

Contagem

Vamos recordar

Ficha 16 Contagem

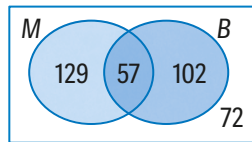
1.1. Sejam M e B os conjuntos de alunos que estão inscritos nas disciplinas de Matemática A e de Biologia, respetivamente. Organizando os dados num diagrama de Venn, tem-se:

$$186 + 159 + 72 = 417$$

$$417 - 360 = 57$$

$$186 - 57 = 129$$

$$159 - 57 = 102$$



Estão inscritos 57 alunos em Biologia e em Matemática A.

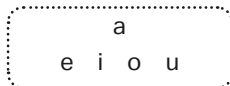
1.2. Estão inscritos 129 alunos somente em Matemática A.

1.3. Estão inscritos $129 + 102 = 231$ alunos em Matemática A ou em Biologia, mas não em ambas.

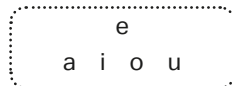
2.1. $(a, a), (a, e), (a, i), (a, o), (a, u), (e, a), (e, e), (e, i), (e, o), (e, u), (i, a), (i, e), (i, i), (i, o), (i, u), (o, a), (o, e), (o, i), (o, o), (o, u), (u, a), (u, e), (u, i), (u, o)$ e (u, u) .

É possível obter 25 sequências com dois elementos, repetidos ou não.

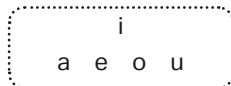
2.2.



4 sequências



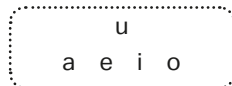
4 sequências



4 sequências



4 sequências



4 sequências

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \times 4 = 20$ sequências com dois elementos distintos.

Ou $25 - 5 = 20$ (todas as sequências – sequências com dois elementos iguais)

2.3. Como a ordem dos elementos não é relevante, tem-se:

$\{a, e\}, \{a, i\}, \{a, o\}, \{a, u\}, \{e, i\}, \{e, o\}, \{e, u\}, \{i, o\}, \{i, u\}$ e $\{o, u\}$.

É possível obter 10 subconjuntos.

3.1. Organizando os dados numa tabela de dupla entrada (ao lado), verifica-se que há 36 resultados possíveis.

3.2. Observando a tabela, verifica-se que há 5 possibilidades.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

4.1. Vamos usar um esquema para fazer a contagem.

Helena, Pedro	Helena, Nuno	Joana, Pedro	Joana, Nuno
Helena, Rui	Helena, Alexandre	Joana, Rui	Joana, Alexandre

Podem ser formadas 8 equipas.

- 4.2.** Sejam E_1 e E_2 as equipas mistas, e E_3 a equipa formada pelos dois rapazes. As três equipas podem ter sido classificadas de acordo com o número de golos marcados do seguinte modo:

1.º lugar	2.º lugar	3.º lugar
E_1	E_2	E_3
E_1	E_3	E_2
E_2	E_1	E_3
E_2	E_3	E_1
E_3	E_1	E_2
E_3	E_2	E_1

Logo, com a condição definida no enunciado, é possível ordenar as equipas de 4 maneiras diferentes.

- 5.1.** 20% de 500 rifas corresponde a $0,2 \times 500 = 100$ rifas.

Logo, há 100 rifas com prémio.

- 5.2.** Para garantir que obtém um prémio, o professor precisa de considerar o pior cenário possível – comprar todas as rifas sem prémio antes de encontrar uma com prémio.

Como há 100 rifas com prémio em 500 e o professor comprou uma sem prémio, há 399 sem prémio. Logo, na pior das hipóteses, teria de comprar 400 rifas.

Ficha 17 Princípio do pombal ou princípio das gavetas de Dirichlet

pág. 44

1. $\frac{127}{5} = 25,4$

Pelo princípio das gavetas de Dirichlet, se 127 alunos são distribuídos por 5 turmas, pelo menos uma terá, no mínimo, 26 alunos, independentemente da distribuição dos alunos pelas turmas ($127 : 5 = 25,4$).

- 2.** No pior cenário, o Tiago seleciona 10 livros infantis e 8 de banda desenhada, totalizando 18 livros, sem que nenhum seja de ficção científica. Ao selecionar o 19.º livro, garante que tem pelo menos um livro dos três géneros literários. Logo, o valor mínimo de n é 19.

- 3.** Cada pessoa pode cumprimentar de 0 a 72 pessoas (o total de participantes menos ela própria).

Se cada participante cumprimentasse um número diferente de pessoas, os números de cumprimentos seriam: 0, 1, 2, ..., 72.

No entanto, isso é impossível pois se uma pessoa cumprimentar 0 pessoas (ninguém), ninguém poderia ter cumprimentado 72 pessoas (isso exigiria que a pessoa que cumprimentou todos cumprimentasse também aquela que não cumprimentou ninguém).

Assim, os valores possíveis para o número de cumprimentos são: 0, 1, 2, ..., 71.

Portanto, há 72 valores possíveis. Pelo princípio das gavetas de Dirichlet, das 73 pessoas que participaram na conferência, pelo menos duas pessoas cumprimentaram o mesmo número de pessoas.

- 4.1.** Sabemos que há 20 sapatos na loja, correspondendo a 10 pares de sapatos (1 par = 1 sapato do pé esquerdo + 1 sapato do pé direito).

Para garantir que pegamos um par, consideramos o pior caso: pegamos o sapato de um dos pés (esquerdo ou direito) de todos os pares possíveis.

Se pegarmos em 11 sapatos, mesmo que 10 sejam do mesmo pé, seja esquerdo ou direito, o 11.º sapato será do outro pé, formando assim um par.

Portanto, deveremos pegar, no mínimo, em 11 sapatos.

- 4.2.** Como n é par, então há $\frac{n}{2}$ pares de sapatos. No pior caso, pegamos nos $\frac{n}{2}$ sapatos de um mesmo pé. Para garantir um par, ao pegarmos em mais um sapato, este será necessariamente do outro pé.

Logo, devemos pegar em $\frac{n}{2} + 1$ sapatos para garantir que pegamos num par.

- 5.1.** Há 4 cores (vermelho, azul, verde e amarelo) e cada cor tem bolas numeradas de 1 a 5, ou seja, existem 5 números por cor.
- Para calcular o menor número de bolas necessário, consideramos o cenário mais desfavorável, ou seja, retiramos o maior número possível de bolas sem atender à condição exigida.
- Para evitar ter 5 bolas da mesma cor, podemos retirar no máximo 4 bolas de cada cor (ou seja, 4 vermelhas, 4 azuis, 4 verdes e 4 amarelas): $4 \times 4 = 16$ bolas
- Se retirarmos mais uma bola (a 17.^a), esta será da mesma cor que uma das 4 cores já retiradas, garantindo 5 bolas da mesma cor.
- Logo, será necessário retirar pelo menos 17 bolas.
- 5.2.** Neste caso, para evitar ter 4 bolas com o mesmo número, podemos retirar 3 bolas de cada número. Como há 5 números (1, 2, 3, 4 e 5): $5 \times 3 = 15$ bolas.
- Se retirarmos mais uma bola (a 16.^a), esta será do mesmo número que 3 das bolas já retiradas, garantindo 4 bolas com o mesmo número.
- Logo, será necessário retirar pelo menos 16 bolas.
- 6.** De acordo com o princípio das gavetas de Dirichlet, se distribuirmos n objetos em k gavetas, com $n > k$, então pelo menos uma das gavetas terá no mínimo dois objetos.
- Neste caso, uma vez que $n = 13$, $k = 12$ e $13 > 12$, tem-se que pelo menos dois objetos (pessoas) ficam na mesma gaveta (mês).
- Logo, pelo princípio das gavetas de Dirichlet, pelo menos duas de 13 pessoas nasceram no mesmo mês.
- 7.** Aplicamos o princípio das gavetas de Dirichlet: cada dia do ano é uma "gaveta" (366 gavetas) e cada pessoa é um "objeto" a ser colocado numa gaveta.
- Para garantir que pelo menos 3 pessoas partilham o mesmo dia de aniversário: consideramos o pior cenário, onde distribuímos as pessoas de forma que, no máximo, duas pessoas nasçam em cada dia. Com $2 \times 366 = 732$ pessoas, podemos preencher todos os dias com apenas duas pessoas por dia sem exceder esse limite.
- A próxima pessoa (a 733.^a) obrigatoriamente terá de nascer num dia já "ocupado" por duas pessoas, formando um grupo de três pessoas no mesmo dia.
- Logo, o número mínimo de pessoas necessário é 733.
- 8.** Se cada mês for o mês de nascimento de, no máximo, dois alunos, o total de alunos seria $12 \times 2 = 24$.
- Ao distribuirmos 25 alunos por 12 meses, obrigatoriamente o 25.^o aluno será o terceiro aluno a nascer num determinado mês. Assim, conclui-se que, em pelo menos um dos meses, nasceram, no mínimo, três alunos.

Ficha 18 Princípio da multiplicação

- 1.** Pelo princípio da multiplicação, podem ser gerados $26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 = 676\,000$ códigos distintos.
- 2.** Não havendo restrições, cada um dos amigos teria 12 possibilidades de escolha das bebidas. Mas, como o Daniel e o Fábio não escolhem a mesma bebida, e admitindo, por exemplo, que o Daniel tem 12 opções, o Fábio só terá 11 (não escolhe a bebida escolhida pelo Daniel).
- Assim, pelo princípio da multiplicação, os amigos podem escolher as bebidas de $12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 11 = 228\,096$ maneiras diferentes.
- 3.1.** Podendo repetir-se as letras e os algarismos, para a posição de cada letra há 26 possibilidades e para a posição de cada algarismo há 10 possibilidades.
- Aplicando o princípio da multiplicação, há $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 45\,697\,600$ matrículas possíveis.

3.2. Há 26 maneiras de escolher a letra que se repete.

Considere-se as posições das letras, L1, L2, L3 e L4, por esta ordem. As letras iguais podem aparecer nas posições L1 e L2, L1 e L3, L1 e L4, L2 e L3, L2 e L4, e L3 e L4 (6 casos possíveis).

Assim, há 6×26 maneiras de colocar na placa de matrículas, as duas letras que se repetem.

As restantes duas letras, que são diferentes da anterior e diferentes entre si, podem ser colocadas na placa de matrícula de 25×24 maneiras diferentes, e há 10×10 maneiras de colocar os dois algarismos, que podem ser repetidos.

Aplicando o princípio da multiplicação, conclui-se que há $6 \times 26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 10 = 9\,360\,000$ matrículas diferentes.

3.3. Há 10×10 maneiras de colocar os dois algarismos na matrícula.

Há 26×25 maneiras de colocar as duas primeiras letras e 26×25 maneiras de colocar a terceira e a quarta.

Aplicando o princípio da multiplicação, nestas condições, há $26 \times 25 \times 10 \times 10 \times 26 \times 25 = 42\,250\,000$ matrículas diferentes.

4.1. $2400 = 2^5 \times 3 \times 5^2$

Os divisores de 2400 são da forma $2^a \times 3^b \times 5^c$, com $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $b \in \{0, 1\}$ e $c \in \{0, 1, 2\}$.

Portanto, há 6 possibilidades para a , 2 possibilidades para b e 3 possibilidades para c .

O número de divisores naturais de 2400 é $6 \times 2 \times 3 = 36$.

2400	2
1200	2
600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

4.2. Os divisores pares de 2400 são aqueles em que o expoente da potência de base 2 não é nulo, pelo que há 5 possibilidades para a , as mesmas 2 possibilidades para b e as mesmas 3 possibilidades para c .

O número de divisores naturais pares é $5 \times 2 \times 3 = 30$.

5. Um dos professores pode escolher uma fila de 2 maneiras e, nessa fila, uma de 5 cadeiras, o segundo uma de 4 cadeiras, o terceiro uma de 3 cadeiras e o quarto uma de 2 cadeiras. Assim, existem $5 \times 4 \times 3 \times 2$ possibilidades de os professores se sentarem em cada uma das filas.

Os quatro encarregados de educação têm as restantes 6 cadeiras disponíveis, onde, usando o mesmo raciocínio, se poderão sentar de $6 \times 5 \times 4 \times 3$ maneiras diferentes.

Portanto, nas condições definidas, as oito pessoas poderão sentar-se de $2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 86\,400$ maneiras diferentes.

6.1. Relativamente à posição dos rapazes, o grupo de duas raparigas pode sentar-se em 4 lugares diferentes, no início, no fim ou numa das duas posições entre rapazes, podendo permutar entre si de 2 maneiras diferentes.

Por sua vez, os rapazes podem sentar-se, sucessivamente, de $3 \times 2 \times 1$ maneiras diferentes.

Pelo princípio da multiplicação, nas condições definidas, os cinco alunos podem sentar-se de $4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$ maneiras diferentes.

6.2. Para ficarem separados, a Anamar e o Lucas terão de ficar nas extremidades dos quatro lugares ou entre os colegas, podendo, nessa condição, sentar-se de 4×3 maneiras diferentes. Os restantes colegas podem sentar-se de $3 \times 2 \times 1$ maneiras diferentes.

Assim, nas condições definidas, os cinco alunos podem sentar-se de $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$ maneiras diferentes.

7. O número deve ter cinco algarismos, quatro dos quais pares, e ser ímpar. Assim, o último algarismo é ímpar e os quatro primeiros pares. Como o número é superior a 30 000, para o primeiro algarismo há 3 opções (4, 6 e 8), para o segundo, terceiro e quarto algarismos há 5 opções (0, 2, 4, 6 e 8) e para o último algarismo há 5 opções (1, 3, 5, 7 e 9).

Portanto, há $3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 1875$ números ímpares com quatro algarismos pares.

Ficha 19 Princípio da adição

pág. 48

- Pelo princípio da adição, o cliente pode escolher um dos pratos de carne, um dos pratos de peixe ou um dos pratos vegetarianos: $4 + 3 + 5 = 12$.

O cliente tem 12 escolhas possíveis.
- Cada funcionário pode participar:

 - numa atividade ao ar livre (4 escolhas) e numa atividade de 6 em recinto fechado (6 escolhas): $4 + 6 = 10$;
 - em ambas as atividades: $4 \times 6 = 24$ (para cada atividade ao ar livre, o colaborador pode combinar com qualquer em recinto fechado).

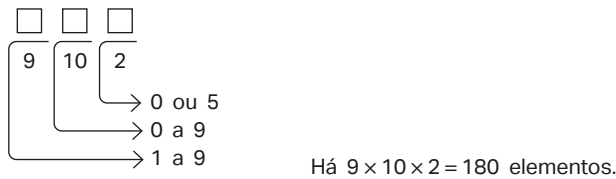
Aplicando o princípio da adição, conclui-se que o colaborador tem $10 + 24 = 34$ combinações diferentes de escolha de atividades.
- A Cristina pode vestir-se de duas formas:

 - *t-shirt*, calças e sapatos, tendo $8 \times 4 \times 3 = 96$ opções;
 - *t-shirt*, saia e sapatos, tendo $8 \times 3 \times 3 = 72$ opções.

Portanto, a Cristina pode vestir-se de $96 + 72 = 168$ maneiras diferentes.
- Para que as quatro bolas extraídas tenham a mesma cor, apenas podem ser de cor vermelha ou azul. Tendo em conta que as bolas são numeradas, existem $10 \times 9 \times 8 \times 7$ maneiras diferentes de extrair quatro bolas vermelhas e $7 \times 6 \times 5 \times 4$ maneiras diferentes de extrair quatro bolas azuis. É possível obter $10 \times 9 \times 8 \times 7 + 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 5880$ filas diferentes com quatro bolas de mesma cor.

pág. 49

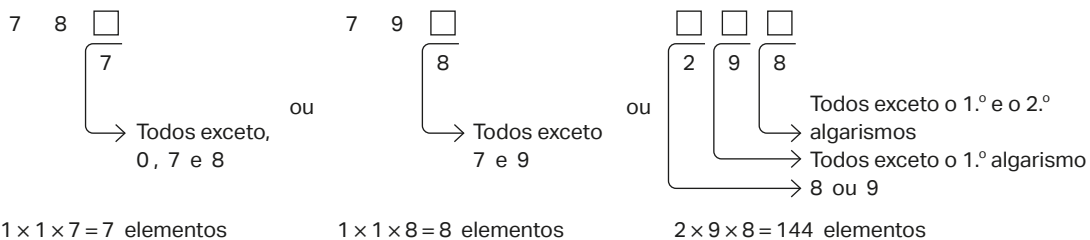
5.1.



- Como 5 é ímpar, a soma dos outros dois algarismos do número tem de ser ímpar. Tal só é possível se os dois algarismos forem um par e outro ímpar. Esquemmatizando:



5.3.



- O António pode escolher um livro de Matemática e um livro de Física, ou um livro de Matemática e um livro de linguagens de programação ou, ainda, um livro de Física e um livro de linguagens de programação.

O António pode escolher os livros de $12 \times 5 + 12 \times 3 + 5 \times 3 = 111$ maneiras diferentes.

7. Dispõe-se de dois elementos (traço e ponto) que podem aparecer repetidos. Número de sinais com:
- um elemento: 2
 - dois elementos: $2 \times 2 = 4$
 - três elementos: $2 \times 2 \times 2 = 8$
 - quatro elementos: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Aplicando o princípio da adição, conclui-se que se pode enviar $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ sinais distintos.

Ficha 20 Fatorial de um número natural n

pág. 50

$$1.1. \frac{7!}{9!} = \frac{7!}{9 \times 8 \times 7!} = \frac{1}{9 \times 8} = \frac{1}{72}$$

$$1.2. \frac{5! - 7!}{4!} = \frac{5 \times 4! - 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = \frac{5 - 7 \times 6 \times 5}{1} = 5 - 210 = -205$$

$$1.3. \frac{0!}{7!} - \frac{1!}{6!} = \frac{1}{7 \times 6!} - \frac{1}{6!} = \frac{1 - 7}{7 \times 6!} = \frac{-6}{7 \times 6!} = -\frac{6}{7 \times 6 \times 5!} = -\frac{1}{7 \times 5!} = -\frac{1}{7 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = -\frac{1}{840}$$

$$1.4. \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} + \frac{(n+1)n!}{n!} = n + (n+1) = 2n + 1$$

$$1.5. \frac{(n-4)!}{(n-2)!} = \frac{(n-4)!}{(n-2)(n-3)(n-4)!} = \frac{1}{(n-2)(n-3)} = \frac{1}{n^2 - 5n + 6}$$

$$1.6. \frac{(n+1)! + (n+2)!}{n!} = \frac{(n+1)n! + (n+2)(n+1)n!}{n!} = n+1 + (n+2)(n+1) = n+1 + n^2 + 3n+2 = n^2 + 4n+3$$

$$2.1. 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!} = \frac{13!}{8!}$$

$$2.2. 301 \times 300 \times 299 = \frac{301 \times 300 \times 299 \times 298!}{298!} = \frac{301!}{298!}$$

$$2.3. 14 \times 15 \times 16 \times 17 = \frac{17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13!}{13!} = \frac{17!}{13!}$$

$$2.4. (n-5)(n-4) = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)!}{(n-6)!} = \frac{(n-4)!}{(n-6)!}$$

$$2.5. n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$2.6. n(n+2)(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$$

$$3.1. \frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30 \Leftrightarrow n(n-1) = 30 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Leftrightarrow^{n \geq 2} n = 6$$

$$3.2. \frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 9n + 30 \Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 9n + 30 \Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 9n + 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 - 9n - 30 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 12n - 28 = 0 \Leftrightarrow^{n \geq 3} n = 14$$

$$3.3. \frac{n! + (n+1)!}{(n^2 - n)(n-2)!} = 4 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)! + (n+1)n(n-1)(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!} = 4 \Leftrightarrow 1 + (n+1) = 4 \Leftrightarrow^{n \geq 2} n = 2$$

$$3.4. \frac{(n+1)! + (n-1)!}{n!} = \frac{7(n-1)!}{n!} \Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)! + (n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{7(n-1)!}{n(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{(n+1)n+1}{n} = \frac{7}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n + 1 - 7 = 0 \Leftrightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Leftrightarrow^{n \geq 1} n = 2$$

$$3.5. (n+1)! = 12 \Leftrightarrow n \in \emptyset$$

É uma equação impossível, pois não há qualquer número natural cujo fatorial seja igual a 12.

- 4.1.** Os motociclistas poderiam posicionar-se de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ maneiras diferentes.
- 4.2.** Como Miguel Oliveira foi o primeiro classificado na corrida, os outros três motociclistas e um dos restantes catorze que concluíram a prova ficaram posicionados do segundo ao quinto lugar. Assim, poderiam verificar-se $14 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 14 \times 4! = 336$ resultados possíveis.
- 5.** Os robôs de exploração podem dispor-se de 4×3 maneiras diferentes em cada uma das 2 filas. Os restantes seis robôs podem ocupar os seis lugares disponíveis de $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$ maneiras diferentes. Portanto, os oito robôs podem ser dispostos nas duas filas de $2 \times 4 \times 3 \times 6! = 17\ 280$ maneiras diferentes.
- 6.** Como há 5 alunos que tocam piano que devem ficar juntos na fotografia, há $5!$ formas de os dispor em 5 posições adjacentes. Da mesma forma, há $7!$ formas diferentes de dispor os alunos de violino em 7 posições adjacentes. Como se pretende que os alunos que tocam o mesmo instrumento fiquem juntos, independentemente da ordenação em cada grupo, há 2 formas de colocar os dois grupos (na direita ou na esquerda), e assim o número total de maneiras que se podem dispor os 12 alunos nas condições descritas, é: $2 \times 5! \times 7! = 1\ 209\ 600$.
- 7.** Para que os livros de Ciências (C) e de Literatura (L) fiquem lado a lado, existem duas hipóteses, CL ou LC. Considerando este par como um elemento (e garantindo desta forma estes livros ficam juntos), podemos considerar que temos 5 elementos – este par e os restantes 4 livros – que podem ser colocados em 4 posições, sendo a ordem relevante, ou seja, temos $5!$ formas diferentes de dispor estes 5 elementos.
- O número de maneiras diferentes em que se podem colocar os seis livros nas condições definidas é $2 \times 5! = 240$.

Avaliação

Ficha 21 Princípios gerais de contagem

- 1. (B)** 10
O turista pode efetuar a viagem usando a rodovia e depois a ferrovia ou usando a ferrovia e depois a rodovia.
Logo, a viagem pode ser efetuada de $3 \times 2 + 2 \times 2 = 6 + 4 = 10$ maneiras diferentes.
- 2. (D)** 9^5
O algarismo das dezenas de milhar não pode ser igual a zero (9 possibilidades), os restantes algarismos terão de ser diferentes do anterior e poderá ser igual a zero (9 possibilidades para cada uma das 4 posições).
Logo, há $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5$ números nas condições pedidas.
- 3.1.** Na pior das hipóteses, haverá 17 salas completas com 28 alunos $\left(\frac{501}{28} \approx 17,89\right)$. Nesta situação, haverá $501 - 17 \times 28 = 25$ alunos para distribuir pelas três salas restantes.
Como $\frac{25}{3} \approx 8,33$, então em pelo menos uma das salas haverá, no mínimo, nove alunos.
- 3.2.** Na situação mais favorável, admitindo que há uma turma com 28 alunos e pelo menos uma turma com 18 alunos, restam $501 - 18 - 28 = 455$ alunos. Como $\frac{455}{26} = 17,5$, se 17 turmas tivessem 26 alunos, teria de haver uma turma com $501 - 18 - 28 - 17 \times 26 = 13$ alunos, o que contraria o enunciado. Portanto, no máximo, poderá haver 16 turmas com 26 alunos. Neste caso, haveria duas turmas com $501 - 18 - 28 - 16 \times 26 = 39$ alunos no total (18 + 21 ou 19 + 20). Portanto, nas condições do enunciado, haveria, no máximo, 16 turmas com 26 alunos, podendo as restantes quatro turmas ter a seguinte constituição: duas turmas com 18 alunos, uma turma com 21 e uma turma com 28, ou uma turma com 18 alunos, uma turma com 19, uma turma com 20 e uma turma com 28.

4.1. Os amigos podem tirar a fotografia de $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras diferentes.

4.2. Como dos 5 amigos vão ser escolhidos 3 e a ordem é relevante, para a 1.^a posição há 5 escolhas, para a segunda posição há 4 escolhas e para a terceira posição há 3 escolhas. Aplicando o princípio da multiplicação, conclui-se que a fotografia pode ser tirada de $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneiras diferentes.

5. Para que um número seja maior do que 40 000 e tenha cinco algarismos, o primeiro deve ser 4, 5 ou 6. Os quatro algarismos restantes devem ser escolhidos de entre os seis algarismos com exceção do algarismo que foi escolhido para a primeira posição, sendo todos diferentes. Assim, existem $3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 360$ números naturais nestas condições.

Para um número com seis algarismos, podem ser utilizados os seis algarismos para qualquer posição, desde que não haja repetição. Para esta condição, existem $6! = 720$ números naturais.

Nas condições pedidas, é possível formar $360 + 720 = 1080$ números.

6.1. Como os pais ficam juntos, vamos considerá-los como uma unidade, podendo sentar-se lado a lado de 2 maneiras diferentes. Assim, considerando cinco elementos, o conjunto dos pais e os quatro filhos, os elementos da família podem sentar-se de $2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 240$ maneiras diferentes.

6.2. Os irmãos mais novos podem sentar-se de 2 maneiras diferentes e os restantes elementos da família podem sentar-se de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes. Logo, os elementos da família podem sentar-se de $2 \times 24 = 48$ maneiras diferentes.

7. Vamos começar por determinar quantos destes números são maiores do que 32 145.

5 _ _ _ _ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ números

4 _ _ _ _ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ números

3 5 _ _ _ $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ números

3 4 _ _ _ $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ números

3 2 5 _ _ $2 \times 1 = 2! = 2$ números

3 2 4 _ _ $2 \times 1 = 2! = 2$ números

3 2 1 5 4 1 número

Há $24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 65$ números maiores do que 32 145.

Logo, 32 145 é o número de ordem 66 (66.^o).

8.
$$\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 7n \Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)! - n(n-1)!}{(n-1)!} = 7n \Leftrightarrow (n+1)n - n = 7n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - n - 7n = 0 \Leftrightarrow n(n-7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 0 \vee n = 7 \stackrel{n \geq 1}{\Leftrightarrow} n = 7 \text{ Logo, } S = \{7\}.$$

Ficha 22 Arranjos com repetição

1.1. As duas vogais podem ficar juntas em 5 situações (ou ocupam as duas primeiras posições, ou ocupam a segunda e a terceira posições, ou ocupam a terceira e quarta posição, ou ocupam a quarta e quinta posições ou ocupam a quinta e sexta posições).

Os algarismos e as vogais podem repetir-se.

Assim, para cada algarismo há 10 possibilidades e para cada vogal há 5 possibilidades.

É possível formar $5 \times {}^5A_2 \times {}^{10}A_4 = 5 \times 5^2 \times 10^4 = 1\,250\,000$ códigos diferentes.

1.2. Os algarismos e as vogais podem repetir-se, por isso, para cada algarismo há 10 possibilidades e para cada vogal há 5 possibilidades.

Esquematizando:

$$\frac{A}{10} \frac{A}{10} \frac{V}{5} \frac{V}{5} \frac{A}{10} \frac{A}{10}$$

$${}^{10}A_4 \times {}^5A_2 = 10^4 \times 5^2 = 250\,000$$

É possível formar 250 000 códigos diferentes.

1.3. As vogais são iguais, pelo que há 5 possibilidades de as escrever.

Os algarismos e as vogais podem repetir-se. Assim, para cada algarismo há 10 possibilidades e para cada vogal há 5 possibilidades.

Esquematizando: $\frac{A}{10} \frac{A}{10} \frac{V}{5} \frac{V}{1} \frac{A}{10} \frac{A}{10}$ $5 \times {}^{10}A_4' = 5 \times 10^4 = 50\,000$

É possível formar 50 000 códigos diferentes.

- 1.4.** O algarismo 3 pode ocupar qualquer uma das quatro primeiras posições e as duas vogais podem trocar de posição. Para a vogal diferente de E há quatro possibilidades e para cada algarismo diferente de 3 há nove possibilidades.

A título de exemplo: $\frac{3}{1} \frac{A}{9} \frac{A}{9} \frac{A}{9} \frac{E}{1} \frac{V}{4}$ $4 \times {}^9A_3' \times 4 \times 2 = 4 \times 9^3 \times 4 \times 2 = 23\,328$

É possível formar 23 328 códigos diferentes.

- 2.** Pretende-se determinar quantos números com 5 algarismos há, usando apenas os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4, podendo estes ser repetidos. Esquematizando, tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \quad _ \quad _ \quad _ \quad _ \\ 2 \quad 0 \quad _ \quad _ \quad _ \\ 2 \quad 1 \quad _ \quad _ \quad _ \\ 2 \quad 2 \quad _ \quad _ \quad _ \end{array} \right\} \begin{array}{l} {}^5A_4' - 1 = 5^4 - 1 = 624 \text{ (exclui-se o 10 000)} \\ 3 \times {}^5A_3' = 3 \times 5^3 = 375 \end{array}$$

Logo, há $624 + 375 = 999$ números nas condições pedidas.

- 3.** Cada prognóstico (jogo) tem 3 opções possíveis (1, X ou 2), e o apostador tem de fazer 14 escolhas.

Como a ordem importa (porque cada jogo ocupa uma posição específica) e os mesmos resultados podem repetir-se (por exemplo, pode-se escolher "1" várias vezes), trata-se de um problema de arranjos com repetição. Logo, há ${}^3A_{14}' = 3^{14} = 4\,782\,969$ apostas possíveis.

- 4.** O bloco das quatro letras pode ocupar uma de 5 posições relativamente aos quatro algarismos. Para cada posição do bloco de letras, há ${}^{26}A_4'$ possibilidades de as escolher e ${}^{10}A_4'$ possibilidades de escolher os quatro algarismos. Logo, é possível gerar $5 \times {}^{26}A_4' \times {}^{10}A_4' = 5 \times 26^4 \times 10^4 = 22\,848\,800\,000$ códigos diferentes para os cofres.

- 5.** Para que os números de seis algarismos sejam ímpares e tenham cinco algarismos pares, todos os números devem ser pares à exceção do último.

Para garantir que o número é superior a 500 000, existem 2 hipóteses para selecionar o primeiro algarismo, das dezenas de milhar (6 e 8). Existem 5 hipóteses para a escolha do segundo algarismo (0, 2, 4, 6 e 8), tal como para os terceiro, quarto e quinto algarismos, e também 5 hipóteses para o quinto algarismo, o das unidades, nomeadamente 1, 3, 5, 7 e 9, ficando garantido que o número é ímpar.

Assim, a quantidade de números ímpares com seis algarismos que têm cinco algarismos pares e são superiores a 500 000 é $2 \times {}^5A_4' \times 5 = 2 \times 5^4 \times 5 = 6250$.

- 6.1.** Cada escolha pode ser feita em cada um dos cinco departamentos. Portanto, há ${}^5A_8' = 5^8 = 390\,625$ maneiras de formar a equipa.

- 6.2.** Como vimos, sem restrições, a equipa de 8 elementos pode ser formada de 390 625 maneiras diferentes. Como a equipa, sem elementos de Engenharia ou Marketing, poderia ser formada de ${}^3A_8' = 3^8 = 6\,561$ maneiras diferentes, então há $390\,625 - 6\,561 = 384\,064$ maneiras diferentes de formar a equipa com pelo menos um membro de Engenharia ou Marketing.

Ficha 23 Permutações

pág. 56

1.1. $P_6 = 6! = 720$

1.2. Na palavra matemática repete-se a letra A (três vezes) e as letras M e T (duas vezes).

As letras A permutam entre si de P_3 maneiras e as letras M e T de P_2 maneiras. Como cada uma destas permutações gera a mesma palavra, então podem obter-se

$$\frac{P_{10}}{P_3 \times P_2 \times P_2} = \frac{10!}{3! \times 2! \times 2!} = 151\,200 \text{ permutações.}$$

2. Como os volumes 1 e 2 sobre dragões devem ser lidos no mesmo dia e na ordem correta, podemos considerá-los como uma única unidade. Assim, em vez de 10 livros, temos 9 unidades para organizar: 8 livros mais um conjunto dos dois livros da série sobre dragões.

Os volumes 1 e 2 podem ser lidos num dos cinco dias e os restantes podem ser escolhidos de P_8 maneiras diferentes.

Logo, a Ana pode escolher os livros para ler de $5 \times P_8 = 5 \times 8! = 201\,600$ maneiras diferentes.

3. Em vez de considerar as 6 fotografias individualmente, agrupamos as fotografias da mesma cor, formando dois conjuntos e uma unidade:

Conjunto azul (2 fotografias);

Conjunto branco (3 fotografias);

Fotografia vermelha.

Agora, temos 3 elementos a ordenar, o que pode ser feito de P_3 maneiras diferentes.

Dentro de cada conjunto, as fotografias podem trocar de posição entre si de P_2 maneiras diferentes, no caso do conjunto azul, e de P_3 maneiras diferentes, no caso do conjunto branco.

Logo, o número total de maneiras distintas de organizar as fotografias, garantindo que as da mesma categoria ficam juntas, é $P_3 \times P_2 \times P_3 = 3! \times 2! \times 3! = 72$.

4. Os 4 casais podem permutar entre si de P_4 maneiras diferentes e os elementos de cada casal podem permutar entre si de P_2 maneiras diferentes.

Logo, há $(P_2)^4 \times P_4 = (2!)^4 \times 4! = 384$ maneiras diferentes.

pág. 57

5. Considerando o conjunto das três letras "AND" como um só elemento e sem que permutem entre si, os 5 elementos resultantes podem permutar entre si de P_5 maneiras diferentes. Por outro lado, cada uma das 7 letras pode ser maiúscula ou minúscula, pelo que podem escrever-se de 2^7 maneiras diferentes.

Como se exclui a senha "ANDREIA", a Andreia tem $P_5 \times 2^7 - 1 = 5! \times 2^7 - 1 = 15\,359$ palavras-passe possíveis.

6. Relativamente à treinadora, há 5 posições para as alunas e 5 posições para os alunos de modo a fiquem separados por género. Como à direita da treinadora pode posicionar-se uma aluna ou um aluno, ficando respetivamente à sua esquerda um aluno ou uma aluna, há $2 \times P_5 \times P_5 = 2 \times 5! \times 5! = 28\,800$ maneiras de formar a roda.

7.1. Para percorrerem o menor número de quarteirões, o táxi pode apenas deslocar-se para sul (S) ou este (E), percorrendo 4 quarteirões para sul e 5 quarteirões para este. Isto significa que qualquer percurso válido será uma permutação, por exemplo, da sequência SSSSEEEEE (4 "S" e 5 "E").

O número de sequências com 4 letras "S" e 5 letras "E" é $\frac{P_9}{P_4 \times P_5} = \frac{9!}{4! \times 5!} = 126$.

Logo, nas condições do enunciado, há 126 maneiras de o táxi se deslocar de A para B.

7.2. O táxi tem de percorrer 3 quarteirões para se deslocar de A a C e seis quarteirões para se deslocar de C a B . Por exemplo, seguindo a sequência SSE (ou permutações desta, seguida de SSSSSS (ou permutações desta), o táxi pode efetuar a viagem pretendida. Usando mesmo raciocínio aplicado na alínea anterior, conclui-se que o táxi pode deslocar-se de A para B , passando por C ,

$$\text{de } \frac{P_3}{P_2 \times P_1} \times \frac{P_6}{P_2 \times P_4} = \frac{3!}{2! \times 1!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} = 45.$$

8. Das três bolas verdes, que são diferentes entre si por estarem numeradas, selecionam-se duas para colocar nos extremos, o que pode ser feito de $3 \times 2 = 6$ maneiras diferentes. As restantes bolas, também diferentes entre si, podem dispor-se entre as bolas verdes já colocadas de $P_6 = 6! = 720$ maneiras diferentes.

Portanto, há $6 \times 720 = 4320$ maneiras diferentes de dispor as bolas nas condições definidas.

Ficha 24 Arranjos sem repetição

pág. 58

1.1. $10 \times 9 \times 8 \times 7 = {}^{10}A_4$

1.2. $200 \times 199 \times 198 \times \dots \times 42 \times 41 = {}^{200}A_{160}$

2.1. ${}^9A_4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6$

2.2. ${}^nA_3 = n \times (n - 1) \times (n - 2)$

3.1. Pretende-se o número de diferentes maneiras de distribuir oito tipos diferentes de gelado em dez compartimentos distintos. Logo, podem colocar-se de ${}^{10}A_8 = 1\,814\,400$ maneiras distintas.

3.2. Existem 5A_2 maneiras de dispor o gelado de baunilha e o gelado de caramelo pelos cinco compartimentos da fila de trás. Arrumados estes, temos 8A_6 formas de arrumar os restantes seis sabores nos oito lugares que ficam disponíveis. Desta forma, podem colocar-se de ${}^5A_2 \times {}^8A_6 = 403\,200$ maneiras distintas.

4. A prateleira de cima tem espaço para oito livros e os de Física são seis, pelo que existem 8A_6 maneiras diferentes de dispor os livros de Física na prateleira de cima. O mesmo para a prateleira de baixo. Para cada uma destas maneiras existem $10!$ maneiras de dispor os livros de Matemática pelos 10 lugares disponíveis.

Pode dispor-se os livros nas prateleiras de $2 \times {}^8A_6 \times 10! = 146\,313\,216\,000$ maneiras diferentes.

5.1. O número total de maneiras de colorir as oito faces usando 8 das 10 cores disponíveis é ${}^{10}A_8 = 1\,814\,400$.

5.2. Qualquer uma das oito faces do octaedro pode ser colorida de amarelo, pelo que existem 8 opções para o fazer, e para cada uma destas, as restantes 7 faces podem ser coloridas usando 7 das 9 cores disponíveis (já não pode ser usada a cor amarela), o que pode ser feito de 9A_7 maneiras diferentes.

Portanto, pode colorir-se o octaedro de $8 \times {}^9A_7 = 1\,451\,520$ maneiras diferentes.

pág. 59

6.1. O número total de disposições diferente que se podem obter é ${}^{12}A_4 = 11\,880$.

6.2. Começando com o cartão que tem o número seis, os três cartões seguintes podem ser quaisquer 3 dos restantes 11. Podem-se obter ${}^{11}A_3 = 990$ disposições diferentes.

6.3. Esquemmatizando:

$$\frac{8}{1} \frac{10}{1} \frac{?}{10} \frac{?}{9} \text{ ou } \frac{?}{10} \frac{8}{1} \frac{10}{1} \frac{?}{9} \text{ ou } 10 \ 9 \ \frac{8}{1} \ \frac{10}{1}$$

São três hipóteses, mais outras três, pois os cartões com os números 8 e 10 podem trocar entre si as posições. Para cada posição que eles ocupem, os outros dois cartões podem ser dispostos de ${}^{10}A_2$ maneiras diferentes. Podem obter-se $2 \times 3 \times {}^{10}A_2 = 540$ disposições.

- 7.1.** Dispomos de dez algarismos (do 0 ao 9). Os números de três algarismos diferentes pedidos são os arranjos dos dez algarismos, três a três, exceto os que começam por zero.
É possível formar ${}^{10}A_3 - {}^9A_2 = 648$, ou $9 \times {}^9A_2 = 648$, números.
- 7.2.** Os algarismos 1 e 2 podem estar em qualquer uma das 4 posições, pelo que podem ocupar 4A_2 posições diferentes. Os restantes lugares são preenchidos por dois algarismos escolhidos entre oito: 8A_2 . O número total é ${}^4A_2 \times {}^8A_2$. No entanto, há que subtrair os números em que o algarismo dos milhares é zero. Ao número de posições diferentes do 1 e do 2, dado por 3A_2 , multiplicamos pelo número de maneiras de escolher o outro algarismo que é 7. Assim, o número a subtrair é ${}^3A_2 \times 7$. É possível formar ${}^4A_2 \times {}^8A_2 - {}^3A_2 \times 7 = 630$ números.
- 7.3.** Os algarismos 0, 1 e 2 podem permutar entre si de $3!$ maneiras diferentes. Com os restantes algarismos formam-se 7A_2 sequências, podendo o conjunto dos três algarismos ocupar 3 posições relativamente aos outros dois algarismos, o que pode acontecer de ${}^7A_2 \times 3 \times 3!$ maneiras.
O zero não pode ocupar a casa das dezenas de milhar, pelo que temos de retirar os números de cinco algarismos nas condições pedidas, mas começados por 0, podendo 1 e 2 alternar entre si de $2!$ maneiras diferentes, o que acontece de ${}^7A_2 \times 2!$ maneiras distintas.
Nas condições definidas, é possível formar ${}^7A_2 \times 3 \times 3! - {}^7A_2 \times 2! = 672$ números.

Ficha 25 Combinações

pág. 60

1.1. ${}^{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$

1.2. ${}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n^2 - n}{2}$

2. ${}^nC_{n-p} = \frac{n!}{[n - (n-p)]! \times (n-p)!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} = {}^nC_p$

3. ${}^{30}C_{p+2} = {}^{30}C_{4p+8} \Leftrightarrow p+2 = 4p+8 \vee p+2 = 30 - (4p+8) \Leftrightarrow 3p = -6 \vee 5p = 20 \Leftrightarrow p = -2 \vee p = 4$

$p = -2: {}^{30}C_{-2+2} = {}^{30}C_{4 \times (-2)+8} \Leftrightarrow {}^{30}C_0 = {}^{30}C_0$ (verdadeiro)

$p = 4: {}^{30}C_{4+2} = {}^{30}C_{4 \times 4+8} \Leftrightarrow {}^{30}C_6 = {}^{30}C_{24}$ (verdadeiro)

Logo, $S = \{-2, 4\}$.

- 4.1.** Seja n o número de variedades de fruta existentes nessa frutaria. Uma equação que traduz o

problema é ${}^nC_2 = 378 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2!} = 378 \Leftrightarrow n^2 - n - 756 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-756)}}{2 \times 1} \stackrel{n \geq 2}{\Leftrightarrow} n = 28$

Logo, na frutaria há 28 variedades de fruta.

- 4.2.** Pretende-se escolher seis, de entre as 28 variedades de fruta disponíveis na frutaria.

Assim, existem ${}^{28}C_6 = 376\,740$ maneiras diferentes de fazer uma salada de fruta nas condições enunciadas.

- 5.** Se não considerarmos a impossibilidade de o primeiro algarismo ser zero, selecionando 3 das 5 posições do número em que vão figurar os 3 setes, temos 5C_3 alternativas diferentes, pois a ordem não é relevante, visto que as três posições se destinam a algarismos iguais. Por cada uma destas alternativas, há ${}^9A_2 = 9^2$ ordenações possíveis dos restantes 9 algarismos disponíveis para as duas posições disponíveis.

Caso o primeiro algarismo fosse zero, haveria 4 posições para um dos 9 algarismos diferentes de sete, pelo que teríamos de subtrair 4×9 ao número de casos sem restrições.

Logo, nas condições definidas, há ${}^5C_3 \times 9^2 - 4 \times 9 = 774$ números.

6. Devemos considerar todos os conjuntos de quatro pessoas, todos os conjuntos de cinco pessoas é ainda o único conjunto de seis pessoas, ou seja: ${}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6 = 22$
- 7.1. Pretende-se escolher um conjunto de 5 alunos de entre 28, o que pode ser feito de ${}^{28}C_5 = 98\ 280$ maneiras diferentes.
- 7.2. a) Pretende-se escolher 3 raparigas de entre 15 e 2 rapazes de entre 13, tal pode ser feito de ${}^{15}C_3 \times {}^{13}C_2 = 35\ 490$ maneiras diferentes.
- b) A comissão terá de ser constituída por três rapazes e duas raparigas ou por quatro rapazes e uma rapariga.
A escolha pode ser feita de ${}^{13}C_3 \times {}^{15}C_2 + {}^{13}C_4 \times {}^{15}C_1 = 40\ 755$ maneiras.
- 7.3. As 3 raparigas podem ser escolhidas entre as 15 de ${}^{15}C_3$ maneiras diferentes e os 2 rapazes podem ser escolhidos entre os 13 de ${}^{13}C_2$ maneiras diferentes. Depois de escolhidos os elementos da comissão é necessário distribuir os cargos que vão ocupar. Os secretários, um de cada sexo, podem ser escolhidos de 3×2 maneiras diferentes e os 3 restantes cargos de presidente, tesoureiro e porta-voz podem ser atribuídos aos restantes três elementos de $3!$ maneiras diferentes. Logo, a escolha pode ser feita de ${}^{15}C_3 \times {}^{13}C_2 \times 3 \times 2 \times 3! = 1\ 277\ 640$ maneiras diferentes.
- 8.1. As três primeiras bolas extraídas são brancas. 7C_4 é o número de maneiras diferentes de as restantes bolas brancas poderem ocupar 4 lugares, de entre os 7 disponíveis; as três bolas pretas ocuparão, para cada uma das maneiras de colocar as brancas, os restantes lugares de modo único. Portanto, a extração pode ser feita de ${}^7C_4 = 35$ maneiras.
- 8.2. O número de maneiras diferentes de dispor as duas primeiras bolas é 2 (branca e preta ou preta e branca). 8C_2 é o número de maneiras diferentes de as restantes duas bolas pretas poderem ocupar os restantes oito lugares (as bolas brancas ocuparão, para cada uma das maneiras de colocar as pretas, os restantes lugares de modo único).
A extração pode ser feita de $2 \times {}^8C_2 = 56$ maneiras diferentes.

Avaliação

Ficha 26 Arranjos, permutações e combinações

1. (C) ${}^7C_3 \times {}^4C_2$
Existem 7C_3 maneiras diferentes de escolher três posições para o algarismo 2. Para cada uma destas, existem 4C_2 maneiras diferentes de escolher as duas posições do algarismo 3. Uma vez selecionadas as posições que os algarismos 2 e 3 vão ocupar, restam duas posições disponíveis, que são obrigatoriamente preenchidas com o algarismo 9. Existem, assim, ao todo, ${}^7C_3 \times {}^4C_2$ números diferentes que satisfazem as condições enunciadas.
2. (B) 29
Há 2 maneiras de escolher a diagonal a ocupar com peças vermelhas, podendo as outras peças desta cor ocupar duas das restantes seis casas de 6C_2 maneiras diferentes. Sendo também indistinguíveis, só há uma maneira de as quatro peças verdes ocuparem as restantes quatro casas. Todavia, há um tabuleiro que foi contado duas vezes. Trata-se do tabuleiro que tem as duas diagonais preenchidas com peças vermelhas. Assim, existem $2 \times {}^6C_2 - 1 = 29$ tabuleiros nas condições enunciadas.
3. (D) 240
Os números primos de 1 a 9 são: 2, 3, 5 e 7. Duas das quatro faces da pirâmide já têm os números 2 e 3, pelo que resta numerar as outras duas faces com os números 5 e 7; existem $2!$ maneiras de o fazer. Para cada uma destas maneiras, existem $5!$ maneiras de numerar as faces restantes do poliedro (com os números 1, 4, 6, 8 e 9). O número pedido é $2! \times 5! = 240$.

4. (A) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
 ${}^nC_3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3 \times 2 \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

5.1. Há três casos a considerar:

$$\frac{I}{5} \quad \frac{I}{4} \quad \frac{P}{5} \quad \frac{I}{5} \quad \frac{P}{5} \quad \frac{I}{4} \quad \frac{P}{4} \quad \frac{P}{5} \quad \frac{I}{4} \quad \text{É possível formar } 5 \times 4 \times 5 + 5 \times 5 \times 4 + 4 \times 5 \times 4 = 280 \text{ números.}$$

↳ não pode ser zero

5.2.

$$\frac{3}{1} \quad \frac{5}{1} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{5}{1} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{5}{1}$$

Como há duas possibilidades para cada caso (3, 5 ou 5, 3), existem $2 \times 8 + 2 \times 8 + 2 \times 7 = 46$ números.

- 6.1. No conjunto das 13 cartas, pretende-se que os reis estejam incluídos, pelo que resta escolher nove cartas das restantes 48 cartas do baralho que não são reis. O jogador pode receber as cartas de ${}^{48}C_9 = 1\,677\,106\,640$ maneiras diferentes.
- 6.2. Dos 4 reis, o jogador recebe 3, das 4 damas recebe duas e das restantes 44 cartas, que não incluem o rei nem as damas não escolhidos, recebe 8. Assim, o jogador pode receber as cartas de ${}^4C_3 \times {}^4C_2 \times {}^{44}C_8 = 4\,253\,583\,048$ maneiras diferentes.
7. Das 10 mulheres selecionam-se 3, obtendo-se ${}^{10}C_3$ grupos diferentes e dos 8 homens selecionam-se 2, obtendo-se 8C_2 grupos diferentes. Portanto, sem outras restrições, a comissão poder-se-ia formar de ${}^{10}C_3 \times {}^8C_2$ maneiras distintas. No entanto, como a Maria e o Miguel não podem integrar uma mesma comissão, excluem-se os casos em que tal poderia acontecer. Admitindo que a Maria e o Miguel integram a mesma comissão, dos 7 homens restantes seleciona-se um e das nove mulheres restantes selecionam-se 2, o que pode ocorrer de 9C_2 maneiras diferentes. Assim, o número de comissões a excluir é igual a ${}^9C_2 \times 7$, pelo que a comissão pode ser formada de ${}^{10}C_3 \times {}^8C_2 - {}^9C_2 \times 7$ maneiras diferentes.

Ficha 27 Resolução de problemas recorrendo a arranjos e combinações

- 1.1. Há quatro maneiras de responder a cada questão. Logo, há $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ maneiras de responder às três primeiras questões. Como 65 pessoas deram origem a 65 respostas e só há 64 respostas possíveis, podemos concluir que pelo menos duas das pessoas responderam da mesma forma às três primeiras questões.
- 1.2. Há $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4 = 256$ maneiras de responder às quatro primeiras questões. Se responderem ao inquérito $2 \times 256 + 1 = 513$ pessoas, é garantido que pelo menos três responderam da mesma forma às quatro primeiras questões.
- 2.1. O tabuleiro dispõe de 15 casas com um número ímpar e de 10 casas com um número par. Como as peças brancas são todas iguais, o número de maneiras diferentes de as dispor no tabuleiro é ${}^{15}C_3$. Por outro lado, as peças pretas são diferentes entre si e devem ocupar uma casa com um número par, pelo que o número de maneiras diferentes de as dispor é ${}^{10}A_5$. Assim, é possível dispor as peças de ${}^{15}C_3 \times {}^{10}A_5 = 13\,759\,200$ maneiras diferentes.
- 2.2. Há cinco fichas numeradas com um número ímpar e estas devem ocupar uma só diagonal. Cada diagonal do tabuleiro é constituída por cinco casas, tantas quantas as fichas numeradas com um número ímpar, logo, estas fichas podem ser dispostas no tabuleiro, em cada diagonal, de 5! maneiras diferentes. Nas restantes 20 casas disponíveis, irão ser colocadas quatro fichas numeradas com um número par, pelo que existem ${}^{20}A_4$ maneiras diferentes de as colocar. As fichas podem ser colocadas de $2 \times 5! \times {}^{20}A_4 = 27\,907\,200$ maneiras diferentes.

3. O número de maneiras diferentes de escolher os lugares da fila de trás onde as quatro raparigas se vão sentar é 6A_4 . Para cada uma destas maneiras, existem $8!$ maneiras diferentes de os oito rapazes ocuparem os restantes oito lugares disponíveis. O número pedido é ${}^6A_4 \times 8! = 14\,515\,200$.

pág. 65

4. Os números pedidos podem ter quatro ou cinco algarismos, nas seguintes condições:
- com 4 algarismos: $5 \times X \times 0$, $6 \times X \times 0$, $6 \times X \times 5$, $7 \times X \times 0$, $7 \times X \times 5 \rightarrow 5 \times {}^3A_2 = 30$
 - com 5 algarismos: $X \times X \times X \times 0 \rightarrow P_4$, $X \times X \times X \times 5 \rightarrow 3 \times P_3$, $P_4 + 3 \times P_3 = 42$
- Há $30 + 42 = 72$ números nas condições definidas.
5. Uma circunferência é determinada por três pontos não colineares, cuja ordem não é relevante, sendo necessariamente dois de uma reta e um da outra. Sem atender a esta condição, é possível formar 7C_3 subconjuntos de três pontos a partir de um conjunto com sete pontos.
- Se excluirmos os subconjuntos de pontos a partir dos quais não é possível definir circunferências, 4C_3 a partir da reta r e 3C_3 da reta s , conclui-se que, nestas condições, é possível obter ${}^7C_3 - ({}^4C_3 + {}^3C_3) = 30$ circunferências.
6. O esquema seguinte representa a situação descrita: A A A X X X X C C
- Para os três primeiros lugares há 5A_3 possibilidades, para os dois últimos lugares há 4A_2 possibilidades e para os restantes corredores há $P_4 = 4!$ possibilidades.
- Logo, nas condições definidas, pode verificar-se ${}^5A_3 \times {}^4A_2 \times 4! = 17\,280$ casos diferentes.
7. As duas atrizes ficam nas extremidades de uma das duas filas, esquerda ou direita: $2 \times 2!$ possibilidades.
- Há 8 lugares para os restantes 6 atores: 8A_6 possibilidades.
- Os atores e atrizes podem sentar-se de $2 \times 2! \times {}^8A_6 = 80\,640$ maneiras diferentes.
8. Mantendo-se juntas, as crianças podem permutar entre si de $4!$ maneiras diferentes.
- Considerando o grupo de crianças como um só elemento, os três adultos e o grupo de crianças podem permutar entre si de $4!$. Portanto, os três adultos e as quatro crianças podem sentar-se no banco, nas condições definidas, de $4! \times 4! = 576$ maneiras diferentes.

Avaliação global do tema

Ficha 28

pág. 66

1. (C) 480
- Os quatro algarismos 1 podem ser colocados em quatro de seis posições de 6C_4 maneiras diferentes.
- Restam cinco algarismos pares (0, 2, 4, 6 e 8) e quatro ímpares (3, 5, 7 e 9). Para que a soma dos seis algarismos seja par, os dois algarismos, além dos quatro algarismos 1, têm de ser ambos ímpares ou ambos pares:
- Número de maneiras de escolher dois pares: 5A_2
- Número de maneiras de escolher dois ímpares: 4A_2
- Logo, há ${}^6C_4 ({}^5A_2 + {}^4A_2) = 480$ códigos diferentes nas condições pedidas.
- 2.1. O baralho de cartas tem 4 ases e 12 figuras. Tendo em conta que a ordem de saída das cartas é relevante, dos 4 ases pode selecionar-se 2 de 4A_2 maneiras diferentes, e das 12 figuras pode selecionar-se 2 de ${}^{12}A_2$ maneiras diferentes. Logo, nas condições definidas, é possível obter as quatro cartas de ${}^4A_2 \times {}^{12}A_2 = 1584$ maneiras diferentes.
- 2.2. O baralho de cartas tem 26 cartas vermelhas (13 cartas de copas e 13 cartas de ouros), das quais 24 não são ases.

Dos 4 ases escolhe-se um, o qual pode sair em uma das quatro posições, o que pode ocorrer de 4×4 maneiras diferentes. Das 24 cartas vermelhas que não são ases, seleciona-se 3 para as restantes posições, o que pode ocorrer de ${}^{24}A_3$ maneiras diferentes. Logo, nas condições definidas, as quatro cartas podem se selecionadas de $4 \times 4 \times {}^{24}A_3 = 194\,304$ maneiras diferentes.

- 2.3.** No baralho há 26 cartas vermelhas. Pretende-se obter pelo menos três cartas vermelhas, ou seja, exatamente três cartas vermelhas e uma preta ou quatro cartas vermelhas.
- 3 cartas vermelhas + 1 preta: escolhe-se uma das 26 cartas pretas, a qual pode ocupar uma de 4 posições e das 26 vermelhas escolhem-se 3 para as restantes posições, o que ocorre de $26 \times 4 \times {}^{26}A_3 = 1\,622\,400$ maneiras diferentes.
 - 4 cartas vermelhas: das 26 cartas vermelhas podem formar-se ${}^{26}A_4 = 358\,800$ sequências diferentes. Logo, nas condições definidas, as quatro cartas podem se selecionadas de $1\,622\,400 + 358\,800 = 1\,981\,200$ maneiras diferentes.

pág. 67

- 3.** Caso não houvesse qualquer restrição, o grupo poderia ser formado de ${}^{25}A_6$ maneiras diferentes. Por outro lado, o número de maneiras diferentes de formar o grupo em que os dois alunos referidos apareceriam simultaneamente (número de casos a excluir) é ${}^{23}C_4 \times 6!$. Logo, nas condições referidas, o grupo poderia ser formado de ${}^{25}A_6 - {}^{23}C_4 \times 6! = 121\,136\,400$ maneiras diferentes.
- 4. (C)** ${}^{90}C_4 \times 60 + {}^{90}C_5$
 Como estão na caixa 150 lápis e 60% são azuis, sabemos que o conteúdo do saco é constituído por: $150 \times 0,6 = 90$ lápis azuis e $150 - 90 = 60$ lápis vermelhos.
 Pretende-se formar conjuntos de cinco lápis com pelo menos quatro lápis azuis, ou seja, com quatro lápis azuis e um vermelho (${}^{90}C_4 \times {}^{60}C_1$) ou cinco lápis azuis (${}^{90}C_5$).
 Nas condições definidas, é possível formar ${}^{90}C_4 \times {}^{60}C_1 + {}^{90}C_5 = {}^{90}C_4 \times 60 + {}^{90}C_5$ conjuntos.
- 5.** Relativamente aos livros da série A, o conjunto dos 2 livros da série C podem ocupar 6 posições distintas e podem permutar entre si de $2!$ maneiras diferentes. Mantendo as posições, os livros da série A podem permutar entre si de $5!$ maneiras diferentes.
 Os livros da série B, como ficam separados e a ordem é relevante, podem ser colocados na estante de 7A_3 maneiras diferentes, relativamente aos 5 livros da série A e ao bloco de livros da série C.
 Logo, os livros podem ser colocados na estante de $6 \times 2! \times 5! \times {}^7A_3 = 302\,400$ maneiras diferentes.
- 6. (B)** 160
 Para a escolha da cor azul selecionam-se 3 de 5 crianças de 5C_3 maneiras diferentes. As restantes 2 crianças têm, cada uma, 4 escolhas, pelo que há 4^2 escolhas diferentes.
 Assim, nas condições definidas, há ${}^5C_3 \times 4^2 = 160$ escolhas possíveis.