa de quatro pessoas com mais raparigas do que rapazes de 140 maneiras diferentes.

Pág. 45

46.1. ${}^{7}C_5 + {}^{7}C_6 + {}^{7}C_7 = 21 + 7 + 1 = 29$

${}^{7}C_5$: número de conjuntos com 5 pessoas.
${}^{7}C_6$: número de conjuntos com 6 pessoas.
${}^{7}C_7$: número de conjuntos com 7 pessoas.
É possível formar 29 conjuntos com pelo menos 5 pessoas.

46.2. Para que o conjunto de cinco pessoas tenha mais raparigas do que rapazes, poderá ter 3 raparigas e 2 rapazes ou 4 raparigas e 1 rapaz.

$${}^{4}C_3 \times {}^{3}C_2 + {}^{4}C_4 \times {}^{3}C_1 = 4 \times 3 + 1 \times 3 = 15$$

${}^{4}C_3 \times {}^{3}C_2$: número de conjuntos com 3 raparigas e 2 rapazes.

$^{4}C_4 \times {}^{3}C_1$: número de conjuntos com 4 raparigas e 1 rapaz.
É possível formar 15 conjuntos de 5 pessoas com mais raparigas do que rapazes.

47.1. Para que da comissão faça parte a delegada e tenha pelo menos 2 rapazes e 2 raparigas, temos que considerar duas possibilidades: ou a comissão é composta pela delegada, 2 outras raparigas e 2 rapazes ou é formada pela delegada, 1 outra rapariga e 3 rapazes.

$^{1}C_1 \times {}^{15}C_2 \times {}^{12}C_2 + {}^{1}C_1 \times {}^{15}C_1 \times {}^{12}C_3 =$

$= 105 \times 66 + 15 \times 220 = 10\,230$

$^{1}C_1 \times {}^{15}C_2 \times {}^{12}C_2$: número de comissões formadas pela delegada, 2 outras raparigas e 2 rapazes.

$^{1}C_1 \times {}^{15}C_1 \times {}^{12}C_3$: número de comissões formadas pela delegada, 1 outra rapariga e 3 rapazes.

É possível formar 10 230 comissões das quais fazem parte a delegada, pelo menos 2 rapazes e pelo menos 2 raparigas.

47.2. O número de comissões formadas por 3 rapazes e 3 raparigas das quais não fazem parte, em simultâneo, a delegada e o subdelegado é a diferença entre o número total de comissões formadas por 3 rapazes e 3 raparigas e o número destas comissões das quais fazem parte a delegada e o delegado em simultâneo.

$^{16}C_3 \times {}^{12}C_3 - {}^{2}C_2 \times {}^{15}C_2 \times {}^{11}C_2 =$

$= 560 \times 220 + 1 \times 105 \times 55 = 117\,425$

$^{16}C_3 \times {}^{12}C_3$: número total de comissões formadas por 3 raparigas e 3 rapazes.

$^{2}C_2 \times {}^{15}C_2 \times {}^{11}C_2$: número de comissões formadas pela delegada, o subdelegado, 2 outras raparigas e 2 outros rapazes.

É possível escolher 117 425 comissões diferentes formadas por 3 raparigas e 3 rapazes das quais não fazem parte a delegada e o subdelegado em simultâneo.

Pág. 46

48.1. $^{10}C_4 \times {}^{6}C_4 = 210 \times 15 = 3150$

$^{10}C_4$: número de formas diferentes de ocupar 4 das 10 posições com as bolas numeradas com o número 1.

$^{6}C_4$: número de formas diferentes de ocupar 4 das 6 posições restantes com as bolas numeradas com o número 2 (os lugares que sobram serão ocupados com bolas numeradas com 3).

Podem-se obter 3150 números diferentes.

48.2. Para que o número seja par terá que terminar em 2.
Resta ocupar as restantes 9 posições com 4 bolas numeradas com 1, 3 bolas numeradas com 2 e 2 bolas numeradas com 3.

$^{9}C_4 \times {}^{5}C_3 = 126 \times 10 = 1260$

$^{9}C_4$: número de formas diferentes de ocupar 4 das 9 posições com as bolas numeradas com 1.

$^{5}C_3$: número de formas diferentes de ocupar 3 das 5 posições restantes com as bolas numeradas com 2 (os lugares que sobram serão ocupados com as bolas numeradas com 3).

Podem obter-se 1260 números pares diferentes.

48.3. Para que os números sejam ímpares tem que terminar em 1 ou em 3.

- Se os números terminam em 1:

$^{9}C_3 \times {}^{6}C_4 = 84 \times 15 = 1260$

$^{9}C_3$: número de formas diferentes de ocupar 3 dos 9 lugares disponíveis com as bolas numeradas com 1.

$^{6}C_4$: número de formas diferentes de ocupar 4 das 6 posições restantes com bolas numeradas com 2 (as restantes posições serão ocupadas com as bolas numeradas com 3).

- Se os números terminam em 3:

$^{9}C_4 \times {}^{5}C_4 = 126 \times 5 = 630$

$^{9}C_4$: número de formas diferentes de ocupar 4 dos 9 lugares disponíveis com as bolas numeradas com 1.

$^{5}C_4$: número de formas diferentes de ocupar 4 das 5 posições restantes com bolas numeradas com 2 (a posição que sobra será ocupada com a outra numerada com 3).

$1260 + 630 = 1890$

Podem formar-se 1890 números ímpares diferentes.

49.1. Uma vez que as fichas são iguais, não interessa a ordem.
Temos 25 lugares para colocar 12 fichas iguais.

$^{25}C_{12} = 5\,200\,300$

É possível dispor as fichas de 5 200 300 maneiras diferentes.

49.2. Existem 9 casas nas diagonais e 16 casas fora destas.

$^{9}C_8 \times {}^{16}C_4 = 9 \times 1820 = 16\,380$

$^{9}C_8$: número de formas diferentes de ocupar 8 das 9 casas das diagonais com 8 fichas.

$^{16}C_4$: número de formas diferentes de ocupar 4 das 16 casas fora das diagonais com as 4 fichas restantes.

É possível dispor as 12 fichas de forma que 8 e só 8 ocupem casas das diagonais de 16 380 maneiras diferentes.

49.3. Para que pelo menos 8 fichas ocupem casas das diagonais, podemos considerar 2 casos: ou são 8 e só 8 fichas nas diagonais (visto em **48.2.**) ou são 9 fichas nas diagonais.
Se são 9 fichas nas diagonais:
$1 \times {}^{16}C_3 = 1 \times 560 = 560$
1: há apenas 1 forma de ocupar as nove casas das diagonais com 9 fichas.
${}^{4}C_3$: número de formas de ocupar 3 das 16 casas fora das diagonais com as restantes 3 fichas.
$16\,380 + 560 = 16\,940$
É possível dispor as 12 fichas de modo que pelo menos 8 ocupem casas das diagonais de 16 940 maneiras diferentes.

49.4. ${}^{5}C_2 \times {}^{15}C_{12} = 10 \times 455 = 4550$
${}^{5}C_2$: número de formas diferentes de escolher duas das 5 filas horizontais para ficarem vazias.
${}^{15}C_{12}$: número de formas diferentes de colocar as 12 fichas nas 15 casas das 3 filas horizontais disponíveis.
É possível dispor as 12 fichas de modo que duas filas horizontais fiquem vazias de 4550 maneiras diferentes.

Pág. 47

50.1. <u>1.º processo:</u>
${}^{5}C_1 \times {}^{8}C_1 + 2 = 5 \times 8 + 2 = 42$
${}^{5}C_1 \times {}^{8}C_1$: número de formas diferentes de escolher um dos 5 pontos da reta *r* e 1 dos 8 pontos da reta *s* para definir uma reta.
2: as retas *r* e *s*.
<u>2.º processo:</u>
${}^{13}C_2 - {}^{5}C_2 - {}^{8}C_2 + 2 = 78 - 10 - 28 + 2 = 42$
${}^{13}C_2$: número de maneiras de escolher 2 dos 13 pontos.
${}^{5}C_2$: número de formas de escolher 2 dos 5 pontos da reta *r*.
${}^{8}C_2$: número de formas de escolher 2 dos 8 pontos da reta *s*.
2: as retas *r* e *s*.
Há 42 retas distintas que passam em dois dos 13 pontos.

50.2. 1.º processo:
Para formar um triângulo podemos escolher 2 pontos na reta *r* e 1 na reta *s* ou podemos escolher 1 ponto na reta *r* e 2 na reta *s*.
${}^{5}C_2 \times {}^{8}C_1 + {}^{5}C_1 \times {}^{8}C_2 = 10 \times 8 + 5 \times 28 = 220$
${}^{5}C_2 \times {}^{8}C_1$: número de maneiras de escolher 2 dos 5 pontos da reta *r* e 1 dos 8 pontos da reta *s* .
${}^{5}C_1 \times {}^{8}C_2$: número de maneiras de escolher 1 dos 5 pontos da reta *r* e 2 dos 8 pontos da reta *s*.

<u>2.º processo:</u>
${}^{13}C_3 - {}^{5}C_3 - {}^{8}C_3 = 286 - 10 - 56 = 220$
${}^{13}C_3$: número de maneiras de escolher 3 dos 13 pontos.
${}^{5}C_3$: número de maneiras de escolher 3 dos 5 pontos da reta *r* (estes não formam um triângulo).
${}^{8}C_3$: número de maneiras de escolher 3 dos 8 pontos da reta *s* (estes não formam um triângulo).
Há 220 triângulos com vértices em 3 dos 13 pontos.

50.3. Para formar um quadrilátero, temos que escolher 2 pontos na reta *r* e 2 pontos na reta *s.*
${}^{5}C_2 \times {}^{8}C_2 = 10 \times 28 = 280$
${}^{5}C_2$: número de maneiras de escolher 2 dos 5 pontos da reta *r.*
${}^{8}C_2$: número de maneiras de escolher 2 dos 8 pontos na reta *s.*
É possível formar 280 quadriláteros convexos com vértices em 4 desses 13 pontos.

51. $6 \times {}^{4}C_2 = 6 \times 6 = 36$
6: número de grupos.
${}^{4}C_2$: número de jogos realizados em cada grupo.
Em cada grupo, todas as equipas se enfrentaram. Nessa fase do campeonato realizaram-se 36 jogos.

52. ${}^{3}C_1 \times {}^{8}C_4 \times {}^{7}C_4 \times {}^{5}C_2 = 3 \times 70 \times 35 \times 10 = 73\,500$
${}^{3}C_1$: número de escolhas de 1 dos 3 guarda--redes.
${}^{8}C_4$: número de escolhas de 4 dos 8 defesas.
${}^{7}C_4$: número de escolhas de 4 dos 7 médios.
${}^{5}C_2$: número de escolhas de 2 dos 5 avançados.
O selecionador pode escalar a equipa para a final de 73 500 maneiras diferentes.

Pág. 48

Tarefas de consolidação 2

1. <u>Expressão 1:</u> Existem ${}^{16}C_5$ formas diferentes de colocar os 5 chapéus vermelhos em 5 dos 16 espaços do expositor (como os chapéus são iguais entre si, não interessa a ordem). Para cada uma destas formas existem ${}^{11}C_7$ maneiras diferentes de ocupar 7 dos restantes 11 espaços do expositor com os 7 chapéus de palha. Assim, existem ${}^{16}C_5 \times {}^{11}C_7$ maneiras diferentes de arrumar os 12 chapéus no expositor.
<u>Expressão 2:</u> Existem ${}^{6}C_{12}$ formas diferentes de selecionar 12 dos 16 espaços do expositor para colocar os 12 chapéus. Para cada uma dessas seleções, existem ${}^{12}C_5$ formas diferentes de escolher 5 desses 12 espaços para colocar os 5

chapéus vermelhos. Os chapéus cor de palha ocuparão os restantes 7 espaços dessa seleção. Assim, existem ${}^{16}C_{12} \times {}^{12}C_5$ formas diferentes de arrumar os 12 chapéus no expositor.

2. Opção (C).

$2 \times {}^5A_4 \times 6!$

$2!$: número de maneiras de escolher ordenadamente a prateleira das tartes.

${}^5A_4$: número de maneiras de escolher ordenadamente quatro dos 5 lugares da prateleira para colocar tartes.

$6!$: número de maneiras de ordenar os cinco bolos de chocolate e o bolo de aniversário nos lugares que sobram.

3.1. ${}^6C_2 \times 5 \times {}^{10}A_4 = 15 \times 5 \times 5040 = 378\,000$

${}^6C_2$: número de maneiras diferentes de escolher 2 das 6 posições para colocar as 2 vogais iguais.

5: número de escolhas da vogal.

${}^{10}A_4$: número de maneiras de escolher ordenadamente 4 dos 10 algarismos possíveis para ocupar as restantes posições.

É possível formar 378 000 códigos de modo que os algarismos sejam todos diferentes e as vogais sejam iguais.

3.2. <u>1.º processo:</u>

${}^{10}A'_4 \times {}^5C_2 \times {}^5A'_2 = 10^4 \times 10 \times 5^2 = 2\,500\,000$

${}^{10}A'_4$: para cada algarismo, há 10 possibilidades de escolha.

${}^5C_2$: número de maneiras diferentes de escolher 2 posições possíveis (nos extremos ou entre 2 algarismos) para colocar as 2 vogais.

$_\uparrow A_\uparrow A_\uparrow A_\uparrow A_\uparrow$

${}^5A'_2$: para cada vogal, há 5 possibilidades de escolha.

<u>2.º processo:</u>

Para determinar o número de códigos que é possível formar de modo que não haja vogais seguidas, podemos calcular a diferença entre o número total de códigos com 4 algarismos e 2 vogais o número de código em que as vogais estão seguidas.

O número total de códigos com 4 algarismos e 2 vogais é:

${}^6C_2 \times {}^{10}A'_4 \times {}^5A'_2 = 15 \times 10^4 \times 5^2 = 3\,750\,000$

${}^6C_2$: número de maneiras de escolher 2 dos 6 lugares para colocar as 2 vogais.

${}^{10}A'_4$: para cada algarismo, há 10 possibilidades de escolha.

${}^5A'_2$: para cada vogal, há 5 possibilidades de escolha.

O número de códigos em que as duas vogais aparecem seguidas é:

${}^{10}A'_4 \times {}^5A'_2 \times 5 = 10^4 \times 5^2 \times 5 = 1\,250\,000$

${}^{10}A'_4$: para cada algarismo, há 10 possibilidades de escolha.

${}^5A'_2$: para cada vogal, há 5 possibilidades de escolha.

5: número de maneiras de colocar as duas vogais seguidas (nos extremos ou entre 2 algarismos).

$3\,625\,000 - 1\,250\,000 = 2\,500\,000$

É possível formar 2 500 000 códigos de modo que não haja vogais seguidas.

4. Para que o número seja divisível por 5, pode terminar em zero ou em cinco.

● Se terminar em zero:

$3 \times {}^5A_3 \times 1 = 3 \times 60 = 180$

3: número de possibilidades para o primeiro algarismo (pode ser 4, 5 ou 6).

${}^5A_3$: número de maneiras de ordenar 3 dos 5 algarismos restantes para ocupar as posições do centro.

1: algarismo 0.

● Se terminar em 5:

$2 \times {}^5A_3 \times 1 = 2 \times 60 = 120$

2 : número de possibilidades para o primeiro algarismo (pode ser 4 ou 6, uma vez que o 5 já ocupa a última posição).

${}^5A_3$: número de maneiras de ordenar 3 dos 5 algarismos restantes para ocupar as posições do centro.

1 : algarismo 5.

$180 + 120 = 300$

Com 5 algarismos do conjunto *A* é possível formar 300 números divisíveis por 5 e superiores a 40 000.

Pág. 49

5. ${}^6C_4 \times {}^5C_2 \times P_4 \times P_2 \times 2 \times P_2 \times P_3 \times 4 =$

$= 15 \times 10 \times 4! \times 2! \times 2 \times 2! \times 3! \times 2 \times 2 = 691\,200$

${}^6C_4$: número de maneiras de escolher 4 dos 6 vestidos para colocar no primeiro expositor.

${}^5C_2$: número de maneiras de escolher 2 dos 5 conjuntos para colocar no primeiro expositor.

P_4 : número de maneiras de ordenar 4 vestidos.

P_2 : número de maneiras de ordenar os 2 conjuntos.

2 : os 4 vestidos podem ficar à esquerda ou à direita dos 2 conjuntos.

P_2 : número de maneiras de ordenar os 2 vestidos restantes.

P_3 : número de maneiras de ordenar os 3 conjuntos restantes.

2 : os 2 vestidos podem ficar à esquerda ou à direita dos 3 conjuntos.
2 : os 4 vestidos e 2 conjuntos podem ficar em qualquer um dos 2 expositores.
A Inês pode distribuir as 11 peças da sua nova coleção pelos dois expositores de 691 200 modos diferentes.

6.1. Se uma diagonal ficar ocupada com peças vermelhas, basta distribuir pelas restantes casas do tabuleiro as restantes peças vermelhas e as peças amarelas.

$^{12}C_3 \times {}^9C_5 \times 2 = 220 \times 126 \times 2 = 55\,440$

$^{12}C_3$: número de maneiras de escolher 3 das 12 casas do tabuleiro (excluem-se as 4 casas da diagonal já ocupada com peças vermelhas) para colocar as restantes 3 peças vermelhas.
$^9C_5$: número de maneiras de escolher 5 das restantes 9 casas do tabuleiro para colocar as peças amarelas.
2: Número de maneiras de escolher uma das duas diagonais para ficar obrigatoriamente ocupada com as peças vermelhas.
É possível colocar as peças no tabuleiro de modo que uma das diagonais seja ocupada por peças vermelhas de 55 440 maneiras diferentes.

6.2. $4 \times {}^{12}C_7 = 4 \times 792 = 3168$

4: número de escolhas da coluna que fica sem peças.
$^{12}C_7$: número de maneiras de escolher 7 dos 12 lugares disponíveis para colocar as bolas vermelhas (as amarelas ficam nos lugares que sobram).
É possível colocar as peças no tabuleiro de modo que uma das colunas fique sem peças de 3168 maneiras diferentes.

7. $^{10}C_3 \times {}^{12}C_4 \times P_7 = 120 \times 495 \times 7! = 299\,376\,000$

$^{10}C_3$: número de maneiras de escolher 3 dos 10 rapazes para fazer parte da comissão.
$^{12}C_4$: número de maneiras de escolher 4 das 12 raparigas para fazer parte da comissão.
P_7 : número de maneiras de ordenar os 7 membros para fazer parte da comissão (uma vez que vão desempenhar funções distintas).
Os alunos podem ser escolhidos para o exercício das respetivas funções 299 376 000 maneiras diferentes.

8. $3 \times {}^2A'_6 - 3 \times 2 = 3 \times 64 - 6 = 192 - 6 = 186$

$3 \times {}^2A'_6$: número total de maneiras de pintar a esfera de uma cor e as faces do cubo de uma das 2 restantes cores.
3×2 : número de maneiras de pintar a esfera de uma cor e as 6 faces do cubo todas da mesma cor (diferente da esfera).
Opção (C).

Pág. 51

Avaliação formativa 2

1.1. P_7 é o número de maneiras de ordenar as sete crianças.
$P_7 = 7! = 5040$
As crianças podem-se colocar em fila de 5040 maneiras diferentes.

1.2. $P_3 \times P_4 \times 5 = 3! \times 4! \times 5 = 6 \times 24 \times 5 = 720$

P_3 : número de maneiras de ordenar as 3 crianças com chapéu.
P_4 : número de maneiras de ordenar as 4 crianças sem chapéu.
5 : número de maneiras de colocar o conjunto das 3 crianças de chapéu (nos extremos ou entre duas crianças sem chapéu).
As crianças podem colocar-se em fila de forma que as 3 que usam chapéu fiquem seguidas de 720 maneiras diferentes.

1.3. $4! \times {}^5A_2 \times {}^3A_2 = 24 \times 20 \times 6 = 2880$

$4!$: número de maneiras de ordenar as 4 crianças sem chapéu.
$^5A_2$: número de maneiras de escolher ordenadamente 2 espaços para colocar as 3 crianças com chapéu (2 juntas e 1 separada das outras).
(A – Criança sem chapéu)
$\uparrow A \uparrow A \uparrow A \uparrow A \uparrow$
$^3A_2$: número de maneiras de escolher ordenadamente 2 das 3 crianças de chapéu para ficarem juntas.
As sete crianças podem colocar-se em fila de forma que 2 e apenas 2 das que usam chapéu fiquem seguidas de 2880 maneiras diferentes.

2.1. $^4C_1 \times {}^5C_1 + 2 = 4 \times 5 + 2 = 22$

$^4C_1 \times {}^5C_1$: número de formas diferentes de escolher um dos 4 pontos da reta *r* e 1 dos 5 pontos da reta *s* para definir uma reta.
2: as retas *r* e s.
Há 22 retas distintas que passam em 2 dos 9 pontos.

2.2. Para formar um triângulo, podemos escolher 2 pontos na reta *r* e 1 na reta *s* ou 1 ponto na reta *r* e 2 na reta *s*.

$^4C_2 \times {}^5C_1 + {}^4C_1 \times {}^5C_2 = 6 \times 5 + 4 \times 10 = 70$

$^4C_2 \times {}^5C_1$: número de maneiras de escolher 2 dos 4 pontos da reta *r* e 1 dos 5 pontos da reta *s.*
$^4C_1 \times {}^5C_2$: número de maneiras de escolher 1 dos 4 pontos da reta *r* e 2 dos 5 pontos da reta *s.*
Os nove pontos definem 70 triângulos.

3. **I.** Para que os algarismos 9, 8 e 7 apareçam seguidos e por esta ordem, temos que considerar duas possibilidades: ou estes algarismos são os 3 primeiros ou não são.

● Se o número começa com os algarismos 987:

$^7A_2$: representa todas as maneiras de ordenar 2 dos restantes 7 algarismos para ocuparem os lugares das dezenas e das unidades.

$^7A_2 = 42$

Existem 42 números de 5 algarismos diferentes que começam por 987.

● Se o número não começa com os algarismos 9, 8 e 7.

$6 \times 6 \times 2 = 72$

6: número de possibilidades para o primeiro algarismo (não pode ser 0 nem 9, 8 e 7).

6: número de possibilidades para o outro algarismo (diferente do 1.º algarismo e de 9, 8 e 7).

2: número de posições dos algarismos 9, 8 e 7 (podem estar nos 3 lugares centrais ou podem estar no fim).

$42 + 72 = 114$

I. – a)

II. Para que o número seja par ou múltiplo de 5, podemos considerar 2 possibilidades: ou o número termina em 0 ou termina em 2, 4, 6, 8 ou 5.

● Se o número termina em 0:

$9 \times {}^8A_3 \times 1 = 9 \times {}^8A_3$

9: número de possibilidade para o 1.º algarismo (só não pode ser 0).

$^8A_3$: número de maneiras de selecionar ordenadamente 3 dos restantes algarismos.

1: o algarismo 0.

● Se o número termina em 2, 4, 6, 8 ou 5:

$8 \times {}^8A_3 \times 5 = 40 \times {}^8A_3$

8: número de possibilidades para o primeiro algarismo (não pode ser 0 nem igual ao algarismo das unidades).

$^8A_3$: número de maneiras de ordenar 3 dos 8 algarismos restantes.

5: número de possibilidades para o algarismo das unidades.

$9 \times {}^8A_3 + 40 \times {}^8A_3 = 49 \times {}^8A_3$

II. – c)

III. Números primos entre 0 e 9: 2, 3, 5 e 7.

Então, o número terá que ser formado por 5 dos algarismos 0, 1, 4, 6, 8 e 9:

$5 \times {}^5A_4$

5 : número de possibilidades para o primeiro algarismo (não poder ser 0).

$^5A_4$: número de maneiras de ordenar 4 dos 5 algarismos restantes, sem repetir.

III. – b)

4. Para que todos os elementos da comissão tenham profissões diferentes, a Madalena e o João não podem fazer parte dessa em simultâneo.

Uma forma de calcular o número de comissões diferentes é calcular a diferença entre o número total de comissões possíveis de se formar e o número total de comissões de que a Madalena e o João fazem parte em simultâneo.

● Número total de comissões formadas por 3 homens e 3 mulheres:

$^6C_3 \times {}^8C_3 = 20 \times 56 = 1120$

$^6C_3$: número de possibilidades de escolha de 3 das 6 mulheres.

$^8C_3$: número de possibilidades de 3 dos 8 homens.

● Número de comissões de que a Madalena e o João fazem parte em simultâneo:

$^2C_2 \times {}^5C_2 \times {}^7C_2 = 1 \times 10 \times 21 = 210$

$^2C_2$: A Madalena e o João fazem parte da comissão.

$^5C_2$: número de possibilidades da escolha de 2 das 5 mulheres restantes.

$^7C_2$: número de possibilidades de escolha de 2 dos 7 homens restantes.

$1120 - 210 = 910$

Pode formar-se uma comissão em que todos os elementos tenham profissões diferentes de 910 maneiras diferentes.

3. Resolução de problemas recorrendo a arranjos e combinações

Pág. 52

Tarefa 3

1. 10.º ano – 3 alunos

11.º ano – 5 alunos

12.º ano – 2 alunos

— — — — —

— — — — —

$3 \times 2 \times 3! \times 7! = 181\,440$

3 : número de maneiras de os 3 alunos do 10.º ano podem ficarem juntos (lugares 123, 234 ou 345)

2 : os alunos do 10.º ano podem ficar juntos numa das duas filas.

$3!$: números de maneiras de ordenar os 3 alunos do 10.º ano.

$7!$: número de maneiras de ordenar os alunos do 11.º ano e do 12.º ano.

Os 10 alunos podem sentar-se de 181 440 maneiras diferentes.

2. Depois de se colocar um ovo vermelho em cada saco e um ovo azul em cada caixa, faltam distribuir três ovos vermelhos e dois azuis.

$^7C_5 \times {}^5C_3 = 210$

${}^7C_5$: número de maneiras de escolher 5 embalagens das 7 existentes (4 sacos e 3 caixas).
${}^5C_3$: número de maneiras de colocar as 3 bolas vermelhas nas 5 embalagens (sacos ou caixas) selecionadas.
Em alternativa, ${}^7C_3 \times {}^4C_2 = 210$
Os 7 ovos podem ser escolhidos de 210 maneiras diferentes.

Pág. 53

53. __ __ __ __ __ __ __ __ __
${}^9C_3$ é o número de maneiras de escolher 3 lugares dos 9 existentes para colocar as bolas azuis.
Dos 6 lugares restantes podem ser escolhidas 2, para colocar as bolas amarelas, de ${}^6C_2$ maneiras diferentes.
As 4 bolas vermelhas, por serem diferentes, podem ocupar os restantes 4 lugares de 4! maneiras diferentes.
Assim, uma resposta para o problema é
${}^9C_3 \times {}^6C_2 \times 4!$
${}^9A_4$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente 4 lugares, dos 9 existentes, para colocar as bolas vermelhas (diferentes entre si).
Dos 5 lugares restantes vão ser escolhidos 3 para colocar as bolas azuis (iguais entre si), o que pode ser feito de ${}^5C_3$ modos diferentes.
Por último sobram dois lugares para as duas bolas amarelas.
Assim, uma resposta para o problema é
${}^9A_4 \times {}^5C_3 \times {}^2C_2$
${}^9A_4$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente 4 lugares, dos 9 disponíveis, para colocar as bolas vermelhas que são diferentes entre si.
${}^5C_2$ é o número de maneiras de escolher dois lugares, entre os cinco disponíveis, para colocar as bolas amarelas (iguais entre si). Depois só existe uma maneira de colocar as 3 bolas azuis nos 3 lugares disponíveis.
Assim, ${}^9A_4 \times {}^5C_2 \times 1$ é uma resposta possível para o problema.

54. 12 livros: 3 de Física, 4 de Geometria Descritiva e 5 de Matemática A.

54.1. $\dfrac{12!}{3! \times 4! \times 5!} = 27\,720$
Ou ${}^{12}C_3 \times {}^9C_4 \times {}^5C_5 = 27\,720$
Podemos fazer de 27 720 maneiras diferentes.

54.2. $\boxed{\text{Fís.}}\ \boxed{\text{G.D.}}\ \boxed{\text{Mat.}}$
$3! = 6$
3! : número de maneiras de ordenar as 3 disciplinas.
Podemos fazer 6 maneiras diferentes.

54.3. $\dfrac{9!}{4! \times 5!} = 126$
Ou ${}^9C_4 \times {}^5C_5 = 126$
Ou ${}^9C_5 \times {}^4C_4 = 126$
Podemos fazer de 126 maneiras diferentes.

54.4. __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __
$10 \times {}^9C_4 \times {}^5C_5 = 1260$
10: número de lugares que o bloco dos livros de Física pode ocupar.
Podemos fazer de 1260 maneiras diferentes.

Pág. 54

55.1. $\dfrac{10!}{2! \times 3!} = 302\,400$
Ou ${}^{10}C_3 \times {}^7C_2 \times 5! = 302\,400$
${}^{10}C_3$: número de maneiras de escolher 3 espaços, dos 10 disponíveis, para colocar as letras O.
${}^7C_2$: número de maneiras de escolher 2 espaços dos 7 disponíveis para colocar as letras P.
5 ! : Número de maneiras de ordenar as letras H, I, T, A, M, O.
São 302 400 anagramas.

55.2. A/I _ _ _ _ _ _ _ _ _ ou O _ _ _ _ _ _ _ _ _
$2 \times {}^9C_3 \times {}^6C_2 \times 4! + 1 \times {}^9C_2 \times {}^7C_2 \times 5! = 151\,200$
$2 \times {}^9C_3 \times {}^6C_2 \times 4!$ palavras começadas por A ou I.
${}^9C_2 \times {}^7C_2 \times 5!$ palavras começadas por O.
Começam por uma vogal 151 200 palavras.

56. 1 613 667 (sete algarismos)

56.1. Se os algarismos fossem todos diferentes a resposta seria $P_7 = 7!$
Como existem algarismos iguais, são menos os números que se conseguem escrever. Se trocarmos entre si os algarismos 1 ou os algarismos 6, obtemos números iguais. Os algarismos 1 podem permutar entre si 2! modos diferentes e os algarismos 6 podem permutar entre si 3! modos diferentes. Logo, cada sequência é contada $2! \times 3!$ vezes.
Assim, a resposta é $\dfrac{7!}{2! \times 3!} = 420$ números.
Ou, ${}^7C_3 \times {}^4C_2 \times 2 = 420$

56.2. Para os números serem superiores a 6 000 000 ou têm como 1.º algarismo 6 ou 7.

6 _ _ _ _ _ _ ou 7 _ _ _ _ _ _

$^{6}C_2 \times {^{4}C_2} \times 2! + {^{6}C_3} \times {^{3}C_2} = 240$

$^{6}C_2$: número de maneiras de colocar os três algarismos 6 nos seis espaços disponíveis.

$^{4}C_2$: número de maneiras de escolher onde colocar os dois algarismos 1 nos quatro espaços disponíveis.

2! : Número de maneiras de ordenar os algarismos 3 e 7.

$^{6}C_3$: escolhas da posição dos algarismos 6

$^{3}C_2$: escolhas da posição dos algarismos 1

São maiores que 6 000 000, 240 números.

Pág. 55

57. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ _ _ _ _ _

$^{5}C_3 \times 4 \times 4 = 160$

$^{5}C_3$: número de posições dos três algarismos 5.

4×4 : sequências de dois algarismos de $\{1,2,3,4\}$

Têm exatamente três algarismos 5, 160 números.

58. 9 alunos

58.1. $\underbrace{\text{4 alunos}}_{\text{João/José}}$ $\underbrace{\text{5 alunos}}_{\text{José/João}}$

$^{7}C_3 \times 2 = 70$

ou $^{7}C_4 \times 2 = 70$

$^{7}C_3$ número de maneiras de escolher 3 alunos dos 7 (sem o João e o José).

2: ou João ou José

O quinto elemento do grupo é o João ou o José.

Os dois grupos podem-se formar de 70 formas diferentes.

58.2. $\underbrace{\text{4 alunos}}_{\substack{\text{João}\\\text{José}}}$ $\underbrace{\text{4 alunos}}_{\substack{\text{José}\\\text{João}}}$

$\frac{^{6}C_3}{2} \times 2 = 20$

$\frac{^{6}C_3}{2}$: número de grupos de 3 que é possível formar (dividimos por 2 porque, por terem a mesma dimensão, aparecem em duplicado. Por exemplo, 1, 2, 3 – 4, 5, 6 e 4, 5, 6 – 1, 2, 3 aparecem como escolhas diferentes, mas são a mesma escolha)

2 pode ser João ou José.

Os dois grupos podem formar-se de 20 formas diferentes.

Pág. 56

59. 4 azuis; 3 vermelhas

$^{12}C_7 \times {^{7}C_3}$

$^{12}C_7$: seleção dos 7 quadrados, entre os 12 disponíveis para colocar as 4 fichas azuis e as 3 fichas vermelhas.

$^{7}C_3$: escolha dos 3 quadrados, entre os 7 já selecionados, para colocar as fichas vermelhas (iguais).

Opção (B)

60. Como as bolas são iguais e cada caixa fica pelo menos uma bola, o número de maneiras de colocar as 7 bolas é o número de maneiras de colocar as 3 bolas que sobram.

Há 3 situações a considerar:

- as bolas são colocadas na mesma caixa e há **4** possibilidades porque existem 4 caixas diferente;
- coloca-se uma bola em 3 das 4 caixas e há $^{4}C_3$ modos de o fazer;
- coloca-se uma bola numa caixa e duas noutra e as possibilidades são $^{4}A_2$.

$4 + {^{4}C_3} + {^{4}A_2} = 20$

Podem colocar-se as 7 bolas de 20 maneiras diferentes.

Pág. 57

61. 11.º A – 10 alunos

11.º B – 15 alunos

Autocarro 1: 20 lugares

Autocarro 2: 20 lugares

$^{15}C_{10} \times 20! \times {^{20}A_5} \times 2$

$^{15}C_{10}$: número de maneiras de escolher 10 alunos do 11.º B entre os 15 existentes para, juntamente com os da turma A, completar um dos autocarros.

20! : número de maneiras de ordenar os 20 alunos no autocarro já completo.

$^{20}A_5$: número de maneiras de ordenar os 5 alunos que faltam pelos 20 lugares do autocarro.

2: escolha dos autocarros.

Opção (D)

62. 20 compartimentos

11 bolas (6 brancas (indistinguíveis), 5 cores diferentes)

$^{20}C_{11} \times {^{11}A_5}$

Como temos 11 bolas para colocar em 20 compartimentos disponíveis, isso pode ser feito de $^{20}C_{11}$ maneiras diferentes.

Os compartimentos para as cinco bolas de cores diferentes podem ser escolhidos entre os 11 existentes de $^{11}A_5$ maneiras diferentes.

Os seis compartimentos restantes ficam para as bolas brancas.

Assim, há ${}^{20}C_{11} \times {}^{11}A_5$ maneiras diferentes de colocar as 11 bolas na caixa.

${}^{20}A_5 \times {}^{15}C_6$

Há ${}^{20}A_5$ maneiras diferentes de escolher, ordenadamente, cinco compartimentos da caixa, dos 20 disponíveis, para colocar as 5 bolas diferentes.

Para cada uma destas escolhas, há ${}^{15}C_6$ maneiras de escolher seis compartimentos da caixa, dos restantes 15, para colocar as 6 bolas brancas.

Assim, há ${}^{20}A_5 \times {}^{15}C_6$ maneiras diferentes de colocar as 11 bolas na caixa.

Pág. 58

63. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

63.1. ${}^3C_2 \times 8 = 24$

${}^3C_2$ número de maneiras de escolher onde colocar os algarismos 5

8: algarismos diferentes de 5

É possível formar 24 números.

63.2. $8 \times 7 \times 4 = 224$

É possível formar 224 números.

63.3. Total de números de 3 algarismos diferentes:

$9 \times 8 \times 7 = 504$

Números cujo produto dos 3 algarismos é ímpar (os três algarismos são ímpares);

$5 \times 4 \times 3 = 60$

Números cujo produto é par:

$504 - 60 = 444$

É possível formar 444 números.

64. $\_\ 1\ \_\ 3\ \_\ 5\ 7\ \_$

I) ${}^8C_4 \times 4! - 1$

${}^8C_4$ é o número de maneiras de colocar os algarismos ímpares mantendo a ordem.

$4!$ é o número de maneiras de ordenar os 4 algarismos pares (4, 8, 6 e 2).

O algarismo 1, subtraído ao produto ${}^8C_4 \times 4!$, refere-se a pretender-se números diferentes do dado.

Assim, uma resposta correta ao problema é ${}^8C_4 \times 4! - 1$

II) $\frac{8!}{4!} - 1$

$8!$: é o número de maneiras de ordenar os 8 algarismos que constituem o número 41 836 572. Estão também a ser contabilizados as trocas entre os 4 algarismos ímpares, que não deve acontecer.

Assim, os números que se podem obter são $\frac{8!}{4!}$.

Subtrai-se a este quociente uma unidade uma vez que o número dado, 41 836 572, não deve ser considerado.

Uma resposta correta ao problema é $\frac{8!}{4!} - 1$.

Pág. 59

65. 6 raparigas; 7 rapazes

65.1. $6 \times {}^{12}A_4 = 71\,280$

6: número de maneiras de escolher a presidente.

${}^{12}A_4$: número de maneiras de escolher 4 pessoas, para ocupar cargos diferentes, das 12 disponíveis.

A lista pode ser formada de 71 280 maneiras.

65.2. Para a direção ter mais rapazes do que raparigas, pode ser:

- formada só por rapazes:

${}^7A_5 = 2520$

- formada por quatro rapazes e uma rapariga:

${}^7C_4 \times {}^6C_1 \times 5! = 25\,200$

- formada por três rapazes e duas raparigas:

${}^7C_3 \times {}^6C_2 \times 5! = 63\,000$

$2520 + 25\,200 + 63\,000 = 90\,720$

A lista pode ser formada de 90 720 maneiras.

65.3. ${}^{13}A_5 - {}^6A_5 - {}^7A_5 = 151\,200$

${}^{13}A_5$: todas as opções.

${}^6A_5$: direção só com raparigas.

${}^7A_5$: direção só com rapazes.

A direção pode ser formada de 151 200 maneiras diferentes.

Pág. 60

66.1. ${}^9C_4 \times 5! = 15\,120$

${}^9C_4$: número de maneiras de escolher os lugares das bolas vermelhas pela ordem 4, 3, 2 e 1.

$5!$: número de maneiras de ordenar as bolas azuis.

É possível formar 15 120 sequências.

66.2. $\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$

$5! \times {}^6A_4 = 43\,200$

$5!$: número de maneiras de ordenar as bolas azuis.

${}^6A_4$: número de maneiras de escolher ordenadamente os 4 lugares para as bolas vermelhas entre as 6 possibilidades.

É possível formar 43 200 sequências diferentes.

Pág. 61

67. SURREALISMO

67.1. $\frac{11!}{2! \times 2!} = 9\,979\,200$

Ou

${}^{11}C_2 \times {}^{9}C_2 \times 7! = 9\,979\,200$

Podem obter-se 9 979 200 palavras.

67.2. ${}^{11}C_5 \times {}^{6}C_2 \times {}^{4}C_2 \times 2! = 83\,160$

${}^{11}C_5$: número de maneiras de colocar as vogais pela ordem V, E, A, I, O

${}^{6}C_2 \times {}^{4}C_2$: número de maneiras de escolher os locais para as letras S e R.

$2!$: número de maneiras de ordenar as letras L e M.

A ordem das vogais não foi alterada em 83 160 palavras.

68. AXIOMA

A, I, O, A 21 consoantes

__ __ __ __ __ __

${}^{6}C_4 \times {}^{4}A_2 \times {}^{21}A'_2 = 79\,380$

${}^{6}C_4$: número de maneiras de escolher lugares para as vogais;

${}^{4}C_2$ escolha de lugares para I e O entre os 4 lugares selecionados;

${}^{4}A'_2$ escolha ordenada de duas consoantes

A este número de palavras é preciso retirar um caso que é o da palavra AXIOMA.

Existem $79\,380 - 1 = 79\,379$ palavras nas condições pedidas.

Pág. 62

69. Chocolate

Fruta (ananás, banana, cereja, limão, morango)

69.1. ${}^{12}C_4 \times {}^{8}A_5 = 3\,326\,400$

${}^{12}C_4$: número de maneiras de escolher os 4 recipientes, dos 12 existentes, para colocar o gelado de limão.

${}^{8}A_5$: número de maneiras de escolher ordenadamente os 5 recipientes, entre os 8 disponíveis, para colocar os sabores de gelado diferentes do sabor de limão.

Podem distribuir-se os gelados de 3 326 400 maneiras diferentes.

69.2. ${}^{8}A_5 = 6720$

${}^{8}A_5$: 8 compartimentos disponíveis para colocar ordenadamente 5 sabores de gelado.

Podem distribuir-se de 6720 maneiras diferentes.

69.3. O gelado de limão pode ser distribuído por dois compartimentos em cada uma das duas filas:

${}^{3}C_2 \times {}^{4}C_2 \times {}^{4}C_2 \times {}^{8}A_5 = 725\,760$

${}^{3}C_2$: número de maneiras de escolher as duas filas, para colocar o gelado de limão, entre os três existentes.

${}^{4}C_2 \times {}^{4}C_2$: escolha dos dois recipientes em cada uma das filas para colocar o gelado de limão.

O gelado de limão pode ser distribuído por 3 recipientes numa fila e 1 noutra

${}^{3}C_2 \times {}^{4}C_3 \times {}^{4}C_1 \times 2 \times {}^{8}A_5 = 645\,120$

$725\,760 + 645\,120 = 1\,370\,880$

Outro processo:

${}^{3}C_2 \times \left({}^{8}C_4 - 2\right) \times {}^{8}A_5 = 1\,370\,880$

Podem distribuir-se de 1 370 880 maneiras diferentes.

Pág. 63

70. $\underset{A-B}{{}^{6}C_3} \times \underset{B-C}{{}^{4}C_1} = 80$

O João pode escolher o caminho de 80 maneiras diferentes.

71.1. ${}^{15}C_6 = 5005$

É possível escolher 5005 caminhos.

71.2. $\underset{A-B}{{}^{11}C_6} \times \underset{B-D}{{}^{4}C_1} = 1848$

É possível escolher 1848 caminhos.

71.3. $\underset{A-C}{{}^{6}C_2} \times \underset{C-B}{{}^{5}C_2} \times \underset{B-D}{{}^{4}C_1} = 600$

É possível escolher 600 caminhos.

71.4. ${}^{6}C_2 \times {}^{9}C_5 + 1848 - 600 = 3138$

${}^{6}C_2 \times {}^{9}C_5$ passam por C

1848 passam por B

600 passaram por C e B foram contados duas vezes.

É possível escolher 3138 caminhos.

Pág. 64

72. Número de segmentos que unem dois vértices:

${}^{20}C_2 = 190$

Número de arestas: 30

Número de diagonais das faces pentagonais:

$12\left({}^{5}C_2 - 5\right) = 60$

$190 - 30 - 60 = 100$

Um dodecaedro tem 100 diagonais.

73. ● Quatro faces pintadas com a cor 1 e duas faces pintadas com a cor 2.

${}^{5}A_2 \times {}^{6}C_4 = 300$

${}^{5}A_2$: número de maneiras de escolher as duas cores, que vão ser utilizadas para pintar o cubo entre as cinco existentes e interessa a ordem da escolha das cores porque vão pintar um número diferente de faces.

${}^{6}C_4$ número de maneiras de escolher as faces que vão ser pintadas com a cor 1.

● Cinco faces pintadas com a cor 1 e uma face pintada com a cor 2

${}^{5}A_2 \times {}^{6}C_5 = 120$

$300 + 120 = 420$

A Laura pode pintar o dado de 420 maneiras diferentes.

Pág. 65

74. Disponíveis 5 cores entre as quais amarelo.

74.1. ${}^{5}C_2 \times {}^{16}C_8 = 128\,700$

${}^{5}C_2$: número de maneiras de escolher duas cores entre as cinco existentes.

${}^{16}C_8$: número de maneiras de escolher 8 quadrados que vão ser pintados com uma das cores.

A parede pode ser pintada de 128 700 maneiras.

74.2.

a			a
	a	a	
	a	a	
a			a

$4^8 = 65\,536$

A parede pode ser pintada de 65 536 maneiras.

74.3.

a			
	a		
		a	
			a

			a
		a	
	a		
a			

Há 12 quadrados fora da diagonal, dos quais 6 vão ser pintados de amarelo e os restantes 6 vão ser pintados de outra cor.

$${}^{12}C_6 \times 4 \times 2 - {}^{8}C_2 \times 4 = 7280$$

${}^{12}C_6$ número de maneiras de escolher os quadrados que vão ser pintados de amarelo.

4 : número de possibilidades para escolher a segunda cor.

2 : duas diagonais

${}^{8}C_2 \times 4$ A situação em que as duas diagonais foram pintadas de amarelo e que foram contabilizadas duas vezes no cálculo anterior.

A parede pode ser pintada de 7280 maneiras.

Pág. 66

Tarefas de consolidação 3

1. Para a soma dos quatro algarismos ser ímpar, ou os três algarismos que faltam são ímpares ou um é ímpar e dois são pares.

Assim,

${}^{5}A_3 + 3 \times 5 \times {}^{4}A_2$

${}^{5}A_3$ número de maneiras de escolher ordenadamente três algarismos ímpares dos cinco disponíveis.

3: número de posições possíveis para colocar o algarismo ímpar.

5: possibilidades de seleção de um de algarismo ímpar

${}^{4}A_2$ número de maneiras de escolher ordenadamente dois algarismos pares dos quatro disponíveis (0, 2, 4, 6).

A resposta 1 é a correta.

2. Amarelo, lilás, magenta, vermelho

$4 \times {}^{4}C_2 \times \left(2^4 - 1\right) \times 2 \times 1 \times 1 \times 1$

4: escolha da cor para a base.

${}^{4}C_2$ número de maneiras de escolher 2 cores para as faces laterais do prisma.

$\left(2^4 - 1\right)$ número de maneiras de pintar as faces laterais do prisma.

$2 \times 1 \times 1 \times 1$ número de maneiras de pintar as faces laterais da pirâmide.

Opção (B)

3. $\underbrace{\heartsuit\heartsuit\heartsuit}_{3}\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{6}\underbrace{\square\square\square\square\square\square\square\square\square}_{9}$

${}^{12}\underset{\heartsuit}{C_1} \times {}^{6}\underset{\substack{\heartsuit\\\heartsuit}}{C_2} \times {}^{4}\underset{\substack{\bullet\\\bullet\\\bullet}}{C_3} \times {}^{11}C_3 + {}^{12}\underset{\substack{\heartsuit\\\heartsuit}}{C_2} \times {}^{6}\underset{\heartsuit}{C_1} \times {}^{5}\underset{\substack{\bullet\\\bullet\\\bullet}}{C_3} \times {}^{10}C_3$

$118\,800 + 475\,200 = 594\,000$

É possível colocar as bolachas de 594 000 maneiras diferentes.

Pág. 67

4. 4, 4, 4, 5, 5, 0

$\underline{4}\,\_\,\_\,\_\,\_\,\underline{5}$ ou $\underline{4}\,\_\,\_\,\_\,\_\,\underline{0}$ ou $\underline{5}\,\_\,\_\,\_\,\_\,\underline{5}$ ou

$\underline{5}\,\_\,\_\,\_\,\_\,\underline{0}$

${}^{4}C_2 \times 2! + {}^{4}C_2 + {}^{4}C_3 + {}^{4}C_3 = 26$

é possível formar 26 números.

5. ${}^{35}C_5 - {}^{32}C_2 = 324\,136$

${}^{35}C_5$: todos as seleções de 5 alunos que são possíveis de formar

${}^{32}C_2$: número de maneiras de selecionar os cinco alunos em que o Valdemar, a Sandra e Ana fazem parte.

os cinco alunos podem ser selecionados de 324 136 formas diferentes.

6. $\underline{2}\ \underline{\text{Ás}}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{6}$ ou $\underline{4}\ \underline{2}\ \underline{\text{Ás}}\ \_\ \_\ \_\ \underline{6}$

$4!+4\times 2!\times 3!=72$

$4!$: número de maneiras de ordenar as cartas com os números 3, 4, 5 e 7.
4 : número de lugares em que o ás e a carta com o número 2 ficam juntos.
$2!$: trocas entre o ás e a carta com o número 2
$3!$: números de maneiras de ordenar as 3 restantes cartas (5, 6, 7)
É possível formar 72 sequências diferentes.

7. 6 raparigas; 4 rapazes

7.1. $2\times 6!\times 4!=34\,560$

2: rapazes-raparigas ou raparigas-rapazes
$6!$: número de maneiras de ordenar os rapazes.
$4!$: número de maneiras de ordenar as raparigas.
Podem fazê-lo de 34 560 formas.

7.2. $7\times 4!\times 6!=120\,960$

7: número de possíveis posições a ocupar pelos rapazes no início, no fim, ou entre as raparigas,
Podem fazê-lo de 120 960 formas.

7.3. • – • – • – • – • – • – •

$6!\times {}^{7}A_4=604\,800$

${}^{7}A_4$ número de maneiras de colocar ordenadamente os rapazes nos sete lugares possíveis.
Podem fazê-lo de 604 800 formas.

Pág. 69

Avaliação formativa 3

1. $\underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \_\ \_$ ou $\underline{\cancel{0}}\ \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \_$ ou $\underline{\cancel{0}}\ \_\ \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}$

$3!\times {}^{7}A_2+3!\times 2\times 6\times 6=684$

I - a)

$\underline{\cancel{0}}\ \_\ \_\ \_\ \_$

7×8^4

II - b)

$2+5+1+1+1=10$

$2\times 5\times 1\times 1\times 1=10$

$\_\ \_\ \_\ \_\ \_$

${}^{5}C_3\times 2!=20$

${}^{5}C_3$ número de maneiras de colocar os algarismos 1.

$2!$: número de maneiras de ordenar o 2 e o 5.
III – b)

2. ${}^{42}A_{16}\times {}^{24}A_{16}\times {}^{16}A_{10}$

${}^{42}A_{16}$: é o número de maneiras de escolher ordenadamente os 16 alunos para ocuparem a terceira fila.
${}^{24}A_{16}$: é o número de maneiras de escolher ordenadamente os 16 alunos para ocuparem a segunda fila (entre os 24 alunos que ainda não se sentaram.
${}^{16}A_{10}$: é o número de maneiras de escolher ordenadamente os lugares para os 10 alunos entre os 16 lugares disponíveis.
Assim, uma resposta possível é
${}^{42}A_{16}\times {}^{24}A_{16}\times {}^{16}A_{10}$.

${}^{42}A_{32}\times {}^{16}A_{10}$

${}^{42}A_{32}$: é o número de maneiras de escolher ordenadamente os 32 alunos para ocuparem os lugares da segunda e terceira filas.
${}^{16}A_{10}$: é o número de maneiras de escolher ordenadamente os 10 lugares para os 10 alunos, entre os 16 lugares disponíveis.
Assim, uma resposta possível é ${}^{42}A_{32}\times {}^{16}A_{10}$.

${}^{16}C_{10}\times 42!$

${}^{16}C_{10}$: é o número de maneiras de escolher os 10 lugares da primeira fila, que vão ser ocupados, entre os 16 disponíveis.
$42!$: é o número de maneiras de se sentarem, ordenadamente, os 42 alunos pelas 3 primeiras filas.
Assim, uma resposta possível é ${}^{16}C_{10}\times 42!$.

3. 4 meninos; 5 meninas

$4!\times 2\times {}^{12}A_5=4\,561\,920$

$4!$: Número de maneiras de colocar ordenadamente os 4 meninos nos 4 quadrados da diagonal.
2: duas diagonais.
${}^{12}A_5$: número de maneiras de colocar ordenadamente as 5 meninas nos 12 espaços disponíveis.
As crianças podem ficar colocadas de 4 561 920 maneiras.

Tarefas complementares

Pág. 70

1.

Biologia: 10; Física: 13; Matemática: 17

1.1. Na pior das hipóteses, se retirarmos 17 livros da prateleira, podem ser todos de Matemática. Para garantir quer saem pelo menos dois livros de disciplinas diferentes tem de ser retirados pelo menos $17+1=18$ livros.

1.2. $17+13=30$

Se retirarmos 30 livros da prateleira, podem ser todos de Matemática e Física. Para garantir quer saem pelo menos um livro de cada disciplina tem de ser retirados pelo menos $30+1=31$ livros

2. De 0 a 20 são 21 resultados possíveis.
Se o professor tiver 21 alunos não se pode garantir que haja duas classificações iguais.
Se o professor tiver $2\times21=42$ alunos não se pode garantir que haja três classificações iguais.
Para que tal aconteça, o professor terá, pelo menos $2\times21+1=43$ alunos

3. Cada semana tem sete dias.
$3\times7=21$ e $4\times7=28$
Se a turma tiver 21 alunos, pode acontecer que haja três alunos nascidos em cada um dos dias da semana, ou seja, não haja quatro alunos nascidos no mesmo dia.
Se juntarmos mais um aluno, ficamos com a certeza de que nasceu no mesmo dia em que nasceram outros três alunos da turma.
De igual modo, se a turma tiver 28 alunos, podemos garantir que há quatro alunos nascidos no mesmo dia, mas não se pode garantir que haja cinco.
Portanto 4 é o número máximo de alunos que pode garantir terem nascido no mesmo dia da semana

4. $3\times5=15$
É possível distribuir 15 cadeiras por cinco mesas sem que alguma mesa fique com quatro cadeiras.
Juntando mais uma cadeira já é garantido que pelo menos uma das mesas fica com quatro cadeiras
Como $18=3\times5+3$ há pelo menos três mesas que fica com quatro cadeiras.

Pág. 71

5.1. $\underset{(1)}{3}\times\underset{(2)}{4}\times\underset{(3)}{2}=24$

(1) é o número de maneiras de escolher a entrada;
(2) número de maneiras de escolher o prato principal;
(3) o número de escolher a sobremesa.

É possível fazer 24 refeições.

5.2. 1.ª situação (inclui sopa de peixe)

$\underset{(1)}{1}\times\underset{(2)}{2}\times\underset{(3)}{2}=4$

(1) é a sopa de peixe;
(2) número de maneiras de escolher o prato principal (prego no prato, vegetariano);
(3) número de escolher a sobremesa.

2.ª situação (não inclui sopa de peixe)

$\underset{(1)}{2}\times4\times2=16$

(1) é o número de maneiras de escolher a entrada (sopa de legumes, salada mista).

$4+16=20$

É possível fazer 20 refeições.

6. $\underset{(1)}{5}\times\underset{(2)}{4}\times\underset{(3)}{3}=60$

(1) há 5 hipóteses de escolha do algarismo das centenas (1, 2, 3, 4, 5);
(2) há 4 hipóteses de escolha do algarismo das dezenas;
(3) há 3 hipóteses de escolha do algarismo das unidades.

O Filipe pode escrever 60 números diferentes.

7. $\underset{\text{ida}}{4}\times\underset{\text{ida}}{3}\times\underset{\text{volta}}{3}\times\underset{\text{volta}}{2}=72$

O Pedro pode escolher 72 caminhos.

Pág. 72

8. Para colocar um rapaz no meio da fila da frente temos 3 hipóteses. De seguida distribuem-se as 5 pessoas restantes pelos 5 lugares disponíveis.

$\underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$; $\underline{5}\ \underline{3}\ \underline{4}$;

$5\times4\times3\times3\times2\times1=360$

Podem ocupar os 6 lugares de 360 maneiras diferentes.

9.1. $\underbrace{2\times1}_{(1)}\times\underbrace{3\times2\times1}_{(2)}\times\underset{(3)}{2}=24$

(1) é o número de maneiras de colocar as plantas;
(2) número de maneiras de colocar as caixas;
(3) prateleira de cima com plantas e prateleira de baixo com caixas ou vice-versa.

A Alice pode colocar as peças de 24 formas diferentes.

9.2. $\underbrace{3\times2}_{(1)}\times\underset{(2)}{2}\times\underbrace{3\times2\times1}_{(3)}=72$

(1) é o número de possibilidades de escolher uma caixa e uma planta;
(2) à direita a planta e à esquerda a caixa ou vice-versa;
(3) número de maneiras de colocar as restantes peças (2 caixas e uma planta).

A Alice pode colocar as peças de 72 formas diferentes.

10. 3 rapazes; 2 raparigas

$\underset{(1)}{4} \times \underset{(2)}{2} \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{(3)} = 48$

(1) as raparigas ficam juntas numa de 4 posições;
(2) troca de lugares entre as duas raparigas;
(3) número de maneiras de ordenar os rapazes.

Os três rapazes e as duas raparigas podem ficar juntas em 48 maneiras diferentes.

11.1. $\underbrace{\underline{6} \times \underline{6} \times \underline{6}}_{(1)} \times \underset{(2)}{\underline{3}} = 648$

(1) qualquer um dos 6 algarismos do conjunto A;
(2) para o número ser ímpar, o algarismo das unidades só pode ser 1, 3 ou 5.

Podem escrever-se 648 números.

11.2. $\underbrace{\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3}}_{(1)} \times \underset{(2)}{\underline{3}} = 180$

(1) algarismos diferentes;
(2) para o número ser par, o algarismo das unidades só pode ser 2, 4 ou 6.

Podem escrever-se 180 números.

11.3. $\underset{(1)}{\underline{3}} \times \underbrace{\underline{6} \times \underline{6}}_{(2)} \times \underset{(3)}{\underline{1}} = 108$

(1) para o número ser menor que 4000, tem que ter algarismo dos milhares 1, 2 ou 3;
(2) qualquer algarismo do conjunto A;
(3) para o número ser múltiplo de 5, tem de ter o algarismo das unidades 5.

Podem escrever-se 108 números.

Pág. 73

12. $\underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{(1)} \times \underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{(2)} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{(3)} = 9216$

(1) número de posições que as raparigas podem ocupar;
(2) número de posições que os rapazes podem ocupar;
(3) trocas de lugar entre rapaz e rapariga em cada banco.

Podem ocupar os lugares de 9216 maneiras diferentes.

13. Opção (B) $\underset{(1)}{3} \times \underset{(2)}{5}$

(1) número de possibilidades de escolha do livro de exercícios de Física
(2) número de possibilidades de escolha do livro de exercícios de Matemática.

14.1. $\underset{(1)}{5} \times \underset{(2)}{3} = 15$

(1) número de ruas entre o local X e a Rua do Meio;
(2) número de ruas entre a Rua do Meio e o local Y.

O morador pode escolher 15 trajetos diferentes.

14.2. $\underset{\text{ida}}{5} \times \underset{\text{ida}}{3} \times \underset{\text{volta}}{2} \times \underset{\text{volta}}{4} = 120$

O morador pode escolher 120 trajetos diferentes.

15. $\underset{(1)}{4} \times \underbrace{2 \times 1}_{(2)} \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{(3)} = 48$

(1) número de posições em que as bandeiras de riscas ficam juntas;
(2) número de posições ocupadas pelas bandeiras de riscas;
(3) número de posições ocupadas pelas bandeiras lisas.

Opção (D)

Pág. 74

16.1. $\underset{(1)}{\underline{6}} \times \underbrace{\underline{6} \times \underline{5}}_{(2)} = 180$

(1) só não pode ser 0;
(2) pode ser qualquer algarismo exceto o das centenas.

É possível escrever 180 números.

16.2. a) $\underline{6} \times \underline{5} \times \underset{(1)}{\underline{1}} + \underset{(2)}{\underline{5}} \times \underline{5} \times \underset{(3)}{\underline{3}} = 105$

(1) termina em 0;
(2) não pode ser o 0 nem o algarismo das unidades;
(3) termina em 2, 4 ou 6.

São pares, 105 números.

b) Múltiplo de 5, termina em 0 ou 5.

$\underline{6} \times \underline{5} \times \underset{(1)}{\underline{1}} + \underset{(2)}{\underline{5}} \times \underline{5} \times \underset{(3)}{\underline{1}} = 55$

(1) termina em 0;
(2) não pode ser 0 nem 5;
(3) termina em 5.

É possível escrever 55 números.

c) $\underset{(1)}{\underline{4}} \times \underline{6} \times \underline{5} = 120$

(1) o algarismo das centenas tem de ser 3, 4, 5 ou 6.

É possível escrever 120 números.

d) Vamos analisar 3 situações diferentes.

$\underset{(1)}{\underline{2}} \times \underline{6} \times \underline{5} = 60$

(1) algarismo das centenas 1 ou 2.

Ou

$\underset{(2)}{\underline{1}} \times \underset{(3)}{\underline{3}} \times \underline{5} = 15$

(2) algarismo das centenas, 3;
(3) algarismos das dezenas 0, 1, ou 2.

Ou $\underset{(2)}{\underline{1}} \times \underset{(4)}{\underline{1}} \times \underset{(5)}{\underline{2}} = 2$

(4) algarismo das dezenas, 4;
(5) algarismo das unidades, 0 ou 1.

$60 + 15 + 2 = 77$

É possível escrever 77 números.

17.1. $\underset{(1)}{\underline{9}} \times \underbrace{\underline{9} \times \underline{8} \times \underline{7}}_{(2)} = 4536$

(1) diferente de 0;
(2) diferentes dos anteriores.

O conjunto *A* tem 4536 elementos.

17.2. $\underset{(1)}{\underline{9}} \times \underbrace{\underline{8} \times \underline{7}}_{(2)} \times \underset{(3)}{\underline{1}} \underset{\text{ou}}{+} \underset{(4)}{\underline{8}} \times \underbrace{\underline{8} \times \underline{7}}_{(2)} \times \underset{(5)}{\underline{1}} = 952$

(1) diferente de 0;
(2) diferentes dos anteriores;
(3) algarismo 0;
(4) diferentes de 0 e de 5;
(5) algarismo 5.

São múltiplos de 5, 952 elementos de *A*.

17.3. $\underset{(1)}{\underline{5}} \times \underbrace{\underline{9} \times \underline{8} \times \underline{7}}_{(2)} = 2520$

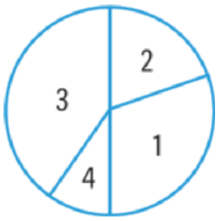
(1) 1, 2, 3, 4 ou 5;
(2) diferentes dos anteriores.

Ou $\underset{(3)}{\underline{1}} \times \underset{(4)}{\underline{5}} \times \underbrace{\underline{8} \times \underline{7}}_{(2)} \underset{\text{ou}}{+} \underset{(3)}{\underline{1}} \times \underset{(5)}{\underline{1}} \times \underset{(6)}{\underline{3}} \times \underline{7} = 301$

(3) algarismo 6;
(4) algarismos 0, 1, 2, 3 ou 4;

(5) algarismo 5;
(6) algarismos 0, 1 ou 2.
$2520+301=2821$;
São inferiores a 6530, 2821 elementos de *A*.

18. 5 cores. Consideremos que os setores são numerados de 1 a 4.



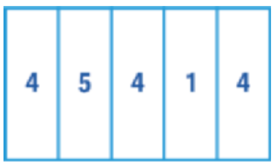
A cor do setor 4 depende das cores dos setores 1 e 3. Se os setores 1 e 3 forem pintados da mesma cor, o círculo pode ser pintado de $5\times 4\times 1\times 4=80$ maneiras diferentes. Se os setores 1 e 3 forem pintados de cores diferentes, o círculo pode ser pintado de $5\times 4\times 3\times 3=180$. $80+180=260$;

O círculo pode ser pintado de 260 maneiras diferentes.

19.1.

$5\times 4\times 4\times 4\times 4=1280$
Podem fazer-se 1280 bandeiras diferentes.

19.2.



$4\times 5\times 4\times 1\times 4=320$
Podem fazer-se 320 bandeiras diferentes.

19.3.

$4\times 4=16$;

$4\times 3\times 3=36$;

$16+36=52$
Podem fazer-se 52 bandeiras diferentes.

Pág. 75

20. $\underbrace{9\times 10^3}_{(1)}-\underbrace{9^4}_{(2)}$

(1) todos os números naturais com 4 algarismos;
(2) todos os números naturais com 4 algarismos onde não figura o zero.

Opção (C)

21. Se o código é capicua, o algarismos 9 está na primeira e última posição ou na segunda e quarta.
$\underset{(1)}{1}\times\underset{(2)}{9}\times 9\times\underset{(3)}{1}\times\underset{(1)}{1}$ ou $\underset{(2)}{9}\times\underset{(1)}{1}\times 9\times\underset{(1)}{1}\times\underset{(4)}{1}$
(1) algarismo 9;
(2) qualquer algarismo diferente de 9;
(3) igual ao segundo;
(4) igual ao primeiro.
$9\times 9+9\times 9=162$;
São capicuas com exatamente dois algarismos 9, 162 códigos.
Opção (A)

22.1. $\underset{(1)}{8}\times\underbrace{8\times 7}_{(2)}\times\underset{(3)}{5}=2240$

(1) exceto 0 e o algarismo das unidades;
(2) diferentes dos anteriores;
(3) algarismo 1, 3, 5, 7 ou 9.

Podem formar-se 2240 números.

22.2. $\underset{(1)}{6}\times\underbrace{9\times 8\times 7}_{(2)}=3024$

(1) pode ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6;
(2) diferentes dos anteriores.

Ou $\underset{(3)}{1}\times\underset{(4)}{6}\times\underbrace{8\times 7}_{(2)}\underset{\text{ou}}{+}\underset{(3)}{1}\times\underset{(5)}{1}\times\underset{(6)}{4}\times\underset{(7)}{7}=364$

(3) algarismo 7; (4) algarismo 0, 1, 2, 3, 4 ou 5;
(5) algarismo 6; (6) algarismo 0, 1, 2 ou 3;
(7) qualquer algarismo diferente dos anteriores.
$3024+364=3388$
Podem-se formar 3388 números.

23.1. $13\times 12\times 11=1716$;
Os três elementos podem ser escolhidos de 1716 maneiras diferentes.

23.2. $6\times 12\times 11=792$;
Os três elementos podem ser escolhidos de 792 maneiras diferentes.

23.3. $12\times 11\times\underset{(1)}{3}=396$

(1) três cargos distintos que o João pode ocupar.

Os três elementos podem ser escolhidos de 396 maneiras diferentes.

23.4. $6\times 5\times 4=120$
As três raparigas podem ser escolhidas de 120 maneiras diferentes.

23.5. Se o grupo é misto, pode ter duas raparigas e um rapaz ou dois rapazes e uma rapariga. Assim,
$6\times 5\times\underset{(1)}{7}\times\underset{(2)}{3}+7\times 6\times\underset{(3)}{6}\times\underset{(4)}{3}=1386$
(1) número de maneiras de escolher o rapaz;
(2) três cargos diferentes que o rapaz pode ocupar;
(3) número de maneiras de escolher uma rapariga;
(4) três cargos diferentes que a rapariga pode ocupar.

Pág. 76

24.1.

$$\frac{5\times10!-9!}{9!}=\frac{5\times10\times9!-9!}{9!}=\frac{49\times9!}{9!}=49$$

24.2.

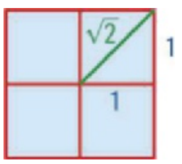
$$\frac{3}{n!}-\frac{2n+2}{(n+1)!}=\frac{3}{n!}-\frac{2(n+1)}{(n+1)n!}=\frac{3}{n!}-\frac{2}{n!}=\frac{1}{n!}$$

25. 26 letras;
$26\times3=78$;
Se a escola tiver 78 alunos, cada uma das 26 letras pode ter, no máximo, 3 alunos sem que qualquer letra tenha 4 alunos. Para garantirmos que existam pelo menos 4 alunos cujo primeiro nome começa pela mesma letra, a escola deve ter $78+1=79$ alunos.

26. Dividimos o quadrado de lado 2 em quatro quadrados congruentes.

Cada um destes quadrados tem lado 1.

A diagonal de cada um dos quadrados de lado 1 mede $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

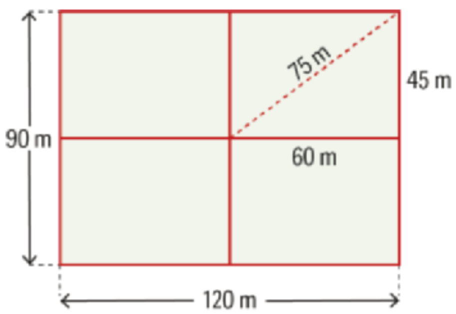


Pelo menos dois dos cinco pontos escolhidos ao acaso pertencerão a um mesmo quadrado de lado 1 (são 5 pontos distribuídos por 4 quadrados).

Logo, a distância entre esses dois pontos será menor ou igual ao comprimento da diagonal do quadrado de lado 1, ou seja, é menor ou igual a $\sqrt{2}$.

27. Dividamos o campo em quatro parcelas retangulares com 60 m de comprimento e 45 m de largura.
A medida da diagonal de cada um desses retângulos é igual a:

$$\sqrt{60^2+45^2}=75\text{ m}$$



Como se vão distribuir 5 árvores pelas quatro parcelas, pelo menos uma das parcelas ficará com pelo menos duas árvores. Logo, a distância entre essas duas árvores terá de ser menor ou igual a 75 m.

Portanto, não é possível plantar as cinco árvores nas condições do enunciado.

28.1. Os números podem terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

$\underset{(1)}{\underline{9}}\times\underline{10}\times\underline{10}\times\underset{(2)}{\underline{5}}=4500$

(1) não pode ser 0;
(2) algarismo 0, 2, 4, 6 ou 8.

Podem escrever-se 4500 números.

28.2. Os números têm de terminar em zero.

$\underset{(1)}{\underline{9}}\times\underline{8}\times\underline{7}\times\underset{(2)}{\underline{1}}=504$

(1) diferente de 0;
(2) algarismo 0.

Podem escrever-se 504 números.

28.3. $\underline{9}\times\underline{10}\times\underline{10}\times\underline{10}=9000 \rightarrow$ todos os números que se podem escrever com 4 algarismos;

$\underline{9}\times\underline{9}\times\underline{8}\times\underline{7}=4536 \rightarrow$ todos os números que se podem escrever com 4 algarismos diferentes.

$9000-4536=4464$
Podem escrever-se 4464 números.

28.4. a) $\underset{(1)}{\underline{9}}\times\underline{8}\times\underline{7}\times\underset{(2)}{\underline{1}}\ \underset{\text{ou}}{+}\ \underset{(3)}{\underline{8}}\times\underline{8}\times\underline{7}\times\underset{(4)}{\underline{4}}=2296$

(1) diferente de 0;
(2) algarismo 0;
(3) diferente de 0 e do algarismo das unidades;
(4) algarismo 2, 4, 6 ou 8.

Podem escrever-se 2296 números.

b) $\underset{(1)}{\underline{4}}\times\underbrace{\underline{9}\times\underline{8}\times\underline{7}}_{(2)}=2016$

(1) algarismo 6, 7, 8 ou 9;
(2) diferentes dos anteriores.

Podem escrever-se 2016 números.

c) $\underset{(1)}{\underline{6}}\times\underbrace{\underline{9}\times\underline{8}\times\underline{7}}_{(2)}=3024$

ou

$\underset{(3)}{\underline{1}}\times\underset{(4)}{\underline{3}}\times\underbrace{\underline{8}\times\underline{7}}_{(2)}\ \underset{\text{ou}}{+}\ \underset{(3)}{\underline{1}}\times\underset{(5)}{\underline{1}}\times\underset{(6)}{\underline{4}}\times\underline{7}=196$

(1) algarismo 1, 2, 3, 4, 5 ou 6;
(2) diferentes dos anteriores;
(3) algarismo 7;
(4) algarismo 0, 1 ou 2;
(5) algarismo 3;
(6) algarismo 0, 1, 2 ou 4.
$3024+196=3220$
Podem escrever-se 3220 números.

Pág. 77

29.1. $25\times24=600$;

Podem ser escolhidos de 600 maneiras diferentes.

29.2. $\underbrace{\underline{15}\times\underline{14}}_{(1)}+\underbrace{\underline{10}\times\underline{9}}_{(2)}=300$

(1) número de maneiras de escolher duas raparigas;
(2) número de maneiras de escolher dois rapazes.

Podem ser escolhidos de 300 maneiras diferentes.

29.3. $600-300=300$;

Podem ser escolhidos de 300 maneiras diferentes.

30.1. $\underset{(1)}{\underline{7}}\times\underbrace{\underline{9}\times\underline{8}\times\underline{7}}_{(2)} \underset{\text{ou}}{+} \underset{(3)}{\underline{1}}\times\underset{(4)}{\underline{3}}\times\underbrace{\underline{8}\times\underline{7}}_{(2)}=3696$

(1) algarismo 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9;
(2) diferentes dos anteriores;
(3) algarismo 2;
(4) algarismo 7, 8 ou 9.

O conjunto *A* tem 3696 números.

30.2. Elementos de *A* onde não figura 0 nem 8:

$\underset{(1)}{\underline{6}}\times\underbrace{\underline{7}\times\underline{6}\times\underline{5}}_{(2)} \underset{\text{ou}}{+} \underset{(3)}{\underline{1}}\times\underset{(4)}{\underline{2}}\times\underbrace{\underline{6}\times\underline{5}}_{(2)}=1320$

(1) algarismo 3, 4, 5, 6, 7 ou 9;
(2) algarismos diferentes dos anteriores e diferentes de 0 e 8;
(3) algarismo 2;
(4) algarismo 7 ou 9.

$3696-1320=2376$

Figuram 0 ou 8 em 2376 elementos de *A*.

31. ● Se um dos reis ficar num dos 4 cantos, o outro pode ocupar $64-4=60$ casas.

$\boxed{4\times 60=240}$

● Se um dos reis ficar numa das $6\times 4=24$ casas dos lados, o outro pode ocupar $64-6=58$ casas.

$\boxed{24\times 58=1392}$

● Se um dos reis ficar numa das $6\times 6=36$ casas centrais, o outro pode ocupar $64-9=55$ casas.

$\boxed{36\times 55=1980}$

$240+1392+1980=3612$

Resumindo,

$\underbrace{4\times(64-4)}_{\text{cantos}}+\underbrace{6\times 4\times(64-6)}_{\text{lados}}+\underbrace{6\times 6\times(64-9)}_{\text{centrais}}=$

$=3612$

Os dois reis podem ocupar as casas de 3612 maneiras diferentes.

32. $1500=2^2\times 3^1\times 5^3$; Os divisores de 1500 são da forma $2^a\times 3^b\times 5^c$ com $a\in\{0,1,2\}$, $b\in\{0,1\}$ e $c\in\{0,1,2,3\}$. Para que o divisor seja par, o expoente de 2 tem de ser não nulo pelo que só há duas possibilidades para o valor de *a* (1 ou 2).

$\underline{a}$ $\underline{b}$ $\underline{c}$ $\rightarrow$ Expoentes de 2, 3 e 5

2 2 4 $\rightarrow$ Possibilidades

$2\times 2\times 4=16$

O número 1500 tem 16 divisores pares.

33.1. $1800=2^3\times 3^2\times 5^2$;

Os divisores de 1800 são da forma $2^a\times 3^b\times 5^c$ com $a\in\{0,1,2,3\}$, $b\in\{0,1,2\}$ e $c\in\{0,1,2\}$.

$\underline{a}$ $\underline{b}$ $\underline{c}$ $\rightarrow$ Expoentes de 2, 3 e 5

4 3 3 $\rightarrow$ Possibilidades

$4\times 3\times 3=36$

O número 1800 tem 36 divisores pares.

33.2. Para que o divisor seja ímpar, o expoente de 2 tem de ser nulo, pelo que só há uma possibilidade para o valor de *a*, que é o 0.

$\underline{a}$ $\underline{b}$ $\underline{c}$ $\rightarrow$ Expoentes de 2, 3 e 5

1 3 3 $\rightarrow$ Possibilidades

$1\times 3\times 3=9$

O número 1800 tem 9 divisores ímpares.

Pág. 78

34. 30 praticantes: 18 rapazes e 12 raparigas.
Ana e Xavier irmãos;
Responsável da secção de *surf*: Sara.
Vamos utilizar dois processos de resolução:
<u>1.º Processo:</u> vamos formar todas as equipas possíveis e excluir a solução correspondente à escolha da Ana e do Xavier.
Como a Sara faz parte dos participantes, vamos convocar mais uma rapariga (entre 11) e um rapaz (entre 18), pelo que o número de hipóteses é 11×18 .

$11\times 18-1=197$, sendo 1 a solução correspondente à escolha da Ana e do Xavier.
Os três participantes podem ser escolhidos de 197 maneiras diferentes.
<u>2.º Processo:</u> vamos formar as equipas em que apenas um dos irmãos faz parte ou nenhum deles faz parte.

$\underset{\text{Sara}}{1}\times\underset{\text{Xavier}}{1}\times\underset{(1)}{10}+\underset{\text{Sara}}{1}\times\underset{\text{Ana}}{1}\times\underset{(2)}{17}+\underset{\text{Sara}}{1}\times\underset{(2)}{17}\times\underset{(1)}{10}=197$,

(1) rapariga (não pode ser a Sara nem a Ana);
(2) rapaz (não pode ser o Xavier).

Os três participantes podem ser escolhidos de 197 maneiras diferentes.

35.1. P_9 é o número de maneiras diferentes de ordenar as 9 letras da palavra TRIANGULO.

$P_9=362\,880$

Com as 9 letras da palavra TRIANGULO, é possível formar $362\,880$ palavras diferentes com ou sem significado.

35.2. ${}^4A_2\times 7!=12\times 5040=60\,480$

Onde:

${}^4A_2$: número de maneiras diferentes de ordenar 2 das 4 vogais para ocupar a 1.ª e a última posições.

$7!$: número de maneiras diferentes de ordenar as restantes 7 letras.

Há $60\,480$ palavras que se podem formar com as 9 letras da palavra TRIANGULO que começam e terminam numa vogal.

36. ${}^{25}A_5$ é o número de maneiras diferentes de ordenar 5 das 25 escolas.

${}^{25}A_5=6\,375\,600$

O inspetor pode planificar as visitas de $6\,375\,600$ maneiras diferentes.

37. $^{8}A_6$ é o número de maneiras diferentes de ordenar 6 das 8 cores restantes para pintar as faces do dado.

$^{8}A_6 = 20\,160$

O dado pode ser pintado de $20\,160$ maneiras diferentes.

Pág. 79

38. $1 \times 3 \times {}^{10}A'_7 = 3 \times 10^7 = 30\,000\,000$

Onde:

1: o primeiro algarismo é 9. Só há uma possibilidade.

3 : número de possibilidades para o segundo algarismo (pode ser 1, 3 ou 6).

$^{7}A'_2$: para cada um dos restantes algarismos, há 10 possibilidades de escolha.

O número máximo de telemóveis afetos às três operadoras é $30\,000\,000$.

39.1. $10 \times 13 = 130$

Onde:

10: número de maneiras de escolher um rapaz para ser delegado.

13: número de maneiras de escolher 1 rapariga para ser subdelegada.

Há 130 maneiras diferentes de escolher o delegado e o subdelegado se o delegado for 1 rapaz e a subdelegada for uma rapariga.

39.2. O número de maneiras de escolher um rapaz para delegado e uma rapariga para subdelegada é igual ao número de maneiras de escolher uma rapariga para delegada e um rapaz para subdelegado.

$10 \times 13 + 13 \times 10 = 260$

Podem ser eleitos de 260 maneiras.

39.3. $1 \times 22 \times 2 = 44$

Onde:

1: A Joana.

22: Número de maneiras diferentes de escolher o outro representante da turma.

2: A Joana pode ser delegada ou subdelegada.

Há 44 maneiras diferentes de escolher o delegado e o subdelegado, se a Joana for eleita.

40.1. $3 \times {}^{8}A_3 = 3 \times 336 = 1008$

Onde:

3: Número de possibilidades para o 1.º algarismo (1, 2 ou 3).

$^{8}A_3$: Número de maneiras de ordenar 3 dos restantes 8 algarismos.

Com os algarismos do conjunto A é possível formar 1008 números de 4 algarismos diferentes inferiores a 4000 .

40.2. $5 \times {}^{8}A_3 = 5 \times 336 = 1680$

Onde:

5 : número de possibilidades de escolha do algarismo das unidades (1, 3, 5, 7 ou 9).

$^{8}A_3$: número de maneiras de escolher ordenadamente 3 dos 8 algarismos restantes.

Com os elementos do conjunto *A* é possível formar 1680 números ímpares.

40.3. Para calcular quantos números se podem formar superiores a 3680, podemos considerar 3 possibilidades:

- O primeiro algarismo é superior a 3:

$6 \times {}^{8}A_3 = 6 \times 336 = 2016$

Onde:

6 : número de possibilidades de escolha do 1.º algarismo (superior a 3).

$^{8}A_3$: número de maneiras de escolher ordenadamente 3 dos 8 restantes algarismos.

- O primeiro algarismo é 3 e o segundo é superior a 6:

$1 \times 3 \times {}^{7}A_2 = 3 \times 42 = 126$

Onde:

1: o primeiro algarismo é 3.

3 : número de escolhas do segundo algarismo (7, 8 ou 9).

$^{7}A_2$: número de maneiras de escolher ordenadamente 2 dos restantes 7 algarismos.

- O primeiro algarismo é 3, o segundo é 6 e o terceiro é superior ou igual a 8:

$1 \times 1 \times 2 \times 6 = 12$

Onde:

1: o primeiro algarismo é 3.

1: o segundo algarismo é 6.

2: número de escolhas do terceiro algarismo (8 ou 9).

6: número de possibilidades de escolha do último algarismo (é qualquer dos restantes 6).

Com os elementos do conjunto *A* é possível formar 2154 números superiores a 3680.

41.1. P_8 é o número de maneiras diferentes de ordenar os oito representantes.

$P_8 = 8! = 40\,320$

Os representantes das quatro organizações podem-se dispor de $40\,320$ maneiras diferentes**.**

41.2. $P_2 \times P_2 \times P_2 \times P_2 \times P_4 = (2!)^4 \times 4! = 16 \times 24 = 384$

Onde:

$P_2 \times P_2 \times P_2 \times P_2$: número de maneiras de ordenar os 2 membros de cada organização.

P_4 : número de maneiras de ordenar as 4 organizações.

Os representantes das quatro organizações podem dispor-se de 384 maneiras diferentes, de modo que os elementos de cada organização fiquem juntos.

Pág. 80

42. Para que não haja dois peões na mesma linha nem na mesma coluna terá que haver um peão por linha e por coluna.
Assim, para o peão a colocar na primeira linha, temos 8 possibilidades de escolha da coluna. Para o peão a colocar na segunda linha, temos 7 possibilidades de escolha da coluna porque uma coluna já foi ocupada pelo peão da 1.ª linha. Para o peão a colocar na 3.ª linha, temos 6 possibilidades de escolha da coluna, pois duas já estão ocupadas pelas anteriores. E assim sucessivamente, até chegar ao peão a colocar na 8.ª linha que já só tem uma coluna disponível.
$8\times 7\times 6\times \ldots \times 1 = 8! = 40\ 320$
Podemos arrumar os 8 peões pretos no tabuleiro, de modo que não haja 2 peões na mesma linha ou na mesma coluna, de $40\ 320$ maneiras diferentes.

43.1. a)
P_{12} é o número de maneiras de ordenar os 12 CD.
$P_{12} = 12! = 479\ 001\ 600$
Os 12 CD podem ser arrumados de 479 001 600 maneiras diferentes.

b) $P_5\times P_4\times P_3\times P_3 = 5!\times 4!\times 3!\times 3! =$
$= 120\times 24\times 6\times 6 = 103\ 680$
Onde:
P_5 : número de maneiras de ordenar os 5 CD de música clássica.
P_4 : número de maneiras de ordenar os 4 CD de música rock.
P_3 : número de maneiras de ordenar os 3 CD de música tradicional portuguesa.
P_3 : número de maneiras diferentes de ordenar os 3 géneros musicais.
Os 12 CD podem ser arrumados de modo que os CD do mesmo tipo de música fiquem juntos de 103 680 maneiras diferentes.

c) $P_5\times P_7\times 8 = 5!\times 7!\times 8 =$
$= 120\times 5040\times 8 = 4\,838\,400$
Onde:
P_5 : número de maneiras de ordenar os CD de música clássica.
P_7 : número de maneiras de ordenar os restantes 7 CD.
8 : número de possibilidades de colocar o conjunto de CD de música clássica (nos extremos ou entre 2 dos outros CD).
Os 12 CD podem ser arrumados de modo que os CD de música clássica fiquem juntos de $4\ 838\ 400$ maneiras diferentes.

43.2. ${}^6A_5\times P_7\times 2 = 720\times 7!\times 2 = 1440\times 5040 = 7\ 257\ 600$
${}^6A_5$: número de maneiras de escolher ordenadamente 5 dos 6 lugares de uma fila para colocar os CD de música clássica.
P_7 : número de maneiras de ordenar os restantes 7 CD.
2: número de escolhas da fila onde colocar os CD de música clássica.
Podem arrumar-se de 7 257 600 maneiras diferentes.

44.1. $P_2\times P_2\times P_2\times P_3 = (2!)^3\times 3! = 8\times 6 = 48$
Onde:
$P_2\times P_2\times P_2$: número de maneiras de ordenar os 2 jovens de cada ano.
P_3 : número de maneiras de ordenar os 3 anos (4.º, 5.º e 6.º).
Os jovens podem colocar-se em fila de modo que os que frequentam o mesmo ano fiquem seguidos de 48 maneiras diferentes.

44.2. Para que os elementos do mesmo sexo não fiquem seguidos, os rapazes e as raparigas terão que ficar alternados.
$P_3\times P_3\times 2 = 3!\times 3!\times 2 = 6\times 6\times 2 = 72$
Onde:
P_3 : número de maneiras de ordenar as 3 raparigas.
P_3 : número de maneiras de ordenar os 3 rapazes.
2: a fila pode começar por um rapaz ou por uma rapariga.
Os jovens podem colocar-se em fila de modo que elementos do mesmo sexo não fiquem juntos de 72 maneiras diferentes.

44.3. $P_3\times P_3\times 4 = 3!\times 3!\times 4 = 6\times 6\times 4 = 144$
Onde:
P_3 : número de maneiras de ordenar as 3 raparigas.
P_3 : número de maneiras de ordenar os 3 rapazes.
4: número de maneiras de colocar o grupo das 3 raparigas seguidas (nos extremos ou entre 2 rapazes).
Os jovens podem colocar-se em fila de modo que as raparigas fiquem juntas de 144 maneiras diferentes.

44.4. Para que as 3 raparigas fiquem seguidas e dois rapazes, no máximo fiquem seguidos, a fila terá que começar por 1 ou 2 rapazes e terminar com o resto dos rapazes.
$P_3\times P_3\times 2 = 3!\times 3!\times 2 = 6\times 6\times 2 = 72$
Onde:
P_3 : número de maneiras de ordenar os 3 rapazes.
P_3 : número de maneiras de ordenar as 3 raparigas.
2: a fila pode começar com 2 rapazes e terminar com 1 ou pode começar com 1 rapaz e terminar com 2.
Os jovens podem colocar-se em fila de modo que as raparigas fiquem seguidas e dois rapazes, no máximo, fiquem seguidos, de 72 maneiras diferentes.

45. Para determinar quantos números naturais pares é possível escrever com os algarismos todos diferentes, temos que considerar 2 casos: ou o algarismo das unidades é 0 ou é 2, 4, 6.
Se o algarismo das unidades é 0:
$^9A_3 \times 1 = 504$
Onde:
$^9A_3$: número de maneiras de escolher ordenadamente 3 dos restantes algarismos disponíveis para os algarismos das dezenas, centenas e milhares.
1: número de possibilidades para o algarismo das unidades (o algarismo 0).
Se o algarismo das unidades é 2, 4, 6 ou 8.
$8 \times {}^8A_2 \times 4 = 8 \times 56 \times 4 = 1792$
Onde:
8: número de possibilidades para o algarismo dos milhares (não pode ser 0 nem igual ao algarismo das unidades).
$^8A_2$: número de maneiras de escolher ordenadamente 2 dos 8 algarismos restantes.
4: número de possibilidades para o algarismo das unidades.
$504 + 1792 = 2296$
Opção (A)

Pág. 81

46.1. $^{10}C_4$ é o número de maneiras diferentes de escolher 4 dos 10 sabores disponíveis.
$^{10}C_4 = 210$
É possível escolher quatro sabores de 210 maneiras diferentes.

46.2. $^6C_2 \times {}^4C_2 = 15 \times 6 = 90$
Onde:
$^6C_2$: número de maneiras de escolher 2 dos 6 sabores de fruta.
$^4C_2$: número de maneiras diferentes de escolher 2 entre os sabores de chocolate, café, nata e caramelo.
É possível escolher de 90 maneiras diferentes, 4 sabores de modo que 2 e só 2 sejam de fruta.

46.3. O número de gelados com, no máximo, três sabores de fruta é a diferença entre o número total de gelados possíveis (calculado em **46.1.**) e o número de gelados feitos só com sabores de fruta.
$210 - {}^6C_4 = 210 - 15 = 195$
Onde:
$^6C_4$: número de maneiras diferentes de escolher 4 dos seis sabores de fruta.
É possível escolher de 195 maneiras diferentes, 4 sabores de modo que três sabores, no máximo, sejam de fruta.

46.4. O número de gelados que é possível escolher de modo que os sabores de chocolate e caramelo não sejam pedidos simultaneamente é a diferença entre o número total de gelados possível (calculado em **46.1.**) e o número de gelados em que os sabores de chocolate e caramelo sejam pedidos em simultâneo.
Número de gelados com os sabores de caramelo e chocolate:
$^2C_2 \times {}^8C_2 = 1 \times 28 = 28$
Onde:
$^2C_2$: os sabores de chocolate e caramelo.
$^8C_2$: número de maneiras diferentes de escolher 2 dos restantes sabores.
$210 - 28 = 182$
É possível escolher 182 maneiras diferentes 4 sabores de gelado de modo que os sabores de chocolate e de caramelo não sejam pedidos em simultâneo.

46.5. Para calcular o número de gelados possíveis de maneira que os sabores de chocolate e nata sejam sempre pedidos em simultâneo, temos que considerar 2 situações diferentes: ou o gelado é formado por estes 2 sabores e outros quaisquer 2 ou é formado apenas por 4 dos outros sabores.
Se o gelado é formado por os sabores de chocolate e nata e outros 2 sabores:
$^2C_2 \times {}^8C_2 = 1 \times 28 = 28$
Onde:
$^2C_2$: os sabores de chocolate e nata.
$^8C_2$: número de maneiras de escolher 2 dos restantes sabores.
Se o gelado é formado sem os sabores de nata e chocolate:
$^8C_4$ é o número de maneiras diferentes de escolher 4 dos outros sabores (excluindo chocolate e nata).
$^8C_4 = 70$
$28 + 70 = 98$
É possível escolher de 98 maneiras diferentes um gelado de 4 sabores de modo que os sabores de chocolate e nata sejam sempre pedidos em conjunto.

47. Para calcular o número de formas de pintar o cubo, atendendo às condições do enunciado, podemos calcular a diferença entre o número total de maneiras de pintar as faces do cubo com as cores verde ou amarelo e o número de formas diferentes de pintar as faces do cubo todas da mesma cor.
O número de maneiras diferentes de pintar as faces do cubo com uma das duas cores é dado por $^2A'_6$, porque, para cada face, há 2 possibilidades de escolha da cor.
Só há 2 formas de pintar as faces do cubo todas da mesma cor. Ou são todas verdes ou são todas amarelas.
$^2A'_6 - 2 = 2^6 - 2 = 64 - 2 = 62$
Opção (A)

48.1. Para calcular quantos números de 5 algarismos podemos escrever em que que figura o algarismo 0, podemos calcular a diferença entre a quantidade total de números de 5 algarismos que é possível escrever e a quantidade de números onde não figura o algarismo 0.
Total de números de 5 algarismos:
$9 \times {}^{10}A'_4 = 9 \times 10^4 = 90\ 000$
Onde:
9: número de possibilidades de escolha do algarismo das dezenas de milhar (não pode ser zero)
${}^{10}A'_4$: para cada um dos algarismos das unidades, dezenas, centenas e milhares temos 10 possibilidades de escolha (de 0 a 9).
O total de números de 5 algarismos onde não figura o 0 é dado por ${}^{9}A'_5$ porque para cada algarismo temos 9 possibilidades de escolha.
${}^{9}A'_5 = 9^5 = 59\ 049$
$90\ 000 - 59\ 049 = 30\ 951$
Existem $30\ 951$ números de 5 algarismos onde figura o algarismo 0.

48.2. Para calcular quantos números de 5 algarismos podemos escrever em que figura o algarismo 2, podemos calcular a diferença entre a quantidade total de números de 5 algarismos que é possível escrever (calculada na alínea anterior) e a quantidade de números onde não figura o 2.
Total de números onde não figura o 2:
$8 \times {}^{9}A'_4 = 8 \times 9^4 = 52\ 488$
Onde:
8: número de possibilidades para o algarismo das dezenas de milhar (não pode ser 0 nem 2)
${}^{9}A'_4$: para cada algarismo (das unidades, dezenas, centenas e milhares), há 9 possibilidades de escolha (só não pode ser 2).
$90\ 000 - 52\ 488 = 37\ 512$
Existem $37\ 512$ números de 5 algarismos onde figura o algarismo 2.

Pág. 82

49.1. ${}^{10}A'_2 \times {}^{26}A'_3 = 10^2 \times 26^3 = 100 \times 17\ 576 = 1\ 757\ 600$
Onde:
${}^{10}A'_2$: para cada algarismo, há 10 possibilidades de escolha.
${}^{26}A'_3$: para cada letra, há 26 possibilidades de escolha.
Existem 1 757 600 códigos possíveis.

49.2. ${}^{10}A_2 \times {}^{5}A'_3 = 90 \times 5^3 = 90 \times 125 = 11\ 250$
Onde:
${}^{10}A_2$: número de maneiras de escolher ordenadamente 2 dos 10 algarismos.
${}^{5}A'_3$: para cada vogal, há 5 possibilidades de escolha.
Há 11 250 códigos possíveis em que os algarismos são diferentes e as letras são vogais.

49.3. $10 \times 1 \times {}^{26}A_3 = 10 \times 15\ 600 = 156\ 000$
Onde:
10: número de possibilidades de escolha do primeiro algarismo.
1: o segundo algarismo tem que ser igual ao primeiro.
${}^{26}A_3$: número de maneiras diferentes de escolher ordenadamente 3 das 26 letras.
Há $156\ 000$ códigos com os algarismos iguais e as letras diferentes.

49.4. $10 \times 5 \times 26 \times 26 \times 1 = 33\ 800$
Onde:
10: número de possibilidades de escolha do primeiro algarismo.
5: número de possibilidades de escolha do segundo algarismo (0, 2, 4, 6 ou 8)
26: número de possibilidades de escolha da primeira letra
26: número de possibilidades de escolha da segunda letra.
1: a última letra tem que ser igual à primeira.
Há $33\ 800$ códigos em que os algarismos formam um número par e as letras formam uma capicua.

50.1. ${}^{6}A_5 \times P_7 = 720 \times 7! = 720 \times 5\ 040 = 3\ 628\ 800$
Onde:
${}^{6}A_5$: número de maneiras diferentes de escolher ordenadamente 5 dos 6 lugares da fila da frente para sentar as 5 mulheres.
P_7 : Número de maneiras de ordenar os 7 homens nos 7 lugares disponíveis.
As 12 pessoas podem ocupar os lugares de $3\ 628\ 800$ maneiras diferentes de modo que as mulheres fiquem na fila da frente.

50.2. ${}^{5}A_4 \times P_8 = 120 \times 8! = 720 \times 40\ 320 = 4\ 838\ 400$
Onde:
${}^{5}A_4$: número de maneiras de escolher ordenadamente 4 das 5 mulheres para ocuparem os primeiro e último lugares de cada fila.
P_8 : número de maneiras de ordenar as 8 restantes pessoas nos restantes 8 lugares.
As 12 pessoas podem sentar-se de $4\ 838\ 400$ maneiras diferentes de modo que o primeiro e o último lugares sejam ocupados por mulheres.

50.3. ${}^{7}A_6 \times P_6 \times 2 = 5040 \times 6! \times 2 =$
$= 10\ 080 \times 720 = 7\ 257\ 600$
Onde:
${}^{7}A_6$: número de maneiras de escolher 6 dos 7 homens para sentar todos na mesma fila.
P_6 : número de maneiras de ordenar as 6 restantes pessoas para sentar na outra fila.
2: número de escolhas da fila que ficará só com homens.

As 12 pessoas podem sentar-se de 7 257 600 maneiras diferentes de modo que uma das filas fique só com homens.

51.1. ${}^{4}C_2 \times {}^{16}C_3 = 6 \times 560 = 3360$

Onde:

${}^{4}C_2$: número de maneiras diferentes de escolher 2 dos 4 ases.

${}^{16}C_3$: número de maneiras diferentes de escolher 3 das restantes 16 cartas.

Há 3360 ”mãos” possíveis de receber com 2 e só 2 ases.

51.2. ${}^{5}C_3 \times {}^{15}C_2 = 10 \times 105 = 1\,050$

Onde:

${}^{5}C_3$: número de maneiras de escolher 3 das 5 cartas de paus.

${}^{15}C_2$: número de maneiras diferentes de escolher 2 das 15 cartas que não são de paus.

Há 1050 ”mãos” possíveis de receber com exatamente 3 paus.

51.3. ${}^{15}C_5$ é o número de maneiras diferentes de escolher 5 das 15 cartas que não são de paus.

${}^{15}C_5 = 3003$

Há 3003 ”mãos” possíveis de receber que não têm paus.

51.4. Para que uma “mão” tenha pelo menos 3 reis, teremos que considerar 2 situações: ou tem 3 reis ou tem 4 reis.

Se a “mão” tem 3 reis:

${}^{4}C_3 \times {}^{16}C_2 = 4 \times 120 = 480$

Onde:

${}^{4}C_3$: Número de maneiras diferentes de escolher 3 dos 4 reis.

${}^{16}C_2$: Número de maneiras diferentes de escolher 2 das 16 cartas que não são reis.

Se a “mão” tem 4 reis:

${}^{4}C_4 \times {}^{16}C_1 = 1 \times 16 = 16$

${}^{4}C_4$: os 4 reis.

${}^{16}C_1$: Número de maneiras diferentes de escolher 1 das 16 cartas que não são reis.

$480 + 16 = 496$

Há 496 “mãos” possíveis de receber que têm, pelo menos, 3 reis.

51.5. Podemos calcular o número de “mãos” com três reis, no máximo, calculando a diferença entre o número total de “mãos” possíveis e o número de “mãos” com 4 reis (calculado na alínea anterior).

${}^{20}C_5$ é o número total de mãos possíveis de receber.

${}^{20}C_5 = 15\,504$

$15\,504 - 16 = 15\,488$

Há 15 488 “mãos” possíveis de receber que têm três reis, no máximo.

51.6. ${}^{5}C_2 \times {}^{10}C_3 = 10 \times 120 = 1\,200$

Onde:

${}^{5}C_2$ número de maneiras diferentes de escolher 2 das 5 cartas de paus.

${}^{10}C_3$: número de maneiras diferentes de escolher 3 das 10 cartas que não são de ouros nem de paus.

Há 1200 “mãos” possíveis de receber que têm exatamente 2 paus e não têm ouros.

51.7. ${}^{4}C_2 \times {}^{12}C_3 = 6 \times 220 = 1320$

Onde:

${}^{4}C_2$: número de maneiras de escolher 2 das cartas de paus que não são o ás.

${}^{12}C_3$: Número de maneiras diferentes de escolher 3 das 12 cartas que não são ases nem paus.

Há 1320 "mãos” possíveis de receber que têm exatamente 2 paus e não têm ases.

Pág. 83

52. $\boxed{{}^{24}C_9 \times {}^{15}C_7}$

${}^{24}C_9$ é o número de maneiras de escolher 9 espaços dos 24 existentes para colocar os ovos cor-de-rosa.

Depois de colocados os ovos cor-de-rosa no expositor sobram 15 espaços.

${}^{15}C_7$ é o número de maneiras de escolher 7 espaços dos 15 existentes para colocar os ovos azuis.

Assim, ${}^{24}C_9 \times {}^{15}C_7$ é uma resposta correta para o problema.

$\boxed{{}^{24}C_{16} \times {}^{16}C_9}$

${}^{24}C_{16}$ é o número de maneiras de escolher 16 espaços no expositor, dos 24 existentes, para colocar os 16 ovos (9 cor-de-rosa e 7 azuis).

${}^{16}C_9$ é o número de maneiras de colocar os 9 ovos cor-de-rosa nos 16 espaços escolhidos.

Os ovos azuis colocam-se nos 7 espaços restantes.

Assim, ${}^{24}C_{16} \times {}^{16}C_9$ é uma resposta correta do problema.

53. $\underline{I}\ \underline{M}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$6 \times {}^{5}C_2 \times {}^{3}C_2 = 180$

Onde:

6 : número de lugares possíveis para o bloco das letras I e M.

${}^{5}C_2$: número de maneiras de colocar as duas letras P.

${}^{3}C_2$:número de maneiras de colocar as duas letras O.

Aparecem juntas em 180 anagramas.

54.1. $2^n = 2048 \Leftrightarrow 2^n = 2^{11} \quad \Leftrightarrow n = 11$

O conjunto tem 11 elementos.

54.2. $1 + 11 + {}^{11}C_2 + {}^{11}C_3 = 232$

Onde:
1: conjunto vazio
11: subconjuntos com 1 elemento
${}^{11}C_2$: subconjuntos com 2 elementos.
${}^{11}C_3$: subconjuntos com 3 elementos
232 subconjuntos.

55.1. $\frac{7!}{3!} = 840$ ou ${}^7C_3 \times 4! = 840$

É possível formar 840 números.

55.2.

$$\underline{\quad}\ \underline{6}\ \underline{6}\ \underline{6}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\begin{matrix}5\\7\end{matrix}}$$

${}^6C_3 \times 3! \times 2 = 240$

São ímpares 240 números.

Pág. 84

56.1. $\frac{10!}{3! \times 2! \times 2!} = 151\,200$

É possível formar $151\,200$ números.

56.2.

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{2} \quad \text{ou}$$

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\begin{matrix}4\\6\end{matrix}}$$

${}^9C_2 \times {}^7C_2 \times {}^5C_2 \times 3! + {}^9C_3 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times 2! \times 2 =$
$= 75\,600$

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{1} \quad \text{ou}$$

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\begin{matrix}3\\5\end{matrix}}$$

${}^9C_3 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times 2! + {}^9C_3 \times {}^6C_2 \times 4! \times 2 =$
$= 75\,600$

São pares $75\,600$ números. São ímpares $75\,600$ números.

56.3. $\underline{4}\ \underline{6}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$9 \times {}^8C_3 \times {}^5C_2 \times {}^3C_2 = 15\,120$

Em $15\,120$ números.

56.4. ${}^8C_2 \times {}^6C_2 \times 4! = 10\,080$

Em $10\,080$ números.

57.1. ${}^{10}C_2 = 45$

Definem 45 retas.

57.2. $2 \times {}^{10}C_2 = 90$ ou ${}^{10}A_2 = 90$

Definem 90 semirretas.

57.3. ${}^{10}C_3 = 120$

Definem 120 triângulos.

57.4. ${}^9C_2 = 36$

Têm o vértice em *A*, 36 triângulos.

57.5. $8 + {}^4C_2 \times {}^4C_1 \times 2 + {}^4C_2 \times 4 + 4 \times 4 \times 2 = 112$

${}^4C_2$: escolher 2 entre (I, J, A, B) ou 2 entre (G, F, E, D)
${}^4C_1$: 1 entre (G, F, E, D) ou 1 entre (I, J, A, B)
${}^4C_2$: 2 entre (I, J, A, B) ou 2 entre (G, F, E, D)
4: escolher entre G, F, E, D
4: escolher entre I, J, H, B
2: escolher H ou C
São intersetados pela reta *HC*, 112 triângulos.
Outro processo:
$120 - {}^4C_3 - {}^4C_3 = 112$
120: número total de triângulos identificados em 57.3.
${}^4C_3$: número de maneiras de escolher 3 pontos entre os pontos I, J, A e B
${}^4C_3$: número de maneiras de escolher 3 pontos entre os pontos G, F, E e D.

57.6. ${}^{n+9}C_2 = 190 \Leftrightarrow \frac{(n+9)!}{2!(n+9-2)!} = 190$

$\Leftrightarrow \frac{(n+9)(n+8)(n+7)!}{2! \times (n+7)!} = 190$

$\Leftrightarrow (n+9)(n+8) = 380$

$\Leftrightarrow n^2 + 17n + 72 = 380$

$\Leftrightarrow n^2 + 17n - 308 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \times 1 \times (-308)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-17 \pm 39}{2}$

$\Leftrightarrow n = -28 \vee n = 11$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 11$.

58.1. $52 \times 12 \times 11 \times 10 = 68\,640$

Podem formar-se $68\,640$ sequências.

58.2. $\underline{\text{Rei de Ouros}}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$ ou

$\underline{\text{Ouros (não rei)}}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$1 \times {}^{50}A_2 \times 48 + 12 \times {}^{50}A_2 \times 47 = 1\,499\,400$

Onde:
$52 - 4 = 48$
47: não é rei nem a primeira carta
Podem formar-se $1\,499\,400$ sequências.

Pág. 85

59.1. ${}^{15}C_3 \times {}^{12}C_5 = 360\,360$

É possível formar $360\,360$ sequências.

59.2. ${}^{13}C_5 \times {}^8C_7 = 10\,296$

É possível formar $10\,296$ sequências.

59.3.

$^{10}C_3 \times {}^{11}C_5 = 55\,440$

Não ficam bolas vermelhas seguidas em $55\,440$ sequências.

59.4. $360\,360 - 55\,440 = 304\,920$

Em $304\,920$ sequências.

60.1. $^{6}C_3 \times {}^{9}C_2 = 720$

Podem ser formados 720 conjuntos diferentes.

60.2. a) $^{15}C_4 - {}^{6}C_4 - {}^{9}C_4 = 1224$

$^{15}C_4$: Todos os subconjuntos

$^{6}C_4$: Subconjuntos de bolas azuis

$^{9}C_4$: Subconjuntos de bolas vermelhas

Em 1224 subconjuntos.

b) $^{15}C_4 - {}^{8}C_4 = 1295$

Em 1295 subconjuntos.

61.1. $\dfrac{7!}{3!} = 840$ ou $^{7}C_3 \times 4!$

Os chapéus podem colocar-se de 840 maneiras diferentes.

61.2. $5 \times 4! = 120$

Podem colocar-se de 120 maneiras diferentes.

61.3.

$840 - {}^{5}C_3 \times 4! = 600$

Podem colocar-se de 600 maneiras diferentes.

Pág. 86

62.1. $\dfrac{8!}{3! \times 2!} = 3360$ ou $^{8}C_3 \times {}^{5}C_2 \times 3! = 3360$

Os automóveis podem expor-se de 3360 maneiras.

62.2. VVV AA Azul Verde Preto

$5! = 120$

Os automóveis podem expor-se de 120 maneiras.

62.3. $6 \times 2 \times {}^{5}C_3 = 120$

Onde:

6: número de lugares onde os automóveis azul, verde e preto ficam seguidos.

2: APV ou VPA

$^{5}C_3$: número de maneiras de expor os 3 carros vermelhos nos 5 espaços disponíveis.

Os automóveis podem expor-se de 120 maneiras.

62.4. $3360 - 7 \times 2! \times {}^{6}C_3 \times {}^{3}C_2 = 2520$

Os automóveis podem expor-se de 2520 maneiras.

62.5.

$3360 - {}^{5}C_2 \times 3! \times {}^{6}C_3 = 2160$

Onde $^{5}C_2 \times 3! \times {}^{6}C_3$ representa o número de maneiras de dispor os automóveis vermelhos alternados.

Os automóveis podem-se expor de 2160 maneiras.

63.1. $^{12}C_6 \times {}^{8}A_6 \times {}^{8}A_6$ ou $^{8}C_6 \times {}^{8}C_6 \times 12!$

Onde:

$^{12}C_6$: número de maneiras de escolher dois grupos de 6 pessoas.

$^{8}A_6$: número de maneiras de ordenar 6 pessoas na 1.ª fila.

$^{8}A_6$: número de maneiras de ordenar 6 pessoas na 2.ª fila.

$^{8}C_6$: número de maneiras de escolher 6 lugares dos oitos existentes na 1.ª fila.

$^{8}C_6$: número de maneiras de escolher 6 lugares dos oito existentes na 2.ª fila.

$12!$: número de maneiras de ordenar 12 pessoas.

63.2. $2 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4$ ou $^{8}C_4 \times 12! \times 2$

Onde:

2 : Escolha da fila que fica com 8

$^{12}A_8$: número de maneiras de selecionar ordenadamente 8 pessoas das 12 existentes.

$^{8}A_4$: número de maneiras de sentar ordenadamente 4 pessoas nos 8 lugares disponíveis.

$^{8}C_4$ **:** número de maneiras de escolher os 4 lugares dos oito existentes da fila que vai ficar com 4 pessoas.

$12!$: número de maneiras de ordenar 12 pessoas.

2: Escolha da fila que fica com 8.

63.3. $^{8}A_5 \times {}^{11}A_7$ ou $^{8}C_5 \times 5! \times {}^{11}C_7 \times 7!$

Onde:

$^{8}A_5$: número de maneiras de sentar ordenadamente os 5 elementos da equipa técnica nos 8 lugares da fila da frente.

$^{11}A_7$: número de maneiras de sentar ordenadamente as 7 pessoas que ficaram nos 11 lugares disponíveis.

$^{8}C_5 \times 5!$: representa $^{8}A_5$

$^{11}C_7 \times 7!$: representa $^{11}A_7$

64.1. $\dfrac{5!}{3! \times 2!} = 10$

ou $^{5}C_3 = 10$ ou $^{5}C_2 = 10$

Têm 10 elementos de A.

64.2.

$\underline{\cancel{0}}\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \underline{0}$

$8 \times {}^{8}A_3 \times 1 = 3024$

ou

$\underline{\cancel{0}}\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{2,4,5,6,8}$

$8 \times {}^{8}A_3 \times 5 = 13\,440$

$3024 + 13\,440 = 16\,464$

Têm $16\,464$ elementos de A.

64.3.

$\underline{3}\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_$

${}^{4}C_2 \times {}^{9}A_2 = 486$

ou

$\underline{\cancel{3}\,\cancel{0}}\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_$

$8 \times {}^{4}C_3 \times 9 = 288$

$486 + 288 = 774$

Têm 774 elementos de A.

64.4. $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Algarismos: 0, 1, 2, 3 e 4

$\underline{\cancel{0}}\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_$

$4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$

Têm 96 elementos de A.

Pág. 87

65.1. ${}^{10}A_4 = 5040$

O conjunto A tem 5040 elementos.

65.2. $\underline{0}\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_$

${}^{9}A_3 = 504$

São formados por três algarismos 504 elementos de A.

65.3. $\_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{1,3,5,7,9}$

$9 \times 8 \times 7 \times 5 = 2520$ ou ${}^{9}A_3 \times 5 = 2520$

São números ímpares 2520 elementos de A.

65.4. Consideremos números com 3 algarismos e números com 4 algarismos.
Algarismos pares: 0, 2, 4, 6, 8
Algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9

$\underline{O}\ \underline{P}\ \underline{P}\ \underline{I}$

${}^{3}C_2 \times 4 \times 3 \times 5 = 180$ ou

$\underline{P}\ \_\_\ \_\_\ \_\_$

${}^{3}C_1 \times 4 \times 5 \times 4 = 960$ ou

$\underline{I}\ \_\_\ \_\_\ \_\_$

$5 \times {}^{3}C_1 \times 4 \times 5 \times 4 = 1200$

$180 + 960 + 1200 = 2340$

Têm 2340 elementos de A.

66.1. ${}^{22}C_5 = 26\,334$

Pode escolher-se de $26\,334$ maneiras.

66.2. ${}^{10}C_3 \times {}^{12}C_2 = 7920$

Pode escolher-se de 7920 maneiras.

66.3. ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 + {}^{12}C_4 \times {}^{10}C_1 = 14\,850$

Onde:

${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$: número de maneiras de escolher 3 raparigas e 2 rapazes

${}^{12}C_4 \times {}^{10}C_1$: número de maneiras de escolher 4 raparigas e 1 rapaz

Pode escolher-se de 14 850 maneiras.

66.4. $26\,334 - {}^{12}C_5 = 25\,542$

Onde:

$26\,334$: todos os grupos de 5 elementos.

${}^{12}C_5$: grupos só com raparigas (com 5 elementos).

Pode escolher-se de $25\,542$ maneiras.

66.5. ${}^{10}C_5 + {}^{12}C_1 \times {}^{10}C_4 = 2772$

Onde:

${}^{10}C_5$: número de maneiras de escolher 5 rapazes.

${}^{12}C_1 \times {}^{10}C_4$: número de maneiras de escolher 1 rapariga e 4 rapazes.

Pode escolher-se de 2772 maneiras.

66.6. $26\,334 - {}^{10}C_5 - {}^{12}C_5 = 25\,290$

Onde:

${}^{10}C_5$ é o número de maneiras de escolher só rapazes.

${}^{12}C_5$ é o número de maneiras de escolher só raparigas.

Pode escolher-se de $25\,290$ maneiras.

67. 20 alunos; Equipas A, B, C, e D

67.1. ${}^{20}C_5 \times {}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5 \times {}^{5}C_5 = {}^{20}C_5 \times {}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5$

Onde:

${}^{20}C_5$: Equipa A

${}^{15}C_5$: Equipa B

${}^{10}C_5$: Equipa C

${}^{5}C_5$: Equipa D

Ou

$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5}_{\text{Equipa A}}\ \underbrace{6\ 7\ 8\ 9\ 10}_{\text{Equipa B}}\ \underbrace{11\ 12\ 13\ 14\ 15}_{\text{Equipa C}}\ \underbrace{16\ 17\ 18\ 19\ 20}_{\text{Equipa D}}$

$$\frac{20!}{5! \times 5! \times 5! \times 5!} = \frac{20!}{(5!)^4}$$

Onde:

$20!$ é o número de maneiras de ordenar os 20 jogadores

$5! \times 5! \times 5! \times 5!$: dentro de cada equipa, a ordem dos elementos não interessa.

67.2. $\dfrac{{}^{20}C_5 \times {}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5 \times {}^{5}C_5}{4!} = \dfrac{{}^{20}C_5 \times {}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5}{4!}$

$4!$: como as equipas não são nomeadas há $4!$ menos equipas.

Ou

$$\frac{20!}{5! \times 5! \times 5! \times 5! \times 4!} = \frac{20!}{(5!)^4 \times 4!}$$

Máximo On

Pág. 88

1. ${}^{12}C_6 = 924$

2.1. Depois de importar a biblioteca **random**, define uma lista com o nome dos doze alunos. Depois de misturar/baralhar, de forma aleatória os elementos da lista alunos, faz um **print** dessa lista. Define, em seguida, mais duas listas, a lista **Veneza**, com os seis primeiros elementos da lista alunos e a lista **Atenas**, com os restantes alunos da lista. Para finalizar faz um **print** das listas **Veneza** e **Atenas**.

2.2. Muito provavelmente não, porque o Python seleciona aleatoriamente uma de 924 distribuições possíveis.

3.1. N.º de possibilidades de ficarem juntos:

${}^{10}C_4 = 210$

N.º de possibilidades de não ficarem juntos:

$924 - 210 = 714$

É mais provável não ficarem juntos.

Pág. 89

3.2. Se a cidade escolhida aleatoriamente for Veneza, forma-se a lista **Veneza** com os nomes do Álvaro e da Fernanda e ainda com os quatro primeiros elementos da lista **alunos_sem_álvaro_e_fernanda**, com os seus elementos misturados, e forma-se a lista **Atenas** com os restantes elementos da lista.
Caso contrário, isto é, se a cidade escolhida aleatoriamente for **Atenas**, forma-se a lista **Veneza** com os seis primeiros elementos da lista **alunos_sem_álvaro_e_fernanda**, com os seus elementos misturados, e forma-se a lista **Atenas** com o Álvaro e a Fernanda e os restantes elementos da lista.

4.1. $3! \times {}^{12}C_2 \times {}^{10}C_5 = 99\,792$

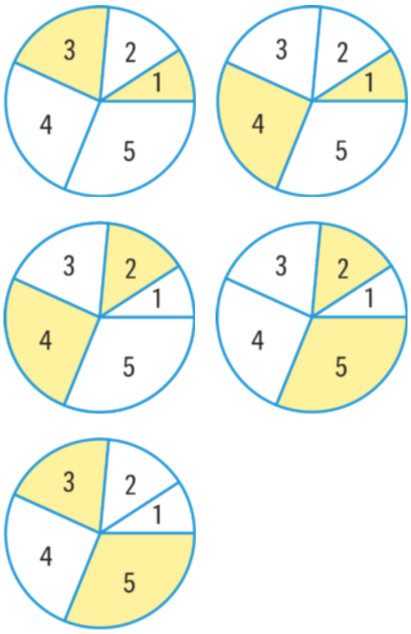
4.2. Exemplo de programa:

```
from random import *
cidades = ["Veneza", "Atenas", "Paris"]
cidade = choice(cidades)
print("O Álvaro e a Fernanda vão para",cidade)
alunos_sem_álvaro_e_fernanda = ["Ana", "Artur","Carla","Carlos","José","Josefa","Laura","Sandra","Susana","Xana"]
shuffle(alunos_sem_álvaro_e_fernanda)
if cidade=="Veneza":
    Veneza = ["Álvaro","Fernanda"]
    Atenas = alunos_sem_álvaro_e_fernanda[:5]
    Paris = alunos_sem_álvaro_e_fernanda[5:]
elif cidade=="Atenas":
    Veneza = alunos_sem_álvaro_e_fernanda[:5]
    Atenas = ["Álvaro","Fernanda"]
    Paris = alunos_sem_álvaro_e_fernanda[5:]
else:
  Veneza = alunos_sem_álvaro_e_fernanda[:5]
  Atenas = alunos_sem_álvaro_e_fernanda[5:]
  Paris = ["Álvaro","Fernanda"]
print("Alunos para Veneza:", Veneza)
print("Alunos para Atenas:", Atenas)
print("Alunos para Paris:", Paris)
```

Avaliação global 1

Pág. 90

1.



Como o círculo é pintado com 4 cores, 2 setores vão ser pintados com a mesma cor.

Pode ser o 1 e o 3: $6 \times 5 \times 1 \times 4 \times 3 = 360$

Pode ser o 1 e o 4: $6 \times 5 \times 4 \times 1 \times 3 = 360$

Pode ser o 2 e o 4: $6 \times 5 \times 4 \times 1 \times 3 = 360$

Pode ser o 2 e o 5: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 360$

Pode ser o 3 e o 5: $6 \times 5 \times 1 \times 4 \times 3 = 360$

$360 \times 5 = 1800$

Opção (A)

2.1. ${}^{6}C_2 + {}^{4}C_1 \times {}^{4}C_1 = 31$

${}^{4}C_1 \times {}^{4}C_1$: excluíram-se os 2 pontos comuns à reta e à circunferência.

Opção (B)

2.2. O menor valor de n é 7 porque se selecionarmos apenas 6 pontos eles podem só definir a reta r .

Opção (D)

3. 10 concorrentes.

${}^{10}C_5 \times {}^{5}C_2 \times {}^{2}C_1 = 5\,040$

Opção (C)

4. $6 \times 2! \times 5! = 1440$

Onde:

6 : número de posições possíveis do bloco Ana-Carlos-Bia.

$2!$: número de maneiras de ordenar a Ana e a Bia

$5!$: número de maneiras de ordenar os 5 amigos

Opção (B)

Pág. 91

5. 9 jovens

4	3	2
Produção	Desenv.	Apoio

${}^{9}C_4 \times {}^{5}C_3 \times 3! = 7\,560$

Opção (B)

6. 7 vermelhas

5 azuis

I – b)

II – a) $4 \times {}^{12}C_7 = 3\,168$

III – c)

IV – b) ${}^{8}C_5 \times {}^{8}C_7 = 448$

Avaliação global 2

Pág. 92

1. 13 trabalhadores: 1 eletricista, 1 canalizador, 1 pintor

1.1. ${}^{12}C_5 = 792$

A seleção pode ser feita de 792 maneiras.

1.2. ${}^{13}C_6 - {}^{10}C_6 = 1506$

${}^{10}C_6$: nenhum dos especializados é selecionado.

A seleção pode ser feita de 1506 maneiras.

2. 7 discos e 9 moedas
4 discos e 4 moedas ou 6 discos e 2 moedas

${}^{7}C_4 \times {}^{9}C_4 \times 2 + {}^{7}C_6 \times {}^{9}C_2 \times 2 = 9324$

O Pedro pode repartir os 16 objetos pelos filhos de 9324 maneiras.

3. Júri: 4 elementos
Candidatos: 5 (A, B, C, D, E)

3.1. Se um jurado votar só num candidato, tem 5 possibilidades de escolha (A, B, C, D, E).

Se votar em 2 candidatos tem ${}^{5}C_2 = 10$ possibilidades de escolha.

$5 + 10 = 15$

Cada jurado pode votar de 15 maneiras.

3.2. $15 \times 15 \times 15 \times 15 = 50\,625$

Resposta: O resultado pode ser estabelecido de 50 625 maneiras.

4. n : número de tipos de sushi do restaurante

$n-2$: número de peças de sushi experimentadas pela Augusta

$${}^{n}C_{n-2} = 300 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)! \times 2!} = 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \times (n-1) = 600 \Leftrightarrow n^2 - n - 600 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-600)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 25 \vee n = -24$$

Como n é um número natural, $n = 25$.

Assim, o número peças que a Augusta experimentou é $n - 2 = 25 - 2 = 23$.

Pág. 93

5. ${}^{6}C_2 \times 2 + {}^{6}C_3 = 50$

As 6 pessoas podem distribuir-se pelos 2 elevadores de 50 maneiras.

6. 4 algarismos; 2 vogais (a, e, i, o, u)

6.1. $2 \times 10^4 \times 5^2 = 500\,000$

É possível formar 500 000 códigos diferentes.

6.2. $3 \times 10^4 \times 5^2 = 750\,000$

3 : representa o número de lugares onde os algarismos ficam juntos

É possível formar 750 000 códigos diferentes.

6.3. $5 \times {}^{6}C_2 \times {}^{10}A_4 = 378\,000$

Onde:

5: é o número de possibilidades de escolha da vogal

${}^{6}C_2$: é o número de maneiras de escolher onde colocar as 2 vogais nos 6 espaços existentes.

${}^{10}A_4$: número de maneiras de escolher ordenadamente 4 algarismos dos 10.

É possível formar 378 000 códigos diferentes.

6.4. • ___ • ___ • ___ • ___ •

${}^{5}C_2 \times 5 \times 5 \times 10^4 = 2\,500\,000$

É possível formar 2 500 000 códigos diferentes.

6.5. ${}^{6}C_2 \times {}^{4}C_2 \times 5 \times 5 \times 9 \times 9 = 182\,250$

Onde:

${}^{6}C_2$ é o número de maneiras de escolher os lugares dos 2 algarismos 0.

${}^{4}C_2$ é o número de maneiras de escolher os lugares das 2 vogais.

É possível formar 182 250 códigos diferentes.

7. $6! \times 4! \times 4! = 414\,720$

Onde:

6! : permutações entre o bloco dos reis, o bloco dos valetes e as 4 damas;

4! : permutações entre os reis;

4! : permutações entre os valetes.

É possível formar 414 720 sequências diferentes das 12 cartas.