

# MAXIMO

**11.º ano**

**Matemática A**

Maria Augusta Ferreira Neves

Ana Machado

Bruno Roque

Pedro Rocha Almeida

António Pinto Silva

Luís Guerreiro

Funções

**Tarefa de revisão**

1.1. a)  $D_f = [-7, 8]$                       b)  $D'_f = [-3, 3]$

1.2.

$x$	-7		-5		2		7		8
$f(x)$	-2	-	0	+	0	-	0	+	1

$f$  é positiva em  $]-5, 2[$  e em  $]7, 8]$

1.3. a)  $f$  tem máximos 3 e 1, sendo os seus maximizantes -1 e 8, respetivamente.

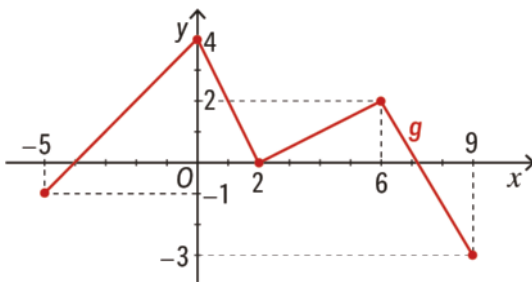
b)  $f$  tem mínimos -2 e -3, sendo os seus minimizantes -7 e 4, respetivamente.

1.4.

$x$	-7		-1		4		8
$f(x)$	-2	↗	3	↘	-3	↗	1

$f$  é crescente em  $[-7, -1]$  e em  $[4, 8]$  e é decrescente em  $[-1, 4]$ .

2.1.



2.2. a)  $D_g = [-5, 9]$                       b)  $D'_g = [-3, 4]$

2.3. a)  $g$  é crescente em  $[-5, 0]$  e em  $[2, 6]$ .

b)  $g$  é decrescente em  $[0, 2]$  e em  $[6, 9]$ .

3.1. a)  $D_f = \mathbb{R}$                                       b)  $D'_f = \mathbb{R}$

3.2. Zero de  $f$ :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = -3 \Leftrightarrow x = 6$$

O gráfico da função  $f$  é uma reta de declive negativo. Então,

$x$	$-\infty$	6	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-



3.3.

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		↘

4.1. Função  $f$ :

$D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + 3$$

$$= (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

$V(2, -1)$  e  $f$  tem concavidade voltada para cima ( $a = 1 > 0$ ).

Então,  $D'_f = [-1, +\infty[$

Função  $g$ :

$D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) = 2x^2 + 7x - 4 = 2\left(x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right) - 4$$

$$= 2\left(\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right) - 4 = 2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} - 4$$

$$= 2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{81}{8}$$

$V\left(-\frac{7}{4}, -\frac{81}{8}\right)$  e  $f$  tem concavidade voltada para cima ( $a = 2 > 0$ ).

Então,  $D'_g = \left[-\frac{81}{8}, +\infty[ \right.$

4.2. Função  $f$ :

Zeros:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x-2 = \pm\sqrt{1}$$

$$\Leftrightarrow x = 2-1 \vee x = 2+1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

Tabela de sinal:

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

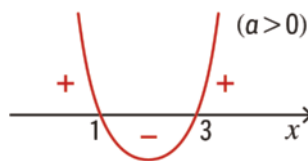


Tabela de variação:  $V(2, -1)$

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

Função  $g$ :

Zeros:  $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 9}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = \frac{1}{2}$$

Tabela de sinal:

$x$	$-\infty$	$-4$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

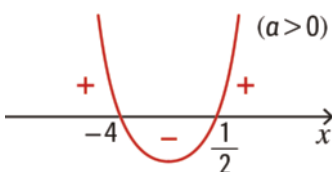


Tabela de variação:  $V\left(-\frac{7}{4}, -\frac{81}{8}\right)$

$x$	$-\infty$	$-\frac{7}{4}$	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	$-\frac{81}{8}$	$\nearrow$

### 1. Operações com polinómios. Teorema do resto

Pág. 10

#### Tarefa 1

$$P(3) = 1,5 \times 3^2 + 0,5 \times 3 = 13,5 + 1,5 = 15$$

$$P(20) = 1,5 \times 20^2 + 0,5 \times 20 = 600 + 10 = 610$$

Para construir uma casa com 3 níveis são necessárias 15 cartas e para construir uma casa com 20 níveis são necessárias 610 cartas.

Pág. 11

$$\begin{aligned} 1.1. \quad 2x^2 + 3 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + x^4 &= x^4 + \frac{4x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 3 \\ &= x^4 + \frac{5x^2}{2} - \frac{x}{2} + 3 \end{aligned}$$

Grau: 4

Termos nulos:  $0x^3$

Termo independente: 3

$$1.2. \quad \frac{2x^2 - 2}{2} + x^3 - x^2 = x^2 - 1 + x^3 - x^2 = x^3 - 1$$

Grau: 3

Termos nulos:  $0x^2$  e  $0x$

Termo independente:  $-1$

$$2.1. \quad A(x) + B(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 + \left(3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3\right)$$

$$= 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x - 1 + 3$$

$$= 3x^3 + x + 2$$

$$2.2. \quad A(x) - B(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 - \left(3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 - 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - 3$$

$$= -3x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x - 4$$

$$2.3. \quad A(x) \times C(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1\right) \times (6x^2 - 12)$$

$$= 3x^4 - 6x^2 + 4x^3 - 8x - 6x^2 + 12$$

$$= 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 8x + 12$$

Pág. 13

#### 3.1.

$$\begin{array}{r} 5x^3 \quad | \quad x^2 \\ \underline{-5x^3} \quad 5x \\ 0 \end{array}$$

$$Q(x) = 5x; \quad R(x) = 0$$

C.A.  
 $\frac{5x^3}{x^2} = 5x$

#### 3.2.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x \quad | \quad x \\ \underline{-2x^3} \quad 2x^2 + 3 \\ 3x \\ \underline{-3x} \\ 0 \end{array}$$

$$Q(x) = 2x^2 + 3; \quad R(x) = 0$$

C.A.  
 $\frac{2x^3}{x} = 2x^2$   
 $\frac{3x}{x} = 3$

#### 3.3.

$$\begin{array}{r} 2x - 3 \quad | \quad x - 5 \\ \underline{-2x + 10} \quad 2 \\ 7 \end{array}$$

$$Q(x) = 2; \quad R(x) = 7$$

C.A.  
 $\frac{2x}{x} = 2$

#### 3.4.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 0 \quad | \quad -x + 1 \\ \underline{-x^2 + x} \quad -x - 3 \\ 3x + 0 \\ \underline{-3x + 3} \\ 3 \end{array}$$

$$Q(x) = -x - 3; \quad R(x) = 3$$

C.A.  
 $\frac{x^2}{-x} = -x$   
 $\frac{3x}{-x} = -3$

3.5.

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 2x^2 + x - 1 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ -3x^3 - 3x^2 - 3x \quad \quad \quad 3x - 5 \\ \hline -5x^2 - 2x - 1 \\ 5x^2 + 5x + 5 \\ \hline 3x + 4 \end{array}$$

$Q(x) = 3x - 5$ ;  $R(x) = 3x + 4$

**C.A.**

$$\frac{3x^3}{x^2} = 3x$$

$$\frac{-5x^2}{x^2} = -5$$

7.

$$\begin{array}{r} x^2 + kx + 1 \quad | \quad x + 1 \\ -x^2 - x \quad \quad \quad x + k - 1 \\ \hline (k-1)x + 1 \\ -(k-1)x - (k-1) \\ \hline -k + 2 \end{array}$$

$R(x) = -k + 2$

$A(x)$  é divisível por  $B(x)$ .

Logo,  $R(x) = 0 \Leftrightarrow -k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$

**C.A.**

$$\frac{x^2}{x} = x$$

$$\frac{(k-1)x}{x} = k - 1$$

3.6.

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x - 1 \quad | \quad 4x^2 - 2x + 1 \\ -2x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 \quad \quad \quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \\ \hline x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 0x - 1 \\ -x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x \quad \quad \quad \frac{3}{4} \\ \hline -3x^2 - \frac{1}{4}x - 1 \\ 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \\ \hline -\frac{7}{4}x - \frac{1}{4} \end{array}$$

$Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ ;  $R(x) = -\frac{7}{4}x - \frac{1}{4}$

**C.A.**

$$\frac{2x^4}{4x^2} = \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{x^3}{4x^2} = \frac{1}{4}x$$

$$\frac{-3x^2}{4x^2} = -\frac{3}{4}$$

4.  $A(x) = (x^2 + 1)(x - 1) + 1$

$= x^3 - x^2 + x - 1 + 1 = x^3 - x^2 + x$

5.  $10x^2 + 6x = \frac{(5x + 3) \times H(x)}{2}$

$\Leftrightarrow 20x^2 + 12x = (5x + 3) \times H(x)$

$\Leftrightarrow H(x) = \frac{20x^2 + 12x}{5x + 3}$

$\Leftrightarrow H(x) = \frac{4x(5x + 3)}{5x + 3} \Leftrightarrow H(x) = 4x$

6.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + 8x - 4 \quad | \quad 2x - 1 \\ -2x^3 + x^2 \quad \quad \quad x^2 + 4 \\ \hline 8x - 4 \\ -8x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$R(x) = 0$

Como o resto da divisão inteira de  $A(x)$  por  $B(x)$  é zero, o polinómio  $A(x)$  é divisível pelo polinómio  $B(x)$ .

**C.A.**

$$\frac{2x^3}{2x} = x^2$$

$$\frac{8x}{2x} = 4$$

Pág. 15

8.1. a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & -1 & 12 & -9 \\ -3 & & 6 & -15 & 9 \\ \hline & -2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = -2x^2 + 5x - 3$ ;  $R(x) = 0$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & -1 & 12 & -9 \\ 2 & & -4 & -10 & 4 \\ \hline & -2 & -5 & 2 & -5 \end{array}$$

$Q(x) = -2x^2 - 5x + 2$ ;  $R(x) = -5$

8.2.  $A(-3) = -2(-3)^3 - (-3)^2 + 12(-3) - 9$

$= 54 - 9 - 36 - 9 = 0$

$A(2) = -2 \times 2^3 - 2^2 + 12 \times 2 - 9$

$= -16 - 4 + 24 - 9 = -5$

$A(-3)$  e  $A(2)$  são iguais aos restos das divisões de  $A(x)$  por  $x + 3$  e  $x - 2$ , respetivamente.

9.1.  $f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) - 1 = 4 - 6 - 1 = -3$

9.2.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 3 & -1 \\ -2 & & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -3 \end{array}$$

$P(x) = x + 1$ ;  $f(x) = (x + 2)(x + 1) - 3$

Pág. 16

10.1.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 + x + 1$ ;  $R(x) = 0$

10.2.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - x + 1$ ;  $R(x) = -2$

10.3.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ -2 & & -4 & 8 & -16 & 38 \\ \hline & 2 & -4 & 8 & -19 & \underline{42} \end{array}$$

$$Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8x - 19; R(x) = 42$$

10.4.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & \underline{2} \end{array}$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1; R(x) = 2$$

10.5.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -2 & -5 & 0 & 0 & 20 \\ -3 & & 6 & -3 & 9 & -27 \\ \hline & -2 & 1 & -3 & 9 & \underline{-7} \end{array}$$

$$Q(x) = -2x^3 + x^2 - 3x + 9; R(x) = -7$$

11.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -6 & 0 & 10k \\ -2 & & -4 & 20 & -40 \\ \hline & 2 & -10 & 20 & \underline{10k-40} \end{array}$$

$$R(x) = 10 \Leftrightarrow 10k - 40 = 10 \Leftrightarrow 10k = 50 \Leftrightarrow k = 5$$

Pág. 17

12. Cálculo do quociente e do resto da divisão de  $A(x)$  por  $x-3$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -6 & 0 & -3 & 5 \\ 3 & & 6 & 0 & 0 & -9 \\ \hline & 2 & 0 & 0 & -3 & \underline{-4} \end{array}$$

$$Q(x) = 2x^3 - 3; R(x) = -4$$

Cálculo do quociente e do resto da divisão de  $B(x)$  por  $x+1$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 2 & 0 & -3 & -7 \\ -1 & & -2 & 0 & 0 & 3 \\ \hline & 2 & 0 & 0 & -3 & \underline{-4} \end{array}$$

$$Q(x) = 2x^3 - 3; R(x) = -4$$

Os quocientes e os restos das divisões de  $A(x)$  e  $B(x)$  por  $x-3$  e  $x+1$ , respetivamente, são iguais.

13.1.  $P(x) = 3x^3 + ax^2 + a + 1$ 

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & a & a+1 \\ -1 & & -3 & 3 & -a-3 \\ \hline & 3 & -3 & a+3 & \underline{-2} \end{array}$$

O resto da divisão de  $P(x)$  por  $x+1$  é  $-2$ . Logo, não depende do valor de  $a$ .

13.2.  $Q(x) = 3x^2 - 3x + a + 3$ . Se o polinómio  $Q(x)$  é incompleto, então pelo menos um dos coeficientes é igual a zero.

$$a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -3$$

Pág. 18

14.1.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & k \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \underline{k+6} \end{array}$$

$$R(x) = k + 6$$

$A(x)$  é divisível por  $B(x)$  se e só se  $R(x) = 0$ .

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = -6$$

14.2.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & k & 0 & 0 & -8 & 8 \\ -2 & & -2k & 4k & -8k & 16k+16 \\ \hline & k & -2k & 4k & -8k-8 & \underline{16k+24} \end{array}$$

$$R(x) = 16k + 24$$

$A(x)$  é divisível por  $B(x)$  se e só se  $R(x) = 0$ .

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow 16k + 24 = 0 \Leftrightarrow 16k = -24 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$$

14.3.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & -k^3+1 \\ k & & k & k^2 & k^3-k \\ \hline & 1 & k & k^2-1 & \underline{1-k} \end{array}$$

$$R(x) = 1 - k$$

$A(x)$  é divisível por  $B(x)$  se e só se  $R(x) = 0$ .

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Pág. 19

15.1.  $3x - 2 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)$ 

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & -4 & 1 \\ \frac{2}{3} & & 2 & -\frac{4}{3} \\ \hline & 3 & -2 & \underline{-\frac{1}{3}} \end{array}$$

$$Q(x) = \frac{3x-2}{3} = x - \frac{2}{3}; R(x) = -\frac{1}{3}$$

15.2.  $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$ 

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 & 16 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & \underline{15} \end{array}$$

$$Q(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{\frac{1}{2}} = 2x^3 - 4x^2 + 8x - 16$$

$$R(x) = 15$$

15.3.  $2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & & -2 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline 4 & -2 & -2 & -1 & & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$Q(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{2} = 2x^3 - x^2 - x - \frac{1}{2}$$

$$R(x) = \frac{1}{2}$$

Pág. 20

16. Pela regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & 5 \\ -3 & & -3 & 15 & -54 \\ \hline & 1 & -5 & 18 & -49 \end{array}$$

$$R(x) = -49$$

Pelo teorema do resto,

$$P(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 + 3(-3) + 5$$

$$= -27 - 2 \times 9 - 9 + 5 = -49$$

O resto da divisão de  $P(x)$  por  $x+3$  é  $-49$ .

17. Se o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x-5$  é 0, então, pelo teorema do resto,  $P(5) = 0$ .

$$P(5) = 0 \Leftrightarrow 5^2 - 3 \times 5 + a = 0 \Leftrightarrow a = -25 + 15$$

$$\Leftrightarrow a = -10$$

Pág. 21

18.1.  $A(-3) = (-3)^4 - 10(-3)^2 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0$

$$B(-3) = 4(-3)^3 + 12(-3)^2 + (-3) + 3$$

$$= -108 + 108 - 3 + 3 = 0$$

Os restos das divisões de  $A(x)$  e  $B(x)$  por  $x+3$  são ambos iguais a 0.

18.2.  $2x-3=2\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$$B\left(\frac{3}{2}\right) = 4\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 12\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right) + 3$$

$$= 4 \times \frac{27}{8} + 12 \times \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 3 = \frac{27}{2} + 27 + \frac{3}{2} + 3$$

$$= \frac{30}{2} + 30 = 15 + 30 = 45$$

19.  $\begin{cases} P(-1) = 3 \\ P(2) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(-1)^3 + (-1)^2 + b = 3 \\ a \times 2^3 + 2^2 + b = -3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 2 \\ 8a + b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2 \\ 8a + a + 2 = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2 \\ 9a = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 + 2 \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$a = -1 \text{ e } b = 1$$

Pág. 22

Tarefas de consolidação 1

1.  $P(x) = (2x+1)^2(x^2-x) = (4x^2+4x+1)(x^2-x)$

$$= 4x^4 - 4x^3 + 4x^3 - 4x^2 + x^2 - x = 4x^4 - 3x^2 - x$$

2.1. a) Seja  $P(x)$  o perímetro da base da caixa.

$$P(x) = 2(3x-1) + 2(x+2) = 6x - 2 + 2x + 4$$

$$= 8x + 2$$

b) Seja  $V(x)$  o volume da caixa.

$$V(x) = (3x-1)(x+2)(x-1) =$$

$$= (3x^2 + 6x - x - 2)(x-1)$$

$$= (3x^2 + 5x - 2)(x-1)$$

$$= 3x^3 - 3x^2 + 5x^2 - 5x - 2x + 2$$

$$= 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$$

2.2.  $P(x) = 26 \Leftrightarrow 8x + 2 = 26 \Leftrightarrow 8x = 24 \Leftrightarrow x = 3$  cm

$$V(3) = 3 \times 3^3 + 2 \times 3^2 - 7 \times 3 + 2 = 80 \text{ cm}^3$$

O volume da caixa é  $80 \text{ cm}^3$ .

3.1. Seja  $A(x)$  a área da base do prisma.

$$V(x) = A(x) \times (3x-5)$$

$$\Leftrightarrow A(x) = \frac{3x^3 - 14x^2 + 21x - 10}{3x-5}$$

$$\begin{array}{c|c} 3x^3 - 14x^2 + 21x - 10 & 3x-5 \\ \hline -3x^3 + 5x^2 - 3x & x^2 - 3x + 2 = A(x) \end{array}$$

$$-9x^2 + 21x - 10$$

$$\frac{9x^2 - 15x}{6x - 10}$$

$$\frac{-6x + 10}{0}$$

$$A(x) = x^2 - 3x + 2$$

3.2.  $A(x) = \frac{B(x) \times H(x)}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = \frac{B(x) \times (x-1)}{2}$

$$\Leftrightarrow B(x) \times (x-1) = 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow B(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x-1}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -6 & 4 \\ 1 & & 2 & -4 \\ \hline & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$B(x) = 2x - 4$$

4.1.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & -3 & 0 & 5 & -1 \\ & 6 & -12 & 14 & \\ \hline & -3 & 6 & -7 & \underline{13} \end{array}$$

$$Q(x) = -3x^2 + 6x - 7; R(x) = 13$$

4.2.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \underline{0} \end{array}$$

$$Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1; R(x) = 0$$

4.3.  $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{2} & 4 & -8 & 0 & 1 & 1 \\ & 2 & -3 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \\ \hline & 4 & -6 & -3 & -\frac{1}{2} & \underline{\frac{3}{4}} \end{array}$$

$$Q(x) = \frac{4x^3 - 6x^2 - 3x - \frac{1}{2}}{2} = 2x^3 - 3x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$$

$$R(x) = \frac{3}{4}$$

5.1. Divisão de  $A(x)$  por  $x - 2$ :

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ & & -4 & 0 & 2 \\ \hline & -2 & 0 & 1 & \underline{2} \end{array}$$

$$Q_A(x) = -2x^2 + 1; R_A(x) = 2$$

Divisão de  $B(x)$  por  $x - 2$ :

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \underline{2} \end{array}$$

$$Q_B(x) = x^2 + 1; R_B(x) = 2$$

Logo, na divisão de  $A(x)$  e  $B(x)$  por  $x - 2$  obtêm-se o mesmo resto e quocientes diferentes.

5.2. Divisão de  $A(x)$  por  $x - 2$ :

$$Q_A(x) = -2x^2 + 1; R_A(x) = 2$$

Divisão de  $C(x)$  por  $x - 2$ :

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -2 & 4 & 1 & -5 \\ & & -4 & 0 & 2 \\ \hline & -2 & 0 & 1 & \underline{-3} \end{array}$$

$$Q_C(x) = -2x^2 + 1; R_C(x) = -3$$

Logo, na divisão de  $A(x)$  e  $C(x)$  por  $x - 2$  obtêm-se o mesmo quociente e restos diferentes.

6.  $P(x)$  é divisível por  $x - 1$ . Então,  $P(1) = 0$ .

$P(x)$  dividido por  $x - 2$  dá resto 3. Então,

$$P(2) = 3.$$

$$P(1) + P(2) = 0 + 3 = 3$$

Opção (C)

7. Se  $P(x)$  é divisível por  $x - 3$ , então  $P(3) = 0$ .

$$P(3) = 0 \Leftrightarrow 2 \times 3^3 - k \times 3^2 - k - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 54 - 9k - k - 4 = 0 \Leftrightarrow -10k = -50 \Leftrightarrow k = 5$$

8.  $P(x)$  é divisível por  $x + 1$ . Então,  $P(-1) = 0$ .

$P(x)$  dividido por  $x + 2$  dá resto 2. Então,

$$P(-2) = 2.$$

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(-2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^3 - m(-1)^2 + n = 0 \\ (-2)^3 - m(-2)^2 + n = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - m + n = 0 \\ -8 - 4m + n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = m + 1 \\ -8 - 4m + m + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = m + 1 \\ -3m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3 + 1 \\ m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ m = -3 \end{cases}$$

$$m = -3 \text{ e } n = -2$$

9. Se  $P(x)$  é divisível por  $x - 2$ , então  $P(2) = 0$ .

$$P(2) = 0 \Leftrightarrow k \times 2^3 - 2^2 - 4k \times 2 + 2k = 0$$

$$\Leftrightarrow 8k - 4 - 8k + 2k = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

$$\text{Se } k = 2, P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4 \text{ e}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8 \times \frac{1}{2} + 4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 4 + 4 = 0$$

Portanto, se  $P(x)$  é divisível por  $x - 2$ , então também é divisível por  $2x - 1$ .

### Avaliação formativa 1

1. Seja  $A(x)$  a área da parte colorida.

1.º processo:

$$A(x) = A_{[ABCD]} - A_{[AEC]} = (x+1)^2 - \frac{\overline{AE} \times \overline{BC}}{2}$$

$$= x^2 + 2x + 1 - \frac{(x+1-1)(x+1)}{2}$$

$$= x^2 + 2x + 1 - \frac{x^2 + x}{2}$$

$$= x^2 + 2x + 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$$

2.º processo:

$$A(x) = A_{[ACD]} - A_{[BCE]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{DC}}{2} + \frac{\overline{EB} \times \overline{BC}}{2}$$

$$= \frac{(x+1)(x+1)}{2} + \frac{1(x+1)}{2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 + x + 1}{2} = \frac{x^2 + 3x + 2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$$

2.  $2x+1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$-\frac{1}{2} \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -2 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right|$$

$Q(x) = \frac{2x^2 - 2}{2} = x^2 - 1$ ;  $R(x) = 1$ ; Opção (C)

3.

$$-1 \left| \begin{array}{cccc} 2 & k & k & -1 \\ & -2 & -k+2 & -2 \\ \hline 2 & k-2 & 2 & -3 \end{array} \right|$$

$Q(x) = 2x^2 + (k-2)x + 2$

Para que  $Q(x)$  seja um polinómio incompleto, pelo menos um dos seus termos tem de ser igual a zero. Então,  $k-2=0 \Leftrightarrow k=2$ .

4.

$$-1 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$Q(x) = x^2 + 1$ ;  $R(x) = 1$

I - b), II - c)

$B(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^3 + k \times (-1) + 3k - 7 = 0$

$\Leftrightarrow -1 - k + 3k - 7 = 0 \Leftrightarrow 2k = 8 \Leftrightarrow k = 4$

III - b)

$B(-1) = 1 \Leftrightarrow 2k - 8 = 1 \Leftrightarrow 2k = 9 \Leftrightarrow k = \frac{9}{2}$

IV - a)

Então, I - b); II - c); III - b); IV - a).

## 2. Fatorização de um polinómio. Equações e inequações

Pág. 26

### Tarefa 2

1. Consideremos  $A(x)$  a área da base da caixa.

$V(x) = A(x) \times (x+1) \Leftrightarrow A(x) = \frac{V(x)}{x+1}$

$\Leftrightarrow A(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 4x}{x+1}$

Aplicando a regra de Ruffini, vem:

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

$$-1 \left| \begin{array}{cccc} 2 & 6 & 4 & 0 \\ & -2 & -4 & 0 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$A(x) = 2x^2 + 4x$

2.  $A(x) = 48 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 48$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 48 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-24)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2-10}{2} \vee x = \frac{-2+10}{2} \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 4$

Como  $x+1 > 0$ , isto é,  $x > -1$ ,  $x = -6$  é impossível.

Para  $x = 4$ :

$V(4) = 2 \times 4^3 + 6 \times 4^2 + 4 \times 4 = 240 \text{ cm}^3$

O volume da caixa é  $240 \text{ cm}^3$ .

Pág. 27

20.1.  $P(2) = 4 \times 2^3 - 13 \times 2 - 6 = 0$

$P(2) = 0$ . Logo, o polinómio  $P(x)$  é divisível por  $x-2$ .

20.2.  $2x+3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$

$P\left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 13 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 6$

$= 4 \times \left(-\frac{27}{8}\right) + \frac{39}{2} - 6$

$= -\frac{108}{8} + \frac{39}{2} - 6 = -\frac{27}{2} + \frac{39}{2} - \frac{12}{2} = 0$

$P\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$ . Logo, o polinómio  $P(x)$  é divisível por  $2x+3$ .

21.1.  $A(-1) = (-1)^3 + 8 \times (-1)^2 - 7 = -1 + 8 - 7 = 0$

$A(-1) = 0$ . Logo, o polinómio  $A(x)$  é divisível por  $x+1$ .

21.2. Vamos usar a regra de Ruffini para dividir  $A(x)$  por  $x+1$ :

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 8 & 0 & -7 \\ -1 & & -1 & -7 & 7 \\ \hline & 1 & 7 & -7 & \underline{0} \end{array}$$

$$A(x) = (x+1) \times Q(x)$$

$$A(x) = (x+1) \times (x^2 + 7x - 7)$$

22.  $P(x) = x^4 - x^3 + x - 1$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \quad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & \underline{0} \end{array}$$

$$Q(x) = x^3 + 1$$

$$P(x) = (x-1) \times (x^3 + 1)$$

Pág. 30

23.1.  $A(x) = 2x^2 - x - 1$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+3}{4} \vee x = \frac{1-3}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$A(x) = 2(x-1) \left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1)$$

23.2.  $B(x) = 3x^2 - 7x + 2$

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7+5}{6} \vee x = \frac{7-5}{6} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{3}$$

$$B(x) = 3(x-2) \left(x - \frac{1}{3}\right) = (x-2)(3x-1)$$

23.3.  $C(x) = 5x^2 + 10x + 5$

$$5x^2 + 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ Raiz dupla}$$

$$C(x) = 5(x+1)^2$$

23.4.  $D(x) = 7x^2 - 2x + 6$

$$7x^2 - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 7 \times 6}}{2 \times 7}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-168}}{14} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-164}}{14}$$

Equação impossível

O polinómio  $D(x)$  não tem zeros, logo não é fatorizável.

23.5.  $E(x) = x^2 - 2$

$$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$$E(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

23.6.  $F(x) = x^2 - \sqrt{2}x - 4$

$$x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{(-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{C.A.} \\ 18 = 9 \times 2 = 3^2 \times 2 \\ \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$$F(x) = (x - 2\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Pág. 31

24.1.  $A(x) = 3x^3 + 7x^2 - 22x - 8$ ; Raiz:  $-\frac{1}{3}$

$$A\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$A(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right) \times Q(x), \text{ sendo } Q(x) \text{ do } 2.^\circ \text{ grau.}$$

Para determinar  $Q(x)$  vamos recorrer à regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 7 & -22 & -8 \\ -\frac{1}{3} & & -1 & -2 & 8 \\ \hline & 3 & 6 & -24 & \underline{0} \end{array} \quad Q(x) = 3x^2 + 6x - 24$$

$$A(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right) \times (3x^2 + 6x - 24)$$

Vamos ainda fatorizar o polinómio  $3x^2 + 6x - 24$ :

$$3x^2 + 6x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 3 \times (-24)}}{2 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+288}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{324}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 18}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6+18}{6} \vee x = \frac{-6-18}{6} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -4$$

Como  $3x^2 + 6x - 24 = 3(x-2)(x+4)$ :

$$A(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right) 3(x-2)(x+4)$$

$$A(x) = 3 \left(x + \frac{1}{3}\right) (x-2)(x+4)$$

$$A(x) = (3x+1)(x-2)(x+4)$$

**24.2.**  $B(x) = 2x^3 - x^2 - 3x$

Colocando  $x$  em evidência, vem:

$$B(x) = x(2x^2 - x - 3)$$

Vamos, se possível, fatorizar o polinómio  $2x^2 - x - 3$ :

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -1$$

$$B(x) = x \times 2 \left(x - \frac{3}{2}\right) (x+1)$$

$$B(x) = x(2x-3)(x+1)$$

**24.3.**  $C(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ ; Raiz: 1

$$C(x) = x(x^3 - x^2 - x + 1)$$

$$C(x) = x(x-1) \times Q(x)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \underline{0} \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 - 1$$

$$C(x) = x(x-1)(x^2 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(x) = x(x-1)(x-1)(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(x) = x(x-1)^2(x+1)$$

**24.4.**  $D(x) = x^4 - 18x^2 + 81$ ; Raiz dupla: 3

Como 3 é raiz dupla de  $D(x)$ , vamos usar sucessivamente a regra de Ruffini para dividir  $D(x)$

por  $(x-3)(x-3) = (x-3)^2$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & 0 & -18 & 0 & 81 \\ & & 3 & 9 & -27 & -81 \\ \hline & 1 & 3 & -9 & -27 & \underline{0} \\ 3 & & 3 & 18 & 27 & \\ \hline & 1 & 6 & 9 & \underline{0} & \end{array}$$

$$D(x) = (x-3)(x^3 - 3x^2 - 9x - 27)$$

$$D(x) = (x-3)(x-3)(x^2 + 6x + 9)$$

O quociente de  $D(x)$  por  $(x-3)^2$  é  $x^2 + 6x + 9$ .

Vamos fatorizar o polinómio  $x^2 + 6x + 9$ :

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

$$\text{Então, } D(x) = (x-3)^2(x+3)^2.$$

**24.5.**  $E(x) = x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 27x + 18$ ; Raízes:  $-1, -2$

$$E(-1) = 0; \quad E(-2) = 0$$

$$E(x) = (x+1)(x+2) \times Q(x)$$

Recorrendo à regra de Ruffini vamos determinar  $Q(x)$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 3 & 11 & 27 & 18 \\ & & -1 & -2 & -9 & -18 \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 18 & \underline{0} \\ -2 & & -2 & 0 & -18 & \\ \hline & 1 & 0 & 9 & \underline{0} & \end{array}$$

$$E(x) = (x+1)(x^3 + 2x^2 + 9x + 18)$$

$$E(x) = (x+1)(x+2)(x^2 + 9)$$

$$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9$$

Equação impossível

O polinómio  $x^2 + 9$  não tem raízes.

$$\text{Assim, } E(x) = (x+1)(x+2)(x^2 + 9).$$

**Pág. 32**

**25.1.**  $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$

Como  $P(x)$  tem coeficientes inteiros, se tiver raízes inteiras, estas serão divisores do termo independente, que, neste caso, é  $-6$ .

Os divisores de  $-6$  são:  $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$

$$P(-1) = -6; \quad P(-2) = 0; \quad P(-3) = 0$$

$$P(-6) = -156; \quad P(1) = 12; \quad P(2) = 60$$

$$P(3) = 150; \quad P(6) = 792$$

$-2$  e  $-3$  são raízes inteiras de  $P(x)$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 9 & 7 & -6 \\ & & -4 & -10 & 6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & \underline{0} \\ -3 & & -6 & 3 & \\ \hline & 2 & -1 & \underline{0} & \end{array}$$

$$P(x) = (x+2)(x+3)(2x-1)$$

**25.2.**  $P(x) = 2x^3 + x^2 - 11x - 10$

Os divisores de  $-10$  são:

$-1, 1, -2, 2, -5, 5, -10, 10$

$$P(-1) = 0; \quad P(-2) = 0; \quad P(-5) = -180;$$

$$P(-10) = -1800; \quad P(1) = -18; \quad P(2) = -12$$

$$P(5) = 210; \quad P(10) = 1980;$$

-1 e -2 são raízes inteiras de  $P(x)$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -11 & -10 \\ -1 & & -2 & 1 & 10 \\ \hline & 2 & -1 & -10 & \underline{0} \\ -2 & & -4 & 10 & \\ \hline & 2 & -5 & \underline{0} & \end{array}$$

$$P(x) = (x+1)(x+2)(2x-5)$$

**25.3.**  $P(x) = 4x^3 - 20x^2 - x + 5$

Os divisores de 5 são: -1, 1, -5, 5

$$P(-1) = -18; \quad P(-5) = -990$$

$$P(1) = -12; \quad P(5) = 0$$

5 é raiz inteira de  $P(x)$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -20 & -1 & 5 \\ 5 & & 20 & 0 & -5 \\ \hline & 4 & 0 & -1 & \underline{0} \end{array}$$

$$P(x) = (x-5)(4x^2 - 1)$$

$$P(x) = (x-5)[(2x)^2 - 1^2]$$

$$P(x) = (x-5)(2x-1)(2x+1)$$

**25.4.**  $P(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1$

Os divisores de 1 são: -1 e 1

$$P(-1) = -16; \quad P(1) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 9 & -9 & -1 & 1 \\ 1 & & 9 & 0 & -1 \\ \hline & 9 & 0 & -1 & \underline{0} \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(9x^2 - 1)$$

$$P(x) = (x-1)((3x)^2 - 1^2)$$

$$P(x) = (x-1)(3x-1)(3x+1)$$

**25.5.**  $P(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x - 2$

Os divisores de -2 são: -1, 1, -2, 2

$$P(-1) = 0; \quad P(-2) = 54; \quad P(1) = 0; \quad P(2) = 6$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & & -2 & 6 & -6 & 2 \\ \hline & 2 & -6 & 6 & -2 & \underline{0} \\ 1 & & 2 & -4 & 2 & \\ \hline & 2 & -4 & 2 & \underline{0} & \end{array}$$

$$P(x) = (x+1)(x-1)(2x^2 - 4x + 2)$$

$$P(x) = (x+1)(x-1)2(x^2 - 2x + 1)$$

$$P(x) = (x+1)(x-1)2(x-1)^2$$

$$P(x) = (x-1)^3 2(x+1)$$

$$P(x) = (x-1)^3 (2x+2)$$

**25.6.**  $P(x) = (x+1)^3 - 4x - 4$

$$P(x) = (x+1)^3 - 4(x+1)$$

$$P(x) = (x+1)[(x+1)^2 - 4]$$

$$P(x) = (x+1)[(x+1)^2 - 2^2]$$

$$P(x) = (x+1)(x+1-2)(x+1+2)$$

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x+3)$$

**26.1.**  $2x^3 + x + 3 = 0$

Seja  $P(x) = 2x^3 + x + 3$

Os divisores inteiros de 3 são: -1, 1, -3, 3

$$P(-1) = 0; \quad P(1) = 6; \quad P(-3) = -54; \quad P(3) = 60$$

-1 é a única raiz inteira de  $P(x)$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & & -2 & 2 & -3 \\ \hline & 2 & -2 & 3 & \underline{0} \end{array}$$

$$2x^3 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \vee 2x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 24}}{4}$$

Equação impossível

$$S = \{-1\}$$

**26.2.**  $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$

Seja  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

Os divisores inteiros de 4 são: -1, 1, -2, 2, -4, 4

$$P(-1) = 3; \quad P(-2) = -8; \quad P(-4) = -84$$

$$P(1) = 1; \quad P(2) = 0; \quad P(4) = 28$$

2 é a única raiz inteira de  $P(x)$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & & 2 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \underline{0} \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \vee x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$$S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$$

**26.3.**  $4x^4 + 4x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(4x^2 + 4x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 4x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-4}{8} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{ -\frac{1}{2}, 0 \right\}$

**26.4.**  $4x^4 - 3x^2 = x \Leftrightarrow 4x^4 - 3x^2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(4x^3 - 3x - 1) = 0$

Seja  $P(x) = 4x^3 - 3x - 1$

Divisores inteiros de  $-1$  são:  $-1$  e  $1$

$P(-1) = -2; \quad P(1) = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & 0 & -3 & -1 \\ & & 4 & 4 & 1 \\ \hline & 4 & 4 & 1 & \underline{0} \end{array}$$

$x(4x^3 - 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(4x^2 + 4x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \vee 4x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, 1 \right\}$

**27.1.** Os divisores inteiros de  $1$  são:  $-1$  e  $1$

$P(-1) = -2; \quad P(1) = 4$

Logo,  $P(x)$  não tem raízes inteiras.

**27.2.**  $P(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 8x^2 - x + 1 = 0$  Raiz:  $-\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 12 & -8 & -1 & 1 \\ & & -4 & 4 & -1 \\ \hline & 12 & -12 & 3 & \underline{0} \end{array}$$

$12x^3 - 8x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)(12x^2 - 12x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x + \frac{1}{3} = 0 \vee 12x^2 - 12x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee 4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{4}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$

**28.**  $P(x) = 16x^4 - 8x^2 + 1$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow 16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$ ; Raiz dupla:  $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{2} & 16 & 0 & -8 & 0 & 1 \\ & & 8 & 4 & -2 & -1 \\ \hline \frac{1}{2} & 16 & 8 & -4 & -2 & \underline{0} \\ & & 8 & 8 & 2 & \\ \hline & 16 & 16 & 4 & \underline{0} & \end{array}$$

$16x^4 - 8x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (16x^2 + 16x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \vee 16x^2 + 16x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee 4x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{4}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$

**29.1.**  $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$  é uma equação biquadrada.

Fazendo  $y = x^2$ , vem:

$4y^2 - 17y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{2 \times 4}$

$\Leftrightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} \Leftrightarrow y = \frac{17 \pm 15}{8}$

$\Leftrightarrow y = \frac{17+15}{8} \vee y = \frac{17-15}{8}$

$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = 4 \vee x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{ -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right\}$

**29.2.**  $3x^4 - 2x^2 - 8 = 0$  é uma equação biquadrada.

Fazendo  $y = x^2$ , vem:

$3y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-8)}}{2 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm 10}{6}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 = 2 \vee x^2 = -\frac{4}{3}$$

Equação impossível

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$$S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

30.  $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

Fazendo  $y = x^3$ , vem:

$$y^2 + 7y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-7 - 9}{2} \vee y = \frac{-7 + 9}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = -8 \vee y = 1 \Leftrightarrow x^3 = -8 \vee x^3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-8} \vee x = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

$$S = \{-2, 1\}$$

31.1.  $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^5 - 3x^3 - 4x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^4 - 3x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$$

**C.A.**  
 $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$  é uma equação biquadrada.  
 Fazendo  $y = x^2$ , vem:  
 $y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 5}{2}$   
 $\Leftrightarrow y = 4 \vee y = -1$   
 $\Leftrightarrow x^2 = 4 \vee x^2 = -1$   
Equação impossível

$$S = \{-2, 0, 2\}$$

31.2.  $P(x) = x^5 - 3x^3 - 4x = x(x^4 - 3x^2 - 4)$

1	0	-3	0	-4
-2	-2	4	-2	4
1	-2	1	-2	0
2	2	0	2	
1	0	1	0	

$$P(x) = x(x+2)(x-2)(x^2+1)$$

Pág. 35

32.1. Seja  $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

Os divisores de 4 são: -1, 1, -2, 2, -4, 4

$$P(-1) = 6; P(-2) = 0; P(-4) = -60$$

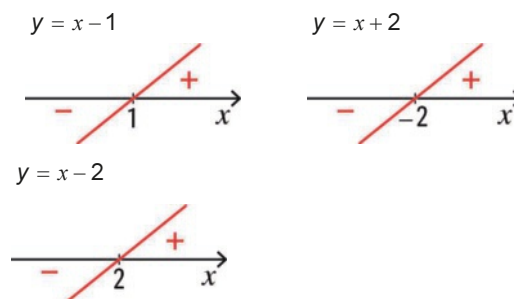
$$P(1) = 0; P(2) = 0; P(4) = 36$$

Conhecidos os três zeros de  $P(x)$ , decompõe-se

$P(x)$  em fatores:

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-2)$$

Em seguida, estuda-se o sinal de cada fator:



x	-∞	-2	1	2	+∞
$x - 1$	-	-	0	+	+
$x + 2$	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	0
$x^3 - x^2 - 4x + 4$	-	0	+	0	+

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup ]1, 2[$$

32.2. Seja  $P(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$

Os divisores de 3 são: -1, 1, -3, 3

$$P(-1) = -12; P(-3) = -210$$

$$P(1) = -6; P(3) = 0$$

Atendendo a que  $P(3) = 0$ , recorre-se à regra de Ruffini para decompor  $P(x)$  em fatores dado que é divisível por  $x - 3$ :

4	-12	-1	3
3	12	0	-3
4	0	-1	0

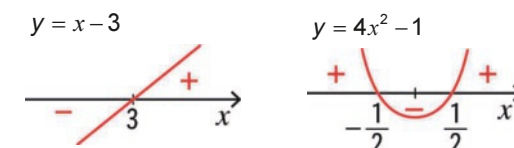
$$P(x) = (x-3)(4x^2-1)$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee 4x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

Conhecidos os zeros de cada fator, vamos conhecer o sinal:



$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$3$	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	-	-	$0$	$+$
$4x^2-1$	$+$	$0$	-	$0$	$+$	$+$	$+$
$4x^3-12x^2-x+3$	-	$0$	$+$	$0$	-	$0$	$+$

$$4x^3 - 12x^2 - x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup [3, +\infty[$$

**32.3.**  $x^3 - 3x^2 > 9x - 27 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 27 > 0$

Seja  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$

Os divisores de 27 são:

$$-1, 1, -3, 3, -9, 9, -27, 27$$

$$P(-3) = 0; \quad P(3) = 0$$

$-3$  e  $3$  são raízes de  $P(x)$ .

Usamos duas vezes a regra de Ruffini para decompor  $P(x)$  no produto de três fatores.

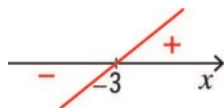
	1	-3	-9	27
-3		-3	18	-27
	1	-6	9	0
3		3	-9	
	1	-3	0	

$$P(x) = (x+3)(x-3)(x-3)$$

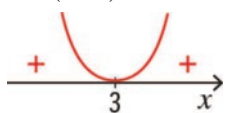
$$P(x) = (x+3)(x-3)^2$$

Vamos estudar o sinal de cada fator:

$$y = x + 3$$



$$y = (x-3)^2$$



$x$	$-\infty$	$-3$		$3$	$+\infty$
$x+3$	-	$0$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)^2$	$+$	$+$	$+$	$0$	$+$
$x^3-3x^2-9x+27$	-	$0$	$+$	$0$	$+$

$$x^3 - 3x^2 > 9x - 27 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 27 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-3, 3[ \cup ]3, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-3, +\infty[ \setminus \{3\}$$

Pág. 36

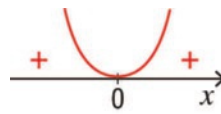
**33.1.**  $2x^3 - 3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(2x-3) \geq 0$

$$x^2(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 2x-3 = 0$$

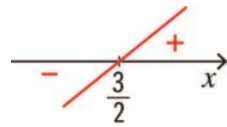
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$$

Sinal de cada fator:

$$y = x^2$$



$$y = 2x - 3$$



$x$	$-\infty$	$0$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x^2$	$+$	$0$	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	-	-	-	$0$	$+$
$2x^3-3x^2$	-	$0$	-	$0$	$+$

$$2x^3 - 3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{0\} \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

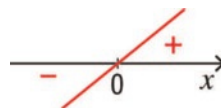
**33.2.**  $x^3 - x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) < 0$

$$x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 1 = 0$$

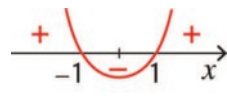
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$$

$$y = x$$



$$y = x^2 - 1$$



$x$	$-\infty$	$-1$		$0$		$1$	$+\infty$
$x$	-	-	-	$0$	$+$	$+$	$+$
$x^2-1$	$+$	$0$	-	-	-	$0$	$+$
$x^3-x$	-	$0$	$+$	$0$	-	$0$	$+$

$$x^3 - x < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[$$

**33.3.**  $x^3 - 3x^2 > 6 - 2x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 6 > 0$

Consideremos  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

Os divisores de  $-6$  são:  $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$

$$P(-1) = -12; \quad P(-2) = -30; \quad P(-3) = -66$$

$$P(-6) = -342; \quad P(1) = -6; \quad P(2) = -6$$

$$P(3) = 0; \quad P(6) = 114$$

Atendendo a que  $P(3) = 0$ , recorremos à regra de

Ruffini para decompor  $P(x)$  em fatores dado ser divisível por  $x-3$ :

	1	-3	2	-6
3		3	0	6
	1	0	2	0

$\rightarrow x^2 + 2$

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 2) > 0$$

Para decompor em fatores também poderíamos observar que:

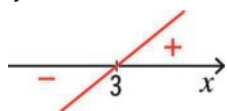
$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = x^2(x-3) + 2(x-3)$$

$$P(x) = (x-3) + (x^2 + 2)$$

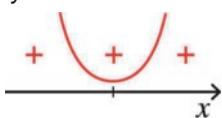
$$(x-3)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \vee x^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee \underbrace{x^2 = -2}_{\text{Equação impossível}}$$

$$y = x - 3$$



$$y = x^2 + 2$$



$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$x - 3$	$-$	$0$	$+$
$x^2 + 2$	$+$	$+$	$+$
$x^3 - 3x^2 + 2x - 6$	$-$	$0$	$+$

$$x^3 - 3x^2 > 6 - 2x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]3, +\infty[$$

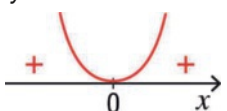
**34.1.**  $x^4 \geq x^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) \geq 0$$

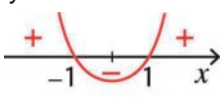
$$x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$$

$$y = x^2$$



$$y = x^2 - 1$$



$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$x^2$	$+$	$+$	$0$	$+$	$+$
$x^2 - 1$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$x^4 - x^2$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$x^4 \geq x^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$$

**34.2.**  $x^3 + 9x > 6x^2 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x > 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) > 0$$

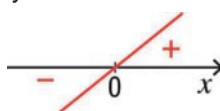
$$x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee (x-3)^2 = 0$$

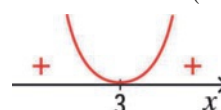
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

$$y = x$$



$$y = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$



$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$
$x$	$-$	$0$	$+$	$+$
$x^2 - 6x + 9$	$+$	$+$	$0$	$+$
$x^3 - 6x^2 + 9x$	$-$	$0$	$0$	$+$

$$x^3 + 9x > 6x^2 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x > 0$$

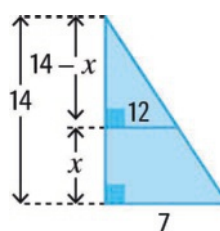
$$\Leftrightarrow x \in ]0, 3[ \cup ]3, +\infty[ \Leftrightarrow x \in ]0, +\infty[ \setminus \{3\}$$

**35.1.**  $V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \pi \times r^2 \times x$

Designemos por  $r$  o raio do cilindro.

$$\frac{7}{r} = \frac{14}{14-x} \Leftrightarrow 14r = 7(14-x)$$

$$\Leftrightarrow 14r = 98 - 7x \Leftrightarrow r = 7 - \frac{x}{2}$$



$$V_{\text{cilindro}} = \pi \times \left(7 - \frac{x}{2}\right)^2 \times x$$

$$= \pi \times \left(49 - 7x + \frac{x^2}{4}\right) \times x = \pi \times \left(49x - 7x^2 + \frac{x^3}{4}\right) =$$

$$= \pi \times \left(\frac{x^3}{4} - 7x^2 + 49x\right)$$

**35.2.**  $V(x) > V(2)$

$$V(2) = \pi \times \left(\frac{2^3}{4} - 7 \times 2^2 + 49 \times 2\right) = 72\pi$$

$$V(x) > V(2) \Leftrightarrow \pi \times \left(\frac{x^3}{4} - 7x^2 + 49x\right) > 72\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{4} - 7x^2 + 49x > 72 \Leftrightarrow \frac{x^3}{4} - 7x^2 + 49x - 72 > 0$$

Consideremos  $P(x) = \frac{x^3}{4} - 7x^2 + 49x - 72$

$$P(2) = \frac{2^3}{4} - 7 \times 2^2 + 49 \times 2 - 72 = 0$$

Comecemos por decompor  $P(x)$  em fatores sabendo que é divisível por  $x-2$ , isto é, 2 é raiz do polinómio.

$$\begin{array}{r|rrrr} & \frac{1}{4} & -7 & 49 & -72 \\ 2 & & \frac{1}{2} & -13 & 72 \\ \hline & \frac{1}{4} & -\frac{13}{2} & 36 & \underline{0} \end{array}$$

$$(x-2)\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{13}{2}x + 36\right) > 0$$

$$(x-2)\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{13}{2}x + 36\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \vee \frac{1}{4}x^2 - \frac{13}{2}x + 36 = 0$$

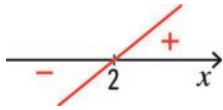
$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x^2 - 26x + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 8 \vee \begin{array}{l} x = 18 \\ \text{Solução impossível} \end{array}$$

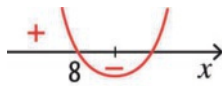
$x$  tem de ser positivo e inferior à altura do cone.

Logo,  $0 < x < 14$ .

$$y = x - 2$$



$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{13}{2}x + 36$$



$x$	0		2		8		14
$x-2$		-	0	+	+	+	
$\frac{1}{4}x^2 - \frac{13}{2}x + 36$		+	+	+	0	-	
$(x-2)\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{13}{2}x + 36\right)$		-	0	+	0	-	

$V(x) > V(2)$  para  $2 \text{ cm} < x < 8 \text{ cm}$ .

Pág. 38

**Tarefas de consolidação 2**

1. Como 1, 2 e 3 são zeros de  $P(x)$ :

$$P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P(4) = 6 \Leftrightarrow a \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \Leftrightarrow a = 1$$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P(0) = (-1) \times (-2) \times (-3) = -6$$

Opção (A)

2.1.  $P(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & -8 & 0 & 16 \\ -2 & & -2 & 4 & 8 & -16 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & 8 & \underline{0} \\ -2 & & -2 & 8 & -8 & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \underline{0} & \end{array}$$

2.2.  $P(x) = (x+2)^2(x^2 - 4x + 4) = (x+2)^2(x-2)^2$

3.1. Vamos mostrar que  $A\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ .

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \\ &= 2 \times \frac{1}{16} - 5 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{5}{8} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} - \frac{5}{8} + \frac{8}{8} - \frac{4}{8} = 0 \end{aligned}$$

3.2.  $A(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x = x(2x^3 - 5x^2 + 4x - 1)$

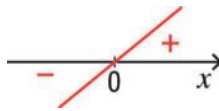
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 2 & -4 & 2 & \underline{0} \end{array}$$

$$A(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2)$$

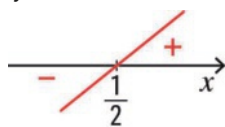
$$= x\left(x - \frac{1}{2}\right)2(x^2 - 2x + 1) = x(2x-1)(x-1)^2$$

$$A(x) \leq 0 \Leftrightarrow x(2x-1)(x-1)^2 \leq 0$$

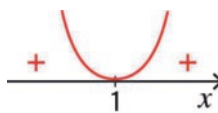
$$y = x$$



$$y = 2x - 1$$



$$y = (x-1)^2$$



$x$	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x$	-	0	+	+	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+	+	0	+
$x(2x-1)(x-1)^2$	+	0	-	0	+	0	+

$$A(x) \leq 0 \Leftrightarrow x(2x-1)(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$$

4.  $g(x) = (x-5)(x-2)(x-a)$

$$g(6) = 12 \Leftrightarrow (6-5)(6-2)(6-a) = 12$$

$$\Leftrightarrow 1 \times 4 \times (6 - a) = 12 \Leftrightarrow 6 - a = 3 \Leftrightarrow a = 3$$

$$V = 5 \times 2 \times 3 = 30 \text{ cm}^3$$

Opção (D)

5.  $P(a+1) = 3a^2 - 8a + 9$ ;  $a+1 = x \Leftrightarrow a = x-1$

$$P(x) = 3(x-1)^2 - 8(x-1) + 9$$

$$P(x) = 3(x^2 - 2x + 1) - 8x + 8 + 9$$

$$P(x) = 3x^2 - 6x + 3 - 8x + 17$$

$$P(x) = 3x^2 - 14x + 20$$

6.  $V_{\text{Cubo}} = (x+1)^3$ ;  $V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3}(x+1)^2 \times 3x$

$$\frac{1}{3}(x+1)^2 \times 3x = \frac{1}{5}(x+1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 x - \frac{1}{5}(x+1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \left[ x - \frac{1}{5}(x+1) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \vee x - \frac{1}{5}(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \vee x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee 5x - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee 4x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = -1}_{\substack{\text{Solução} \\ \text{impossível (x > 0)}}} \vee x = \frac{1}{4}$$

A altura da escultura é:

$$3x + x + 1 = 4x + 1 = 4 \times \frac{1}{4} + 1 = 2 \text{ m}$$

A altura da escultura é 2 m.

Pág. 39

7.  $P(x) = a(x-1)^2(x+2)$

$$P(-1) = 12 \Leftrightarrow a(-1-1)^2(-1+2) = 12$$

$$\Leftrightarrow a \times 4 \times 1 = 12 \Leftrightarrow a = 3$$

$$P(x) = 3(x-1)^2(x+2) = 3(x^2 - 2x + 1)(x+2) =$$

$$= 3(x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2)$$

$$= 3(x^3 - 3x + 2) = 3x^3 - 9x + 6$$

8.1. Se  $P(x)$  é divisível por  $x-2$ ,  $P(2) = 0$ .

$$4 \times 2^3 - 4 \times 2^2 + 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow 32 - 16 + 2a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a = -14 \Leftrightarrow a = -7$$

8.2.  $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & -4 & -7 & -2 \\ 2 & & 8 & 8 & 2 \\ \hline 4 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x-2)(4x^2 + 4x + 1)$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{Raiz dupla}$$

$$P(x) = (x-2)4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= (x-2)(2x+1)(2x+1) = (x-2)(2x+1)^2$$

9.1.  $V = A_{\text{base}} \times \text{altura}$

$$V(x) = (31-2x)(30-2x)x$$

$$V(x) = (930 - 62x - 60x + 4x^2)x$$

$$V(x) = (930 - 122x + 4x^2)x$$

$$V(x) = 4x^3 - 122x^2 + 930x$$

9.2.  $x$  tem de ser positivo e inferior a  $\frac{30}{2}$  cm, isto é,

$$0 < x < 15.$$

9.3.  $V(x) > V(2)$

$$V(2) = 4 \times 2^3 - 122 \times 2^2 + 930 \times 2$$

$$= 32 - 488 + 1860 = 1404 \text{ cm}^3$$

$$V(x) > 1404 \Leftrightarrow 4x^3 - 122x^2 + 930x > 1404$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 122x^2 + 930x - 1404 > 0$$

Seja  $P(x) = 4x^3 - 122x^2 + 930x - 1404$

$$P(2) = 4 \times 2^3 - 122 \times 2^2 + 930 \times 2 - 1404 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & -122 & 930 & -1404 \\ 2 & & 8 & -228 & 1404 \\ \hline 4 & -114 & 702 & 0 \end{array}$$

$$4x^3 - 122x^2 + 930x - 1404 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(4x^2 - 114x + 702) > 0$$

$$(x-2)(4x^2 - 114x + 702) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \vee 4x^2 - 114x + 702 = 0$$

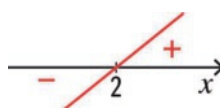
$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{114 \pm \sqrt{(-114)^2 - 4 \times 4 \times 702}}{2 \times 4}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{114 \pm \sqrt{12\,996 - 11\,232}}{8}$$

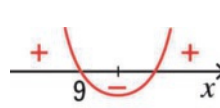
$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{114 \pm 42}{8} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{156}{8} \vee x = \frac{72}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{39}{2} \vee x = 9$$

$$y = x - 2$$



$$y = 4x^2 - 114x + 702$$



$x$	0	2	9	15
$x-2$		-	0	+
$4x^2 - 114x + 702$		+	+	0
Produto		-	0	-

$$V(x) > V(2) \Leftrightarrow V(x) - V(2) > 0 \Leftrightarrow x \in ]2, 9[$$

10.  $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$  divisível por  $(x-1)^k$

10.1.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -a & a & -1 \\ & & 1 & -a+1 & 1 \\ \hline & 1 & -a+1 & 1 & \underline{0} \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(x^2 + (-a+1)x + 1)$$

$$= (x-1)(x^2 - ax + x + 1)$$

Se  $k=1$ ,  $P(x)$  é divisível por  $x-1$  e  $a \in \mathbb{R}$ .

10.2.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -a+1 & 1 \\ & & 1 & -a+2 \\ \hline & 1 & -a+2 & \underline{-a+3} = R(x) \end{array}$$

Para  $P(x)$  ser divisível por  $(x-1)^2$ :

$$-a+3=0 \Leftrightarrow a=3$$

10.3. Se  $a=3$ ,  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \underline{0} \\ & & 1 & -1 & \\ \hline & 1 & -1 & \underline{0} & \\ & & 1 & & \\ \hline & 1 & \underline{0} & & \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)^3 \times 1 = (x-1)^3$$

**Avaliação formativa 2**

1.  $P(x) = (x-5)^k Q(x)$

Se  $k=2$ ,  $P(x) = (x-5)^2 Q(x)$ . Como 5 é uma raiz de  $P(x)$  de multiplicidade 3,  $Q(x)$  é divisível por  $x-5$ , isto é,  $Q(5) = 0$ .

Opção (C)

2.  $A(x) = x^4 + x^2 + k$

Se  $A(\alpha) = 0$ ,  $\alpha^4 + \alpha^2 + k = 0$

$$A(-\alpha) = (-\alpha)^4 + (-\alpha)^2 + k$$

$$= \alpha^4 + \alpha^2 + k = 0$$

Logo, se  $A(x)$  é divisível por  $x-\alpha$  também é divisível por  $x+\alpha$ .

Opção (B)

3.  $(x^2-1)g(x) \leq 0$

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$$

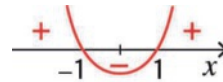
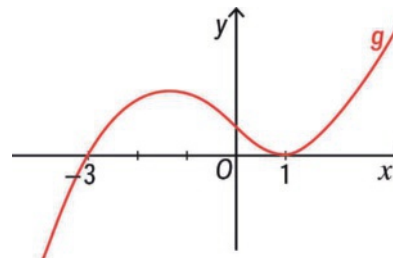


Gráfico de  $g$  (por exemplo)



$x$	$-\infty$	$-3$		$-1$		$1$	$+\infty$
$x^2-1$	+	+	+	0	-	0	+
$g(x)$	-	0	+	+	+	0	+
$(x^2-1)g(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$(x^2-1)g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -3] \cup [-1, 1]$$

4.1.  $t=0$ ;  $P(0) = 1957$

Foram lançados no lago 1957 peixes.

4.2.  $t=3$ ;  $P(3) = 1957 + 39 \times 3^2 - 4 \times 3^3 = 2200$

No início de 2018, passados 3 anos após terem sido libertados peixes no lago, existiam 2200 peixes.

4.3.  $P(t) > 2200 \Leftrightarrow 1957 + 39t^2 - 4t^3 > 2200$

$$\Leftrightarrow -4t^3 + 39t^2 - 243 > 0$$

Seja  $A(t) = -4t^3 + 39t^2 - 243$

$$A(3) = -4 \times 3^3 + 39 \times 3^2 - 243 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & -4 & 39 & 0 & -243 \\ & & -12 & 81 & 243 \\ \hline & -4 & 27 & 81 & \underline{0} \end{array}$$

$$-4t^3 + 39t^2 - 243 > 0 \Leftrightarrow (t-3)(-4t^2 + 27t + 81) > 0$$

$$(t-3)(-4t^2 + 27t + 81) = 0 \Leftrightarrow$$

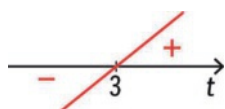
$$\Leftrightarrow t-3=0 \vee -4t^2 + 27t + 81 = 0$$

$$\Leftrightarrow t=3 \vee t=9$$

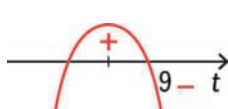
$$\begin{array}{l} \underline{C.A.} \\ -4t^2 + 27t + 81 = 0 \\ \Leftrightarrow t = \frac{-27 \pm \sqrt{729 + 1296}}{-8} \\ \Leftrightarrow t = \frac{-27 \pm 45}{-8} \\ \Leftrightarrow t = 9 \vee t = -\frac{9}{4} \end{array}$$

Solução impossível  $t \geq 0$

$$y = t - 3$$



$$y = -4t^2 + 27t + 81$$



$$0 \leq t \leq 10$$

t	0	3	9	10
t - 3	-	0	+	+
-4t <sup>2</sup> + 27t + 81	+	+	0	-
Produto	-	0	+	-

$$P(t) > 2200 \Leftrightarrow P(t) - 2200 > 0 \Leftrightarrow t \in ]3, 9[$$

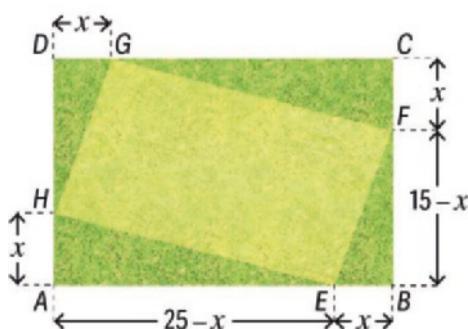
O número de peixes no lago foi superior a 2200 durante 6 anos, de 2018 a 2024.

### 3. Funções polinomiais

Pág. 42

#### Tarefa 3

1.



$$\begin{aligned} A(x) &= A_{[ABCD]} - 2A_{[AEH]} - 2A_{[EBF]} \\ &= 25 \times 15 - 2 \times \frac{\overline{AE} \times \overline{AH}}{2} - 2 \times \frac{\overline{EB} \times \overline{BF}}{2} \\ &= 375 - (25 - x)x - x(15 - x) \\ &= 375 - 25x + x^2 - 15x + x^2 = 2x^2 - 40x + 375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad A(x) &= 2x^2 - 40x + 375 \\ &= 2(x^2 - 20x + 10^2 - 10^2) + 375 \\ &= 2((x - 10)^2 - 100) + 375 \\ &= 2(x - 10)^2 - 200 + 375 = 2(x - 10)^2 + 175 \end{aligned}$$

A área mínima é 175 m<sup>2</sup> para x = 10 m.

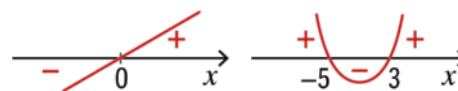
Pág. 44

$$\begin{aligned} 36.1. \quad f(x) < g(x) &\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 < 15x \\ &\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 15x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 15) < 0 \\ x(x^2 + 2x - 15) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 2x - 15 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x = 0 \vee x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x &= \frac{-2 + 8}{2} \vee x = \frac{-2 - 8}{2} \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x &= 3 \vee x = -5 \end{aligned}$$

$$y = x$$

$$y = x^2 + 2x - 15$$



x	-∞	-5	0	3	+∞
x	-	-	0	+	+
x <sup>2</sup> + 2x - 15	+	0	-	-	0
x(x <sup>2</sup> + 2x - 15)	-	0	+	0	+

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -5[ \cup ]0, 3[$$

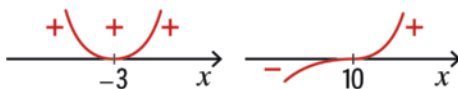
$$36.2. \quad h(x) > 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 (x - 10)^3 > 0$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0 \vee (x - 10)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 10$$

$$y = (x + 3)^2 \quad y = (x - 10)^3$$



x	-∞	-3	10	+∞
(x + 3) <sup>2</sup>	+	0	+	+
(x - 10) <sup>3</sup>	-	-	0	+
h(x)	-	0	0	+

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]10, +\infty[$$

Pág. 45

$$37.1. \quad f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

Divisores do termo independente:

$$-1, 1, -2, 2, -4, 4$$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 4(-1) + 4$$

$$= -1 - 1 + 4 - 4 = -2 \neq 0$$

$$f(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \times 1 + 4 = 1 - 1 - 4 + 4 = 0$$

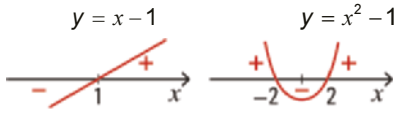
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x - 1)(x^2 - 4)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \pm 2 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1, 2\}$$

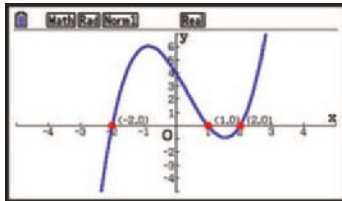


$x$	$-\infty$	$-2$		$1$	$2$	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+	+
$x^2-4$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	+

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-2, 1[ \cup ]2, +\infty[$ , ou seja,  $f$  é positiva em  $]-2, 1[ \cup ]2, +\infty[$ .

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup ]1, 2[$ , ou seja,  $f$  é negativa em  $]-\infty, -2[ \cup ]1, 2[$ .

Confirmação com a calculadora gráfica:



**37.2.**  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

Divisores do termo independente:

$-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$

$$g(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 6 = -1 - 3 - 2 - 6 = -12 \neq 0$$

$$g(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 6 = 1 - 3 + 2 - 6 = -6 \neq 0$$

$$g(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 + 2(-2) - 6 = -8 - 12 - 4 - 6 = -30 \neq 0$$

$$g(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 6 = 8 - 12 + 4 - 6 = -6 \neq 0$$

$$g(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 + 2(-3) - 6 = -27 - 27 - 6 - 6 = -66 \neq 0$$

$$g(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 2 \times 3 - 6 = 27 - 27 + 6 - 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 2 & -6 \\ & & 3 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

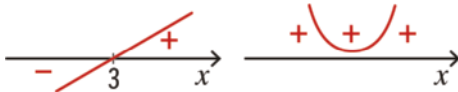
$$g(x) = (x-3)(x^2+2)$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x-3=0 \vee \underbrace{x^2+2=0}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow x=3$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{3\}$$

$$y = x - 3$$

$$y = x^2 + 2$$

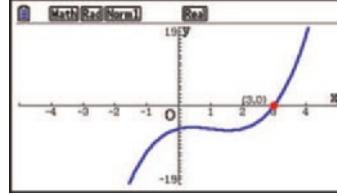


$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$x-3$	-	0	+
$x^2+2$	+	+	+
$g(x)$	-	0	+

$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]3, +\infty[$ , ou seja,  $g$  é positiva e  $]$  $3, +\infty[$

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 3[$ , ou seja,  $g$  é negativa e  $]-\infty, 3[$

Confirmação com a calculadora gráfica:



**37.3.**  $h(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

Divisores do termo independente:

$-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8$

$$h(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 4(-1) + 8 = -1 - 2 + 4 + 8 = 9 \neq 0$$

$$h(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + 8 = 1 - 2 - 4 + 8 = 3 \neq 0$$

$$h(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 4(-2) + 8 = -8 - 8 + 8 + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -4 & 8 \\ -2 & & -2 & 8 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$h(x) = (x+2)(x^2-4x+4) = (x+2)(x-2)^2$$

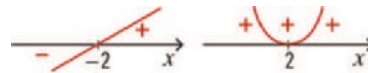
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \vee (x-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}$$

$$y = x + 2$$

$$y = (x-2)^2$$

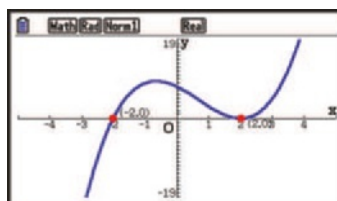


$x$	$-\infty$	$-2$		$2$	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+
$(x-2)^2$	+	+	+	0	+
$h(x)$	-	0	+	0	+

$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-2, 2[ \cup ]2, +\infty[$ , ou seja,  $h$  é positiva em  $]-2, 2[ \cup ]2, +\infty[$ .

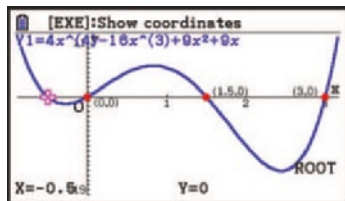
$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[$ , ou seja,  $h$  é negativa em  $]-\infty, -2[$ .

Confirmação com a calculadora gráfica:



38.1.  $f(x) = 4x^4 - 16x^3 + 9x^2 + 9x$   
 $= x(4x^3 - 16x^2 + 9x + 9)$

Recorrendo à calculadora gráfica, podemos observar que 3 é um zero da função  $f$ .



$$4x^3 - 16x^2 + 9x + 9$$

4	-16	9	9
3	12	-12	-9
4	-4	-3	0

$$f(x) = x(x-3)(4x^2 - 4x - 3)$$

$$= (x^2 - 3x)(4x^2 - 4x - 3)$$

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}$$

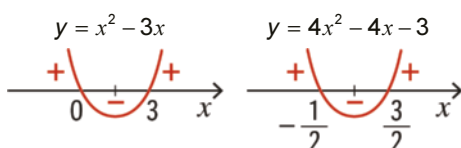
**C.A.**

$$4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2 \times 4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 - 8}{8} \vee x = \frac{4 + 8}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}$$



$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		3	$+\infty$
$x^2 - 3x$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$4x^2 - 4x - 3$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -\frac{1}{2}[ \cup ]0, \frac{3}{2}[ \cup ]3, +\infty[, \text{ ou}$$

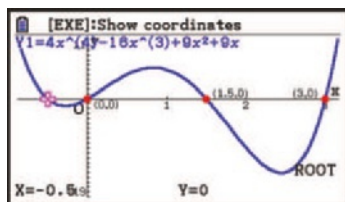
$$\text{seja, } f \text{ é positiva em } ]-\infty, -\frac{1}{2}[ \cup ]0, \frac{3}{2}[ \cup ]3, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\frac{1}{2}, 0[ \cup ]\frac{3}{2}, 3[, \text{ ou seja, } f \text{ é}$$

$$\text{negativa em } ]-\frac{1}{2}, 0[ \cup ]\frac{3}{2}, 3[$$

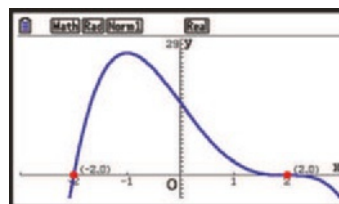
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 3 \right\}$$

Confirmação com a calculadora gráfica:



38.2.  $g(x) = -x^4 + 4x^3 - 16x + 16$

Recorrendo à calculadora gráfica, podemos observar que  $-2$  e  $2$  são zeros da função  $g$ .



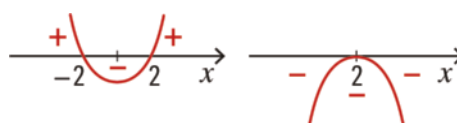
	-1	4	0	-16	16
2		-2	4	8	-16
	-1	2	4	-8	0
-2		2	-8	8	
	-1	4	-4	0	

$$g(x) = (x-2)(x+2)(-x^2 + 4x - 4)$$

$$= (x^2 - 4)[-(x^2 - 4x + 4)] = (x^2 - 4)[-(x-2)^2]$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

$$y = x^2 - 4 \qquad y = -(x-2)^2$$



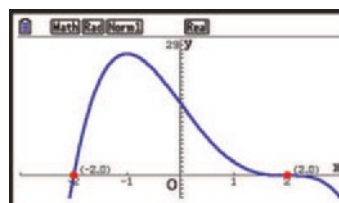
$x$	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	0	-	0	+
$-(x-2)^2$	-	-	-	0	-
$g(x)$	-	0	+	0	-

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-2, 2[, \text{ ou seja, } g \text{ é positiva em } ]-2, 2[$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[, \text{ ou seja, } g \text{ é negativa em } ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}$$

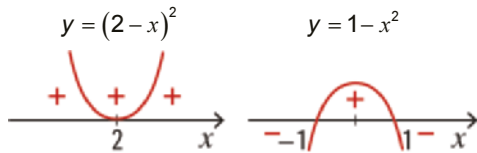
Confirmação com a calculadora gráfica:



38.3.  $h(x) = (2-x)^2 - x^2(2-x)^2 = (2-x)^2(1-x^2)$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)^2 = 0 \vee 1-x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2-x = 0 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \pm 1$$



$x$	$-\infty$	$-1$		$1$		$2$	$+\infty$
$(2-x)^2$	+	+	+	+	+	0	+
$1-x^2$	-	0	+	0	-	-	-
$h(x)$	-	0	+	0	-	0	-

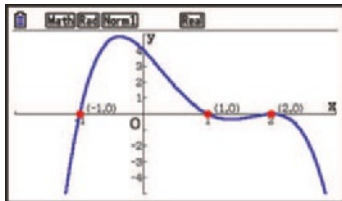
$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-1, 1[$ , ou seja,  $h$  é positiva em  $]-1, 1[$ .

$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, 2[ \cup ]2, +\infty[$ , ou seja,

$h$  é negativa em  $]-\infty, -1[ \cup ]1, 2[ \cup ]2, +\infty[$

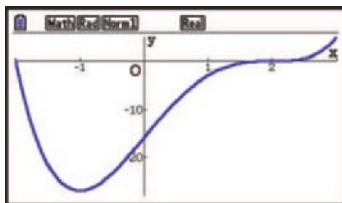
$h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1, 2\}$

Confirmação com a calculadora gráfica:



Pág. 47

39.1. O gráfico de  $f$  obtido na calculadora gráfica sugere que  $-2$  e  $2$  são os únicos zeros de  $f$  no intervalo  $[-3, 3]$ .



39.2.

$$f(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^3 - 0,01(-2)^2 + 16(-2) - 15,96$$

$$= 16 + 32 - 0,04 - 32 - 15,96 = 0$$

$$f(2) = 2^4 - 4 \times 2^3 - 0,01 \times 2^2 + 16 \times 2 - 15,96$$

$$= 16 - 32 - 0,04 + 32 - 15,96 = 0$$

1	-4	-0,01	16	-15,96
2	2	-4	-8,02	15,96
1	-2	-4,01	7,98	0
-2	-2	8	7,98	
1	-4	3,99	0	

$$f(x) = (x-2)(x+2)(x^2 - 4x + 3,99)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \vee x+2 = 0 \vee x^2 - 4x + 3,99 = 0$$

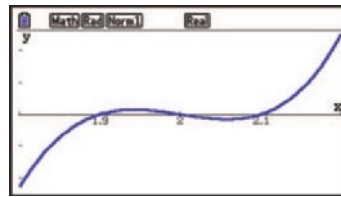
$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 15,96}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = \frac{4 - 0,2}{2} \vee x = \frac{4 + 0,2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1,9 \vee x = 2,1$$

Zeros de  $f$ :  $-2$ ;  $1,9$ ;  $2$ ;  $2,1$

Logo, a conjectura estabelecida não está correta. A função  $f$  tem 4 zeros e não apenas dois. Alterando a janela de visualização da calculadora gráfica, podemos confirmar a existência de 4 zeros.



Pág. 48

40.1.  $f(-6) = 32 \Leftrightarrow -(-6)^3 + a(-6)^2 + 32 = 32$

$$\Leftrightarrow 216 + 36a = 0 \Leftrightarrow 36a = -216 \Leftrightarrow a = -6$$

40.2.  $f(x) = -x^3 - 6x^2 + 32$

	-1	-6	0	32
-4	4	8	-32	
	-1	-2	8	0
-4	4	-8		
	-1	2	0	

$$f(x) = (x+4)^2(-x+2)$$

Logo,  $-4$  é um zero duplo de  $f$ .

40.3.  $f(3) = -3^2 - 6 \times 3^2 + 32 = -27 - 54 + 32 = -49$

$x$	-6	-4	0	3
$f(x)$	32	0	32	-49

40.4.  $f$  é decrescente em  $[-6, -4]$  e em  $[0, 3]$

$f$  é crescente em  $[-4, 0]$

Máximo relativo: 32 para  $x = -6$  e  $x = 0$ .

Mínimo relativo: 0 e  $-49$  para  $x = -4$  e  $x = 3$ ,  
respetivamente

Mínimo absoluto:  $-49$

Máximo absoluto: 32

$$D_f' = [-49, 32]$$

Pág. 49

41.1.  $f(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^4 + a(-1)^3 - 2(-1) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - a + 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$$

A representação gráfica de  $f$  sugere que  $-1$  tem multiplicidade superior a 1.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & & -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & -1 & \underline{0} \\ -1 & & -1 & 0 & 1 & \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \underline{0} \\ -1 & & -1 & 1 & \\ \hline & 1 & -1 & \underline{0} & & \end{array}$$

$$f(x) = (x-1)(x+1)^3$$

41.2.  $f(-2) = (-2-1)(-2+1)^3 = -3(-1) = 3$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)^3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{1}{2} \times \frac{27}{8} = -\frac{27}{16}$$

$$f(2) = (2-1)(2+1)^3 = 1 \times 3^3 = 27$$

$x$	-2		$\frac{1}{2}$		2
$f(x)$	3	$\searrow$	$-\frac{27}{16}$	$\nearrow$	27

41.3.  $f$  é decrescente em  $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$

$f$  é crescente em  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

Máximos relativos: 3 e 27 para  $x = -2$  e  $x = 2$ , respetivamente

Mínimos relativos:  $-\frac{27}{16}$  para  $x = \frac{1}{2}$

Máximo absoluto: 27

Mínimo absoluto:  $-\frac{27}{16}$   $D'_f = \left[-\frac{27}{16}, 27\right]$

Pág. 50

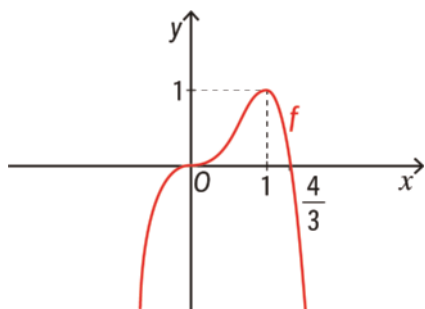
42.1.  $f(-1) = 1 \Leftrightarrow 2(-1)^3 + a(-1) = 1 \Leftrightarrow -2 + a = 1 \Leftrightarrow a = 3$

42.2.

$x$	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

43.1.  $f(x) = 4x^3 - 3x^4 = x^3(4-3x) = -x^3(3x-4)$

43.2.  $f(1) = 4 \times 1^3 - 3 \times 1^4 = 4 - 3 = 1$



43.3.

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

43.4.  $f$  é crescente em  $]-\infty, 1]$

$f$  é decrescente em  $[1, +\infty[$

Máximo relativo (e absoluto): 1 para  $x = 1$

$f$  não tem mínimos

$$D'_f = ]-\infty, 1]$$

Pág. 51

44.1.  $v(1) = 0,05 \times 1^3 - 1,55 \times 1^2 + 12,3 \times 1 + 19,2 = 0,05 - 1,55 + 12,3 + 19,2 = 30$  km/h

44.2.  $v(t) \leq 30 \Leftrightarrow 0,05t^3 - 1,55t^2 + 12,3t + 19,2 \leq 30$

$$\Leftrightarrow 0,05t^3 - 1,55t^2 + 12,3t - 10,8 \leq 0$$

$$1 \begin{array}{c|cccc} & 0,05 & -1,55 & 12,3 & -10,8 \\ & & 0,05 & -1,5 & 10,8 \\ \hline & 0,05 & -1,5 & 10,8 & \underline{0} \end{array}$$

$$0,05t^3 - 1,55t^2 + 12,3t - 10,8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(0,05t^2 - 1,5t + 10,8) = 0$$

$$\Leftrightarrow t-1 = 0 \vee 0,05t^2 - 1,5t + 10,8 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{1,5 \pm \sqrt{2,25 - 2,16}}{2 \times 0,05}$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{1,5 - 0,3}{0,1} \vee t = \frac{1,5 + 0,3}{0,1}$$

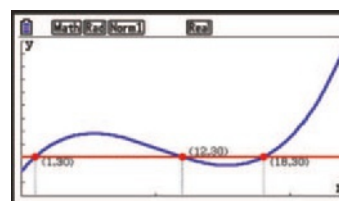
$$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 12 \vee t = 18$$

$t$	0		1		12		18		24
$t-1$	-	-	0	+	+	+	+	+	+
$0,05t^2 - 1,5t + 10,8$	+	+	+	+	0	-	0	+	+
$v(t) - 30$	-	-	0	+	0	-	0	+	+

$$v(t) \leq 30 \Leftrightarrow t \in [0, 1] \cup [12, 18]$$

Significa que entre a meia-noite e a 1 h da manhã e entre as 12 h e as 18 h a velocidade do vento prevista era inferior ou igual a 30 km/h.

Verificação com a calculadora gráfica:



Pág. 52

45.1.  $V(x) = (90 - 4x)(44 - 2x)x = (3960 - 180x - 176x + 8x^2)x = 8x^3 - 356x^2 + 3960x$

45.2.  $V(3) = 8 \times 3^3 - 356 \times 3^2 + 3960 \times 3 = 216 - 3204 + 11880 = 8892$  cm<sup>3</sup>

$$V(13) = 8 \times 13^3 - 356 \times 13^2 + 3960 \times 13$$

$$= 17\,576 - 60\,164 + 51\,480 = 8892 \text{ cm}^3$$

Se  $x = 3$ :  $90 - 4x = 90 - 4 \times 3 = 78 \text{ cm}$

$$44 - 2x = 44 - 2 \times 3 = 38 \text{ cm}$$

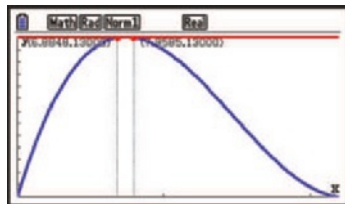
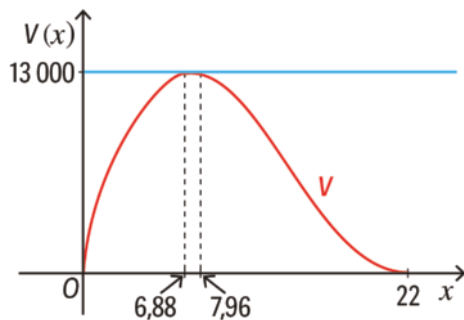
Dimensões da caixa:  $3 \text{ cm} \times 78 \text{ cm} \times 38 \text{ cm}$

Se  $x = 13$ :  $90 - 4x = 90 - 4 \times 13 = 38 \text{ cm}$

$$44 - 2x = 44 - 2 \times 13 = 18 \text{ cm}$$

Dimensões da caixa:  $13 \text{ cm} \times 38 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$

45.3.  $V(x) > 13\,000 \Leftrightarrow 8x^3 - 356x^2 + 3960x > 13\,000$



Se  $x = 7$ :  $90 - 4x = 90 - 4 \times 7 = 62 \text{ cm}$

$$44 - 2x = 44 - 2 \times 7 = 30 \text{ cm}$$

Dimensões da caixa:  $7 \text{ cm} \times 62 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$

Pág. 53

46.  $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$A(1, y)$

$$y = f(1) = 1^3 + 1^2 - 6 \times 1 = -4$$

$A(1, -4)$

$g(x) = ax$  e  $g(1) = -4$

$$g(1) = -4 \Leftrightarrow a \times 1 = -4 \Leftrightarrow a = -4$$

$g(x) = -4x$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 6x = -4x$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 1$$

A abcissa de  $B$  é  $-2$  e a ordenada é  $g(-2) = 8$ .

$B(-2, 8)$

47.

a) A função  $f$  tem três zeros. Sendo que  $0$  é um zero de  $f$  de multiplicidade superior ou igual a  $2$  e os outros dois zeros têm multiplicidade superior ou igual a  $1$ . Assim, a função  $f$  é uma função polinomial de grau superior ou igual a  $4$ .

Máximo relativo:  $0$

Mínimo relativo e absoluto:  $-2$

Não tem máximo absoluto

$$D'_f = [-2, +\infty[$$

b) A função  $g$  tem dois zeros. Sendo que  $2$  é um zero de  $g$  de multiplicidade superior ou igual a  $2$  e o outro zero tem multiplicidade superior ou igual a  $1$ . Assim, a função  $g$  é uma função polinomial de grau superior ou igual a  $3$ .

Máximo relativo:  $0$

Mínimo relativo:  $-1$

Não tem extremos absolutos

$$D'_g = \mathbb{R}$$

Pág. 54

Tarefas de consolidação 3

1.  $f$  é uma função polinomial de grau 3 sendo  $k$  o coeficiente do termo de maior grau. Como  $k < 0$ , rejeitam-se as opções (A) e (B).

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow k(x^3 - x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$$

Logo, a função  $f$  tem três zeros distintos, pelo que se rejeita a opção (C).

A opção correta é a opção (D).

2.1.  $f(x) = a(x+2)(x-1)^2$

$$f(-1) = -4 \Leftrightarrow a(-1+2)(-1-1)^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow a \times 1 \times 4 = -4 \Leftrightarrow a = -1$$

$$f(x) = -(x+2)(x-1)^2$$

2.2.  $f(-3) = -(-3+2)(-3-1)^2 = -(-1) \times 16 = 16$

$x$	$-3$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f(x)$	$16$	$\searrow$	$\nearrow$	$0$

2.3.  $f$  é decrescente em  $[-3, -1]$  e em  $[1, +\infty[$

$f$  é crescente em  $[-1, 1]$

Máximos relativos:  $16$  e  $0$  para  $x = -3$  e  $x = 1$ , respetivamente

Mínimo relativo:  $-4$  para  $x = -1$

Máximo absoluto:  $16$

Não tem mínimo absoluto

$$D'_f = ]-\infty, 16]$$

3.1. Se  $x = 5$ :  $20 - x = 20 - 5 = 15$  cm  
 $25 - x = 25 - 5 = 20$  cm

Se  $x = 5$ , as dimensões do paralelepípedo são  $5 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ .

Logo, o seu volume será  $5 \times 15 \times 20 = 1500 \text{ cm}^3$

3.2.  $V(x) = (20 - x)(25 - x)x$   
 $= (500 - 20x - 25x + x^2)x$   
 $= (x^2 - 45x + 500)x$   
 $= x^3 - 45x^2 + 500x$

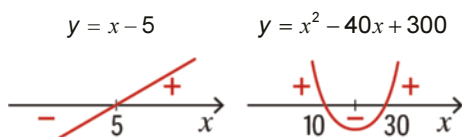
3.3.  $x > 0 \wedge 20 - x > 0 \wedge 25 - x > 0$   
 $\Leftrightarrow x > 0 \wedge -x > -20 \wedge -x > -25$   
 $\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 20 \wedge x < 25$   
 $D'_V = ]0, 20[$

3.4.  $V(x) > 1500 \Leftrightarrow x^3 - 45x^2 + 500x - 1500 > 0$

1	-45	500	-1500
5	5	-200	1500
1	-40	300	0

**C.A**  
 $x^2 - 40x + 300 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1200}}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{40 - 20}{2} \vee x = \frac{40 + 20}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = 10 \vee x = 30$

$x^3 - 45x^2 + 500x - 1500 > 0$   
 $\Leftrightarrow (x - 5)(x^2 - 40x + 300) > 0$



$x$	0		5		10		20
$x - 5$		-	0	+	+	+	
$x^2 - 40x + 300$		+	+	+	0	-	
$V(x) - 1500$		-	0	+	0	-	

$V(x) > 1500 \Leftrightarrow V(x) - 1500 > 0 \Leftrightarrow x \in ]5, 10[$

4.1.  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = x + 3$   
 $\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + x - 6 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 - 5}{2} \vee x = \frac{-1 + 5}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 2$

As abscissas dos pontos de interseção de  $f$  e  $g$  são  $-3, 0$  e  $2$ .

4.2. O conjunto de valores de  $x$  para os quais se tem  $g(x) \geq f(x)$  é o conjunto dos valores para os quais a imagem por  $g$  é superior ou igual à imagem por  $f$ .

Assim,  $g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -3] \cup [0, 2]$ .

Opção (B)

5.1.  $d(0) = -0,01 \times 0^3 + 0,8 \times 0^2 - 12 \times 0 + 100 = 100$

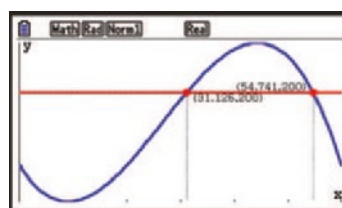
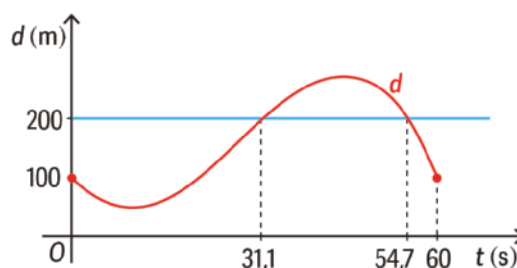
O drone encontrava-se a 100 m do solo quando iniciou a demonstração.

5.2.  $d(t) = d(0) \Leftrightarrow -0,01t^3 + 0,8t^2 - 12t + 100 = 100$

$\Leftrightarrow -0,01t^3 + 0,8t^2 - 12t = 0$   
 $\Leftrightarrow t(-0,01t^2 + 0,8t - 12) = 0$   
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee -0,01t^2 + 0,8t - 12 = 0$   
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{-0,8 \pm \sqrt{0,64 - 0,48}}{2 \times (-0,01)}$   
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{-0,8 - 0,4}{-0,02} \vee t = \frac{-0,8 + 0,4}{-0,02}$   
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 60 \vee t = 20$

O drone voltou a estar à mesma distância que a inicial ao fim de 20 s e ao fim de 60 s.

5.3.  $d(t) > 200 \Leftrightarrow -0,01t^3 + 0,8t^2 - 12t + 100 > 200$



$54,7 - 31,1 = 23,6$

O drone esteve a uma distância do solo superior a 200 m durante cerca de 24 s.

**Avaliação formativa 3**

1.1.  $-1$  é um zero e a função não muda de sinal.

1.2.  $f(x) = a(x+3)(x-2)(x+1)^2$

$f(0) = -6 \Leftrightarrow a(0+3)(0-2)(0+1)^2 = -6$

$\Leftrightarrow a \times 3 \times (-2) \times 1 = -6 \Leftrightarrow a = \frac{-6}{-6} \Leftrightarrow a = 1$

$f(x) = (x+3)(x-2)(x+1)^2$

$= (x^2 - 2x + 3x - 6)(x^2 + 2x + 1)$

$= (x^2 + x - 6)(x^2 + 2x + 1)$

$= x^4 + 2x^3 + x^2 + x^3 + 2x^2 + x - 6x^2 - 12x - 6$

$= x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

1.3.

$x$	$-\infty$	$-3$		$-1$		$2$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$	$0$	$+$

1.4. O gráfico de  $g$  obtém-se do gráfico de  $f$  por uma translação associada ao vetor  $(1, 0)$ , isto é, por uma translação horizontal e 1 unidade para a direita.

Logo, os zeros de  $g$  são:  $-2, 0$  e  $3$ .

2.  $d < 2$  e  $d$  é um zero simples. Então,  $d = 1$ .

$2$  também é um zero simples. Então,  $b = 2$ .

$-2$  é um zero duplo. Então,  $c = -2$ .

$f(x) = a(x-1)(x-2)(x+2)^2$

$f(0) = -16 \Leftrightarrow a(0-1)(0-2)(0+2)^2 = -16$

$\Leftrightarrow a(-1)(-2)4 = -16 \Leftrightarrow a = \frac{-16}{8} \Leftrightarrow a = -2$

3.  $f$  é uma função polinomial de grau 2.

Então,  $1 - k^2 = 0 \wedge 1 + k \neq 0$

$1 - k^2 = 0 \wedge 1 + k \neq 0 \Leftrightarrow k^2 = 1 \wedge k \neq -1$

$\Leftrightarrow k = \pm 1 \wedge k \neq -1 \Leftrightarrow k = 1$

Opção (C)

4. A função  $f$  tem três zeros. Sendo que  $1$  é um zero de  $f$  de multiplicidade superior ou igual a 2 e os outros dois zeros têm multiplicidade superior ou igual a 1.

Assim, a função  $f$  é uma função polinomial de grau superior ou igual a 4.

I - c)

A função  $f$  tem um zero em  $]-\infty, -2[$  e outro em  $]3, +\infty[$ . Tem ainda um zero duplo (o 1).

II - b)

$1$  é zero de multiplicidade mínima 2 e, dado que a função não muda aí de sinal, o grau de multiplicidade deste zero terá de ser par. Então, a única possibilidade para o número III, de entre as que são apresentadas, é a b).

$-15$  é o mínimo absoluto de  $f$  e a função não tem máximo absoluto. Logo,  $D_f = [-15, +\infty[$ .

Então, I - c); II - b); III - b); IV - a).

**4. Funções racionais**

**Tarefa 4**

Designemos por torneira C a terceira torneira a ser utilizada para encher o depósito.

$$\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{Torneira A}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Torneira B}} + \underbrace{\frac{1}{t}}_{\text{Torneira C}} = \frac{5}{6} + \frac{1}{t} = \frac{5t+6}{6t}$$

Fração do depósito com água depois de abertas as torneiras durante uma hora

Recorrendo a uma regra de três simples, temos:

Fração do depósito	Tempo (h) de enchimento	
$\frac{5t+6}{6t}$	— 1	$h = \frac{1}{\frac{5t+6}{6t}} \Leftrightarrow h = \frac{6t}{5t+6}$
1	— h	

$h(t) = \frac{6t}{5t+6}, t > 0$

48.  $f$  e  $i$

49.1.  $a(x) = \frac{3}{x-2}$ ;  $D_a = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$a: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto a(x) = \frac{3}{x-2}$

49.2.  $b(x) = \frac{4x-3}{x^2}$ ;  $D_b = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$b: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto b(x) = \frac{4x-3}{x^2}$

49.3.  $c(x) = \frac{x}{1-3x}$ ;  $D_c = \{x \in \mathbb{R} : 1-3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$c: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$	<p><b>C.A.</b>  <math>1-3x = 0</math>  <math>\Leftrightarrow 3x = 1</math>  <math>\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}</math></p>
$x \mapsto c(x) = \frac{x}{1-3x}$	

49.4.  $d(x) = \frac{3x-1}{x^6-x^5}$

$D_d = \{x \in \mathbb{R} : x^6 - x^5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$d: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto d(x) = \frac{3x-1}{x^6-x^5}$

**C.A.**  
 $x^6 - x^5 = 0$   
 $\Leftrightarrow x^5(x-1) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

49.5.  $e(x) = \frac{10}{x^2-4x+4}$

$D_e = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$e: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto e(x) = \frac{10}{x^2-4x+4}$

**C.A.**  
 $x^2 - 4x + 4 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow x - 2 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 2$

49.6.  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-x+2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x) = \frac{3x^2}{x^2-x+2}$

**C.A.**  
 $x^2 - x + 2 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$   
 Equação impossível

49.7.  $g(x) = \frac{4}{x^3+2x^2-3}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 2x^2 - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto g(x) = \frac{4}{x^3+2x^2-3}$

**C.A.**  
 $x^3 + 2x^2 - 3 = 0$   
 Divisores de -3: -1, 1, -3, 3

1	2	0	-3
1	1	3	3
1	3	3	0

$x^3 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 3) = 0$   
 $\Leftrightarrow x-1=0 \vee x^2 + 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2}$   
 Equação impossível

49.8.  $h(x) = \frac{3}{x^4+x}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

$h: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto h(x) = \frac{3}{x^4+x}$

**C.A.**  
 $x^4 + x = 0$   
 $\Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 + 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 = -1$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

49.9.  $i(x) = \frac{x^3-x}{x^3+x^2-2x}$

$D_i = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 - 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$

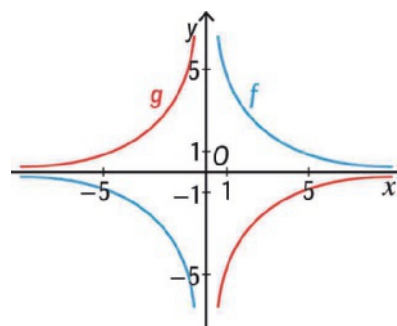
$i(x) = \frac{x(x^2-1)}{x(x+2)(x-1)}$   
 $= \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+2)(x-1)} = \frac{x+1}{x+2}$

$i: \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto i(x) = \frac{x+1}{x+2}$

**C.A.**  
 $x^3 + x^2 - 2x = 0$   
 $\Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + x - 2 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm 3}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 1$

Pág. 62

50.1.



50.2. Assíntota vertical:  $x = 0$ ;

Assíntota horizontal:  $y = 0$

50.3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$

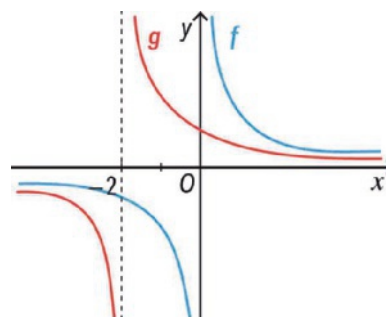
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0^-$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$

Pág. 63

51.1.  $f(x) = \frac{1}{x}$

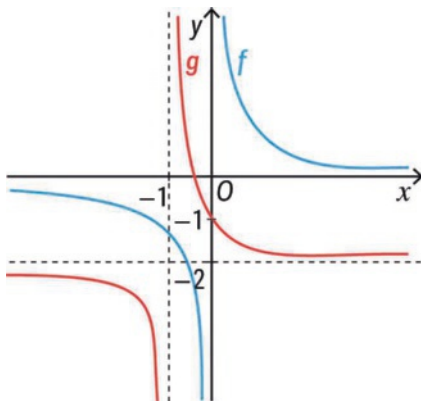


O gráfico de  $g$  pode ser obtido do gráfico da função  $f$  por uma translação horizontal de vetor  $\vec{u}(-2, 0)$ , ou seja, desloca-se duas unidades para a esquerda.

51.2. Assíntota vertical:  $x = -2$

Assíntota horizontal:  $y = 0$

52.1.



O gráfico de  $g$  pode ser obtido do gráfico da função

$f(x) = \frac{1}{x}$  pela translação associada ao vetor

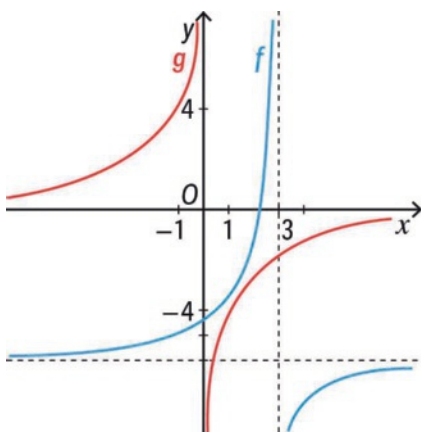
$\vec{u}(-1, -2)$ .

52.2. Assíntota vertical:  $x = -1$ ;

Assíntota horizontal:  $y = -2$

Pág. 64

53.1. Do vetor associado à translação que transforma o gráfico da função  $g$  no gráfico da função  $f$  é  $\vec{u}(3, -6)$ .



53.2. Assíntota vertical:  $x = 3$

Assíntota horizontal:  $y = -6$

54.1.  $f(x) = \frac{2}{x-5}$ ; Assíntota vertical:  $x = 5$

Assíntota horizontal:  $y = 0$

54.2.  $g(x) = -1 + \frac{2}{x-3}$ ; Assíntota vertical:  $x = 3$

Assíntota horizontal:  $y = -1$

54.3.  $h(x) = -3 + \frac{-3}{x+7}$ ; Assíntota vertical:  $x = -7$

Assíntota horizontal:  $y = -3$

54.4.  $i(x) = 3 + \frac{-4}{x-5}$

Assíntota vertical:  $x = 5$

Assíntota horizontal:  $y = 3$

Pág. 66

55.1.  $f(x) = 4 + \frac{1}{x-3}$

1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

2) Assíntota vertical:  $x = 3$

Assíntota horizontal:  $y = 4$

3)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 + \frac{1}{x-3} = 0 \Leftrightarrow 4x - 12 + 1 = 0$

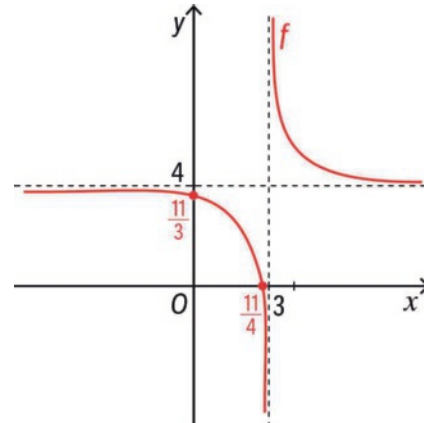
$$\Leftrightarrow x = \frac{11}{4}$$

Interseção do gráfico com o eixo  $Ox$ :  $P\left(\frac{11}{4}, 0\right)$

$$f(0) = 4 + \frac{1}{0-3} = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

Interseção do gráfico com o eixo  $Oy$ :  $Q\left(0, \frac{11}{3}\right)$

4)



5)  $D_f' = ]-\infty, 4[ \cup ]4, +\infty[$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4^-$ ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4^+$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

6)  $f$  é decrescente em  $]-\infty, 3[$  e em  $]3, +\infty[$ .

7)

$x$	$-\infty$	$\frac{11}{4}$		$3$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	N.D.	$+$

A função  $f$  é positiva em  $]-\infty, \frac{11}{4}[$  e em  $]3, +\infty[$ .

A função  $f$  é negativa em  $]\frac{11}{4}, 3[$ .

55.2. 1)  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

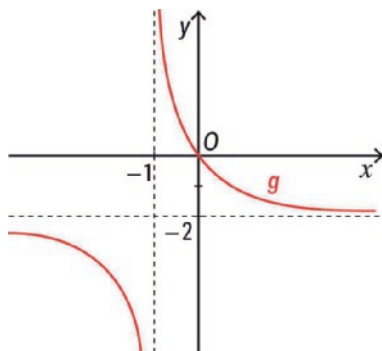
2) Assíntota vertical:  $x = -1$

Assíntota horizontal:  $y = -2$

3)  $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + \frac{2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

O gráfico de  $g$  passa pela origem do referencial, isto é, passa pelo ponto  $(0, 0)$ .

4)



5)  $D'_g = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2^-$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2^+$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty$

6)  $g$  é decrescente em  $]-\infty, -1[$  e em  $]-1, +\infty[$ .

7)

$x$	$-\infty$	$-1$		$0$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	N.D.	$+$	$0$	$-$

A função  $g$  é positiva em  $]-1, 0[$ . A função  $g$  é

negativa em  $]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$ .

55.3. 1)  $D_h = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

2) Assíntota vertical:  $x = \frac{3}{2}$

Assíntota horizontal:  $y = -\frac{1}{2}$

3)  $h(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{-1}{2x-3} = 0$

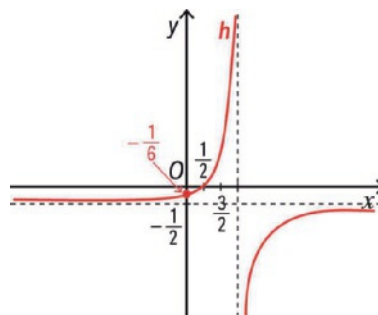
$\Leftrightarrow -(2x-3) - 2 = 0 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$   
 $\left(x \neq \frac{3}{2}\right)$

Interseção do gráfico com  $Ox$ :  $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$h(0) = -\frac{1}{2} + \frac{-1}{2 \times 0 - 3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = -\frac{1}{6}$

Interseção do gráfico com o eixo  $Oy$ :  $Q\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

4)



5)  $D'_h = ]-\infty, -\frac{1}{2}[ \cup ]-\frac{1}{2}, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\frac{1}{2}^+$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\frac{1}{2}^-$

$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} h(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} h(x) = -\infty$

6)  $h$  é crescente em  $]-\infty, \frac{3}{2}[$  e em  $]\frac{3}{2}, +\infty[$ .

7)

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$0$	$+$	N.D.	$-$

A função  $h$  é positiva em  $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ . A função  $h$  é

negativa em  $]-\infty, \frac{1}{2}[$  e em  $]\frac{3}{2}, +\infty[$ .

Pág. 67

56.1. 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) Assíntota vertical:  $x = 1$ ;

Assíntota horizontal:  $y = 0$

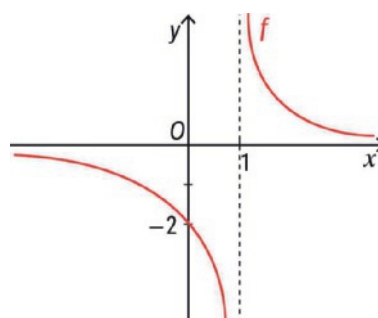
3)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = 0$   
equação impossível

O gráfico de  $f$  não intersesta com o eixo  $Ox$ .

$f(0) = \frac{2}{0-1} = -2$

Interseção do gráfico com o eixo  $Oy$ :  $Q(0, -2)$

4)



5)  $D_f' = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

6)  $f$  é decrescente em  $]-\infty, 1[$  e em  $]1, +\infty[$ .

7)

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	N.D.	$+$

A função  $f$  é positiva em  $]1, +\infty[$ .

A função  $f$  é negativa em  $]-\infty, 1[$ .

56.2.

$g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$  C.A.  
 $\frac{-2x+1}{+2x+2} \frac{|x+1|}{3} \frac{-2}{-2}$

$g(x) = -2 + \frac{3}{x+1}$

1)  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) Assíntota vertical:  $x = -1$

Assíntota horizontal:  $y = -2$

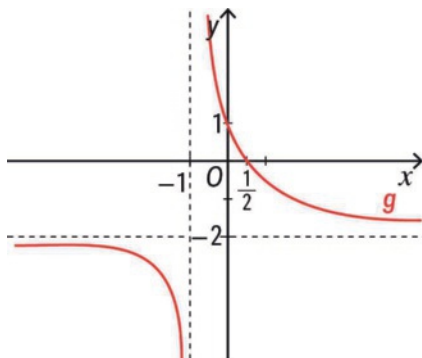
3)  $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0$   
 $\Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Interseção do gráfico com o eixo  $O_x$ :  $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$g(0) = \frac{1-2 \times 0}{0+1} = 1$

Interseção do gráfico com o eixo  $O_y$ :  $Q(0, 1)$

4)



5)  $D_g' = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2^-$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2^+$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty$

6)  $f$  é decrescente em  $]-\infty, -1[$  e em  $]-1, +\infty[$ .

7)

$x$	$-\infty$	$-1$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	N.D.	$+$	$0$	$-$

A função  $g$  é positiva em  $]-1, \frac{1}{2}[$ .

A função  $g$  é negativa em  $]-\infty, -1[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[$ .

56.3.

$h(x) = \frac{1-5x}{2x-2}$  C.A.  
 $\frac{-5x+1}{+5x-5} \frac{|2x-2|}{-4} \frac{-5}{-2}$

$h(x) = -\frac{5}{2} + \frac{-4}{2x-2}$

$h(x) = -\frac{5}{2} + \frac{-2}{x-1}$

1)  $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) Assíntota vertical:  $x = 1$

Assíntota horizontal:  $y = -\frac{5}{2}$

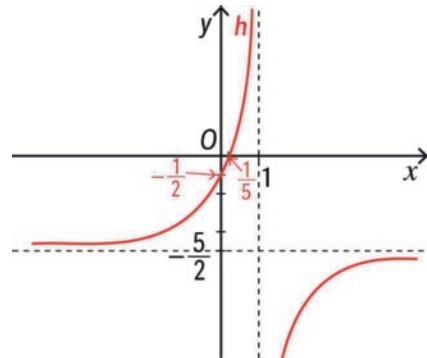
3)  $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-5x}{2x-2} = 0$   
 $\Leftrightarrow 1-5x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

Interseção do gráfico com o eixo  $O_x$ :  $P\left(\frac{1}{5}, 0\right)$

$h(0) = \frac{1-5 \times 0}{2 \times 0 - 2} = -\frac{1}{2}$

Interseção do gráfico com o eixo  $O_y$ :  $Q\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

4)



5)  $D_h' = ]-\infty, -\frac{5}{2}[ \cup ]-\frac{5}{2}, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\frac{5}{2}^+$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\frac{5}{2}^-$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -\infty$

6) A função  $h$  é crescente em  $]-\infty, 1[$  e em  $]1, +\infty[$ .

7)

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{5}$		1	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+	N.D.	-

A função  $h$  é positiva em  $\left] \frac{1}{5}, 1 \right[$ .

A função  $h$  é negativa em  $]-\infty, \frac{1}{5}[$  e em  $]1, +\infty[$ .

Pág. 68

57.1.  $\frac{x}{x-3} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2(x-3)}{x-3} = 0$   
 $\Leftrightarrow -x+6=0 \wedge x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x=6 \wedge x \neq 3; S = \{6\}$

57.2.  $\frac{2x^2}{x+1} - x = \frac{x^2-1}{x} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x+1} - x - \frac{x^2-1}{x} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{2x^3 - x^2(x+1) - (x^2-1)(x+1)}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{2x^3 - x^3 - x^2 - (x^3 + x^2 - x - 1)}{x(x+1)} = 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{x^3 - x^2 - x^3 - x^2 + x + 1}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + x + 1}{x(x+1)} = 0$   
 $\Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \wedge x(x+1) \neq 0$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \times (-2) \times 1}}{2 \times (-2)} \wedge (x \neq 0 \wedge x+1 \neq 0)$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-4} \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -1)$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1-3}{-4} \vee x = \frac{-1+3}{-4} \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -1)$   
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -1); S = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$

57.3.  $\frac{4}{x-2} + \frac{3}{x^2-2x} = \frac{5}{4x} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x^2-2x} - \frac{5}{4x} = 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x(x-2)} - \frac{5}{4x} = 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{16x+12-5x+10}{4x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{11x+22}{4x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 11x+22=0 \wedge 4x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 11x = -22 \wedge (4x \neq 0 \wedge x-2 \neq 0)$   
 $\Leftrightarrow x = -2 \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 2); S = \{-2\}$

58.1.  $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$   
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x-1} = 0$   
 $\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \wedge x-1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \wedge (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \wedge (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3-1}{2} \vee x = \frac{3+1}{2} \wedge (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \wedge (x \neq 1)$$

Zero de  $f$ : 2

58.2.  $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-2x} + \frac{1}{x}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-2)} + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1+x-2}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-3}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow 3x-3=0 \wedge x(x-2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x=3 \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 2) \Leftrightarrow x=1 \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 2)$$

Zero de  $g$ : 1

58.3.  $h(x) = \frac{2-2x}{9-x^2} \times \frac{x^2+3x}{x-1}$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x}{9-x^2} \times \frac{x^2+3x}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-2x) \times (x^2+3x)}{(9-x^2)(x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x-1)x(x+3)}{(3-x)(3+x)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{3-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x=0 \wedge (3-x \neq 0 \wedge 3+x \neq 0 \wedge x-1 \neq 0)$$

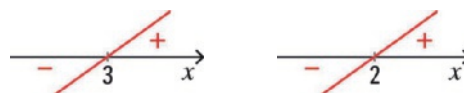
$$\Leftrightarrow x=0 \wedge (x \neq 3 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 1)$$

Zero de  $h$ : 0

Pág. 69

59.1.  $\frac{x-3}{2x-4} > 0$

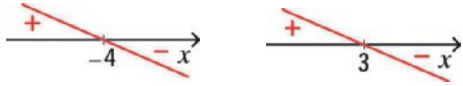
$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \qquad 2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$$



$x$	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	0	+
$2x-4$	-	0	+	+	+
$\frac{x-3}{2x-4}$	+	N.D.	-	0	+

$$S = ]-\infty, 2[ \cup ]3, +\infty[$$

59.2.  $\frac{2-3x}{3-x} > 2 \Leftrightarrow \frac{2-3x}{3-x} - 2 > 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{2-3x-6+2x}{3-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x-4}{3-x} > 0$   
 $-x-4=0 \Leftrightarrow x=-4 \quad 3-x=0 \Leftrightarrow x=3$



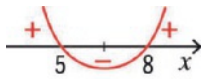
x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
$-x-4$	+	0	-	-	-
$3-x$	+	+	+	0	-
$\frac{-x-4}{3-x}$	+	0	-	N.D.	+

$S = ]-\infty, -4[ \cup ]3, +\infty[$

59.3.  $x + \frac{x}{x-4} \leq 10 \Leftrightarrow x + \frac{x}{x-4} - 10 \leq 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + x - 10x + 40}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 13x + 40}{x-4} \leq 0$

$x^2 - 13x + 40 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 1 \times 40}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{13-3}{2} \vee x = \frac{13+3}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 8$



$x-4=0 \Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$	4		5		8	$+\infty$
$x^2 - 13x + 40$	+	+	+	0	-	0	+
$x-4$	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{x^2 - 13x + 40}{x-4}$	-	N.D.	+	0	-	0	+

$S = ]-\infty, 4[ \cup ]5, 8]$

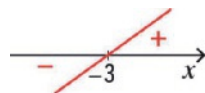
59.4.  $\frac{x^2+1}{x+3} + 3 < x \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x+3} + 3 - x < 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{x^2+1+3x+9-x^2-3x}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{10}{x+3} < 0$

Como  $10 > 0$ , o sinal da fração depende apenas do denominador, isto é, para  $\frac{10}{x+3} < 0$ ,  $x+3 < 0$ , ou seja,  $x < -3$ .  $S = ]-\infty, -3[$

Outro processo:

$\frac{10}{x+3} < 0;$

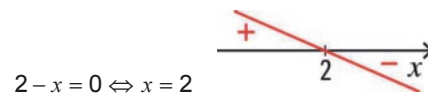
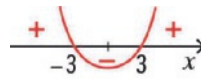
$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$



x	$-\infty$	-3	$+\infty$
10	+	+	+
$x+3$	-	0	+
$\frac{10}{x+3}$	-	N.D.	+

59.5.  $\frac{2x^2-3x-7}{2-x} \leq 1-x \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-7}{2-x} - 1 + x \leq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-7-2+x+2x-x^2}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{2-x} \leq 0$

$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x=3 \vee x=-3$



$2-x=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	-3		2		3	$+\infty$
$x^2-9$	+	0	-	-	-	0	+
$2-x$	+	+	+	0	-	-	-
$\frac{x^2-9}{2-x}$	+	0	-	N.D.	+	0	-

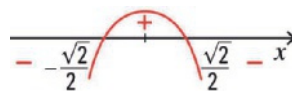
$S = [-3, 2[ \cup ]3, +\infty[$

59.6.  $\frac{1}{x} + \frac{x^2}{x+1} \geq x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{x^2}{x+1} - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{x+1+x^3-x^2(x+1)-x(x+1)}{x(x+1)} \geq 0$

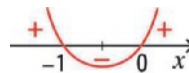
$\Leftrightarrow \frac{x+1+x^3-x^3-x^2-x^2-x}{x(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x^2}{x(x+1)} \geq 0$

$1-2x^2=0 \Leftrightarrow 2x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x=\frac{\sqrt{2}}{2}$



$x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$



x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$1-2x^2$	-	-	-	0	+	+	0	-
$x(x+1)$	+	0	-	-	-	0	+	+
$\frac{1-2x^2}{x(x+1)}$	-	N.D.	+	0	-	N.D.	+	-

$S = \left] -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[ \cup \left] 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

60.1.

Quantidade de farinha (em kg)		Custo (em euros)
$30 + x$	—	$30 \times 0,80 + x \times 0,60$
1	—	$C(x)$

$$C(x) = \frac{30 \times 0,80 + 0,60x}{30 + x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(x) = \frac{24 + \frac{6}{10}x}{30 + x} \Leftrightarrow C(x) = \frac{240 + 6x}{300 + 10x}$$

$$\Leftrightarrow C(x) = \frac{120 + 3x}{150 + 5x}, \text{ com } x > 0$$

60.2. Se a mistura final tem 50 kg é porque é composta por 30 kg de farinha de milho e 20 kg de farinha de trigo, isto é,  $x = 20$ . O preço por kg é

$$C(20) = \frac{120 + 3 \times 20}{150 + 5 \times 20} = 0,72 \text{ €}.$$

Então, o custo de 50 kg de mistura é:

$$50 \times 0,72 \text{ €} = 36 \text{ €}$$

60.3.  $C(x) \leq 0,68 \Leftrightarrow \frac{120 + 3x}{150 + 5x} \leq 0,68 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{120 + 3x}{150 + 5x} - 0,68 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{120 + 3x - 102 - 3,4x}{150 + 5x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{18 - 0,4x}{150 + 5x} \leq 0$$

Como  $x > 0$ ,  $150 + 5x > 0$ , logo o sinal da fração depende apenas do numerador.

$$18 - 0,4x \leq 0 \Leftrightarrow -0,4x \leq -18$$

$$\Leftrightarrow 0,4x \geq 18 \Leftrightarrow x \geq 45$$

A quantidade mínima de farinha de trigo que deve ser utilizada é 45 kg.

61.  $\bar{C}(x) = \frac{1000 + 25x}{x}, x > 0$

61.1  $\bar{C}(x) < 75 \Leftrightarrow \frac{1000 + 25x}{x} < 75 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1000 + 25x}{x} - 75 < 0 \Leftrightarrow \frac{1000 + 25x - 75x}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1000 - 50x}{x} < 0$$

Como  $x > 0$ , o sinal da fração depende apenas do numerador. Assim:

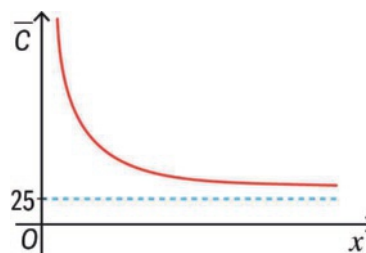
$$1000 - 50x < 0 \Leftrightarrow -50x < -1000$$

$$\Leftrightarrow 50x > 1000 \Leftrightarrow x > 20$$

No mínimo deve encomendar 21 casacos.

61.2.  $\bar{C}(x) = 25 + \frac{1000}{x}, x > 0$ ;

Assíntota horizontal:  $y = 25$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x) = 25$$

Podemos concluir-se que, à medida que o número de casacos produzidos aumenta, o seu custo médio tende a estabilizar em 25 euros.

Tarefas de consolidação 4

1.1.  $V = x \times 3x \times y = 3x^2y$ ;  $V = 100$  L

$$3x^2y = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{3x^2}$$

Área da chapa gasta:

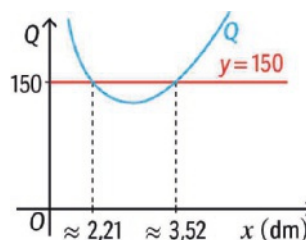
$$Q(x) = 2 \times x \times \frac{100}{3x^2} + 2 \times 3x \times \frac{100}{3x^2} + 2 \times x \times 3x$$

$$= \frac{200}{3x} + \frac{200}{x} + 6x^2 = \frac{200 + 600 + 18x^3}{3x} = \frac{800 + 18x^3}{3x}$$

$$Q(x) = \frac{800 + 18x^3}{3x}, x > 0$$

1.2.  $Q$  é uma função racional porque é definida pelo quociente de dois polinómios, sendo o denominador um polinómio de grau 1 (grau não inferior a 1).  $D_Q = ]0, +\infty[$

1.3.  $Q(x) < 150$

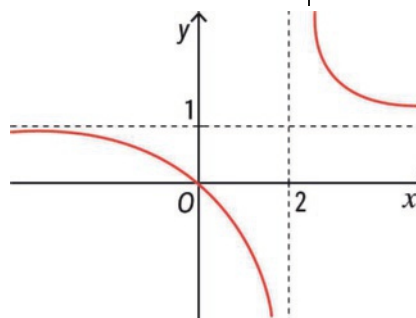


$$23 \text{ cm} \leq x \leq 35 \text{ cm}$$

2.  $g(x) = \frac{x}{x-2}$ ;  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$g(x) = 1 + \frac{2}{x-2}$$

C.A.	
$x+0$	$ x-2$
$-x+2$	1
	2



Afirmações verdadeiras: B, C e E.

3.1.  $f(x) = \frac{x-3}{2x-6} = \frac{x-3}{2(x-3)} = \frac{1}{2}$

$g(x) = \frac{x^2-x}{x^2-2x} = \frac{x(x-1)}{x(x-2)}$   
 $= \frac{x-1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$

$h(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$   
 $= \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$

**C.A.**

$x-1$	$ x-2$
$-x+2$	1
1	

**C.A.**

	1	-3	2
1		1	$\frac{-}{2}$
	1	-2	0

Função g. Assíntota vertical  $x = 2$ .

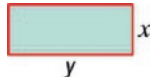
3.2.  $f(x) = \frac{1}{2} (x \neq 3)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{1}{2}$

Logo,  $f$  não tem assíntota vertical.

$h(x) = x-2 (x \neq 1)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -1$

Logo,  $h$  não tem assíntota vertical.

4.  $A = 10 \Leftrightarrow x \times y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{10}{x}$



$P = 2x + 2y = 2x + 2 \times \frac{10}{x} = 2x + \frac{20}{x} = \frac{2x^2 + 20}{x}$

Opção (C)

5.

$f(x) = \frac{2x-1}{3x^3-6x^2+9x}$

**C.A.**

$3x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow 3x(x^2 - 2x + 3) = 0$   
 $\Leftrightarrow 3x = 0 \vee x^2 - 2x + 3 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$   
 equação impossível

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3x^3 - 6x^2 + 9x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6.1.

$h(x) = \frac{x+12}{x+2}$

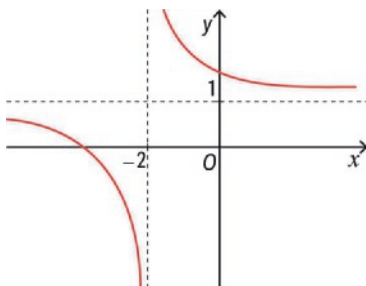
**C.A.**

$x+12 \quad |x+2$   
 $-x-2 \quad 1$   
 10  
 $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Assíntota vertical:  $x = -2$

Assíntota horizontal:  $y = 1$

6.2.



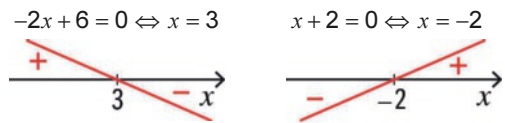
A função  $h$  é decrescente em  $]-\infty, -2[$  e em  $]-2, +\infty[$ .

6.3.  $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+12}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x+12 = 0 \wedge x+2 \neq 0$   
 $\Leftrightarrow x = -12 \wedge x \neq -2$

$x$	$-\infty$	-12		-2	$+\infty$
$h(x)$	+	0	-	N.D.	+

A função  $h$  é positiva em  $]-\infty, -12[ \cup ]-2, +\infty[$ .

6.4.  $h(x) > 3 \Leftrightarrow \frac{x+12}{x+2} > 3 \Leftrightarrow \frac{x+12}{x+2} - 3 > 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{x+12-3x-6}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{x+2} > 0$



$x$	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$-2x+6$	+	+	+	0	-
$x+2$	-	0	+	+	+
$\frac{-2x+6}{x+2}$	-	N.D.	+	0	-

$x \in ]-2, 3[$

7.  $C(x) = 100\,000 + 0,9x$

$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{100\,000 + 0,9x}{x}, x > 0$

$\bar{C}(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{100\,000 + 0,9x}{x} < 2$

$\Leftrightarrow \frac{100\,000 + 0,9x}{x} - 2 < 0$

$\Leftrightarrow \frac{100\,000 + 0,9x - 2x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{100\,000 - 1,1x}{x} < 0$

$100\,000 - 1,1x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{100\,000}{1,1} \quad x = 0$



$x$	0		$\frac{100\,000}{1,1}$	$+\infty$
$100\,000 - 1,1x$	+	+	0	-
$x$	0	+	+	+
$\frac{100\,000 - 1,1x}{x}$	N.D.	+	0	-

$x > \frac{100\,000}{1,1} \Leftrightarrow x > 90\,909,09$  (2 c.d.)

O número mínimo de unidades desse produto que a empresa deve produzir é 90 910.

8.1.  $p = 25$ ;  $C(25) = \frac{600 \times 25}{100 - 25} = 200$

O custo de despoluir 25% do rio é 200 milhões de euros.

8.2.

$$C(p) = \frac{600p}{100-p}$$

$$= -600 + \frac{60\,000}{-p+100}$$

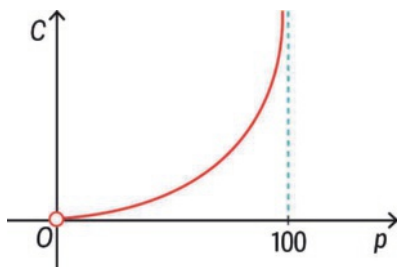
$$= -600 + \frac{-60\,000}{p-100}$$

**C.A.**

$$\frac{600p+0}{-600p+6000} \cdot \frac{-p+100}{-600}$$

$$p-100=0 \Leftrightarrow p=100$$

Assíntota vertical:  $p = 100$



$$\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p) = +\infty$$

Pode concluir-se que é praticamente impossível despoluir 100% do rio.

9.1.  $P(x, x)$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} = x \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - x^2 + x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 3x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0 \wedge x-1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(-x+3) = 0 \wedge (x \neq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee -x+3 = 0 \wedge (x \neq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee x = 3 \wedge (x \neq 1)$$

$P(3, 3)$

9.2.  $A = \frac{x \times \frac{2x}{x-1}}{2} = \frac{2x^2}{2(x-1)} = \frac{2x^2}{2x-2}$

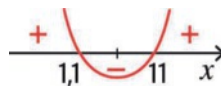
$$A < 12,1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{2x-2} < 12,1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{2x-2} - 12,1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 24,2x + 24,2}{2x-2} < 0$$

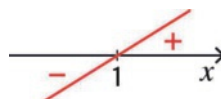
$$2x^2 - 24,2x + 24,2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12,1x + 12,1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12,1 \pm \sqrt{(-12,1)^2 - 4 \times 1 \times 12,1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12,1 \pm \sqrt{98,01}}{2} \Leftrightarrow x = 1,1 \vee x = 11$$



$$2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



$x$	1		1,1		11	$+\infty$
$2x^2 - 24,2x + 24,2$	+	+	0	-	0	+
$2x - 2$	0	+	+	+	+	+
$\frac{2x^2 - 24,2x + 24,2}{2x - 2}$	N.D.	+	0	-	0	+

$$x \in ]1,1; 11[$$

Pág. 75

#### Avaliação formativa 4

1.  $f(x) = -3 + \frac{b}{x-2}$

$$f(0) = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow -3 + \frac{b}{-2} = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow -6 - b = -7 \Leftrightarrow b = 1$$

$$f(x) = -3 + \frac{1}{x-2}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + \frac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+6+1}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+7}{x-2} = 0 \Leftrightarrow -3x+7 = 0 \wedge x-2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \wedge (x \neq 2); \quad S = ]-\infty, 2[ \cup \left] \frac{7}{3}, +\infty \right[$$

2.  $g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-x^2 - 6x - 10 = 0 \wedge x \leq -2) \vee$$

$$\vee \left( \frac{4x-1}{2x+4} = 0 \wedge x > -2 \right)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 10 = 0 \wedge x \leq -2) \vee$$

$$\vee (4x-1=0 \wedge 2x+4 \neq 0 \wedge x > -2)$$

$$\Leftrightarrow \left( x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} \wedge x \leq -2 \right) \vee$$

equação impossível em  $\mathbb{R}$

$$\vee \left( x = \frac{1}{4} \wedge x = -2 \wedge x > -2 \right); \text{ Zero de } g: \frac{1}{4}$$

$$I - b); \quad g(0) = \frac{4 \times 0 - 1}{2 \times 0 + 4} = -\frac{1}{4}$$

Ponto de interseção com o eixo  $Oy$ :  $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

II - a)

$$g(-2) = -(-2)^2 - 6 \times (-2) - 10 = -4 + 12 - 10 = -2$$

$$-x^2 - 6x - 10 = -(x^2 + 6x + 10) =$$

$$= -(x^2 + 6x + 9 - 9 + 10) = -(x^2 + 6x + 9) - 1 =$$

$$= -(x+3)^2 - 1$$

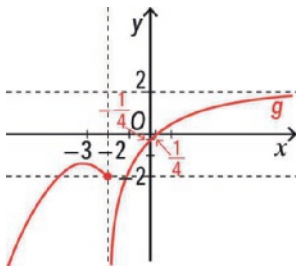
$V(-3, -1)$

$$\frac{4x-1}{2x+4} = 2 - \frac{9}{2x+4}$$

<b>C.A.</b>
$\frac{4x-1}{2x+4} = \frac{ 2x+4}{2}$
$\frac{-4x-8}{-9}$
$2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$

Assíntota vertical:  $x = -2$

Assíntota horizontal:  $y = 2$



III - b); IV - c)

Então, I - b); II - a); III - b); IV - c).

$$3.1. \quad T(0) = \frac{22 + 270 \times 0}{0 + 1} = 22$$

O forno encontrava-se a  $22^\circ\text{C}$ .

3.2.

$$T(x) = 270 + \frac{-248}{x+1}$$

<b>C.A.</b>
$\frac{270x+22}{270}$
$\frac{-270x-270}{-248}$
$\frac{ x+1}{270}$

Assíntota horizontal:  $y = 270$

Pode concluir-se que com o decorrer do tempo, a temperatura tende a estabilizar nos  $270^\circ\text{C}$ , provavelmente a temperatura previamente selecionada.

$$3.3. \quad T(1) = \frac{22 + 270 \times 1}{1 + 1} = 146^\circ\text{C}$$

$$T(4) = \frac{22 + 270 \times 4}{4 + 1} = 240,4^\circ\text{C}$$

$$T(4) - T(1) = 240,4^\circ\text{C} - 146^\circ\text{C} = 94,4^\circ\text{C}$$

$$3.4. \quad T(x) = 262 \Leftrightarrow \frac{22 + 270x}{x+1} = 262 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{22 + 270x}{x+1} - 262 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{22 + 270x - 262x - 262}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x - 240}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 8x - 240 = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 30 \wedge (x \neq -1)$$

Pode concluir-se que o forno atingiu a temperatura  $262^\circ\text{C}$  30 minutos após ter sido ligado.

## 5. Operações com funções

Pág. 76

### Tarefa 5

1. A função  $h$  representa a área do jardim não ocupada pelo lago.

$$2. \quad h(x) = f(x) - g(x) =$$

$$= 3x(4x^2 + 2) - 2x(2x + 1)$$

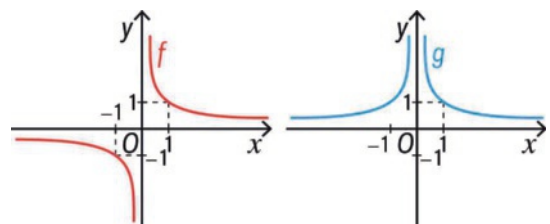
$$= 12x^3 + 6x - 4x^2 - 2x = 12x^3 - 4x^2 + 4x$$

$$62.1. \quad D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } \frac{1}{x} > 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } \frac{1}{x} < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Se  $x > 0$ ,  $g(x) = f(x)$ .

Se  $x < 0$ ,  $g(x) = -f(x)$ .



Então,  $f(x) \neq g(x)$  para  $x < 0$ .

62.2.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 \neq 0\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$D_f \neq D_g$ .

Logo,  $f$  e  $g$  não são iguais.

<b>C.A.</b>
$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2 \times 1}$
$\Leftrightarrow x = \frac{2-4}{2} \vee x = \frac{2+4}{2}$
$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

63.1.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  e  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) =$   
 $= \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} - 1 =$   
 $= \frac{2(x+1) + 3(x-1) - (x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \frac{2x+2+3x-3-x^2+1}{x^2-1} =$

$= \frac{5x-x^2}{x^2-1}$

$f+g: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{5x-x^2}{x^2-1}$

63.2.  $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) =$

$= \frac{2}{x-1} - \left(\frac{3}{x+1} - 1\right) =$

$= \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} + 1 =$

$= \frac{2(x-1) - 3(x-1) + (x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$= \frac{2x+2-3x+3+x^2-1}{x^2-1} =$

$= \frac{x^2-x+4}{x^2-1}$

$f-g: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x^2-x+4}{x^2-1}$

63.3.  $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) =$

$= \frac{2}{x-1} \times \left(\frac{3}{x+1} - 1\right) = \frac{2}{x-1} \times \frac{3-x-1}{x+1} =$

$= \frac{2(2-x)}{(x-1)(x+1)} = \frac{4-2x}{x^2-1}$

$f \times g: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{4-2x}{x^2-1}$

64.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$  e  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

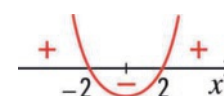
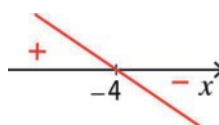
$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{6}{6-3x} - \frac{4}{x^2-4}$   
 $= \frac{6}{3(x-2)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{x-2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)}$   
 $= \frac{-2x-4-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2x-8}{x^2-4}$

Zero: -4

$y = -2x - 8$

$y = x^2 - 4$



x	$-\infty$	-4	-2		2	$+\infty$	
$-2x-8$	+	0	-	-	-	-	
$x^2-4$	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{-2x-8}{x^2-4}$	+	0	-	N.D.	+	N.D.	-

$(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$

$(f-g)(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-4, -2[ \cup ]2, +\infty[$

$(f-g)(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -4[ \cup ]-2, 2[$

65.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  e  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$D_{f \times g} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{x}{x+2} \times \frac{3-x}{x+1}$

$= \frac{x(3-x)}{(x+2)(x+1)} = \frac{3x-x^2}{x^2+x+2x+2} = \frac{3x-x^2}{x^2+3x+2}$

$(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-x^2}{x^2+3x+2} = 0$

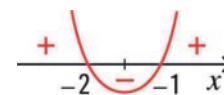
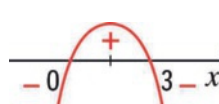
$\Leftrightarrow 3x-x^2 = 0 \wedge x \in D_{f \times g}$

$\Leftrightarrow x(3-x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

Zeros: 0 e 3

$y = 3x - x^2$

$y = x^2 + 3x + 2$



x	$-\infty$	-2	-1		0	3	$+\infty$		
$3x-x^2$	-	-	-	-	0	+	0	-	
$x^2+3x+2$	+	0	-	0	+	+	+	+	
$\frac{3x-x^2}{x^2+3x+2}$	-	N.D.	+	N.D.	-	0	+	0	-

$$(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

$$(f \times g)(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup ]-1, 0[ \cup ]3, +\infty[$$

$$(f \times g)(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-2, -1[ \cup ]0, 3[$$

66.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$  e  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \neq -4\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 3\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4-x}{x-3} = \frac{(4-x)(x+4)}{x(x-3)} = \frac{16-x^2}{x^2-3x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{16-x^2}{x^2-3x} = 0 \wedge x \in D_{\frac{f}{g}}$$

$$\Leftrightarrow 16-x^2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 3\}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 3\} \Leftrightarrow x = 4$$

Zero: 4

x	$-\infty$	-4		0	3		4	$+\infty$
$16-x^2$	-	0	+	+	+	+	0	-
$x^2-3x$	+	+	+	0	-	0	+	+
$\frac{16-x^2}{x^2-3x}$	-	N.D.	+	N.D.	-	N.D.	+	-

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -4[ \cup ]0, 3[ \cup ]4, +\infty[$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-4, 0[ \cup ]3, 4[$$

Pág. 79

67.1. a)  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$  e  $D_g = \mathbb{R}$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
f(x)	$-x-1$	0	$x+1$	4	$x+1$
g(x)	$-x$	1	$-x$	-1	$x-4$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{se } x \leq -1 \\ 1 & \text{se } -1 < x < 3 \\ 2x-3 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f+g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -2x-1 & \text{se } x \leq -1 \\ 1 & \text{se } -1 < x < 3 \\ 2x-3 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

b)  $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

$$(f-g)(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -1 \\ 2x+1 & \text{se } -1 < x < 3 \\ 5 & \text{se } x \geq 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{C.A.} \\ -x-1-(-x) = -1 \\ x+1-(-x) = 2x+1 \\ x+1-(-x-4) = 5 \end{array}$$

$$f-g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -1 \\ 2x+1 & \text{se } -1 < x < 3 \\ 5 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

c)  $D_{fg} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

$$(fg)(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{se } x \leq -1 \\ -x^2-x & \text{se } -1 < x < 3 \\ x^2-3x-4 & \text{se } x \geq 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{C.A.} \\ (-x-1)(-x) = \\ = x^2+x \\ (x+1)(x-4) = \\ = x^2-4x+x-4 \\ = x^2-3x-4 \end{array}$$

$$fg: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2+x & \text{se } x \leq -1 \\ -x^2-x & \text{se } -1 < x < 3 \\ x^2-3x-4 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

d)  $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$

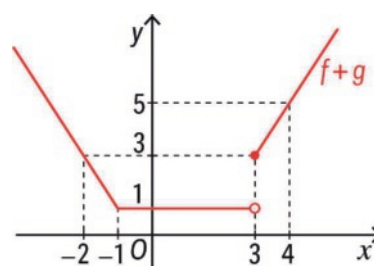
$$= \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 4 \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ -\frac{x+1}{x} & \text{se } -1 < x < 3 \wedge x \neq 0 \\ \frac{x+1}{x-4} & \text{se } x \geq 3 \wedge x \neq 4 \end{cases}$$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{0, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ -\frac{x+1}{x} & \text{se } -1 < x < 3 \wedge x \neq 0 \\ \frac{x+1}{x-4} & \text{se } x \geq 3 \wedge x \neq 4 \end{cases}$$

67.2.



C.A.	
x	y = -2x-1
-1	1
-2	3
C.A.	
x	y = 2x-3
3	3
4	5

Pág. 80

68. Seja  $v$  a velocidade do vento em km/h.  
Velocidade do cruzeiro com a direção e a favor do vento:  $(300+v)$  km/h

Velocidade do cruzeiro com a direção e contra o vento:  $(300-v)$  km/h

Seja  $d_f$  e  $d_c$  as distâncias percorridas a favor e contra o vento, respetivamente, e seja  $t_f$  e  $t_c$  os tempos gastos a percorrer as distâncias a favor e contra o vento, respetivamente.

$$d_f = (300+v) \times t_f \Leftrightarrow 600 = (300+v) \times t_f \Leftrightarrow t_f = \frac{600}{300+v}$$

$$d_c = (300-v) \times t_c \Leftrightarrow 500 = (300-v) \times t_c \Leftrightarrow t_c = \frac{500}{300-v}$$

$$t_f = t_c \Leftrightarrow \frac{600}{300+v} = \frac{500}{300-v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{600}{300+v} - \frac{500}{300-v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{600(300-v) - 500(300+v)}{(300+v)(300-v)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{600 \times 300 - 600v - 500 \times 300 - 500v}{(300+v)(300-v)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{30\,000 - 1100v}{(300+v)(300-v)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 30\,000 - 1100v = 0 \wedge (300+v)(300-v) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{30\,000}{1100} \wedge v \neq -300 \wedge v \neq 300; v \approx 27,3$$

A velocidade do vento é de, aproximadamente, 27,3 km/h.

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 14x + 12 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq 2$$

Uma das dimensões da base  $(x)$ , varia entre 1,5 dm e 2 dm inclusive, e a outra varia, em função desta, da forma  $y = \frac{3}{x}$ .

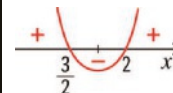
C.A.

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 2$$



70.1.  $\overline{NR} = 1-x$

$[NPQ]$  e  $[NTR]$  são triângulos semelhantes.

Então,  $\frac{\overline{RT}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{NR}}{\overline{NQ}} \Leftrightarrow \frac{\overline{RT}}{1} = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \overline{RT} = \frac{1-x}{x}$

$$A(x) = \frac{\overline{NR} \times \overline{RT}}{2} = \frac{(1-x) \times \frac{1-x}{x}}{2} = \frac{(1-x)^2}{2x} = \frac{(x-1)^2}{2x}$$

70.2.  $A_{[PQN]} = \frac{\overline{PQ} \times \overline{NQ}}{2} = \frac{1 \times x}{2} = \frac{x}{2}$

$$A(x) < A_{[PQN]} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x} < \frac{x}{2} \wedge 0 < x < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{2x} - \frac{x}{2} < 0 \wedge 0 < x < 1$$

Como  $x > 0$ , o sinal da fração depende apenas do sinal do numerador.

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2}{2x} < 0 \wedge 0 < x < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x + 1}{2x} < 0 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow -2x + 1 < 0 \wedge 0 < x < 1$$

$$\Leftrightarrow -2x < -1 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \wedge 0 < x < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

A área do triângulo  $[NTR]$  é menor do que a área de triângulo  $[PQN]$  para valores de  $x$  compreendidos entre 0,5 dm e 1 dm.

Pág. 81

69.1. Sejam  $x$  e  $y$  as dimensões da base do paralelepípedo. Volume =  $6 \text{ dm}^3$

Então,  $x \times y \times 2 = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{2x} \Leftrightarrow y = \frac{3}{x}$

$$A(x) = 2x \times y + 2 \times 2y + 2 \times 2x$$

$$= 2x \times \frac{3}{x} + 2 \times 2 \times \frac{3}{x} + 4x$$

$$= \frac{6x + 12 + 4x^2}{x} = \frac{4x^2 + 6x + 12}{x}$$

69.2.  $A(x) \leq 20 \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 6x + 12}{x} \leq 20$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 + 6x + 12}{x} - 20 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 + 6x + 12 - 20x}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 14x + 12}{x} \leq 0$$

Como  $x > 0$ , o sinal da fração depende apenas do sinal do numerador.

Pág. 82

71.  $B(4, f(4))$

$$f(4) = \sqrt{4^3 + 4} - 4 = \sqrt{68} - 4$$

$$\overline{BC} = 4$$

$$A(x, f(x))$$

Seja  $h$  a altura do triângulo  $[ABC]$ .

$$h = f(4) - f(x) = \sqrt{68} - 4 - (\sqrt{x^3 + x} - 4)$$

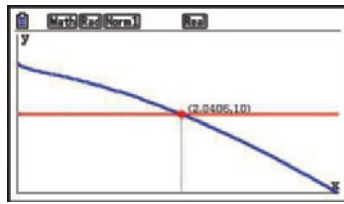
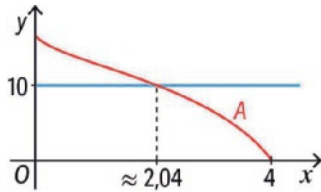
$$= \sqrt{68} - 4 - \sqrt{x^3 + x} + 4 = \sqrt{68} - \sqrt{x^3 + x}$$

Seja  $A(x)$  a expressão que representa a área do triângulo  $[ABC]$  em função da abscissa ( $x$ ) do ponto  $A$ .

$$A(x) = \frac{\overline{BC} \times h}{2} = \frac{4 \times (\sqrt{68} - \sqrt{x^3 + x})}{2} = 2(\sqrt{68} - \sqrt{x^3 + x})$$

Equação que traduz o problema:

$$A(x) = 10 \Leftrightarrow 2(\sqrt{68} - \sqrt{x^3 + x}) = 10 \wedge 0 \leq x \leq 4$$



Para que a área do triângulo  $[ABC]$  seja 10 u. a., a abscissa de  $A$  terá de ser, aproximadamente, igual a 2,04.

Pág. 83

72. Seja  $x$  a abscissa do ponto  $B$ ,  $x > 0$ .

$$B(x, f(x)); A(x_A, f(x_A))$$

$$\overline{AB} = 3 \Leftrightarrow x - x_A = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_A = x - 3$$

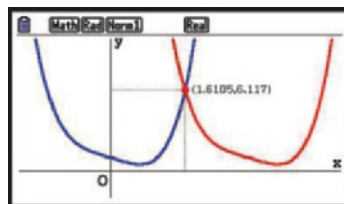
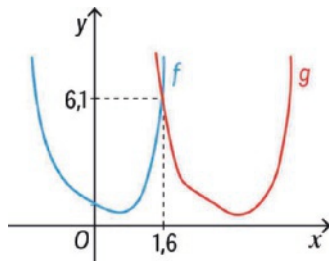
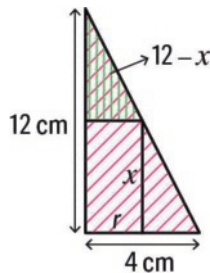
$$A(x - 3, f(x - 3))$$

$$f(x) = f(x - 3) = k$$

$$f(x) = f(x - 3)$$

Pretende-se resolver graficamente a equação

$$f(x) = g(x), \text{ sendo } g(x) = f(x - 3).$$



Para que  $\overline{AB} = 3$ , a abscissa de  $A$  é, aproximadamente, 1,6 e  $k = f(1,6) \approx 6,1$ .

Pág. 84

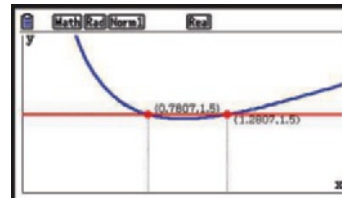
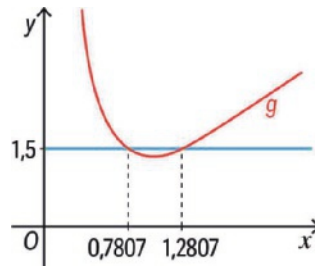
73.  $P$  é um ponto do gráfico de  $f$ .

$$\text{Então, } P(x, f(x)), \text{ ou seja, } P\left(x, \frac{1}{x}\right).$$

$$\overline{OP} = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{1}{x}-0\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\overline{OP} < 1,5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} < 1,5$$

Seja  $g$  a função definida por  $g(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ .



$a \approx 0,78$  e  $b \approx 1,29$

Pág. 85

74.1. Seja  $r$  o raio da base do cilindro. Na figura apresenta-se parte de um corte feito no cone e no cilindro que contém a altura do cone. Os triângulos representados a verde e a rosa são semelhantes.

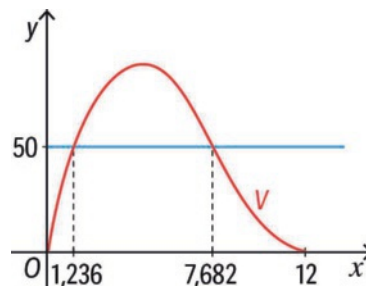
$$\text{Então, } \frac{r}{4} = \frac{12-x}{12} \Leftrightarrow r = 4\left(1 - \frac{x}{12}\right) = 4 - \frac{x}{3}.$$

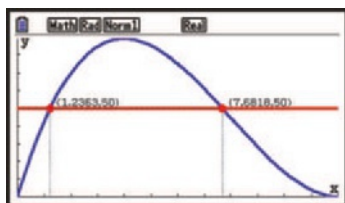
Seja  $A_b$  a área da base do cilindro.

$$A_b = \pi r^2 = \pi \left(4 - \frac{x}{3}\right)^2 = \pi \left(16 - \frac{8}{3}x + \frac{x^2}{9}\right)$$

$$\begin{aligned} V(x) &= A_b \times x = \pi \left(16 - \frac{8}{3}x + \frac{x^2}{9}\right) \times x = \\ &= \pi \left(\frac{x^3}{9} - \frac{8}{3}x^2 + 16x\right) \end{aligned}$$

74.2.  $V(x) = 50$





Se  $x \approx 1,236$ , então  $r = 4 - \frac{1,236}{3} \approx 3,59$

Se  $x \approx 7,682$ , então  $r = 4 - \frac{7,682}{3} \approx 1,44$

Então,  $x \approx 1,24$  cm e  $r \approx 3,59$  cm

ou  $x \approx 7,68$  cm e  $r \approx 1,44$  cm

Pág. 86

**Tarefas de consolidação 5**

1.  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1-x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : -3x^3 + x^2 + 2x - 1 \neq 0\}$

Seja  $P(x) = -3x^3 + x^2 + 2x - 1$

$P(1) = -3 \times 1^3 + 1^2 + 2 \times 1 - 1 = -3 + 1 + 2 - 1 = -1 \neq 0$

1 não é um zero de  $P(x)$ . Logo,  $D_f \neq D_g$ .

Ou seja,  $f \neq g$ .

2.1.  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+2}$

$= \frac{x(x+2) + x-1}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x + x - 1}{x^2 - x + 2x - 2} = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + x - 2}$

$f+g: \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + x - 2}$

2.2.  $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+2}$

$= \frac{x(x+2) - (x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x - x + 1}{x^2 - x + 2x - 2} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$

$f-g: \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$

2.3.  $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{x}{x-1} \times \frac{1}{x+2}$

$= \frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{x}{x^2 + x - 2}$

$f \times g: \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x}{x^2 + x - 2}$

2.4.  $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x+2}} = \frac{x(x+2)}{x-1} = \frac{x^2 + 2x}{x-1}$

$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x^2 + 2x}{x-1}$

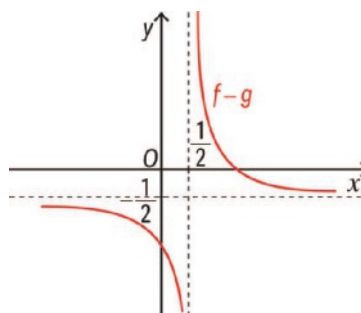
3.1. a)  $D_f = D_g = \{x \in \mathbb{R} : 4x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b)  $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$   
 $= \frac{2x+3}{4x-2} - \frac{4x}{4x-2} = \frac{2x+3-4x}{4x-2}$   
 $= \frac{-2x+3}{4x-2} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{4x-2}$  C.A.  
 $\frac{-2x+3}{4x-2} = \frac{2x-1}{2} - \frac{1}{2}$

Assintota vertical:  $x = \frac{1}{2}$

Assintota horizontal:  $y = -\frac{1}{2}$



c)  $D'_{f-g} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

d)  $f-g$  é decrescente em  $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$  e em  $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .

e)  $(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+3}{4x-2} = 0$

$\Leftrightarrow -2x+3 = 0 \wedge 4x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \wedge x \neq \frac{1}{2}$

$f-g$  é positiva em  $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ .

3.2. a)

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

**C.A.**

 $f(x) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

b)  $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{4x-2}{2x+3} = \frac{4x(4x-2)}{(4x-2)(2x+3)}$

$$= \frac{4x}{2x+3} = 2 + \frac{-6}{2x+3}$$

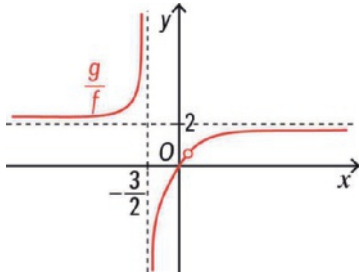
**C.A.**

 $\frac{4x}{-4x-6} \quad \frac{|2x+3|}{2}$   
 $-6$

$$= 2 + \frac{-3}{x + \frac{3}{2}}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

Assíntota vertical:  $x = -\frac{3}{2}$

Assíntota horizontal:  $y = 2$



c)

$$D'_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

**C.A.**

 $\frac{4 \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

d)  $\frac{g}{f}$  é crescente em  $]-\infty, -\frac{3}{2}[$ , em  $]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[$  e em  $]\frac{1}{2}, +\infty[$ .

4.1. a)  $D_h = D_i \cap D_j = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b)  $i(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -x+1 & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

$$(i \times j)(x) = i(x) \times j(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{-x+1}{x+1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

**C.A.**

$$\frac{x-1}{x+1} \quad \frac{|x+1|}{1}$$

$$\frac{-x+1}{-2}$$

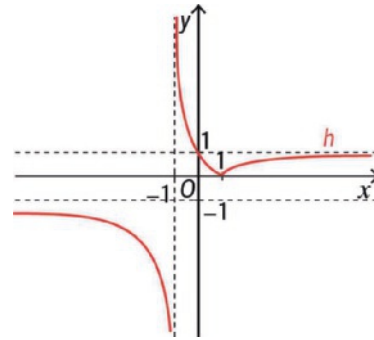
$$\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

$$-\frac{x+1}{x+1} = -\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) = -1 + \frac{2}{x+1}$$

Assíntota vertical:  $x = -1$

Assíntotas horizontais:

$y = 1$  se  $x \geq 1$  e  $y = -1$  se  $x < 1$



$$D'_h = ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$$

4.2.  $h$  é crescente em  $[1, +\infty[$  e é decrescente em  $]-\infty, -1[$  e em  $]-1, 1[$ .

Pág. 87

5.1.  $V_{\text{cilindro}} = A_b \times h$

$$V_{\text{cilindro}} = 2V_{\text{cone}} + A_b \times x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_b \times a = 2 \times \frac{1}{3} A_b \times a + A_b \times x$$

$$\Leftrightarrow A_b \times x = A_b \times a - \frac{2}{3} A_b \times a$$

$$\Leftrightarrow A_b \times x = \frac{1}{3} A_b \times a \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$$

5.2. a)  $h(0) = \frac{5 \times 0 - 16}{0 - 10} = \frac{-16}{-10} = 1,6 \text{ m}$

$h(0)$  representa a altura da água que restava no depósito antes de começar a ser retirada.

Ou seja,  $h(0) = x$ .

$$x = \frac{a}{3} \Leftrightarrow a = 3x \Leftrightarrow a = 3 \times 1,6 = 4,8 \text{ m}$$

A altura do reservatório cilíndrico é 4,8 m.

b)  $h(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{5t-16}{t-10} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5t - 16 = 0 \wedge t - 10 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5t = 16 \wedge t \neq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 3,2 \text{ horas}$$

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ h} & \text{---} 60 \text{ min} \\ 0,2 \text{ h} & \text{---} x \text{ min} \end{array} \quad x = \frac{0,2 \times 60}{1} = 12 \text{ min}$$

O reservatório demorou 3 h e 12 min a esvaziar.

c)  $h(t) > 1 \Leftrightarrow \frac{5t-16}{t-10} > 1 \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow$

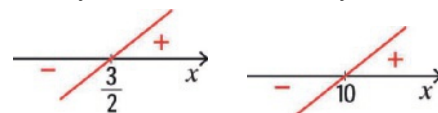
$$\Leftrightarrow \frac{5t-16}{t-10} - 1 > 0 \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5t-16-t+10}{t-10} > 0 \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4t-6}{t-10} > 0 \wedge t \geq 0$$

$$y = 4x - 6$$

$$y = x - 10$$



$t$	0		1,5		3,2
$4t-6$	-	-	0	+	+
$t-10$	-	-	-	-	-
$\frac{4t-6}{t-10}$	+	+	0	-	-

$$h(t) > 1 \Leftrightarrow t \in [0; 1,5].$$

Na primeira hora e meia, após o início do esvaziamento da restante água do depósito cilíndrico, a altura da água foi superior a 1 m.

Pág. 89

**Avaliação formativa 5**

1.1.  $(f+g)(x) = 2 - \frac{3}{x} \Leftrightarrow f(x) + g(x) = 2 - \frac{3}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(x) = 2 - \frac{3}{x} - \frac{x-7}{x} \Leftrightarrow g(x) = \frac{2x-3-x+7}{x}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{x+4}{x}; \quad g(2) = \frac{2+4}{2} = 3$$

1.2.  $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x} = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -4$

-4 é o zero de g.

2.1.  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow \frac{2x-4}{2x+1} = \frac{2x}{2x+1}$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{2x}{2x+1} = \frac{2x}{2x-4} = \frac{x}{x-2}$$

$g: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x}{x-2}$ , por exemplo.

2.2.  $D_h = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$   
 $= \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cap \mathbb{R} \setminus \{2\} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0, 2\right\}$

3.  $B(x, f(x))$ , ou seja,  $B(x, -x^2 + 25)$   
 $\overline{OA} = x$ ;  $\overline{AB} = f(x) = -x^2 + 25$   
 $A_{[OABC]} = \overline{OA} \times \overline{AB} = x(-x^2 + 25) = 25x - x^3$

I - c)

O ponto B pertence ao 1.º quadrante. Então,  $x > 0$ .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$$

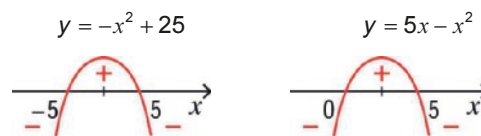
$$D_A = ]0, 5[$$

II - b)

$$\begin{aligned} \frac{D_f}{g} &= D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : 5x - x^2 \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0, 5\} \end{aligned}$$

**C.A.**  
 $5x - x^2 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x(5-x) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$

III - c)  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 25}{5x - x^2} > 0$



$x$	$-\infty$	-5	0	5	$+\infty$		
$-x^2 + 25$	-	0	+	+	0	-	
$5x - x^2$	-	-	-	0	+	0	-
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	+	0	-	N.D.	+	N.D.	+

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -5[ \cup ]0, 5[ \cup ]5, +\infty[$$

IV - a) Então, I - c); II - b); III - c); IV - a).

**6. Taxa de variação. Derivada**

Pág. 90

**Tarefa 6**

1. Ponto final - Ponto inicial = 682,6 - 679,8 = 2,8 km

Tempo final - Tempo inicial = 48 - 45 = 3 min

A Maria percorreu 2,8 km em 3 minutos.

$$\begin{array}{l} 2,8 \text{ km} \quad \text{---} \quad 3 \text{ min} \\ x \text{ km} \quad \quad \text{---} \quad 60 \text{ min} \end{array} \quad x = \frac{2,8 \times 60}{3} = 56 \text{ km}$$

Sim. A Maria circulou a uma velocidade média de 56 km/h.

1.2. Para não exceder o limite de velocidade, a velocidade máxima é 70 km/h. Então,

$$\begin{array}{l} 70 \text{ km} \quad \text{---} \quad 60 \text{ min} \\ 2,8 \text{ km} \quad \text{---} \quad x \text{ min} \end{array} \quad x = \frac{2,8 \times 60}{70} = 2,4 \text{ min}$$

$$0,4 \text{ min} \times 60 \text{ s} = 24 \text{ s}$$

A duração mínima é 2 minutos e 24 segundos.

Pág. 91

75.1. Variação de f entre -2 e 6 :

$$f(6) - f(2) = 2 - 5 = -3$$

75.2. a)  $t.m.v._{(f,-2,4)} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{5 - 5}{6} = 0$

b)  $t.m.v._{(f,4,6)} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{2 - 5}{2} = -\frac{3}{2}$

75.3.  $t.m.v._{(f,4,8)} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{f(8) - 5}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(8) - 5 = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(8) = 5 - 2 \Leftrightarrow f(8) = 3$$

76.1.  $g(x) = kx^3 + x, k \neq 0; k = ?$

$$\begin{aligned} \text{t.m.v.}_{(g,-1)} = 5 &\Leftrightarrow \frac{g(1) - g(-1)}{1 - (-1)} = 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{k+1 - (-k-1)}{2} = 5 \Leftrightarrow \frac{k+1+k+1}{2} = 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{2k+2}{2} = 5 \Leftrightarrow k+1 = 5 \Leftrightarrow k = 4 \end{aligned}$$

76.2.  $k = 2; g(x) = 2x^3 + x$

a)  $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x = 0$

$$\Leftrightarrow x(2x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{2x^2 + 1 = 0}_{\text{Eq. impossível em } \mathbb{R}}$$

Zero de  $g$ : 0

b)  $\text{t.m.v.}_{(g,a,3a)} = \frac{g(3a) - g(a)}{3a - a}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \times (3a)^3 + 3a - (2a^3 + a)}{2a} \\ &= \frac{2 \times 27a^3 + 3a - 2a^3 - a}{2a} = \frac{54a^3 - 2a^3 + 2a}{2a} \\ &= \frac{52a^3 + 2a}{2a} = 26a^2 + 1 \text{ c.q.p.} \end{aligned}$$

77.1.  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

77.2.

$$g(x) = \frac{2x+3}{x+2} = 2 + \frac{-1}{x+2}$$

**C.A.**

$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & |x+2 \\ \hline -2x-4 & 2 \\ \hline & -1 \end{array}$$

Assíntota vertical:  $x = -2$

Assíntota horizontal:  $y = 2$

77.3.

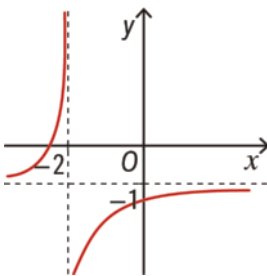
$$\text{t.m.v.}_{(g,-1)} = \frac{g(1) - g(-1)}{1 - (-1)}$$

**C.A.**

$$g(1) = \frac{2 \times 1 + 3}{1 + 2} = \frac{5}{3}$$

$$g(-1) = \frac{2 \times (-1) + 3}{-1 + 2} = 1$$

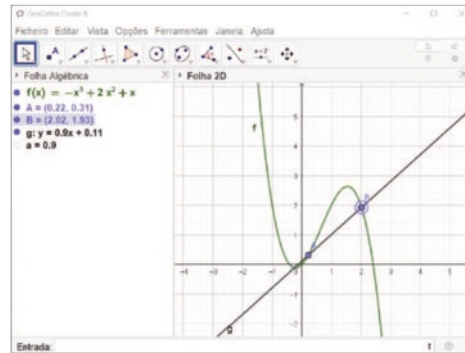
77.4.



a) A afirmação é verdadeira. A função  $g$  é estritamente crescente em qualquer intervalo contido no seu domínio.

b) A afirmação é falsa porque as funções do tipo  $h(x) = a + \frac{b}{x-c}$ ,  $a, c \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ou são estritamente crescentes ( $b < 0$ ) ou são estritamente decrescentes ( $b > 0$ ) em qualquer intervalo contido no seu domínio. Se a taxa média de variação num intervalo contido no seu domínio é negativa, então a função é estritamente decrescente em qualquer outro intervalo contido no seu domínio.

Tarefa 7



O declive da reta secante ao gráfico de  $f$  nos pontos  $A$  e  $B$  é igual ao valor da taxa média de variação da função entre  $a$  e  $b$ .

78.

$$f(x) = kx^2 + 1$$

**C.A.**

$$f(-2) = 4k + 1$$

$$f(1) = k + 1$$

$$A(-2, f(-2)) = (-2, 4k + 1)$$

$$B(1, f(1)) = (1, k + 1)$$

$y = -x$  é a bissetriz dos quadrantes pares.

78.1.  $m_{AB} = -1$ . Logo,  $\text{t.m.v.}_{(f,-2,1)} = -1$ .

78.2.  $\text{t.m.v.}_{(f,-2,1)} = -1 \Leftrightarrow \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1 - (4k+1)}{3} = -1 \Leftrightarrow -3k = -3 \Leftrightarrow k = 1$$

**Tarefa 8**

1.  $f(t) = t^2 - 3t + 4$ ;  $f(7) = 7^2 - 3 \times 7 + 4 = 32$  m  
A distância percorrida pelo ciclista ao fim de 7 segundos foi 32 metros.

2.

$$h = 0,1$$

$$\frac{f(7+0,1) - f(7)}{0,1} = \frac{f(7,1) - f(7)}{0,1} = \frac{33,11 - 32}{0,1} = 11,1$$

$$h = 0,01$$

$$\frac{f(7+0,01) - f(7)}{0,01} = \frac{f(7,01) - f(7)}{0,01} = \frac{32,1101 - 32}{0,01} = 11,01$$

$$h = 0,001$$

$$\frac{f(7+0,001) - f(7)}{0,001} = \frac{f(7,001) - f(7)}{0,001} = \frac{32,011001 - 32}{0,001} = 11,001$$

$$h = 0,0001$$

$$\frac{f(7+0,0001) - f(7)}{0,0001} = \frac{f(7,0001) - f(7)}{0,0001} = \frac{32,00110001 - 32}{0,0001} = 11,0001$$

$h$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{f(7+h) - f(7)}{h}$	11,1	11,01	11,001	11,0001

3. A velocidade estimada é 11 m/s.

**C.A.**

$$\begin{aligned} f(7) &= 7^2 - 3 \times 7 + 4 = 32 \\ f(7,1) &= (7,1)^2 - 3 \times 7,1 + 4 = 33,11 \end{aligned}$$

**C.A.**

$$\begin{aligned} f(7,01) &= (7,01)^2 - 3 \times 7,01 + 4 = 32,1101 \end{aligned}$$

**C.A.**

$$\begin{aligned} f(7,001) &= (7,001)^2 - 3 \times 7,001 + 4 = 32,011001 \end{aligned}$$

**C.A.**

$$\begin{aligned} f(7,0001) &= (7,0001)^2 - 3 \times 7,0001 + 4 = 32,00110001 \end{aligned}$$

- 79.1. Cálculo da taxa média de variação de  $f$  entre 0 e  $0+h$ :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{2h^2 + 1 - 1}{h} = \frac{2h^2}{h} = 2h$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} (2h) = 0 \ (\in \mathbb{R})$$

$f$  é derivável em  $x = 0$  e  $f'(0) = 0$ .

- 79.2. Cálculo da taxa média de variação de  $f$  entre  $-1$  e  $-1+h$ :

$$\begin{aligned} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{2(-1+h)^2 + 1 - [2(-1)^2 + 1]}{h} \\ &= \frac{2(1-2h+h^2) + 1 - 3}{h} = \frac{2-4h+2h^2-2}{h} = \frac{h(-4+2h)}{h} = -4+2h \end{aligned}$$

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} (-4+2h) = -4 \ (\in \mathbb{R})$$

$f$  é derivável em  $x = -1$  e  $f'(-1) = -4$ .

- 79.3. Cálculo da taxa média de variação de  $f$  entre 2 e  $2+h$ :

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{2(2+h)^2 + 1 - (2 \times 2^2 + 1)}{h} \\ &= \frac{2(4+4h+h^2) + 1 - 9}{h} = \frac{8+8h+2h^2-8}{h} = \frac{8h+2h^2}{h} = \frac{h(8+2h)}{h} = 8+2h \end{aligned}$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (8+2h) = 8 \ (\in \mathbb{R})$$

$f$  é derivável em  $x = 2$  e  $f'(2) = 8$ .

80.  $f(x) = -2x + 1$ ;  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$$g(x) = -x^2 + 3x$$
;  $g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$

80.1.  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h + 1 - (-2 \times 0 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2) = -2$

$$f'(0) = -2$$

80.2.  $f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(-3+h) + 1 - [-2 \times (-3) + 1]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 - 2h + 1 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2) = -2 \end{aligned}$$

$$f'(-3) = -2$$

80.3.  $g'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h)^2 + 3(1+h) - (-1^2 + 3 \times 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+2h+h^2) + 3+3h-2}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 - 2h - h^2 + 1 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 - h) = 1$$

$$g'(1) = 1$$

**80.4.**  $g'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(-2+h)^2 + 3(-2+h) - [ -(-2)^2 + 3 \times (-2) ]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(4 - 4h + h^2) - 6 + 3h - (-4 - 6)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 + 4h - h^2 - 6 + 3h + 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(7 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (7 - h) = 7$$

$$g'(-2) = 7$$

**81.1.**  $h'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{h(x) - h(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{-2}}{x + 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{x(2)} + \frac{1}{2(x)}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{2+x}{2x}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{2x(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

$$h'(-2) = -\frac{1}{4}$$

**81.2.**  $h'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{1(x)}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x}{x(x-1)}}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} = -1$$

$$h'(1) = -1$$

**81.3.**  $h'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x(2)} - \frac{1}{2(x)}}{x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{2x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{2x(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

$$h'(2) = -\frac{1}{4}$$

**2.**  $m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - 2}{h}$  corresponde à derivada de  $f$  no ponto de abcissa  $-2$ .

Pág. 100

**82.1.**  $f(x) = -2x^2 + 8x$

$$f(1) = -2 \times 1^2 + 8 \times 1 = 6; \quad f(2) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 = 8$$

**82.2.**  $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(1+h)^2 + 8(1+h) - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(1+2h+h^2) + 8 + 8h - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 - 4h - 2h^2 + 8 + 8h - 6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4 - 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 - 2h) = 4$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + 8x - 8}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(-2x+4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (-2x+4) = 0$$

**C.A.**

2	-2	8	-8
	-2	4	0

$-2x + 4$

$$f'(1) = 4 \text{ e } f'(2) = 0$$

**82.3.**

**a)**  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$\Leftrightarrow y = 4(x-1) + 6 \Leftrightarrow y = 4x - 4 + 6 \Leftrightarrow y = 4x + 2$$

**b)**  $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$$\Leftrightarrow y = 0(x-2) + 8 \Leftrightarrow y = 8$$

**82.4.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x = 0$

$$\Leftrightarrow -2x(x-4) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \vee x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

A reta  $t$  é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $A(4, 0)$ .

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(4+h)^2 + 8(4+h) - (-2 \times 4^2 + 8 \times 4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(16 + 8h + h^2) + 32 + 8h - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-32 - 16h - 2h^2 + 32 + 8h}{h}$$

Pág. 99

**Tarefa 9**

**1.**  $\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{f(-2+h) - 2}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8h - 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-8 - 2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-8 - 2h) = -8$$

$$m_t = f'(4) = -8; A(4, 0)$$

$$y = mx + b \Leftrightarrow 0 = -8 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 32$$

$$y = -8x + 32$$

$$t: y = -8x + 32$$

Pág. 101

83.  $f(x) = -2(x-3)^2 + 2$

$$f'(0) = 12$$

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\Leftrightarrow y = 12x - 16$$

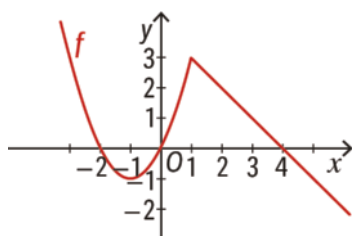
C.A.

$$f(0) = -2(0-3)^2 + 2$$

$$= -2 \times 9 + 2$$

$$= -16$$

84.1.



Em  $x = 1$  o gráfico de  $f$  apresenta um ponto "anguloso", pelo que não é possível traçar a reta tangente ao gráfico de  $f$  nesse ponto.

84.2.  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1}$

Para  $x \geq 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x + 4 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1) = -1$$

Para  $x < 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+3) = 4$$

C.A.

	1	2	-3
1		1	3
	1	3	0

$x+3$

Como os limites laterais são diferentes, não existe  $f'(1)$ .

Pág. 102

Tarefas de consolidação 6

1.1.  $[3, 10]$  e  $[12, 15]$

1.2.  $t.m.v._{(t,8,10)} = \frac{t(10) - t(8)}{10 - 8} = \frac{24 - 21}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

O crescimento médio da temperatura no intervalo de tempo  $[8, 10]$  é  $1,5 \text{ }^\circ\text{C/h}$ .

1.3.  $[0, 3]$ ;  $[15, 20]$  e  $[22, 24]$

1.4. A afirmação é verdadeira. Se a temperatura diminuiu nesses intervalos, a função  $t$  é decrescente nesses intervalos, logo, a taxa média de variação de  $t$  é negativa.

1.5.  $t.m.v._{(t,10,12)} = \frac{t(12) - t(10)}{12 - 10} = \frac{24 - 24}{2} = 0$

$$t.m.v._{(t,20,22)} = \frac{t(22) - t(20)}{22 - 20} = \frac{22 - 22}{2} = 0$$

1.6. Por exemplo, entre as 8 h e as 24 h, a taxa média de variação é zero e, no entanto, a função aí não é constante.

2.1.  $h(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 10t = 0 \Leftrightarrow t(-5t + 10) = 0$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2$$

Decorreram 2 segundos.

2.2. Abcissa do vértice da parábola:  $x_v = \frac{0 + 2}{2} = 1$

Ordenada do vértice da parábola:

$$h(1) = -5 \times 1^2 + 10 \times 1 = 5$$

A altura máxima que a bola atingiu é 5 metros.

2.3.  $t.m.v._{(h,0,5;1)} = \frac{h(1) - h(0,5)}{1 - 0,5}$

$$= \frac{-5 \times 1^2 + 10 \times 1 - (-5 \times 0,5^2 + 10 \times 0,5)}{0,5}$$

$$= \frac{5 - 3,75}{0,5} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5$$

A velocidade média é 2,5 m/s.

2.4. Velocidade instantânea para  $t = 1$ :

$$h'(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{h(t) - h(1)}{t - 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-5t^2 + 10t - 5}{t - 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(-5t+5)}{t-1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} (-5t+5) = 0$$

C.A.

	-5	10	-5
1		-5	5
	-5	5	0

$-5t+5$

A velocidade instantânea é 0 m/s.

Pág. 103

3. Em  $x = 0$  o gráfico da representação (B) apresenta um ponto "anguloso", pelo que não é possível traçar a tangente ao gráfico da função nesse ponto, logo, a função não é derivável no ponto de abcissa 0.

Opção (B)

4.  $t: (-2, 0); (0, 1)$

$$m_t = \frac{1-0}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$y = mx + b; y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$g(1) = \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

5.  $y = -3x + 1; m = -3; g'(2) = -3$

$$A(2, y)$$

$$y = -3 \times 2 + 1 = -6 + 1 = -5$$

$$g'(2) = -3 \text{ e } A(2, -5)$$

6.1.  $m_r = f'(0); m_s = g'(0)$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 0}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$$

$$m_r = -1$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 0}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$$

$$m_s = 1$$

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Leftrightarrow m_r \times m_s = -1 \Leftrightarrow -1 \times 1 = -1 \Leftrightarrow -1 = -1$$

Logo, as retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares.

6.2.  $r: y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$\Leftrightarrow y = -1(x-0) + 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$s: y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

$$\Leftrightarrow y = 1(x-0) + 0 \Leftrightarrow y = x$$

Pág. 105

**Avaliação formativa 6**

1.  $A(-4, 3); B(b, \dots); C(c, \dots); D(d, \dots)$

$$AB \perp CD$$

$$AB: y = mx; O(0, 0); m = \frac{3-0}{-4-0} = -\frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x$$

$$CD: y = -\frac{3}{4}x + k, k \in \mathbb{R}$$

1.1.  $\text{t.m.v.}_{(f,-4,b)} = m_{AB} = -\frac{3}{4}$

1.2.  $\text{t.m.v.}_{(f,c,d)} = m_{CD} = \frac{4}{3}$

2.1.  $f'(-5) = m_t = 0; t: y = 5$

2.2.  $s: B(5, 5); (3, -3); m_s = \frac{-3-5}{3-5} = \frac{-8}{-2} = 4$

$$f'(5) = m_s = 4; y = 4x + b$$

$$5 = 4 \times 5 + b \Leftrightarrow b = -15$$

$$y = 4x - 15$$

3.  $\text{t.m.v.}_{(f,2,2+h)} = \frac{f(2+h) - f(2)}{2+h-2} =$

$$= \frac{2(2+h)^2 - k - (2 \times 2^2 - k)}{h}$$

$$= \frac{2(4+4h+h^2) - k - 8 + k}{h} = \frac{8+8h+2h^2-8}{h}$$

$$= \frac{h(8+2h)}{h} = 8+2h$$

I - b)

$$y = mx + b$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (8+2h) = 8$$

$$y = 8x + b$$

$$8 - k = 8 \times 2 + b$$

$$\Leftrightarrow 8 - k = 16 + b$$

$$\Leftrightarrow b = -8 - k$$

$$y = 8x - 8 - k$$

II - b)

Então, I - b), II - b).

**C.A.**

$$f(2) = 2 \times 2^2 - k = 8 - k$$

$$(2, 8 - k)$$

4.  $f(x) = 2x^3 - 4x; A(-1, 2)$

4.1.  $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 4x - [2(-1)^3 - 4(-1)]}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 4x - (-2 + 4)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 4x - 2}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2 - 2x - 2)}{x + 1}$$

**C.A.**

2	0	-4	-2
-1	-2	2	2
2	-2	-2	0

$$2x^2 - 2x - 2$$

4.2.  $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 - 2x - 2) = 2$

4.3.  $m = 2$

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 4(-1) = -2 + 4 = 2$$

$$A(-1, 2)$$

$$r: (-2, 0); (-1, 2); m = \frac{2-0}{-1-(-2)} = \frac{2}{1} = 2$$

Reta  $r$ .

7. Função derivada. Regras de derivação

Pág. 106

Tarefa 10

1.  $3 \in D_f$ ;  $f(3) = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$

Logo, o ponto  $(3, 5)$  pertence ao gráfico de  $f$ .

2.  $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 4 - 5}{h} =$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6+h)}{h} =$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6$

$B(3, 6) = (3, f'(3))$

3.  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - 4 - (a^2 - 4)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 4 - a^2 + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2a+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a+h) = 2a$

Logo, para qualquer ponto  $a$ , o ponto  $B(a, f'(a))$ , ou seja,  $B(a, 2a)$ , pertence à reta de equação  $y = 2x$ .

Pág. 107

85.1.  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3(a+h) + 1 - (-3a + 1)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3a - 3h + 1 + 3a - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h} = -3$

Logo,  $f'(a) = -3$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

85.2.  $g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2a+h)}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (2a+h) = 2a$

85.3.  $g'(2) = 2 \times 2 = 4$

85.4. Reta tangente no ponto de abscissa  $a$ :

$y = g'(a)(x-a) + g(a) \Leftrightarrow y = 2a(x-a) + a^2$

$\Leftrightarrow y = 2ax - 2a^2 + a^2 \Leftrightarrow y = 2ax - a^2$

85.5.  $y = 2(-1)x - (-1)^2 \Leftrightarrow y = -2x - 1$

86.1.  $f(x) = 3x^2 - x = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right)$   
 $= 3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right] = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$

$f$  é uma função quadrática e a parábola que a representa graficamente tem a concavidade voltada para cima e vértice  $V\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ .

Então,  $f$  é decrescente em  $\left]-\infty, \frac{1}{6}\right]$  e é crescente em  $\left[\frac{1}{6}, +\infty\right[$ .

86.2. a)  $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{1}{6}\right]$

b)  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{6}, +\infty\right[$

86.3.  $D_f = \mathbb{R}$ . Seja  $a \in \mathbb{R}$ .

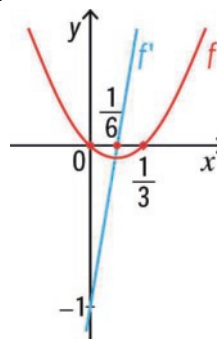
$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$   
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - x - (3a^2 - a)}{x - a}$   
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - x + a - 3a^2}{x - a}$   
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(3x+3a-1)}{x-a}$   
 $= \lim_{x \rightarrow a} (3x+3a-1)$   
 $= 3a+3a-1 = 6a-1$

<b>C.A.</b>		
3	-1	$a - 3a^2$
a	3a	$3a^2 - a$
3	$3a-1$	0

$f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ .

$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 6x - 1$

86.4.



Pág. 109

87.1.  $f$  é crescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[1, +\infty[$ .

Então,  $f'(x) \geq 0$  para  $x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

$f$  é decrescente em  $[-1, 1]$ .

Então,  $f'(x) \leq 0$  para  $x \in [-1, 1]$ .

$f'(-2) \geq 0$  e  $f(0) \leq 0$ . Então,  $f'(-2) \times f'(0) \leq 0$ .

$f'(3) \geq 0$ . Então,  $f'(0) \times f'(3) \leq 0$ .

$f'(0) \leq 0$  e  $f'(2) \geq 0$ . Então,  $f'(1) \times f'(2) \leq 0$ ;

$f'(-2) \times f'(2) \geq 0$ .

A opção correta é a opção (B).

**87.2.** Como já foi referido na alínea anterior:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$$

Logo, a opção correta é a opção (D).

**Pág. 110**

**Tarefa 11**

**1.1.** Se, para qualquer ponto, a reta tangente ao gráfico  $f$  é a própria reta, então, dado que a derivada no ponto  $x = a$  é o declive da reta tangente no ponto de abcissa  $a$ , a derivada em qualquer ponto é igual a  $m$ , ou seja,  $f'(a) = m$ .

**1.2.**  $f'(x) = m$

**1.3.** a)  $g'(x) = 0$                       b)  $h'(x) = 1$

**Pág. 111**

**88.1.**  $f'(x) = (5x)' = 5$

**88.2.**  $g'(x) = (-7x+1)' = -7$

**88.3.**  $h'(x) = \left(-\frac{1}{2}x+1\right)' = -\frac{1}{2}$

**88.4.**  $i'(x) = (3\sqrt{2}x - \sqrt{2}x)' = (2\sqrt{2}x)' = 2\sqrt{2}$

**Pág. 113**

**89.1.**  $f'(x) = (x^3 - 2x^2)' = (x^3)' - (2x^2)'$   
 $= 3x^2 - 2(x^2)' = 3x^2 - 2 \times 2x = 3x^2 - 4x$   
 $f'(2) = 3 \times 2^2 - 4 \times 2 = 12 - 8 = 4$

**89.2.**  $g'(x) = (x^3 - x^2 + x + 1)' = (x^3)' - (x^2)' + (x+1)'$   
 $= 3x^2 - 2x + 1$   
 $g'(2) = 3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 12 - 4 + 1 = 9$

**89.3.**  $h'(x) = [-2(1-2x) + x^2]' = [-2(1-2x)]' + (x^2)'$   
 $= -2(-2x+1)' + 2x = -2(-2) + 2x = 2x + 4$   
 $h'(2) = 2 \times 2 + 4 = 4 + 4 = 8$

**89.4.**  $p'(x) = \left(\frac{-x^3+x}{2} + 3x^2\right)' = \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x\right)' + (3x^2)'$   
 $= \left(-\frac{1}{2}x^3\right)' + \left(\frac{1}{2}x\right)' + 3(x^2)' =$   
 $= -\frac{1}{2}(x^3)' + \frac{1}{2} + 3 \times 2x =$   
 $= -\frac{1}{2} \times 3x^2 + 6x + \frac{1}{2} =$   
 $= -\frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{1}{2}$   
 $p'(2) = -\frac{3}{2} \times 2^2 + 6 \times 2 + \frac{1}{2} = -6 + 12 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

**89.5.**  $q'(x) = \left(4x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)' = (4x^3)' - \left(\frac{3}{2}x^2\right)'$   
 $= 4(x^3)' - \frac{3}{2}(x^2)' = 4 \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x = 12x^2 - 3x$   
 $q'(2) = 12 \times 2^2 - 3 \times 2 = 42$

**90.1.**  $g'(x) = [f(x) + 3]' = f'(x) + (3)' = f'(x) + 0 = f'(x)$   
 $g'(a) = f'(a) = 3$

**90.2.**  $h'(x) = [-2f(x) - 1]' = [-2f(x)]' - (1)' =$   
 $= -2f'(x) - 0 = -2f'(x)$   
 $h'(a) = -2f'(a) = -2 \times 3 = -6$

**Pág. 114**

**91.1.**  $f'(x) = [x(2x+1)]' = (x)'(2x+1) + x(2x+1)'$   
 $= 1(2x+1) + x \times 2 = 2x+1+2x = 4x+1$   
 ou  $f'(x) = [x(2x+1)]' = (2x^2+x)' = 4x+1$

**91.2.**  $g'(x) = [3x(x^2-2)]' = (3x)'(x^2-2) + 3x(x^2-2)'$   
 $= 3(x^2-2) + 3x \times 2x = 3x^2 - 6 + 6x^2 = 9x^2 - 6$   
 ou  $g'(x) = [3x(x^2-2)]' = (3x^3-6x)' = 9x^2 - 6$

**91.3.**  $h'(x) = [(x^2+1)(x-3)]'$   
 $= (x^2+1)'(x-3) + (x^2+1)(x-3)'$   
 $= 2x(x-3) + (x^2+1) \times 1 = 2x^2 - 6x + x^2 + 1$   
 $= 3x^2 - 6x + 1$

**92.1.**  $g'(x) = [2x(x-2)x^2]' = [2x^3(x-2)]'$   
 $= (2x^3)'(x-2) + 2x^3(x-2)'$   
 $= 6x^2(x-2) + 2x^3 \times 1$   
 $= 6x^3 - 12x^2 + 2x^3 = 8x^3 - 12x^2$

$$92.2. g'(1) = 8 \times 1^3 - 12 \times 1^2 = 8 - 12 = -4$$

$$g(1) = 2 \times 1^3 \times (1-2) = 2 \times (-1) = -2$$

$$y = g'(1)(x-1) + g(1) \Leftrightarrow y = -4(x-1) - 2$$

$$\Leftrightarrow y = -4x + 4 - 2 \Leftrightarrow y = -4x + 2$$

$$93.1. f'(x) = \left( \frac{x}{x+1} \right)' = \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1(x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$93.2. g'(x) = \left( \frac{x+1}{x^2+1} \right)' = \frac{(x+1)'(x^2+1) - (x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1(x^2+1) - (x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$93.3. h'(x) = \left( x + \frac{2}{x^2} \right)' = (x)' + \left( \frac{2}{x^2} \right)' =$$

$$= 1 + \frac{(2)' \times x^2 - 2 \times (x^2)'}{(x^2)^2} = 1 + \frac{0 - 2 \times 2x}{x^4} =$$

$$= 1 - \frac{4x}{x^4} = 1 - \frac{4}{x^3}$$

$$93.4. i'(x) = \left[ (2+x^2) \times \frac{2-x^2}{2-x} \right]' =$$

$$= (2+x^2)' \times \frac{2-x^2}{2-x} + (2+x^2) \times \left( \frac{2-x^2}{2-x} \right)' =$$

$$= 2x \times \frac{2-x^2}{2-x} +$$

$$+ (2+x^2) \times \frac{(2-x^2)'(2-x) - (2-x^2)(2-x)'}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{2x(2-x)(2-x^2)}{(2-x)^2} +$$

$$+ \frac{(2+x^2) \times [(-2x)(2-x) - (2-x^2)(-1)]}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{(4x-2x^2)(2-x^2) + (2+x^2)(-4x+2x^2+2-x^2)}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{8x-4x^3-4x^2+2x^4 + (2+x^2)(x^2-4x+2)}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{2x^4-4x^3-4x^2+8x+2x^2-8x+4+x^4-4x^3+2x^2}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{3x^4-8x^3+4}{(x-2)^2}$$

$$94.1. f'(x) = (2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x)'$$

$$= 2(x^4)' - 4(x^3)' + 5(x^2)' - (x)'$$

$$= 8x^3 - 12x^2 + 10x - 1$$

$$94.2. g'(x) = \left( -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right)'$$

$$= -\frac{1}{3}(x^3)' + \frac{1}{2}(x^2)' - (2x)' = -x^2 + x - 2$$

$$94.3. h'(x) = (1 - 2x^5 - x^4)' = (1)' + 2(x^5)' - (x^4)'$$

$$= 0 - 2 \times 5x^4 - 4x^3 = -10x^4 - 4x^3$$

$$94.4. j'(x) = \left[ (2x+1)^3 \right]' = 3(2x+1)^2 \times (2x+1)'$$

$$= 3(2x+1)^2 \times 2 = 6(2x+1)^2 = 6(4x^2 + 4x + 1)$$

$$= 24x^2 + 24x + 6$$

$$94.5. p'(x) = \left[ (x^3+x)^2 \right]' = 2(x^3+x) \times (x^3+x)'$$

$$= 2(x^3+x) \times \left[ (x^3)' + (x)' \right]$$

$$= 2(x^3+x) \times (3x^2+1) = (2x^3+2x)(3x^2+1)$$

$$= 6x^5 + 2x^3 + 6x^3 + 2x = 6x^5 + 8x^3 + 2x$$

$$94.6. q'(x) = \left[ (3-2x)^3(1+2x) \right]'$$

$$= \left[ (3-2x)^3 \right]' \times (1+2x) + (3-2x)^3 \times (1+2x)'$$

$$= 3(3-2x)^2 \times (3-2x)' \times (1+2x) + (3-2x)^3 \times 2$$

$$= (3-2x)^2 [3 \times (-2) \times (1+2x) + (3-2x) \times 2]$$

$$= (9-12x+4x^2)[-6(1+2x)+6-4x]$$

$$= (9-12x+4x^2)(-6-12x+6-4x)$$

$$= (9-12x+4x^2) \times (-16x)$$

$$= -64x^3 + 192x^2 - 144x$$

$$94.7. r'(x) = \left[ \frac{x}{(x-1)^2} \right]' = \frac{(x)'(x-1)^2 - x[(x-1)^2]'}{[(x-1)^2]^2}$$

$$= \frac{1(x-1)^2 - x \times 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)(x-1-2x \times 1)}{(x-1)^4} = \frac{x-1-2x}{(x-1)^3} = \frac{-x-1}{(x-1)^3}$$

95.1.  $x(0) = 0,1 \times 0^2 - 3 \times 0 + 20 = 20$  m

No instante inicial o ponto  $P$  encontrava-se a 20 m da origem no sentido positivo.

95.2.  $x(0) = 20$ ;  $x(5) = 0,1 \times 5^2 - 3 \times 5 + 20 = 7,5$

$$\text{t.m.v.}_{(x,0,5)} = \frac{x(5) - x(0)}{5 - 0} = \frac{7,5 - 20}{5} = -\frac{12,5}{5} = -2,5 \text{ m/s}$$

A velocidade média do ponto  $P$  nos primeiros 5 segundos é de  $-2,5$  m/s.

95.3.  $v(t) = x'(t) = (0,1t^2 - 3t + 20)' = 0,2t - 3$

$v(5) = 0,2 \times 5 - 3 = -2$  m/s

A velocidade no instante  $t = 5$  s é de  $-2$  m/s.

95.4.  $x(t) = 0 \Leftrightarrow 0,1t^2 - 3t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2 \times 0,1}$

$\Leftrightarrow t = \frac{3 \pm 1}{0,2} \Leftrightarrow t = 10 \vee t = 20$

$v(10) = 0,2 \times 10 - 3 = -1$  m/s

$v(20) = 0,2 \times 20 - 3 = 1$  m/s

O ponto  $P$  passa na origem nos instantes  $t = 10$  s e  $t = 20$  s, com velocidades de  $-1$  m/s e  $1$  m/s, respetivamente.

96.1. Seja  $y = mx + b$  uma equação da reta  $r$

$m = f'(-1)$

$$f'(x) = \left[ \frac{1}{3}(x^3 + 3x + 1) \right]' = \frac{1}{3}(x^3 + 3x + 1)' = \frac{1}{3}(3x^2 + 3)' = x^2 + 1$$

$m = f'(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$f(-1) = \frac{1}{3}[(-1)^3 + 3 \times (-1) + 1] = \frac{1}{3}(-1 - 3 + 1) = -1$

O ponto de tangência, de coordenadas  $(-1, 1)$ , pertence à reta  $r$ .

$-1 = 2 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 1$

$y = 2x + 1$  é uma equação da reta  $r$ .

96.2. As abcissas dos pontos do gráfico cuja reta tangente é paralela à reta  $r$  são as soluções da equação  $f'(x) = m \Leftrightarrow f'(x) = 2$ .

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

A reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1 é paralela à reta  $r$ .

97.1.  $g'(x) = \left( \frac{-1}{x} \right)' = \frac{(-1)'x - (-1) \times (x)'}{x^2} = \frac{0 + 1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

Bissetriz dos quadrantes ímpares:  $y = x$

$m = 1$

$g'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$

Há duas retas tangentes ao gráfico de  $g$  paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares: em  $x = -1$  e em  $x = 1$ .

Para  $x = -1$ :

$g(-1) = -\frac{1}{-1} = 1$ ;  $y = 1(x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = x + 2$

Para  $x = 1$ :

$g(1) = -\frac{1}{1} = -1$ ;  $y = 1(x - 1) - 1 \Leftrightarrow y = x - 2$

97.2. a)  $f'(x) = 2ax + b$

$$\begin{cases} f(2) = 5 \\ f'(2) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 2^2 + b \times 2 - 1 = 5 \\ 2a \times 2 + b = 7 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 6 \\ 4a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ b = 7 - 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 7 - 4a = 3 \\ \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = -4 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

$a = 2$  e  $b = -1$

b)  $f(1) = g(1)$  e  $f'(1) = g'(1)$

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 1^2 + b \times 1 - 1 = -1 \\ 2a \times 1 + b = \frac{1}{1^2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ 2a - a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$

$a = 1$  e  $b = -1$

Tarefas de consolidação 7

1.1.  $\text{t.m.v.}_{(f,3,3+h)} = \frac{f(3+h) - f(3)}{3+h-3}$

$= \frac{2(3+h)^2 - (3+h) - (2 \times 3^2 - 3)}{h}$

$= \frac{2(9 + 6h + h^2) - 3 - h - 15}{h}$

$= \frac{18 + 12h + 2h^2 - 18 - h}{h}$

$= \frac{2h^2 + 11h}{h} = \frac{h(2h + 11)}{h} = 2h + 11$

1.2.  $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 11) = 2 \times 0 + 11 = 11$

1.3.  $f(3) = 15$

$y = 11(x - 3) + 15 \Leftrightarrow y = 11x - 33 + 15$

$\Leftrightarrow y = 11x - 18$

2.1.  $m_r = f'(a) = -\frac{1}{2}$

$r: y = -\frac{1}{2}x + 4 \Leftrightarrow 2y = -x + 8$

$\Leftrightarrow x = -2y + 8$

Opção (D)

2.2.  $f'(x) = \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{2}\right)' = -\frac{2}{8}x = -\frac{1}{4}x$

$f'(a) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2$

$f(a) = f(2) = -\frac{1}{8} \times 2^2 + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3$

A(2, 3)

3. Bissetriz dos quadrantes ímpares:  $y = x$

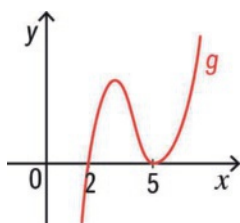
$m = 1; \quad f'(2) = 1$

$g'(x) = (f(x) + 3)' = f'(x) + (3)' = f'(x) + 0 = f'(x)$

$g'(2) = f'(2) = 1$

Opção (B)

4. O gráfico de  $g$  obtém-se do gráfico de  $f$  por uma translação horizontal de 4 unidades para a direita.



$g$  é crescente em  $]-\infty, 3]$  e em  $[5, +\infty[$ .

Então,  $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 3] \cup [5, +\infty[$ .

$g$  é decrescente em  $[3, 5]$ .

Então,  $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [3, 5]$ .

$g'(0,5) \geq 0$  ;  $g'(1) \geq 0$  ;  $g'(2) \geq 0$  ;  $g'(4) \leq 0$

Então,  $g'(2) \times g'(4) \leq 0$ .

$f$  é decrescente em  $[-1, 1]$ .

Então,  $f'(0) \leq 0$ .

$f'(0) \times g'(4) \geq 0$

Opção (D)

5.1.  $h'(x) = \left[ (x - 2x^3)^2 \right]' = 2(x - 2x^3) \times (x - 2x^3)'$   
 $= (2x - 4x^3) \times (1 - 6x^2) = 2x - 12x^3 - 4x^3 + 24x^5$   
 $= 24x^5 - 16x^3 + 2x$

5.2.  $h'(1) = 24 \times 1^5 - 16 \times 1^3 + 2 \times 1 = 24 - 16 + 2 = 10$

6.1.  $f'(x) = \left(\frac{1}{6}x^3\right)' = \frac{3}{6}x^2 = \frac{1}{2}x^2$

$f'(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}^2 = \frac{3}{2}$

$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}^3}{6} = \frac{\sqrt{3}^2 \times \sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Equação da reta tangente em  $x = \sqrt{3}$ :

$y = \frac{3}{2}(x - \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \sqrt{3}$

6.2. Seja  $b$  a abcissa do ponto onde as funções se intersectam e as retas tangentes são perpendiculares e sejam  $r$  e  $s$  as retas tangentes a  $f$  e a  $g$ , respetivamente, nesse ponto.

$m_r = f'(b) = \frac{1}{2}b^2$

$g'(x) = \left(\frac{x+a}{x}\right)' = \frac{(x+a)' \times x - (x+a) \times (x)'}{x^2}$

$= \frac{1 \times x - (x+a) \times 1}{x^2} = \frac{x - x - a}{x^2} = -\frac{a}{x^2}$

$m_s = g'(b) = -\frac{a}{b^2}$

$m_r \times m_s = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}b^2 \times \left(-\frac{a}{b^2}\right) = -1$

$\Leftrightarrow -\frac{a}{2} = -1 \Leftrightarrow a = 2$

6.3.  $f'(k) = g'(k) \Leftrightarrow \frac{1}{2}k^2 = -\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{k^2}{2} = \frac{1}{2k^2} \Leftrightarrow \frac{k^2}{2} - \frac{1}{2k^2} = 0$

$\Leftrightarrow k^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow k^4 = 1 \Leftrightarrow k = 1$   
( $k \neq 0$ ) ( $k > 0$ )

7.  $b$  é o gráfico da função  $f$  e  $a$  o da sua derivada. Quando  $f$  é crescente, a sua derivada é positiva ou zero, e quando  $f$  é decrescente, a sua derivada é negativa ou zero.

8.1. Bissetriz dos quadrantes pares:  $y = -x$

$$m = -1; g'(x) = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

$$g'(x) = -1 \Leftrightarrow 2ax + b = -1 \Leftrightarrow 2ax = -b - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b-1}{2a}$$

Logo, existe apenas um ponto (de abcissa  $\frac{-b-1}{2a}$ ), onde a reta tangente ao gráfico é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

8.2.  $g(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $g'(x) = 2ax^2 + b$

É dado que  $g(0) = 0$ ,  $g'(1) = 0$  e  $g(1) = 1$ .

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(1) = 0 \\ g(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -2a \\ a - 2a + 0 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -2a \\ -a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$g(x) = -x^2 + 2x$$

Pág. 121

**Avaliação formativa 7**

1. O declive da reta tangente no ponto de abcissa 2 é igual à derivada da função nesse ponto. Então,  $f'(2) = -2$ . O ponto A é o ponto de tangência.

Então,  $f(2) = -2 \times 2 + 3 = -1$ . Opção (D)

2.1. Seja  $a \in D_g$

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(a+h)^2 + 2(a+h) - (-2a^2 + 2a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(a^2 + 2ah + h^2) + 2a + 2h + 2a^2 - 2a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2a^2 - 4ah - 2h^2 + 2h + 2a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4a - 2h + 2)}{h} = -4a + 2 \end{aligned}$$

$$g'(x) = -4x + 2$$

2.2.  $g'(4) = -4 \times 4 + 2 = -14$

$$g'(0) = -4 \times 0 + 2 = 2$$

$$g'(4) - g'(0) = -14 - 2 = -16$$

2.3.  $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -4x + 2 > 0 \Leftrightarrow -4x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

Então, para todo  $x < \frac{1}{2}$ , tem-se que  $g'(x) > 0$ .

$$\begin{aligned} 3. \quad g'(x) &= \frac{(4x+2)' \times f(x) - (4x+2) \times f'(x)}{[f(x)]^2} \\ &= \frac{4f(x) - (4x+2) \times f'(x)}{[f(x)]^2} \\ g'(1) &= \frac{4f(1) - (4 \times 1 + 2) \times f'(1)}{[f(1)]^2} \\ &= \frac{4 \times 2 - 6 \times 2}{2^2} = \frac{-4}{4} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{4 \times 1 + 2}{f(1)} = \frac{6}{2} = 3 \\ y &= g'(1)(x-1) + g(1) \Leftrightarrow y = -(x-1) + 3 \\ \Leftrightarrow y &= -x + 1 + 3 \Leftrightarrow y = -x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad f'(x) &= (x^2 + 1)' = 2x; \quad g'(x) = (x^3)' = 3x^2 \\ m_r &= f'(a) = 2a; \quad m_s = g'(a) = 3a^2; \quad r \parallel s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Então, } m_r &= m_s \Leftrightarrow 2a = 3a^2 \Leftrightarrow 2a - 3a^2 = 0 \\ \Leftrightarrow a(2 - 3a) &= 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 2 - 3a = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a &= 0 \vee -3a = -2 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Se  $a = 0$ :  $f(0) = 0^2 + 1 = 1$ ;  $g(0) = 0^3 = 0$ ;  
A(0, 1) e B(0, 0).

$$\begin{aligned} \text{Se } a = \frac{2}{3}: f\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{13}{9}; \\ g\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}; \quad A\left(\frac{2}{3}, \frac{13}{9}\right) \text{ e } B\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad f'(x) &= [-3(-2x+1)^3 + k]' \\ &= -3 \times 3(-2x+1)^2 \times (-2x+1)' + (k)' \\ &= -9(-2x+1)^2 \times (-2) = 18(-2x+1)^2 \quad \text{I - b)} \\ f(1) &= 4 \Leftrightarrow -3(-2 \times 1 + 1)^3 + k = 4 \\ \Leftrightarrow -3 \times (-1)^3 + k &= 4 \Leftrightarrow 3 + k = 4 \Leftrightarrow k = 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = -3(-2x+1)^3 + 1 \quad \text{II - a)}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 18(-2 \times 1 + 1)^2 = 18 \times (-1)^2 = 18 \\ y &= f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 18(x-1) + 4 \\ \Leftrightarrow y &= 18x - 18 + 4 \Leftrightarrow y = 18x - 14 \quad \text{III - c)} \end{aligned}$$

Então, I - b); II - a); III - c).

**8. Derivadas e estudo de funções. Otimização**

Pág. 122

**Tarefa 12**

1. A derivada é nula.

2.  $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 3 = 3 \times 1 - 3 = 0$

$f'(1) = 3 \times 1^2 - 3 = 0$

ou

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

3.

$x$	$-\infty$	$-1$		$1$	$+\infty$
$f'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$f'$  é positiva em  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  e é negativa em  $]-1, 1[$ .

4.

C.A.  $\left\{ \begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) = -1 + 3 = 2 \\ f(1) = 1^3 - 3 \times 1 = 1 - 3 = -2 \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$-1$		$1$	$+\infty$
$f'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$	$-2$	$\nearrow$

5. Nos intervalos onde a função derivada é positiva, a função  $f$  é estritamente crescente. Nos intervalos onde a função derivada é negativa, a função  $f$  é estritamente decrescente.

Pág. 123

98.  $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$ . Como  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e admite um extremo no ponto  $x = 1$ , então  $f'(1) = 0$ .

$f'(x) = (2x^3 - ax^2 + b)' = 6x^2 - 2ax$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \times 1^2 - 2a \times 1 = 0 \Leftrightarrow 6 - 2a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$

$f(1) = 3 \Leftrightarrow 2 \times 1^3 - a \times 1^2 + b = 3 \Leftrightarrow 2 - a + b = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a + b = 1$

Como  $a = 3$ ,  $-3 + b = 1 \Leftrightarrow b = 4$ .

$a = 3$  e  $b = 4$

Pág. 124

99.1.  $f(x) = x^5 + x$ ;  $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (x^5 + x)' = 5x^4 + 1 \neq 0$ , para todo  $x \in D_f$ .

Assim, como a derivada de  $f$  não tem zeros, podemos concluir que  $f$  não tem extremos.

99.2.  $g(x) = x - \frac{1}{x}$ ;  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

$g'(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = x' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1'x - 1 \times x'}{x^2} =$   
 $= 1 - \frac{-1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} \neq 0$ , para todo  $x \in D_g$ .

Como  $g$  é diferenciável em  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $D_g$  é a reunião de dois intervalos abertos, em cada um desses intervalos é aplicável o Teorema de Fermat. Assim, como a derivada de  $g$  não tem zeros, podemos concluir que  $g$  não tem extremos.

100.1.  $f(x) = -x^3 - 2x$  em  $\mathbb{R}$ ;  $f'(x) = -3x^2 - 2$

Para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) < 0$ . Logo,  $f$  é estritamente decrescente em  $\mathbb{R}$ .

100.2.  $g(x) = -\frac{1}{x}$  em  $]-\infty, 0[$ ;

$g'(x) = -\frac{1' \times x - 1 \times x'}{x^2} = -\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

Para qualquer  $x \in ]-\infty, 0[$ ,  $g'(x) > 0$ . Logo,  $g$  é estritamente crescente em  $]-\infty, 0[$ .

Pág. 125

101.1.  $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 1$ ;  $D_f = \mathbb{R}$ ;  $f'(x) = \frac{2}{2}x - 3 = x - 3$

Zeros de  $f'$ :  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

C.A.  $\left\{ \begin{array}{l} f(3) = \frac{3^2}{2} - 3 \times 3 + 1 = -\frac{7}{2} \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$f'$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$

$f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 3[$  e estritamente crescente em  $]3, +\infty[$ .

101.2.  $g(x) = 1 - 2x - 4x^2$ ;  $D_g = \mathbb{R}$ ;  $g'(x) = -2 - 8x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 - 8x = 0 \Leftrightarrow -8x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$

C.A.  $\left\{ \begin{array}{l} g\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - 2\left(-\frac{1}{4}\right) - 4\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{4} \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g'$	$+$	$0$	$-$
$g$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$

$g$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -\frac{1}{4}[$  e estritamente decrescente em  $]-\frac{1}{4}, +\infty[$ .

101.3.  $h(x) = x^3 - 3x$ ;  $D_h = \mathbb{R}$ ;  $h'(x) = 3x^2 - 3$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

C.A.  $\left| \begin{array}{l} h(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2 \\ h(1) = 1^3 - 3 \times 1 = 1 - 3 = -2 \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$-1$		$1$	$+\infty$
$h'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$h$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$	$-2$	$\nearrow$

$h$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[1, +\infty[$  e estritamente decrescente em  $[-1, 1]$ .

101.4.  $h(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ ;  $D_h = \mathbb{R}$

$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2}x - 3 \times \frac{1}{3}x^2 = x - x^2$

Zeros de  $h'$ :

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

C.A.  $\left| \begin{array}{l} h(0) = 0; h(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$0$		$1$	$+\infty$
$h'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$h$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$

$h$  é decrescente em  $]-\infty, 0]$  e em  $[1, +\infty[$  e é crescente em  $[0, 1]$ .

101.5.  $j(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ;  $D_j = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$j'(x) = \left( \frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

Zeros de  $j'$ :

$j'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \wedge x \neq 1$

O sinal de  $j'$  depende apenas do sinal do binómio  $x^2 - 2x$ .

C.A.  $\left| \begin{array}{l} j(0) = \frac{0}{-1} = 0; j(2) = \frac{4}{2-1} = 4 \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$0$		$1$	$2$	$+\infty$
$j'$	$+$	$0$	$-$	N.D.	$-$	$0$
$j$	$\nearrow$	$0$	$\searrow$	N.D.	$\searrow$	$4$

$j$  é crescente em  $]-\infty, 0]$  e em  $[2, +\infty[$  e é decrescente em  $[0, 1]$  e em  $[1, 2]$ .

101.6.  $k(x) = x + \frac{4}{x}$ ;  $D_k = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$k'(x) = \left( x + \frac{4}{x} \right)' = (x)' + \left( \frac{4}{x} \right)' = 1 + \frac{(4)'x - 4(x)'}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2}$

Zeros de  $k'$ :

$k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \wedge x \neq 0$

O sinal de  $k'$  depende apenas do sinal do binómio  $x^2 - 4$ .

C.A.  $\left| \begin{array}{l} k(-2) = -2 + \frac{4}{-2} = -4; k(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4 \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$	$2$	$+\infty$
$k'$	$+$	$0$	$-$	N.D.	$-$	$0$
$k$	$\nearrow$	$-4$	$\searrow$	N.D.	$\searrow$	$4$

$k$  é crescente em  $]-\infty, -2]$  e em  $[2, +\infty[$  e é decrescente em  $[-2, 0]$  e em  $[0, 2]$ .

102.1.  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ ;  $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = x^2 - 2x - 3$ ;  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2-4}{2} \vee x = \frac{2+4}{2}$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

C.A.  $\left| \begin{array}{l} f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1) = \frac{5}{3}; \\ f(3) = \frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \times 3 = -9 \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$-1$		$3$	$+\infty$
$f'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	$-9$	$\nearrow$
		Máx		Mín	

A função  $f$  é crescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[3, +\infty[$  e é decrescente em  $[-1, 3]$ . Tem um máximo relativo para  $x = -1$ , cujo valor é  $\frac{5}{3}$ , e um mínimo relativo para  $x = 3$ , cujo valor é  $-9$ .

102.2.  $g(x) = -x^2(2x+9) = -2x^3 - 9x^2$ ;  $D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = -6x^2 - 18x$ ;  $g$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow -6x(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$

C.A.  $\left| \begin{array}{l} g(-3) = -2(-3)^3 - 9(-3)^2 = -27; g(0) = 0 \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$-3$		$0$	$+\infty$
$g'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$g$	$\searrow$	$-27$	$\nearrow$	$0$	$\searrow$
		Mín		Máx	

A função  $g$  é decrescente em  $]-\infty, -3]$  e em  $[0, +\infty[$  e crescente em  $[-3, 0]$ . Tem um mínimo relativo para  $x = -3$ , cujo valor é  $-27$ , e um máximo relativo para  $x = 0$ , cujo valor é  $0$ .

**102.3.**  $h(x) = x^4 - 10x^2 + 25$ ;  $D_h = \mathbb{R}$

$h'(x) = 4x^3 - 20x$ ;  $h$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 20x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 5) = 0$

$\Leftrightarrow 4x = 0 \vee x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$

C.A.  $\left| \begin{array}{l} h(-\sqrt{5}) = (-\sqrt{5})^4 - 10(-\sqrt{5})^2 + 25 = 0 \\ h(0) = 25; h(\sqrt{5}) = 0 \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$0$		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$h'$	-	0	+	0	-	0	+
$h$	$\searrow$	0	$\nearrow$	25	$\searrow$	0	$\nearrow$
		Mín		Máx		Mín	

A função  $h$  é decrescente em  $]-\infty, -\sqrt{5}]$  e em  $[0, \sqrt{5}]$  e crescente em  $[-\sqrt{5}, 0]$  e em  $[\sqrt{5}, +\infty[$ . Tem um mínimo relativo (e absoluto) para  $x = -\sqrt{5}$  e  $x = \sqrt{5}$ , cujos valores são  $0$ , e um máximo relativo para  $x = 0$ , cujo valor é  $25$ .

**102.4.**  $i(x) = 2x^4 - x$ ;  $D_i = \mathbb{R}$

$i'(x) = 8x^3 - 1$ ;  $i$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$

$i'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

C.A.  $\left| i\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} \right.$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$i'$	-	0	+
$i$	$\searrow$	$-\frac{3}{8}$	$\nearrow$
		Mín	

A função  $i$  é decrescente em  $]-\infty, \frac{1}{2}]$  e crescente em  $[\frac{1}{2}, +\infty[$ . Tem um mínimo relativo (e absoluto) para  $x = \frac{1}{2}$ , cujo valor é  $-\frac{3}{8}$ .

**Pág. 127**

**103.1.**  $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ ;  $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$ ;  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 15x^2 = 0 \Leftrightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 15x^2 = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$   
(zero duplo)

C.A.  $\left| \begin{array}{l} f(-1) = 3(-1)^5 - 5(-1)^3 = 2 \\ f(0) = 0; f(1) = 3 \times 1^5 - 5 \times 1^3 = -2 \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$-1$		$0$		$1$	$+\infty$
$f'$	+	0	-	0	-	0	+
$f$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$
		Máx				Mín	

A função  $f$  é crescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[1, +\infty[$  e decrescente em  $[-1, 1]$ . Tem um máximo relativo para  $x = -1$ , cujo valor é  $2$ , e um mínimo relativo para  $x = 1$ , cujo valor é  $-2$ .

**103.2.**  $g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$ ;  $D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$ ;  $g$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 24x^2 + 12x = 0$

$\Leftrightarrow 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \vee (x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$   
(zero duplo)

C.A.  $\left| g(0) = 1; g(1) = 3 - 8 + 6 + 1 = 2 \right.$

$x$	$-\infty$	$0$		$1$	$+\infty$
$g'$	-	0	+	0	+
$g$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$
		Mín			

A função  $g$  é decrescente em  $]-\infty, 0]$  e crescente em  $[0, +\infty[$ . Tem um mínimo relativo (e absoluto) para  $x = 0$ , cujo valor é  $1$ .

**103.3.**  $h(x) = x^4 + 6x^2 + 9$ ;  $D_h = \mathbb{R}$

$h'(x) = 4x^3 + 12x$ ;  $h$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 12x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 3 = 0$   
Equação impossível

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$h'$	-	0	+
$h$	$\searrow$	9	$\nearrow$
		Mín	

A função  $h$  é decrescente em  $]-\infty, 0]$  e crescente em  $[0, +\infty[$ . Tem um mínimo relativo (e absoluto) para  $x = 0$ , cujo valor é  $9$ .

**103.4.**  $i(x) = x^3 - x^5$ ;  $D_i = \mathbb{R}$

$i'(x) = 3x^2 - 5x^4$ ;  $i$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$

$i'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2(3 - 5x^2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 3 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{\frac{3}{5}} \vee x = \sqrt{\frac{3}{5}}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{\sqrt{15}}{5} \vee x = \frac{\sqrt{15}}{5}$

$$\begin{aligned} \text{C.A.} \quad & i\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) = \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^5 \\ & = -\frac{15\sqrt{15}}{125} + \frac{15 \times 15 \times \sqrt{15}}{3125} \\ & = -\frac{15\sqrt{15}}{125} + \frac{9\sqrt{15}}{125} = -\frac{6\sqrt{15}}{125} \\ & i\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) = \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^5 = \frac{15\sqrt{15}}{125} - \frac{9\sqrt{15}}{125} = \frac{6\sqrt{15}}{125} \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$		$0$		$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$+\infty$
$i'$	-	0	+	0	+	0	-
$i$	$\searrow$	$-\frac{6\sqrt{15}}{125}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{6\sqrt{15}}{125}$	$\searrow$
		Mín				Máx	

A função  $i$  é decrescente em  $]-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{5}]$  e em

$[\frac{\sqrt{15}}{5}, +\infty[$  e crescente em  $]-\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{5}]$ . Tem

um mínimo relativo para  $x = -\frac{\sqrt{15}}{5}$ , cujo valor é

$-\frac{6\sqrt{15}}{125}$ , e um máximo relativo para  $x = \frac{\sqrt{15}}{5}$ , cujo

valor é  $\frac{6\sqrt{15}}{125}$ .

Pág. 128

104.1.  $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ ;  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2)'(x+3) - x^2(x+3)'}{(x+3)^2} \\ &= \frac{2x(x+3) - x^2}{(x+3)^2} = \frac{2x^2 + 6x - x^2}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

$f$  é diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \wedge (x+3)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+6) = 0 \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -6$$

Como  $\forall x \in D_f$ ,  $(x+3)^2 > 0$ , o sinal de  $f'$

depende apenas do sinal de  $x^2 + 6x$ .

$$\text{C.A.} \quad \left| \begin{aligned} f(-6) &= \frac{(-6)^2}{-6+3} = \frac{36}{-3} = -12; \quad f(0) = 0 \end{aligned} \right.$$

$x$	$-\infty$	$-6$		$-3$		$0$	$+\infty$
$f'$	+	0	-		-	0	+
$f$	$\nearrow$	$-12$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$
		Máx				Mín	

A função  $f$  é crescente em  $]-\infty, -6]$  e em  $[0, +\infty[$

e decrescente em  $[-6, -3[$  e em  $]-3, 0]$ . Tem um

máximo relativo para  $x = -6$ , cujo valor é  $-12$ , e

um mínimo relativo para  $x = 0$ , cujo valor é  $0$ .

104.2.  $g(x) = \frac{4x^2 - 8x + 4}{x+1}$ ;  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(4x^2 - 8x + 4)'(x+1) - (4x^2 - 8x + 4)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(8x - 8)(x+1) - 4x^2 + 8x - 4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{8x^2 + 8x - 8x - 8 - 4x^2 + 8x - 4}{(x+1)^2} = \frac{4x^2 + 8x - 12}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$g$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 12 = 0 \wedge (x+1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2-4}{2} \vee x = \frac{-2+4}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

Como  $\forall x \in D_g$ ,  $(x+1)^2 > 0$ , o sinal de  $g'$  depende apenas do sinal de  $4x^2 + 8x - 12$ .

$$\text{C.A.} \quad \left| \begin{aligned} g(-3) &= -32; \quad g(1) = 0 \end{aligned} \right.$$

$x$	$-\infty$	$-3$		$-1$		$1$	$+\infty$
$g'$	+	0	-		-	0	+
$g$	$\nearrow$	$-32$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$
		Máx				Mín	

A função  $g$  é crescente em  $]-\infty, -3]$  e em  $[1, +\infty[$

e decrescente em  $[-3, -1[$  e em  $]-1, 1]$ . Tem um

máximo relativo para  $x = -3$ , cujo valor é  $-32$ , e

um mínimo relativo para  $x = 1$ , cujo valor é  $0$ .

104.3.  $h(x) = \frac{2}{1-x} - \frac{2x}{1} = \frac{2-2x+2x^2}{1-x}$ ;  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(2-2x+2x^2)'(1-x) - (2-2x+2x^2)(1-x)'}{(1-x)^2} \\ &= \frac{(-2+4x)(1-x) + 2-2x+2x^2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-2+2x+4x-4x^2+2-2x+2x^2}{(1-x)^2} = \frac{-2x^2+4x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$h$  é diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x = 0 \wedge (1-x)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(-x+2) = 0 \wedge 1-x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee -x+2 = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Como  $\forall x \in D_h$ ,  $(1-x)^2 > 0$ , o sinal de  $h'$

depende apenas do sinal de  $-2x^2 + 4x$ .

$$\text{C.A.} \quad \left| \begin{aligned} h(0) &= 2; \quad h(2) = -6 \end{aligned} \right.$$

$x$	$-\infty$	$0$		$1$		$2$	$+\infty$
$h'$	-	0	+		+	0	-
$h$	$\searrow$	2	$\nearrow$		$\nearrow$	$-6$	$\searrow$
		Mín				Máx	

A função  $h$  é decrescente em  $]-\infty, 0]$  e em  $[2, +\infty[$  e crescente em  $[0, 1[$  e em  $]1, 2]$ . Tem um mínimo relativo para  $x = 0$ , cujo valor é 2, e um máximo relativo para  $x = 2$ , cujo valor é  $-6$ .

104.4.  $i(x) = \frac{4}{x-2} + 9x = \frac{4+9x^2-18x}{x-2}$ ;  $D_i = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$i'(x) = \frac{(4+9x^2-18x)'(x-2) - (4+9x^2-18x)(x-2)'}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(18x-18)(x-2) - 4 - 9x^2 + 18x}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{18x^2 - 36x - 18x + 36 - 4 - 9x^2 + 18x}{(x-2)^2} = \frac{9x^2 - 36x + 32}{(x-2)^2}$$

$i'(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 36x + 32 = 0 \wedge (x-2)^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-36) \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \times 9 \times 32}}{2 \times 9} \wedge x - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{36 \pm \sqrt{144}}{18} \wedge x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{36-12}{18} \vee x = \frac{36+12}{18} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = \frac{8}{3}$$

Como  $\forall x \in D_i, (x-2)^2 > 0$ , o sinal de  $i'$  depende apenas do sinal de  $9x^2 - 36x + 32$ .

C.A.  $\left| \begin{array}{l} i\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{\frac{4}{3}-2} + 9 \times \frac{4}{3} = 6; \quad i\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{\frac{8}{3}-2} + 9 \times \frac{8}{3} = 30 \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	$\frac{4}{3}$		2		$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$i'$	+	0	-		-	0	+
$i$	$\nearrow$	6	$\searrow$		$\searrow$	30	$\nearrow$
		Máx			Mín		

A função  $i$  é crescente em  $]-\infty, \frac{4}{3}]$  e em  $[\frac{8}{3}, +\infty[$  e decrescente em  $[\frac{4}{3}, 2[$  e em  $]2, \frac{8}{3}]$ .  
Tem um máximo relativo para  $x = \frac{4}{3}$ , cujo valor é 6, e um mínimo relativo para  $x = \frac{8}{3}$ , cujo valor é 30.

104.5.  $j(x) = \frac{x}{x^2+4}$ ;  $D_j = \mathbb{R}$

$$j'(x) = \frac{x'(x^2+4) - x(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-x(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

$j$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$

$$j'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+4 = 0 \wedge \underbrace{(x^2+4)^2 \neq 0}_{\text{Condição universal}} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Como  $\forall x \in D_j, (x^2+4)^2 > 0$ , o sinal de  $j'$  depende apenas do sinal de  $-x^2+4$ .

C.A.  $\left| \begin{array}{l} j(-2) = \frac{-2}{(-2)^2+4} = -\frac{1}{4}; \quad j(2) = \frac{1}{4} \end{array} \right.$

$x$	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$j'$	-	0	+	0	-
$j$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$
		Mín		Máx	

A função  $j$  é decrescente em  $]-\infty, -2]$  e em  $[2, +\infty[$  e crescente em  $[-2, 2]$ . Tem um mínimo relativo para  $x = -2$ , cujo valor é  $-\frac{1}{4}$ , e um máximo relativo para  $x = 2$ , cujo valor é  $\frac{1}{4}$ .

104.6.  $k(x) = \frac{x^3}{x^2+2}$ ;  $D_k = \mathbb{R}$

$$k'(x) = \frac{(x^3)'(x^2+2) - x^3(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{3x^2(x^2+2) + x^3(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^4}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2+2)^2}$$

$k$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 6x^2 = 0 \wedge \underbrace{(x^2+2)^2 \neq 0}_{\text{Condição universal}}$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2+6) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee \underbrace{x^2+6 = 0}_{\text{Condição impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

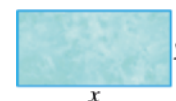
$k'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , logo  $k$  é crescente em  $\mathbb{R}$  pelo que não tem extremos.

Pág. 129

105.1.  $P = 60 \Leftrightarrow 2x + 2y = 60 \Leftrightarrow 2y = 60 - 2x \Leftrightarrow y = 30 - x$

$A(x) = x \times y \Leftrightarrow A(x) = x(30 - x)$

$\Leftrightarrow A(x) = 30x - x^2$



105.2.  $A'(x) = 30 - 2x$ ;

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 30 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 15$

$x > 0 \wedge 30 - x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 30 \Leftrightarrow 0 < x < 30$

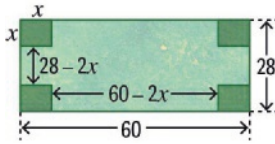
C.A.  $\left| \begin{array}{l} A(15) = 30 \times 15 - 15^2 = 225 \end{array} \right.$

$x$	0		15		30
$A'$		+	0	-	
$A$		↗	225	↘	

Máx

A área do retângulo é máxima para  $x = 15$  cm .

106.1.



$$V(x) = (60 - 2x)(28 - 2x)x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(x) = (1680 - 120x - 56x + 4x^2)x$$

$$\Leftrightarrow V(x) = 1680x - 176x^2 + 4x^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = 4x^3 - 176x^2 + 1680x$$

106.2.  $V'(x) = 12x^2 - 352x + 1680$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 352x + 1680 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 88x + 420 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-88) \pm \sqrt{(-88)^2 - 4 \times 3 \times 420}}{2 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{88 \pm \sqrt{2704}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{88 \pm 52}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{140}{6} \vee x = \frac{36}{6} \Leftrightarrow x = \frac{70}{3} \vee x = 6$$

$$x > 0 \wedge 60 - 2x > 0 \wedge 28 - 2x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 30 \wedge x < 14 \Leftrightarrow 0 < x < 14$$

$$\frac{70}{3} > 14$$

$x$	0		6		14
$V'$		+	0	-	
$V$		↗	$V(6)$	↘	

Máx

A medida do lado do quadrado deve ser 6 cm .

Pág. 130

107.1.  $h(t) = 4,9 + 48,51t - 4,9t^2$

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-48,51 \pm \sqrt{(48,51)^2 - 4 \times (-4,9) \times 4,9}}{2 \times (-4,9)}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-48,51 \pm \sqrt{2449,2601}}{-9,8} \Leftrightarrow t = \frac{-48,51 \pm 49,49}{-9,8}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-48,51 - 49,49}{-9,8} \vee t = \frac{-48,51 + 49,49}{-9,8}$$

$$\Leftrightarrow t = 10 \vee t = \underbrace{-0,1}_{\text{impossível}}$$

$$h(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 10$$

O corpo esteve no ar durante 10 segundos.

107.2.  $h'(t) = 48,51 - 9,8t$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 48,51 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 4,95$$

**C.A.**  $\left\{ \begin{array}{l} h'(0) = 48,51; \quad h'(10) = 48,51 - 9,8 \times 10 = -49,49 \\ h(0) = 4,9 \end{array} \right.$

$x$	0		4,95		10
$h'$	48,51	+	0	-	-49,49
$h$	4,9	↗	124,96	↘	0

Máx

$$h(4,95) = 4,9 + 48,51 \times 4,95 - 4,9 \times 4,95^2$$

$$= 124,96225 \approx 124,96$$

$$h(10) = 4,9 + 48,51 \times 10 - 4,9 \times 10^2 = 0$$

A altura máxima atingida pelo corpo foi 124,96 m .

107.3.  $t.m.v._{(h,0;4,95)} = \frac{h(4,95) - h(0)}{4,95 - 0}$

$$= \frac{124,96225 - 4,9}{4,95} \approx 24,255$$

A velocidade média durante a subida foi 24,255 m/s .

107.4.  $h'(3,7) = 48,51 - 9,8 \times 3,7 = 12,25$  m/s

$$\begin{array}{l} 12,25 \text{ m} \quad \underline{\quad} \quad 1 \text{ s} \\ x \quad \underline{\quad} \quad 3600 \text{ s} \end{array} \quad x = \frac{3600 \times 12,25}{1} = 44 \, 100 \text{ m} = 44,1 \text{ km}$$

A velocidade no instante  $t = 3,7$  foi de 44,1 km/h .

Pág. 131

108.  $A\left(-\frac{5}{2}, 0\right); B\left(0, \frac{3}{b}\right); m_{AB} = \frac{3-0}{0-\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$

$$AB: y = \frac{6}{5}x + 3; P\left(x, \frac{6}{5}x + 3\right); Q(x, 0); x < 0$$

$$A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{QP}}{2}$$

$$A(x) = \frac{-x\left(\frac{6}{5}x + 3\right)}{2} = \frac{-\frac{6}{5}x^2 - 3x}{2}$$

$$= -\frac{6}{10}x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{2}x$$

$$x < 0 \wedge \frac{6}{5}x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge 6x + 15 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \wedge x > -\frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < 0$$

$$A'(x) = -\frac{6}{5}x - \frac{3}{2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{5}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{5}x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \times \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

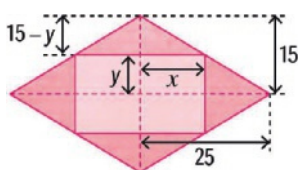
**C.A.**  $\left| A\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{5}\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{16} \right.$

$x$	$-\frac{5}{2}$		$-\frac{5}{4}$		0
$A'$		+	0	-	
$A$		↗	$\frac{15}{16}$	↘	

$x = -\frac{5}{4}; y = \frac{6}{5}x + 3 = \frac{6}{5} \times \left(-\frac{5}{4}\right) + 3 = \frac{3}{2}; P\left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$

Pág. 132

109.



$\frac{25}{x} = \frac{15}{15-y} \Leftrightarrow 25(15-y) = 15x$   
 $\Leftrightarrow 375 - 25y = 15x \Leftrightarrow -25y = 15x - 375 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + 15$

$A_{\text{canteiro}} = 4 \times x \times y$

$A(x) = 4x\left(-\frac{3}{5}x + 15\right) = -\frac{12}{5}x^2 + 60x$

$A'(x) = -\frac{24}{5}x + 60$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{24}{5}x + 60 = 0 \Leftrightarrow -24x + 300 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = 12,5$

$x > 0 \wedge -\frac{3}{5}x + 15 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge -3x + 75 > 0$

$\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 25 \Leftrightarrow 0 < x < 25$

**C.A.**  $\left| A(12,5) = -\frac{12}{5}(12,5)^2 + 60 \times 12,5 = 375 \right.$

$x$	0		12,5		25
$A'$		+	0	-	
$A$		↗	375	↘	

Máx

$x = 12,5; y = -\frac{3}{5}x + 15; y = -\frac{3}{5} \times 12,5 + 15 = 7,5$

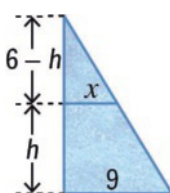
$2x = 2 \times 12,5 = 25; 2y = 2 \times 7,5 = 15$

As dimensões do canteiro devem ser 25 m por 15 m.

110.1.  $\frac{9}{x} = \frac{6}{6-h} \Leftrightarrow 9(6-h) = 6x \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 54 - 9h = 6x$

$\Leftrightarrow -9h = 6x - 54 \Leftrightarrow h = -\frac{2}{3}x + 6$

$h(x) = -\frac{2}{3}x + 6$



110.2.  $V_{\text{cilindro}} = A_b \times h = \pi r^2 \times h$

$V(x) = \pi x^2 \times \left(-\frac{2}{3}x + 6\right) \Leftrightarrow V(x) = -\frac{2\pi}{3}x^3 + 6\pi x^2$

110.3.  $V'(x) = -2\pi x^2 + 12\pi x$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\pi x^2 + 12\pi x = 0 \Leftrightarrow 2\pi x(-x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi x = 0 \vee -x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$

$x > 0 \wedge -\frac{2}{3}x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge -2x + 18 > 0$

$\Leftrightarrow x > 0 \wedge -2x > -18 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 9$

$x$	0		6		9
$V'$		+	0	-	
$V$		↗	$V(6)$	↘	

Máx

$x = 6 \text{ cm}$

110.4.  $x = 6; h = -\frac{2}{3}x + 6; h = -\frac{2}{3} \times 6 + 6 = 2; h = 2 \text{ cm}$

Pág. 133

111.  $V = 48\pi \text{ cm}^3; V = A_b \times h;$

$V = \pi r^2 \times h$

$48\pi = \pi r^2 \times h \Leftrightarrow h = \frac{48}{r^2}$

$A_{\text{lateral}} = 2\pi r \times h = 2\pi r \times \frac{48}{r^2} = \frac{96\pi}{r}$

$A_{\text{base}} = \pi r^2$

$C(r) = \left(\frac{96\pi}{r} + \pi r^2\right) \times 2 + \pi r^2 \times 3$

$= \frac{192\pi}{r} + 2\pi r^2 + 3\pi r^2 = \frac{192\pi}{r} + 5\pi r^2 = \frac{192\pi + 5\pi r^3}{r}$

$C'(r) = \frac{15\pi r^2 \times r - (192\pi + 5\pi r^3)}{r^2}$

$= \frac{15\pi r^3 - 192\pi - 5\pi r^3}{r^2} = \frac{10\pi r^3 - 192\pi}{r^2}$

$C'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{10\pi r^3 - 192\pi}{r^2} = 0$

$\Leftrightarrow 10\pi r^3 - 192\pi = 0 \wedge r \neq 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{192\pi}{10\pi}$

$\Leftrightarrow r^3 = 19,2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{19,2}$

$r > 0$

$r$	0		$\sqrt[3]{19,2}$	$+\infty$
$C'$		-	0	+
$C$		↘	$C(\sqrt[3]{19,2})$	↗

Mín

$r = \sqrt[3]{19,2} \approx 2,7 \text{ cm}; h = \frac{48}{r^2} = \frac{48}{(\sqrt[3]{19,2})^2} \approx 6,7 \text{ cm}$

O custo é mínimo para  $r \approx 2,7 \text{ cm}$  e  $h \approx 6,7 \text{ cm}$ .



Tarefas de consolidação 8

1.  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $f(x) = x^2 + \frac{k}{x} = \frac{x^3 + k}{x}$

1.1.  $f'(x) = \frac{3x^2 \times x - (x^3 + k)}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - k}{x^2}$   
 $= \frac{2x^3 - k}{x^2} = 2x - \frac{k}{x^2}$

$f'(3) = 0 \Leftrightarrow 2 \times 3 - \frac{k}{3^2} = 0 \Leftrightarrow 6 - \frac{k}{9} = 0$   
 $\Leftrightarrow 54 - k = 0 \Leftrightarrow k = 54$

1.2. a)  $f'(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$ ;  $f'(2) = \frac{2 \times 2^3 - 1}{2^2} = \frac{15}{4}$

b)  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ ;  $f(2) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = f'(2)(x - 2) + f(2) \Leftrightarrow y = \frac{15}{2}(x - 2) + \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{15}{4}x - \frac{15}{2} + \frac{9}{2} \Leftrightarrow y = \frac{15}{4}x - 3$

2.  $f'(a) = m_f$ ;  $g'(a) = m_g$

Como  $f \perp g$ ,  $m_f \times m_g = -1 \Leftrightarrow f'(a) \times g'(a) = -1$ .

Opção (B)

3.1.  $a > 0$ ;  $f'(x) = \frac{3}{4}x^2$ ;  $g'(x) = -2x + 7$

Para as retas  $r$  e  $s$  serem paralelas,  $f'(a) = g'(a)$ .

$f'(a) = g'(a) \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 = -2a + 7 \Leftrightarrow 3a^2 = -8a + 28$

$\Leftrightarrow 3a^2 + 8a - 28 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 3 \times (-28)}}{2 \times 3}$

$\Leftrightarrow a = \frac{-8 \pm \sqrt{400}}{6} \Leftrightarrow a = \frac{-8 - 20}{6} \vee a = \frac{-8 + 20}{6}$

$\Leftrightarrow a = -\frac{14}{3} \vee a = 2$

Como  $a > 0$ ,  $a = 2$ .

3.2.  $f'(x) = \frac{3}{4}x^2$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Como  $f$  está definida em  $\mathbb{R}^+$  e  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $f$  é estritamente crescente e não tem extremos.

3.3. 1.º Processo:

$g'(x) = -2x + 7$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

C.A.  $\left| g\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7 \times \frac{7}{2} - 11 = \frac{5}{4}$

$x$	0		$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$g'$		+	0	-
$g$		$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$

Máx

O máximo absoluto de  $g$  é  $\frac{5}{4}$ .

2.º Processo:

$g(x) = -x^2 + 7x - 11$   
 $= -(x^2 - 7x + 11)$   
 $= -\left(x^2 - 7x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + 11\right)$   
 $= -\left(x^2 - 7x + \frac{49}{4} - \frac{5}{4}\right)$   
 $= -\left(x^2 - 7x + \frac{49}{4}\right) + \frac{5}{4}$   
 $= -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$

C.A.

$\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

Vértice da parábola:  $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{4}\right)$

Máximo absoluto  $\frac{5}{4}$  para  $x = \frac{7}{2}$ .

4.1.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ;  $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 9}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

Zeros de  $f$ : 0 e 3

4.2.  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 3 \times 9}}{2 \times 3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{12 - 6}{6} \vee x = \frac{12 + 6}{6}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

C.A.

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1 = 4$

$f(3) = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 = 0$

$x$	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'$	+	0	-	0	+
$f$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

Máx

Mín

$f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, 1]$  e em  $[3, +\infty[$  e estritamente decrescente em  $[1, 3]$ .  
Máximo relativo 4 para  $x = 1$  e mínimo relativo 0 para  $x = 3$ .

5.  $g(x) = x^2 + bx + c$ ;  $g'(x) = 2x + b$

$g(1) = 2$ ;  $g'(2) = 0$

$$\begin{cases} 1+b+c=2 \\ 2 \times 2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1-b \\ b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1-(-4) \\ b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ b=-4 \end{cases}$$

6.

•  $g(x) = a(x-h)^2 + k$ ; Vértice  $(0, 8)$

$g(x) = ax^2 + 8$

$g(4) = 0 \Leftrightarrow 16a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8$

•  $A(x) = 2x \times \left(-\frac{1}{2}x^2 + 8\right) \Leftrightarrow A(x) = -x^3 + 16x$

•  $A'(x) = -3x^2 + 16$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{3}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{\sqrt{3}} \vee x = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$0 < x < 4$

$x$	0		$\frac{4\sqrt{3}}{3}$		4
$A'$		+	0	-	
$A$		$\nearrow$	$A\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$	$\searrow$	

Máx

$g\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 8 = -\frac{1}{2} \times \frac{16 \times 3}{9} + 8 = \frac{16}{3}$

$B\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{16}{3}\right)$

Pág. 137

**Avaliação formativa 8**

1. O facto de  $g'(c) = 0$  não implica que a função tenha uma extremo em  $c$ .

$g(c)$  é um candidato a extremo de  $g$ .

Opção (C)

2.

$x$	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$f$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
$f'$	-	0	+	0	-

$\underbrace{f'(0)}_{\oplus} \times \underbrace{f'(1)}_{\oplus} > 0$ ; Opção (B)

3.  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

t.m.v.<sub>(f,-1,1)</sub> =  $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{0-4}{2} = -2$  C.A.  
 $f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$   
 $f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 + (-1)^2 = 1 + 2 + 1 = 4$

I - b)

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$

II - a)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 1$

C.A.  $f(0) = 0$ ;  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} = 0,0625$

$x$	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f'$	-	0	+	0	-	0	+
$f$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{16}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Mín Mín

III - b)

Então, I - b); II - a); III - b).

4.  $V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times h = x^2 \times y$

•  $\frac{24}{x} = \frac{39}{39-y} \Leftrightarrow 936 - 24y = 39 \times \frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow -24y = \frac{39}{2}x - 936$

$\Leftrightarrow -24y = 39x - 1872 \Leftrightarrow y = -1,625x + 78$

•  $V(x) = x^2(-1,625x + 78) = -1,625x^3 + 78x^2$

•  $V'(x) = -4,875x^2 + 156x$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow -4,875x^2 + 156x = 0$

$\Leftrightarrow x(-4,875x + 156) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -4,875x + 156 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{156}{4,875} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 32$

$x > 0 \wedge -1,625x + 78 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge -1,625x > -78$

$\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 48 \Leftrightarrow 0 < x < 48$

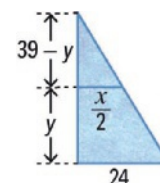
$x$	0		32		48
$V'$		+	0	-	
$V$		$\nearrow$	$V(32)$	$\searrow$	

Máx.

$x = 32$ ;  $y = -1,625 \times 32 + 78 = 26$

Aresta da base do prisma: 32 cm

Altura do prisma: 26 cm



Tarefas complementares

Pág. 138

$$\begin{aligned}
 1. \quad P(x) &= \frac{(x-2)^2}{3} - \frac{x-1}{2} - \frac{5}{3} \\
 &= \frac{x^2 - 4x + 4}{3} - \frac{x-1}{2} - \frac{5}{3} = \\
 &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{5}{3} = \\
 &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{6}x - \frac{3}{6}x + \frac{8}{6} + \frac{3}{6} - \frac{10}{6} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

- 2.1. Um polinómio de grau 4 tem  $4+1=5$  termos  
 2.2. Um polinómio de grau  $n+1$  tem  $n+1+1=n+2$  termos.  
 2.3. Um polinómio de grau  $n-2$  tem  $n-2+1=n-1$  termos.  
 3.1.  $A(x)+B(x) = (5x^4 - 3x - 3) + (3x^4 - 6x^2 - 3x + 3)$   
 $= 8x^4 - 6x^2 - 6x$   
 3.2.  $A(x)-B(x) = (5x^4 - 3x - 3) - (3x^4 - 6x^2 - 3x + 3)$   
 $= 5x^4 - 3x - 3 - 3x^4 + 6x^2 + 3x - 3 = 2x^4 + 6x^2 - 6$

$$\begin{aligned}
 3.3. \quad 2A(x) - \frac{10}{3}B(x) &= \\
 &= 2(5x^4 - 3x - 3) - \frac{10}{3}(3x^4 - 6x^2 - 3x + 3) \\
 &= 10x^4 - 6x - 6 - 10x^4 + 20x^2 + 10x - 10 \\
 &= 20x^2 + 4x - 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad C(x) \times D(x) &= (x^2 + 9x + 3)(x^3 - 3x + 1) \\
 &= x^5 - 3x^3 + x^2 + 9x^4 - 27x^2 + 9x + 3x^3 - 9x + 3 \\
 &= x^5 + 9x^4 - 26x^2 + 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.1. \quad (x^2 + 2 - 4x)(3x - 2) &= 3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 - 12x^2 + 8x \\
 &= 3x^3 - 14x^2 + 14x - 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.2. \quad (x-3)(x+2) - (2x+2)^2 &= \\
 &= x^2 + 2x - 3x - 6 - (4x^2 + 8x + 4) \\
 &= x^2 - x - 6 - 4x^2 - 8x - 4 = -3x^2 - 9x - 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.3. \quad \left[ 4x^2 - 3x \left( \frac{2}{3}x + 1 \right) \right] \times (4x - 1) &= \\
 &= (4x^2 - 2x^2 - 3x)(4x - 1) = (2x^2 - 3x)(4x - 1) \\
 &= 8x^3 - 2x^2 - 12x^2 + 3x = 8x^3 - 14x^2 + 3x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.4. \quad (2x+1)(x-1) - (x+4)(x-4) &= \\
 &= 2x^2 - 2x + x - 1 - (x^2 - 16) \\
 &= 2x^2 - x - 1 - x^2 + 16 = x^2 - x + 15
 \end{aligned}$$

Pág. 139

$$6.1. \quad A(x) = 3x^2 - x^3 + 2 = -x^3 + 3x^2 + 2$$

$$B(x) = -2x - x^2 + 1 = -x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{array}{r}
 -x^3 + 3x^2 + 0x + 2 \quad | \quad -x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{x^3 + 2x^2 - x} \phantom{+ 2} \\
 5x^2 - x + 2 \\
 \underline{-5x^2 - 10x + 5} \\
 -11x + 7
 \end{array}$$

$$Q(x) = x - 5; R(x) = -11x + 7$$

$$6.2. \quad A(x) = x^3 + 1; B(x) = x + 1$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \quad | \quad x + 1 \\
 \underline{-x^3 - x^2} \phantom{+ 0x + 1} \\
 -x^2 + 0x + 1 \\
 \underline{x^2 + x} \\
 x + 1 \\
 \underline{-x - 1} \\
 0
 \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 - x + 1; R(x) = 0$$

$$6.3. \quad A(x) = 3x + 2; B(x) = x + 1$$

$$\begin{array}{r}
 3x + 2 \quad | \quad x + 1 \\
 \underline{-3x - 3} \quad 3 \\
 -1
 \end{array}$$

$$Q(x) = 3; R(x) = -1$$

$$6.4. \quad A(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 22x + 1; B(x) = \frac{1}{3}x + 3$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 22x + 1 \quad | \quad \frac{1}{3}x + 3 \\
 \underline{-\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2} \phantom{+ 2x + 1} \\
 -\frac{5}{2}x^2 - 22x + 1 \\
 \underline{\frac{5}{2}x^2 + \frac{45}{2}x} \\
 \frac{1}{2}x + 1 \\
 \underline{-\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}} \\
 -\frac{7}{2}
 \end{array}$$

$$Q(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{3}{2}; R(x) = -\frac{7}{2}$$

$$7.1.$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 5x + 3 \quad | \quad x + 2 \\
 \underline{-x^2 - 2x} \phantom{+ 3} \\
 3x + 3 \\
 \underline{-3x - 6} \\
 -3
 \end{array}$$

$$\frac{x^2 + 5x + 3}{x + 2} = x + 3 - \frac{3}{x + 2}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{C.A.} \\
 \frac{-x^3}{-x^2} = x \\
 \frac{5x^2}{-x^2} = -5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{C.A.} \\
 \frac{x^3}{x} = x^2 \\
 \frac{-x^2}{x} = -x \\
 \frac{x}{x} = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{C.A.} \\
 \frac{3x}{x} = 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{C.A.} \\
 \frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x} = \frac{3}{2}x^2 \\
 \frac{-\frac{5}{2}x^2}{\frac{1}{3}x} = -\frac{15}{2}x \\
 \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x} = \frac{3}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{C.A.} \\
 \frac{x^2}{x} = x \\
 \frac{3x}{x} = 3
 \end{array}$$

7.2.

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 + 3x - 1 & |x+3 \\ \hline -5x^2 - 15x & 5x - 12 \\ \hline -12x - 1 & \\ \hline 12x + 36 & \\ \hline 35 & \end{array}$$

$$\frac{5x^2 + 3x - 1}{x + 3} = 5x - 12 + \frac{35}{x + 3}$$

$$\begin{array}{l} \text{C.A.} \\ \frac{5x^2}{x} = 5x \\ \frac{-12x}{x} = -12 \end{array}$$

7.3.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 - x + 3 & |x^2+1 \\ \hline -x^3 & -x \\ \hline -2x + 3 & x \end{array}$$

$$\frac{x^3 - x + 3}{x^2 + 1} = x + \frac{-2x + 3}{x^2 + 1} = x - \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{l} \text{C.A.} \\ \frac{x^3}{x^2} = x \end{array}$$

7.4.

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x - 3 & |2x^2+1 \\ \hline -4x^4 & -2x^2 \\ \hline -2x^2 + x - 3 & 2x^2 - 1 \\ \hline 2x^2 + 1 & \\ \hline x - 2 & \end{array}$$

$$\frac{4x^4 + x - 3}{2x^2 + 1} = 2x^2 - 1 + \frac{x - 2}{2x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{l} \text{C.A.} \\ \frac{4x^4}{2x^2} = 2x^2 \\ \frac{-2x^2}{2x^2} = -1 \end{array}$$

8.1.  $V(x) = \frac{1}{3}[L(x)]^2 \times H(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 1 = \frac{1}{3}(x+1)^2 \times H(x)$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 + 9x^2 - 3 = (x^2 + 2x + 1) \times H(x)$$

$$\Leftrightarrow H(x) = \frac{6x^3 + 9x^2 - 3}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 9x^2 + 0x - 3 & |x^2+2x+1 \\ \hline -6x^3 - 12x^2 - 6x & 6x - 3 \\ \hline -3x^2 - 6x - 3 & \\ \hline x^2 - 6x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{C.A.} \\ \frac{6x^3}{x^2} = 6x \\ \frac{-3x^2}{x^2} = -3 \end{array}$$

Logo,  $H(x) = 6x - 3$

8.2.  $H(x) = \frac{3}{8}L(x) \Leftrightarrow x - 3 = \frac{3}{8}(x + 1)$

$$\Leftrightarrow 48x - 24 = 3x + 3 \Leftrightarrow 48x - 3x = 24 + 3$$

$$\Leftrightarrow 45x = 27 \Leftrightarrow x = \frac{27}{45} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$$

$$\overline{VE} = H\left(\frac{3}{5}\right) = 6 \times \frac{3}{5} - 3 = \frac{18 - 15}{5} = \frac{3}{5} \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = L\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} + 1 = \frac{3 + 5}{5} = \frac{8}{5} \text{ cm}$$

Seja  $M$  o ponto médio de  $[BC]$ .

$$\overline{EM} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{4}{5} \text{ cm}$$

$$\overline{VM}^2 = \overline{VE}^2 + \overline{EM}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{VM}^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{VM}^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \overline{VM}^2 = 1 \Leftrightarrow \overline{VM} = 1 \text{ cm}$$



$$A_{[BCV]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{VM}}{2} = \frac{\frac{8}{5} \times 1}{2} = \frac{4}{5} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral da pirâmide} = 4 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 3,2 \text{ cm}^2$$

Pág. 140

9.1.  $A(x) = 3x^2 - 5x + 4$ ;  $B(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r|l} 3 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 6 \end{array} \quad Q(x) = 3x + 1; R(x) = 6$$

9.2.  $A(x) = x^2 - x^3 + 5 - x^4 = -x^4 - x^3 + x^2 + 5$ ;

$$B(x) = x + 2$$

$$\begin{array}{r|l} -1 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -4 \\ \hline -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$Q(x) = -x^3 + x^2 - x + 2$$
;  $R(x) = 1$

9.3.  $A(x) = x^4 - x^3 + 1$ ;  $B(x) = x + 2$

$$\begin{array}{r|l} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 6 & -12 & 24 \\ \hline 1 & -3 & 6 & -12 & 25 \end{array}$$

$$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 12$$
;  $R(x) = 25$

9.4.  $A(x) = -2x + 8x^3 - 1 = 8x^3 - 2x - 1$ ;  $B(x) = x + \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 0 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -4 & 2 & 0 \\ \hline 8 & -4 & 0 & -1 \end{array} \quad Q(x) = 8x^2 - 4x$$
;  $R(x) = -1$

9.5.  $A(x) = x^5 + 1$ ;  $B(x) = x + 1$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$
;  $R(x) = 0$

10.1.  $A(x) = 2x^3 - 4x + 1$ ;  $B(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 8 \\ \hline 2 & 4 & 4 & 9 \end{array}$$

$$Q(x) = \frac{2x^2 + 4x + 4}{2} = x^2 + 2x + 2$$
;  $R(x) = 9$

10.2.  $A(x) = 4x^3 - 3$ ;  $B(x) = 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & 0 & 0 & -3 \\ \frac{1}{2} & & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline & 4 & 2 & 1 & -\frac{5}{2} \end{array}$$

$Q(x) = \frac{4x^2 + 2x + 1}{2} = 2x^2 + x + \frac{1}{2}$ ;  $R(x) = -\frac{5}{2}$

10.3.  $A(x) = 8x^2 - 5x + 3$ ;  $B(x) = \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 8 & -5 & 3 \\ & -16 & 42 & \\ \hline & 8 & -21 & 45 \end{array}$$

$Q(x) = \frac{8x - 21}{\frac{1}{2}} = 16x - 42$ ;  $R(x) = 45$

11.1.  $B(x) = x - 2$

$A(2) = 2 \times 2^3 - 4 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 16 - 16 + 6 + 1 = 7$

O resto da divisão de  $A(x)$  por  $B(x)$  é 7.

11.2.  $C(x) = x + 3$

$A(-3) = 2 \times (-3)^3 - 4 \times (-3)^2 + 3 \times (-3) + 1$   
 $= -54 - 36 - 9 + 1 = -98$

O resto da divisão de  $A(x)$  por  $C(x)$  é -98.

11.3.  $D(x) = x$ ;  $A(0) = 2 \times 0^3 - 4 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1 = 1$

O resto da divisão de  $A(x)$  por  $D(x)$  é 1.

11.4.  $E(x) = 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$A\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 1$   
 $= \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1 + 6}{4} = \frac{7}{4}$

O resto da divisão de  $A(x)$  por  $E(x)$  é  $\frac{7}{4}$ .

12. Seja  $P(x)$  um polinómio qualquer de grau  $n$ .

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$

O resto da divisão de  $P(x)$  por  $x$  é dado por  $P(0)$ .

$P(0) = a_0 \times 0^n + a_1 \times 0^{n-1} + \dots + a_{n-1} \times 0 + a_n = a_n$

Logo, o resto da divisão de um polinómio qualquer por  $x$  é igual ao seu termo independente.

13. Seja  $P(x) = x^4 - x^2 + ax + 2$

O resto da divisão de  $P(x)$  por  $x - 1$  é dado, pelo teorema do resto, por  $P(1)$ . Então,

$P(1) = 2 \Leftrightarrow 1^4 - 1^2 + a \times 1 + 2 = 2$

$\Leftrightarrow 1 - 1 + a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

14. O resto da divisão de  $P_n(x)$  por  $x + 1$  é dado, pelo teorema do resto, por  $P_n(-1)$ .

$P_n(-1) = (-1)^{2n+1} - n(-1) + 1 - n = -1 + n + 1 - n = 0$   
( $2n+1$  é ímpar)

Logo,  $P_n(x)$  é divisível por  $x + 1$ .

15.1. a)  $a + 3 = -1 \Leftrightarrow a = -4$

$P(-1) = P(-4 + 3)$   
 $= 2(-4)^2 - 3(-4) + 1 = 32 + 12 + 1 = 45$

b)  $a + 3 = 2 \Leftrightarrow a = -1$

$P(2) = P(-1 + 3)$   
 $= 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$

15.2.  $a + 3 = x \Leftrightarrow a = x - 3$

$P(x) = 2(x - 3)^2 - 3(x - 3) + 1$   
 $= 2(x^2 - 6x + 9) - 3x + 9 + 1$   
 $= 2x^2 - 12x + 18 - 3x + 10 = 2x^2 - 15x + 28$   
 $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 28 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 224}}{2 \times 2}$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{15 \pm 1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{14}{4} \vee x = \frac{16}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \vee x = 4$

Os zeros de  $P(x)$  são  $\frac{7}{2}$  e 4.

16.  $2x - 4 = 2(x - 2)$

Se o polinómio é divisível por  $2x - 4$ , então, pelo teorema do resto,  $P(2) = 0$ .

$P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - p \times 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -2p = -8 - 1$   
 $\Leftrightarrow -2p = -9 \Leftrightarrow p = \frac{9}{2}$

17.  $p = 3q + 2$

$P(x) = (3q + 2 - 1)x^3 - 2x^2 - 3qx + 1$   
 $= (3q + 1)x^3 - 2x^2 - 3qx + 1$   
 $P(1) = (3q + 1) \times 1^3 - 2 \times 1^2 - 3q \times 1 + 1$   
 $= 3q + 1 - 2 - 3q + 1 = 0$

Então, se  $p = 3q + 2$ ,  $P(x)$  é divisível por  $x - 1$ .

18.1. Seja  $x - k$  o polinómio divisor.

$k \times (-4) = -8 \Leftrightarrow k = 2$

Então, o polinómio divisor é  $x - 2$ .

Outro processo:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & a & 2a & -2a & 8 \\ & & & & -8 & 2 \times (-4) = -8 \\ \hline & & & & -4 & 0 \end{array}$$

Então, o polinómio divisor é  $x - 2$ .

**18.2.** Seja  $P(x) = x^4 + ax^3 + 2ax^2 - 2ax + 8$   
 $P(x)$  é divisível por  $x - 2$ . Então,  $P(2) = 0$ .  
 $P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^4 + a \times 2^3 + 2a \times 2^2 - 2a \times 2 + 8 = 0$   
 $\Leftrightarrow 16 + 8a + 8a - 4a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = -2$

Outro processo:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & a & 2a & -2a & 8 \\ 2 & & 2 & 2a+4 & 8a+8 & -8 \\ \hline & 1 & a+2 & 4a+4 & -4 & 0 \end{array}$$

$$-2a + 8a + 8 = -4 \Leftrightarrow 6a = -12 \Leftrightarrow a = -2$$

**18.3.**  $a = -2$ . Então,  
 $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2(-2)x^2 - 2(-2)x + 8 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 8$

Pág. 142

**19.1.**  $A(x) = x^3 - 3x + 2$ ;  $x - 1$

$$A(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Então,  $x^3 - 3x + 2$  é divisível por  $x - 1$ .

**19.2.**  $A(x) = x^3 - 3x + 2$ ;  $x + 3$

$$A(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 2 = -27 + 9 + 2 = -16 \neq 0$$

Então,  $x^3 - 3x + 2$  não é divisível por  $x + 3$ .

**20.1.**  $A(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 5(-1) + 9 = -1 - 3 - 5 + 9 = 0$

Logo,  $A(x)$  é divisível por  $x + 1$ .

**20.2.**  $A(x) = (x + 1) \times Q(x) \Leftrightarrow Q(x) = \frac{A(x)}{x + 1}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 5 & 9 \\ -1 & & -1 & 4 & -9 \\ \hline & 1 & -4 & 9 & 0 \end{array} \quad Q(x) = x^2 - 4x + 9$$

$Q(x)$  é um polinômio de grau 2.

**21.1.**  $A(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$

**21.2.**  $A(x) = (x - 1) \times Q(x) \Leftrightarrow Q(x) = \frac{A(x)}{x - 1}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array} \quad Q(x) = x^2 - 5x + 6$$

**22.1.**  $P(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 1 = -8 + 4 + 1 = -3$

Então, o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x + 2$  é igual a  $-3$ .

**22.2.**  $P(x) + 3 = (x + 2) \times Q(x) \Leftrightarrow Q(x) = \frac{P(x) + 3}{x + 2}$

$$\Leftrightarrow Q(x) = \frac{x^3 - 2x + 4}{x + 2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \quad Q(x) = x^2 - 2x + 2$$

**23.1.** A afirmação é verdadeira. O resto da divisão de  $V(x)$  por  $x - 5$  é dado, pelo teorema do resto, por  $V(5)$  e  $V(5)$  é o valor do volume do cilindro quando  $x = 5$ .

**23.2.**  $V(x) = \pi(x - 4)^2 \times (x - n)$

$$V(5) = 4\pi \Leftrightarrow \pi(5 - 4)^2 \times (5 - n) = 4\pi$$

$$\Leftrightarrow \pi(5 - n) = 4\pi \Leftrightarrow 5 - n = 4 \Leftrightarrow n = 1$$

$$V(6) = \pi(6 - 4)^2 \times (6 - 1) = \pi \times 4 \times 5 = 20\pi \text{ cm}^3$$

Pág. 143

**24.1.**  $A(x) = 3x^2 + 7x + 2$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -\frac{1}{3}$$

$$A(x) = 3(x + 2) \left( x + \frac{1}{3} \right) = (x + 2)(3x + 1)$$

**24.2.**  $B(x) = 2x^2 + 9x + 4$

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 9x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$B(x) = 2(x + 4) \left( x + \frac{1}{2} \right) = (x + 4)(2x + 1)$$

**24.3.**  $C(x) = 6x^2 + 19x + 10$

$$C(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 19x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \times 6 \times 10}}{2 \times 6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-19 \pm \sqrt{121}}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \vee x = -\frac{2}{3}$$

$$C(x) = 6 \left( x + \frac{5}{2} \right) \left( x + \frac{2}{3} \right) = (2x + 5)(3x + 2)$$

**24.4.**  $D(x) = 12x^2 + 19x + 4$

$$D(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 19x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \times 12 \times 4}}{2 \times 12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-19 \pm \sqrt{169}}{24} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \vee x = -\frac{1}{4}$$

$$D(x) = 12 \left( x + \frac{4}{3} \right) \left( x + \frac{1}{4} \right) = (3x + 4)(4x + 1)$$

24.5.  $E(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 3x - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 8 \times (-5)}}{2 \times 8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{16} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8} \vee x = 1$$

$$E(x) = 8 \left( x + \frac{5}{8} \right) (x - 1) = (8x + 5)(x - 1)$$

24.6  $F(x) = 9x^2 + 6x + 1$ ;  $F(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 9 \times 1}}{2 \times 9} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 0}{18} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

O polinómio  $F(x) = 9x^2 + 6x + 1$  admite  $-\frac{1}{3}$  como raiz dupla, logo:

$$F(x) = 9 \left( x + \frac{1}{3} \right)^2 = 3 \left( x + \frac{1}{3} \right) 3 \left( x + \frac{1}{3} \right) = (3x + 1)^2$$

25.1.  $P(x) = x^3 - 8$ ;  $P(2) = 0$

$P(x) = (x - 2)Q(x)$ , sendo  $Q(x)$  do 2.º grau.

Para determinar  $Q(x)$  recorrendo à regra de Ruffini:

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$$Q(x) = x^2 + 2x + 4$$
;  $P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Vamos agora, se possível, fatorizar o trinómio  $x^2 + 2x + 4$ :

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Equação impossível em  $\mathbb{R}$

Não é possível fatorizar o polinómio  $x^2 + 2x + 4$ .

Logo,  $P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

25.2.  $P(x) = x^3 + 5x^2 - x - 5$ ;  $P(-5) = 0$

	1	5	-1	-5
-5		-5	0	5
	1	0	-1	0

$$P(x) = (x + 5)(x^2 - 1) = (x + 5)(x - 1)(x + 1)$$

25.3.  $P(x) = 19x^2 - 42x + x^3 \Leftrightarrow P(x) = x(19x - 42 + x^2)$

$$x^2 + 19x - 42 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \times 1 \times (-42)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-19 \pm \sqrt{529}}{2} \Leftrightarrow x = -21 \vee x = 2$$

$$P(x) = x(x - 2)(x + 21)$$

25.4.  $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

1 é zero de multiplicidade 2

	1	1	-3	-1	2
1		1	2	-1	-2
	1	2	-1	-2	0
1		1	3	2	
	1	3	2	0	

Da primeira regra de Ruffini obteve-se:

$$P(x) = (x - 1)(x^3 + 2x^2 - x - 2)$$

Da segunda regra de Ruffini obteve-se:

$$P(x) = (x - 1)(x - 1)(x^2 + 3x + 2)$$

$$P(x) = (x - 1)^2(x^2 + 3x + 2)$$

C.A.

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \end{array} \right.$$

Logo,  $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x + 1)$ .

26.1. Consideremos 1 uma raiz do polinómio  $P(x)$  de multiplicidade 3. Assim:  $P(x) = (x - 1)^3$

26.2. Consideremos, por exemplo, o zero e o 1, duas raízes de  $P(x)$  de multiplicidade 2. Assim,

$$P(x) = x^2(x - 1)^2$$

27.1.  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ . Como  $P(x)$  tem

coeficientes inteiros, se tiver raízes inteiras, estas serão divisores do termo independente, que, neste caso, é 6. Os divisores de 6 são: -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6 e 6

$$P(-1) = 8$$
;  $P(1) = 0$ ;  $P(-2) = 0$ ;  $P(2) = -4$ ;

$$P(-3) = -24$$
;  $P(3) = 0$ ;  $P(-6) = -252$ ;

$$P(6) = 120$$

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0
-2		-2	6	
	1	-3	0	

Da primeira regra de Ruffini obteve-se:

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$

Da segunda regra de Ruffini obteve-se:

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

Logo,  $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$ .

27.2.  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

Os divisores de -8 são: -1, 1, -2, 2, -4, 4, -8 e 8

$$P(-1) = 0$$
;  $P(1) = -10$ ;  $P(-2) = 8$ ;  $P(2) = 0$ ;

$$P(-4) = 0$$
;  $P(4) = 80$ ;  $P(-8) = -280$ ;  $P(8) = 648$

	1	3	-6	-8
-1		-1	-2	8
	1	2	-8	0
2		2	8	
	1	4	0	

Da primeira regra de Ruffini obteve-se:

$$P(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 8)$$

Da segunda regra de Ruffini obteve-se:

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x+4)$$

Logo,  $P(x) = (x+1)(x-2)(x+4)$ .

**27.3.**  $P(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 3$

Os divisores de -3 são: -1, 1, -3 e 3

$$P(-1) = 0; P(1) = -4; P(-3) = -36; P(3) = 48$$

	2	1	-4	-3
-1		-2	1	3
	2	-1	-3	0

$$P(x) = (x+1)(2x^2 - x - 3)$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$$

$$P(x) = 2(x+1)^2 \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Logo,  $P(x) = (x+1)^2(2x-3)$ .

**28.1.**  $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$

Os divisores de 2 são: -1, 1, -2 e 2

$$P(-1) = 2; P(1) = 0; P(-2) = -6; P(2) = 2$$

	1	-1	-2	2
1		1	0	-2
	1	0	-2	0

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 2)$$

$$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Logo,  $P(x) = (x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ .

**28.2.**  $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

Os divisores de 1 são: -1 e 1;  $P(-1) = -4$ ;

$$P(1) = 0$$

	1	-3	1	1
1		1	-2	-1
	1	-2	-1	0

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 1)$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 1 + \sqrt{2}$$

$$P(x) = (x-1)[x - (1 - \sqrt{2})][x - (1 + \sqrt{2})]$$

Logo,  $P(x) = (x-1)(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

Pág. 144

**29.1.**  $x^4 - 6x^2 - 8x + 24 = 0$

Seja  $P(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 24$ ;  $P(2) = 0$

	1	0	-6	-8	24
2		2	4	-4	-24
	1	2	-2	-12	0
2		2	8	12	
	1	4	6	0	

$$P(x) = (x-2)^2(x^2 + 4x + 6)$$

$$x^4 - 6x^2 - 8x + 24 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x^2 + 4x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \vee x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2} \quad S = \{2\}$$

Equação impossível em  $\mathbb{R}$

**29.2.**  $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6 = 0$

Seja  $P(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$

Os divisores de -6 são: -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6 e 6

$$P(-1) = 10; P(1) = 0; P(-2) = 36; P(2) = 40;$$

$$P(-3) = 60; P(3) = 126; P(-6) = 0; P(6) = 780$$

1 e -6 são zeros de  $P(x)$

	2	11	-7	-6
1		2	13	6
	2	13	6	0
-6		-12	-6	
	2	1	0	

$$P(x) = (x-1)(x+6)(2x+1)$$

$$2x^3 + 11x^2 - 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+6)(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x + 6 = 0 \vee 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -6 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{-6, -\frac{1}{2}, 1\right\}$$

**29.3.**  $x^3 + 3x^2 + x - 3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$

Seja  $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

Os divisores de 3 são: -1, 1, -3 e 3

$$P(-1) = 4; P(1) = 8; P(-3) = 0; P(3) = 60$$

	1	3	1	3
-3		-3	0	-3
	1	0	1	0

$$P(x) = (x+3)(x^2+1)$$

$$x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+3=0 \vee \underbrace{x^2+1=0}_{\substack{\text{Equação} \\ \text{impossível em } \mathbb{R}}} \Leftrightarrow x = -3; S = \{-3\}$$

**29.4.**  $x^3 - x^2 = -x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

Seja  $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Os divisores de  $-1$  são:  $-1$  e  $1$

$$P(-1) = -4; P(1) = 0$$

	1	-1	1	-1
1		1	0	1
	1	0	1	0

$$P(x) = (x-1)(x^2+1)$$

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee \underbrace{x^2+1=0}_{\substack{\text{Equação} \\ \text{impossível em } \mathbb{R}}} \Leftrightarrow x = 1; S = \{1\}$$

**30.1.**  $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$  é uma equação biquadrada.

Fazendo  $y = x^2$ , vem:

$$9y^2 - 10y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 9 \times 1}}{2 \times 9}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{18} \Leftrightarrow y = \frac{10 \pm 8}{18} \Leftrightarrow y = \frac{1}{9} \vee y = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{3} \vee x = -1 \vee x = 1$$

$$S = \left\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$$

**30.2.**  $4x^4 + 7x^2 = 2 \Leftrightarrow 4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$  é uma equação biquadrada. Fazendo  $y = x^2$ , vem:

$$4y^2 + 7y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 4 \times (-2)}}{2 \times 4}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{8} \Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm 9}{8}$$

$$\Leftrightarrow y = -2 \vee y = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -2}_{\substack{\text{Equação} \\ \text{impossível em } \mathbb{R}}} \vee x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}; S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

**31.1.**  $P(x) = 2x^4 + 13x^2 - 15$

Zeros de  $P(x)$ :

$P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^4 + 13x^2 - 15 = 0$  é uma equação biquadrada. Fazendo  $y = x^2$ , vem:

$$2y^2 + 13y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 2 \times (-15)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{-13 \pm 17}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{15}{2} \vee y = 1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{15}{2} \vee x^2 = 1$$

Equação impossível em  $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Zeros de  $P(x)$ :  $-1$  e  $1$

	2	0	13	0	-15
-1		-2	2	-15	15
	2	-2	15	-15	0
1		2	0	15	
	2	0	15	0	

$$P(x) = (x+1)(x-1)(2x^2+15)$$

**31.2.**  $Q(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

Zeros de  $Q(x)$ :

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$  é uma equação biquadrada.

Fazendo  $y = x^2$ , vem:

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow y = -2 \vee y = 4$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -2}_{\substack{\text{Equação} \\ \text{impossível em } \mathbb{R}}} \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Zeros de  $Q(x)$ :  $-2$  e  $2$

	1	0	-2	0	-8
-2		-2	4	-4	8
	1	-2	2	-4	0
1		2	0	4	
	1	0	2	0	

$$Q(x) = (x+2)(x-2)(x^2+2)$$

**32.1.**  $(2x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}; S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

**32.2.**  $(x-\sqrt{2})^3 > 0 \Leftrightarrow x-\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{2}$

$$S = ]\sqrt{2}, +\infty[$$

**32.3.**  $(x-1)^4 < 0$ ;  $S = \{ \}$   
Inequação impossível

**32.4.**  $x^3 - 2x^2 + x \leq 0$

Seja  $P(x) = x^3 - 2x^2 + x$ .

$$P(x) = x(x^2 - 2x + 1)$$

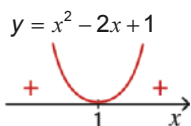
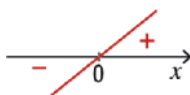
Zeros de  $P(x)$ :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$$y = x$$



$x$	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x$	-	0	+	+	+
$x^2 - 2x + 1$	+	+	+	0	+
$x^3 - 2x^2 + x$	-	0	+	0	+

$$x^3 - 2x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 0] \cup \{1\}$$

$$S = ]-\infty, 0] \cup \{1\}$$

**32.5.**  $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 \leq 0$

Seja  $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$

-2 é zero de  $P(x)$

	2	9	7	-6
-2		-4	-10	6
	2	5	-3	0

$$P(x) = (x+2)(2x^2 + 5x - 3)$$

Zeros de  $P(x)$ :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2 + 5x - 3) = 0$$

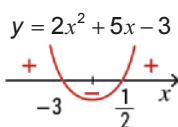
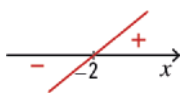
$$\Leftrightarrow x + 2 = 0 \vee 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -3 \vee x = \frac{1}{2}$$

$$y = x + 2$$



$x$	$-\infty$	-3		-2		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x + 2$	-	-	-	0	+	+	+
$2x^2 + 5x - 3$	+	0	-	-	-	0	+
$2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$	-	0	+	0	-	0	+

$$2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -3] \cup \left[-2, \frac{1}{2}\right]$$

$$S = ]-\infty, -3] \cup \left[-2, \frac{1}{2}\right]$$

**32.6.**  $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 > 0$

Seja  $P(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 9$ .

Os divisores de -9 são: -1, 1, -3, 3, -9 e 9

$$P(-1) = -24; P(1) = -4; P(-3) = -108;$$

$$P(3) = 0; P(-9) = -1224; P(9) = 396$$

	1	-5	9	-9
3		3	-6	9
	1	-2	3	0

$$P(x) = (x-3)(x^2 - 2x + 3)$$

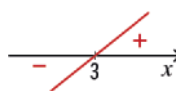
$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1}$$

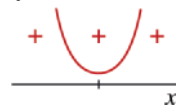
$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

Equação impossível em  $\mathbb{R}$

$$y = x - 3$$



$$y = x^2 - 2x + 3$$



$$x^3 - 5x^2 + 9x - 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 - 2x + 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3;$$

$$S = ]3, +\infty[$$

**33.1.**  $x > x^5 \Leftrightarrow x - x^5 > 0$

Seja  $P(x) = x - x^5$ .

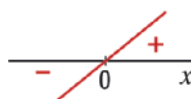
$$P(x) = x - x^5 = x(1 - x^4) = x(1 - x^2)(1 + x^2)$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2)(1 + x^2) = 0$$

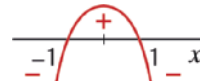
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 1 - x^2 = 0 \vee \underbrace{1 + x^2 = 0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$

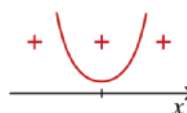
$$y = x$$



$$y = 1 - x^2$$



$$y = 1 + x^2$$



$x$	$-\infty$	$-1$		$0$		$1$	$+\infty$
$x$	-	-	-	$0$	+	+	+
$1-x^2$	-	$0$	+	+	+	$0$	-
$1+x^2$	+	+	+	+	+	+	+
$x-x^5$	+	$0$	-	$0$	+	$0$	-

$$x > x^5 \Leftrightarrow x - x^5 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[$$

$$S = ]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[$$

**33.2.**  $9x^4 + 4 \leq 37x^2 \Leftrightarrow 9x^4 - 37x^2 + 4 \leq 0$

Seja  $P(x) = 9x^4 - 37x^2 + 4$

Zeros de  $P(x)$ :  $P(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$  é uma equação biquadrada. Fazendo  $y = x^2$ , vem:

$$9y^2 - 37y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-37) \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \times 9 \times 4}}{2 \times 9}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{18} \Leftrightarrow y = \frac{37 \pm 35}{18}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{9} \vee y = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \vee x^2 = 4$$

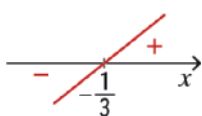
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{3} \vee x = -2 \vee x = 2$$

$$9x^4 + 4 \leq 37x^2 \Leftrightarrow 9x^4 - 37x^2 + 4 \leq 0$$

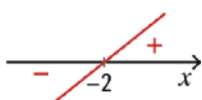
$$\Leftrightarrow 9\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2)(x-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)(3x-1)(x+2)(x-2) \leq 0$$

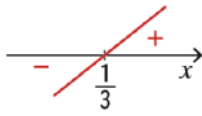
$$y = 3x+1$$



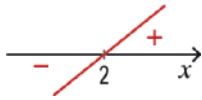
$$y = x+2$$



$$y = 3x-1$$



$$y = x-2$$



$x$	$-\infty$	$-2$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$2$	$+\infty$
$3x+1$	-	-	$0$	+	+	+
$3x-1$	-	-	-	$0$	+	+
$x-2$	-	-	-	-	$0$	+
$x+2$	-	$0$	+	+	+	+
$9x^4 - 37x^2 + 4$	+	$0$	-	$0$	-	+

$$9x^4 - 37x^2 + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-2, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 2\right]$$

$$S = \left[-2, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 2\right]$$

**34.1.** Volume caixa A:  $V_A = (x+2)(x+1)(2x-1)$

Volume caixa B:  $V_B = x(3x+3)x = 3x^2(x+1)$

$$x+2 > 0 \wedge x+1 > 0 \wedge 2x-1 > 0 \wedge x > 0 \wedge 3x+3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > -2 \wedge x > -1 \wedge x > \frac{1}{2} \wedge x > 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$V_A = V_B \Leftrightarrow (x+2)(x+1)(2x-1) = 3x^2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(2x-1) = \frac{3x^2(x+1)}{(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 4x = 3x^2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-1) \times (-2)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

Logo, a afirmação é falsa.  $V_A = V_B$  para  $x = 1$  e  $x = 2$ .

**34.2.**  $V_B > V_A \Leftrightarrow 3x^2(x+1) > (x+2)(x+1)(2x-1)$

$$\Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 > (x^2 + x + 2x + 2)(2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 > (x^2 + 3x + 2)(2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 > 2x^3 - x^2 + 6x^2 - 3x + 4x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$$

Seja  $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Os divisores de  $-2$  são:  $-1, 1, -2$  e  $2$

$$P(-1) = 0; P(1) = 0; P(-2) = -12; P(2) = 0$$

	$1$	$-2$	$-1$	$2$
$-1$		$-1$	$3$	$-2$
	$1$	$-3$	$2$	$0$
$1$		$1$	$-2$	
	$1$	$-2$	$0$	

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-2) > 0$$

$x$	$\frac{1}{2}$		$1$		$2$	$+\infty$
$x+1$		+	+	+	+	+
$x-1$		-	$0$	+	+	+
$x-2$		-	-	-	$0$	+
$(x+1)(x-1)(x-2)$		+	$0$	-	$0$	+

Logo,  $x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[ \cup ] 2, +\infty [$ .

**35.**  $x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 41x - 30 = 0$

C.A.  $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

Se  $x^2 + 2x - 3$  é divisor do primeiro membro,  $-3$  e  $1$  são zeros do primeiro membro.

	1	-5	-7	41	-30
-3		-3	24	-51	30
1		1	-7	10	0
	1	-7	10		0

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 41x - 30 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)(x^2 - 7x + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+3=0 \vee x-1=0 \vee x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \vee x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 10}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \vee x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \vee x = \frac{7+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \vee x = 5 \vee x = 2$$

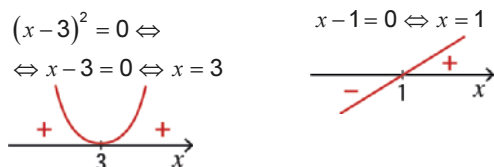
$$S = \{-3, 1, 2, 5\}$$

36.1.  $(x-3)^4 > 0$

Zeros de  $(x-3)^4$ :

$$(x-3)^4 = 0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3; S = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

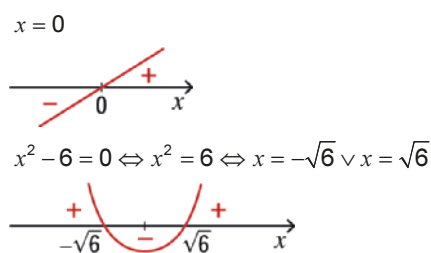
36.2.  $(x-3)^2(x-1) < 0$



x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$(x-3)^2$	+	+	0	+
$x-1$	-	0	+	+
$(x-3)^2(x-1)$	-	0	+	+

$$(x-3)^2(x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 1[; S = ]-\infty, 1[$$

36.3.  $x^3 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6) \geq 0;$



x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$x^2 - 6$	+	0	-	-	0
$x^3 - 6x$	-	0	+	0	+

$$x^3 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{6}, 0] \cup [\sqrt{6}, +\infty[$$

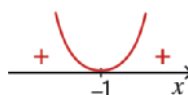
$$S = [-\sqrt{6}, 0] \cup [\sqrt{6}, +\infty[$$

36.4.  $x^5 + 2x^4 + x^3 < 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 + 2x + 1) < 0$

$$x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x = -1$$



x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x^3$	-	-	0	+
$x^2 + 2x + 1$	+	0	+	+
$x^3(x^2 + 2x + 1)$	-	0	-	+

$$S = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[$$

37.1.  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

Os divisores de 10 são:  $-1, 1, -2, 2, -5, 5, -10$  e  $10$

$$P(-1) = 0; P(1) = 8; P(-2) = -28; P(2) = 0;$$

$$P(-5) = -280; P(5) = 0; P(-10) = -1620;$$

$$P(10) = 440$$

$-1, 2$  e  $5$  são zeros de  $P(x)$ .

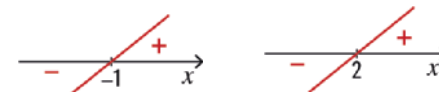
$$P(x) = (x+1)(x-2)(x-5)$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \vee x = 5$$

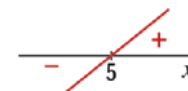
$$S = \{-1, 2, 5\}$$

37.2.  $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-5) \geq 0$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$



$$x-5=0 \Leftrightarrow x=5$$



x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	0	+	+
$x-5$	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 2] \cup [5, +\infty[$$

$$S = [-1, 2] \cup [5, +\infty[$$

38.1.  $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

	1	-2	1	-2	-2	4
2		2	0	2	0	-4
	1	0	1	0	-2	0
2		2	4	10	20	
	1	2	5	10	18	

Logo, 2 é uma raiz simples.

38.2.  $P(x) = (x-2)(x^4 + x^2 - 2)$

$x^4 + x^2 - 2 = 0$  é uma equação biquadrada.

Fazendo  $y = x^2$ , vem:

$$y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-1-3}{2} \vee y = \frac{-1+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = -2 \vee y = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -2}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \vee x^2 = 1$$

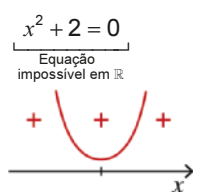
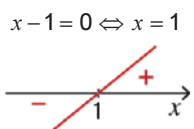
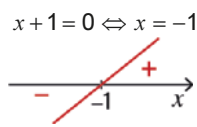
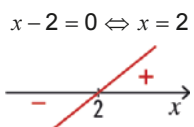
$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$P(x) = (x-2)(x^4 + x^2 - 2)$

	1	0	1	0	-2
-1		-1	1	-2	2
	1	-1	2	-2	0
1		1	0	2	
	1	0	2	0	

$P(x) = (x-2)(x+1)(x-1)(x^2+2)$

38.3.  $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)(x-1)(x^2+2) \geq 0$



$x$	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

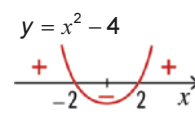
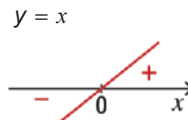
$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \cup [2, +\infty[$

$S = [-1, 1] \cup [2, +\infty[$

Pág. 146

39.1. Zeros de  $f$ :  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 2$



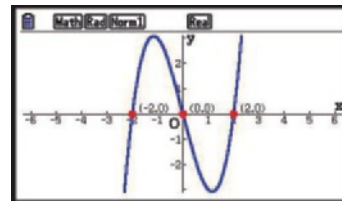
$x$	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$x$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$f$  é positiva em  $]-2, 0[ \cup ]2, +\infty[$

$f$  é negativa em  $]-\infty, -2[ \cup ]0, 2[$

Zeros de  $f$ :  $\{-2, 0, 2\}$

Verificação na calculadora gráfica:

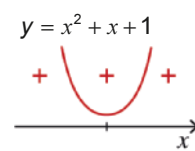
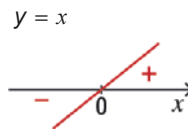


39.2.  $g(x) = x^3 + x^2 + x$

Zeros de  $g$ :  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$   
Equação impossível em  $\mathbb{R}$

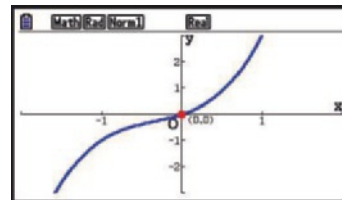


$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$x$	-	0	+
$x^2 + x + 1$	+	+	+
$g(x)$	-	0	+

$g$  é positiva em  $]0, +\infty[$ ;  $g$  é negativa em  $]-\infty, 0[$

Zero de  $g$ :  $\{0\}$

Verificação na calculadora gráfica:



39.3.  $h(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

	2	-3	0	1
1		2	-1	-1
	2	-1	-1	0

$h(x) = (x-1)(2x^2 - x - 1)$

Zeros de  $h$ :

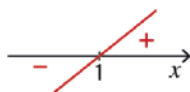
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee 2x^2 - x - 1 = 0$$

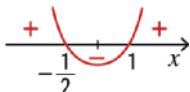
$$\Leftrightarrow x=1 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x=1$$

$$y = x - 1$$



$$y = 2x^2 - x - 1$$



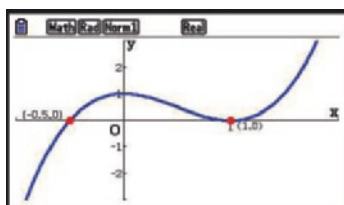
$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+
$2x^2-x-1$	+	0	-	0	+
$h(x)$	-	0	+	0	+

$h$  é positiva em  $]-\frac{1}{2}, 1[ \cup ]1, +\infty[$

$h$  é negativa em  $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

Zeros de  $h$ :  $\{-\frac{1}{2}, 1\}$

Verificação na calculadora gráfica:



39.4.  $i(x) = -3x^3 - 2x^2 + 7x - 2$

	-3	-2	7	-2
-2		6	-8	2
	-3	4	-1	0

$$i(x) = (x+2)(-3x^2 + 4x - 1)$$

Zeros de  $i$ :

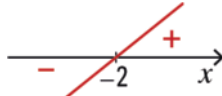
$$i(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(-3x^2 + 4x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2=0 \vee -3x^2 + 4x - 1 = 0$$

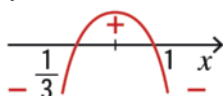
$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-6}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{3}$$

$$y = x + 2$$



$$y = -3x^2 + 4x - 1$$



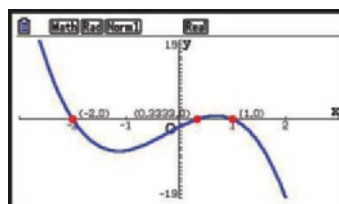
$x$	$-\infty$	-2		$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+	+
$-3x^2+4x-1$	-	-	-	0	+	-
$i(x)$	+	0	-	0	+	-

$i$  é positiva em  $]-\infty, -2[ \cup ]\frac{1}{3}, 1[$

$i$  é negativa em  $]-2, \frac{1}{3}[ \cup ]1, +\infty[$

Zeros de  $i$ :  $\{-2, \frac{1}{3}, 1\}$

Verificação na calculadora gráfica:



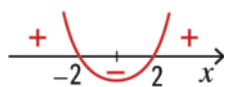
40.1. Zeros de  $f$ :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

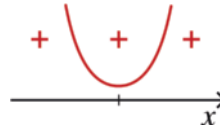
$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \vee x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Equação impossível em  $\mathbb{R}$

$$y = x^2 - 4$$



$$y = x^2 + 4$$



$x$	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x^2-4$	+	0	-	0	+
$x^2+4$	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	-	0	+

$f$  é positiva em  $]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$

$f$  é negativa em  $]-2, 2[$

Zeros de  $f$ :  $\{-2, 2\}$

40.2. Zeros de  $g$ :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 8y - 9 = 0$$

( $y=x^2$ )

$$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{8-10}{2} \vee y = \frac{8+10}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -1 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

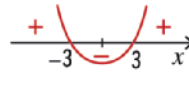
Equação impossível em  $\mathbb{R}$

$$g(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$$

$$y = x^2 + 1$$



$$y = x^2 - 9$$



$x$	$-\infty$	$-3$		$3$	$+\infty$
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+
$x^2 - 9$	+	0	-	0	+
$g(x)$	+	0	-	0	+

$g$  é positiva em  $]-\infty, -3[ \cup ]3, +\infty[$

$g$  é negativa em  $]-3, 3[$

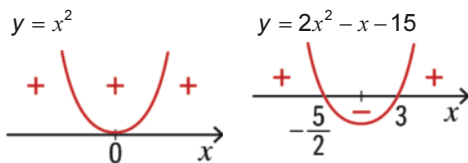
Zeros de  $g$ :  $\{-3, 3\}$

**40.3. Zeros de  $h$ :**

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - x^3 - 15x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(2x^2 - x - 15) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 2x^2 - x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{2} \vee x = 3$$



$x$	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		$0$		$3$	$+\infty$
$x^2$	+	+	+	0	+	+	+
$2x^2 - x - 15$	+	0	-	-	-	0	+
$h(x)$	+	0	-	0	-	0	+

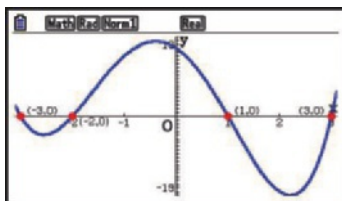
$h$  é positiva em  $]-\infty, -\frac{5}{2}[ \cup ]3, +\infty[$

$h$  é negativa em  $]-\frac{5}{2}, 0[ \cup ]0, 3[$

Zeros de  $h$ :  $\{-\frac{5}{2}, 0, 3\}$

**40.4.  $i(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$**

Recorrendo à calculadora gráfica:



Podemos conjecturar que  $-3, -2, 1$  e  $3$  são zeros de  $i$ .

	1	1	-11	-9	18
1		1	2	-9	-18
	1	2	-9	-18	0
-2		-2	0	18	
	1	0	-9	0	

$$i(x) = (x-1)(x+2)(x^2-9)$$

Zeros de  $i$ :

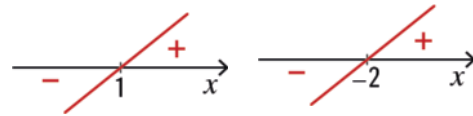
$$i(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x+2=0 \vee x^2-9=0$$

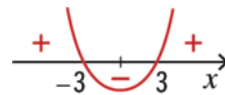
$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-2 \vee x^2=9 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2 \vee x=\pm 3$$

$$y = x-1$$

$$y = x+2$$



$$y = x^2 - 9$$



$x$	$-\infty$	$-3$		$-2$		$1$		$3$	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x+2$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x^2-9$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$i(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$i$  é positiva em  $]-\infty, -3[ \cup ]-2, 1[ \cup ]3, +\infty[$

$i$  é negativa em  $]-3, -2[ \cup ]1, 3[$

Zeros de  $i$ :  $\{-3, -2, 1, 3\}$

**41.1.**  $f(1) = -4 \Leftrightarrow 1^3 + k \times 1 - 2 = -4 \Leftrightarrow k = -3$

**41.2.**  $f(x) = x^3 - 3x - 2$

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	0
-1		-1	2	
	1	-2	0	

$$f(x) = (x+1)^2(x-2)$$

$-1$  é um zero duplo de  $f$ .

**41.3.**

$x$	$-\infty$	$-1$		$1$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

**41.4.**  $f$  é crescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[1, +\infty[$ .

$f$  é decrescente em  $]-1, 1]$ .

$f$  tem máximo relativo 0 para  $x = -1$  e mínimo relativo  $-4$  para  $x = 1$ .  $D_f' = \mathbb{R}$

**41.5.**  $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 > 2x^2 - 2$

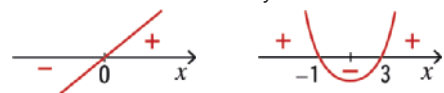
$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) > 0$$

**C.A.**  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{2} \vee x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

$$y = x$$

$$y = x^2 - 2x - 3$$



$x$	$-\infty$	$-1$		$0$		$3$	$+\infty$
$x$	-	-	-	$0$	+	+	+
$x^2 - 2x - 3$	+	$0$	-	-	-	$0$	+
$x(x^2 - 2x - 3)$	-	$0$	+	$0$	-	$0$	+

$$S = ]-1, 0[ \cup ]3, +\infty[$$

Pág. 147

42.1.  $f(0) = 1 \Leftrightarrow 0^4 - 2 \times 0^2 + k = 1 \Leftrightarrow k = 1$

42.2.  $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$

$f(-x) = f(x)$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Então, o eixo  $Oy$  é um eixo de simetria da função  $f$ .

42.3.  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = (x^2 - 1)^2$

$\Leftrightarrow f(x) = [(x-1)(x+1)]^2 \Leftrightarrow f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$

Outro processo:

Zeros de  $f$ :

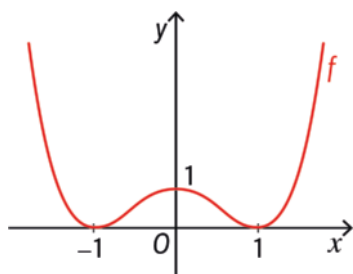
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$   
( $y=x^2$ )

$\Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Leftrightarrow y = 1$

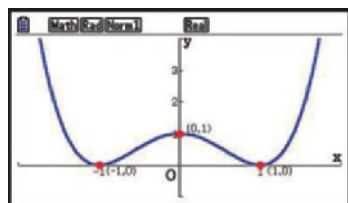
$y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 \Leftrightarrow f(x) = (x^2 - 1)^2$   
( $x^2=y$ )

$\Leftrightarrow f(x) = [(x-1)(x+1)]^2 \Leftrightarrow f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$

42.4.



Verificação na calculadora gráfica:



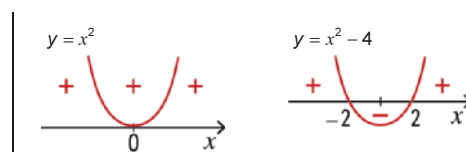
42.5.

$x$	$-\infty$	$-1$		$0$		$1$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$

42.6.  $f(x) < 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 < 2x^2 + 1$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0$

C.A.  $| x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$



$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$2$	$+\infty$
$x^2$	+	+	+	$0$	+	+	+
$x^2 - 4$	+	$0$	-	-	-	$0$	+
$x^2(x^2 - 4)$	+	$0$	-	$0$	-	$0$	+

$$S = ]-2, 0[ \cup ]0, 2[$$

43.1.  $D(0, f(0))$

$f(0) = -0^4 + 4 \times 0^3 - 2 \times 0^2 - 4 \times 0 + 3 = 3$

$A_{[ABCD]} = 6 \Leftrightarrow \overline{AB} \times f(0) = 6 \Leftrightarrow \overline{AB} \times 3 = 6$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \Leftrightarrow x_B - x_A = 2 \Leftrightarrow x_B + 1 = 2 \Leftrightarrow x_B = 1$

$B$  tem abscissa 1.

43.2.  $-1$  e  $1$  são zeros de  $f$ , sendo que  $1$  é zero duplo.

	$-1$	$4$	$-2$	$-4$	$3$
$1$		$-1$	$3$	$1$	$-3$
	$-1$	$3$	$1$	$-3$	$0$
$1$		$-1$	$2$	$3$	
	$-1$	$2$	$3$		$0$
$-1$		$1$	$-3$		
	$-1$	$3$		$0$	

$f(x) = (x-1)^2(x+1)(-x+3)$

43.3.  $\overline{DC} = \overline{AB} = 2$

Como  $D$  tem coordenadas  $(0, 3)$  e  $[ABCD]$  é um paralelogramo,  $C(2, 3)$ .

Para que  $C$  pertença ao gráfico de  $f$ ,

$f(2) = 3$

$f(2) = -2^4 + 4 \times 2^3 - 2 \times 2^2 - 4 \times 2 + 3$   
 $= -16 + 32 - 8 - 8 + 3 = 3$

$f(2) = 3$ . Então,  $C$  pertence ao gráfico de  $f$ .

Pág. 148

44.1.  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{0,8^2}$

$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{0,64} - 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{0,36}{0,64}$

Como  $\alpha$  é um ângulo agudo,  $\tan \alpha > 0$ . Então,

$\tan \alpha = \sqrt{\frac{0,36}{0,64}} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$ ;  $m_r = \tan \alpha \Leftrightarrow m_r = \frac{3}{4}$

44.2.  $B(-2, f(-2))$

$f(-2) = (-2)^3 - \frac{9}{4} \times (-2) + 6 = -8 + \frac{9}{2} + 6 = \frac{5}{2}$

$$B\left(-2, \frac{5}{2}\right) \text{ e } B \in r$$

$$r: y = \frac{3}{4}x + b$$

$$\frac{5}{2} = \frac{3}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = b \Leftrightarrow b = 4$$

Logo,  $r$  intersesta o eixo  $Oy$  no ponto de ordenada 4.

**44.3.**  $C$  é ponto de interseção da reta  $r$  com a função  $f$ .

$$f(x) = \frac{3}{4}x + 4 \Leftrightarrow x^3 - \frac{9}{4}x + 6 = \frac{3}{4}x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

Sabemos que  $-2$  é solução desta equação porque  $B$  é outro ponto de interseção de  $r$  com a função  $f$ .

1	0	-3	2
-2	-2	4	-2
1	-2	1	0

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \vee (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

$$C(1, f(1)); f(1) = 1^3 - \frac{9}{4} \times 1 + 6 = 7 - \frac{9}{4} = \frac{19}{4}$$

$$C\left(1, \frac{19}{4}\right)$$

**45.1.**  $B(1, f(1))$

$$f(1) = -1^3 + 2 \times 1^2 + 5 \times 1 - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$$

$$B(1, 0); C(2, f(2))$$

$$f(2) = -2^3 + 2 \times 2^2 + 5 \times 2 - 6 = -8 + 8 + 10 - 6 = 4$$

$$C(2, 4); m_{BC} = \frac{4-0}{2-1} \Leftrightarrow m_{BC} = 4$$

$$g(x) = 4x + b; g(2) = 4 \Leftrightarrow 4 \times 2 + b = 4 \Leftrightarrow b = -4$$

$$g(x) = 4x - 4$$

$A$  é ponto de interseção das funções  $f$  e  $g$ .

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = 4x - 4$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$$

1 e 2 são soluções desta equação, dado que  $B$  e  $C$  são também pontos de interseção das duas funções.

1	-1	2	1	-2
1	-1	-1	1	2
2	-1	1	2	0
2	-1	-1	-2	0

$$-x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(-x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x-2 = 0 \vee -x-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = -1$$

O ponto  $A$  tem abcissa  $-1$ .

$$f(-1) = -(-1)^3 + 2(-1)^2 + 5(-1) - 6 = 1 + 2 - 5 - 6 = -8$$

$$A(-1, -8)$$

**45.2. a)**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = 0$

$A$  é solução desta equação, dado que  $B$  é um ponto de  $f$  e  $B(1, 0)$ .

1	-1	2	5	-6
1	-1	-1	1	6
1	-1	1	6	0

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(-x^2 + x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \vee -x^2 + x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-1+5}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-6}{-2} \vee x = \frac{4}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3 \vee x = -2$$

$$I(3, 0)$$

$$T(-3, f(-3))$$

$$f(-3) = -(-3)^3 + 2(-3)^2 + 5(-3) - 6 = 27 + 18 - 15 - 6 = 24$$

$$T(-3, 24); R(-3, 0)$$

$$\overline{IR} = 6; \overline{TR} = 24$$

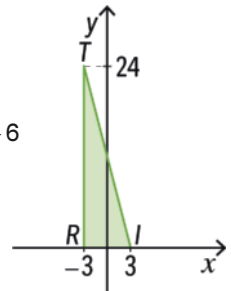
$$A_{[TIR]} = \frac{\overline{IR} \times \overline{TR}}{2} \Leftrightarrow A_{[TIR]} = \frac{6 \times 24}{2} \Leftrightarrow A_{[TIR]} = 72 \text{ u.a.}$$

$$\text{b) } \overline{TI} = \sqrt{(-3-3)^2 + (24-0)^2} \Leftrightarrow \overline{TI} = \sqrt{612}$$

$$P_{[TIR]} = \overline{IR} + \overline{TR} + \overline{TI} \Leftrightarrow P_{[TIR]} = 6 + 24 + \sqrt{612}$$

$$\Leftrightarrow P_{[TIR]} = 30 + \sqrt{612}$$

$$P_{[TIR]} \approx 54,7 \text{ u.c.}$$



**46.1.**  $f(x) = \frac{3x}{2x-6}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3x}{2x-6}$$

Cálculos auxiliares:  $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

**46.2.**  $g(x) = \frac{x}{x^4+1}$

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} x^4 + 1 \neq 0 \\ \text{condição universal} \end{array} \right\} = \mathbb{R}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{x^4+1}$$

46.3.  $h(x) = \frac{x-1}{x^6-x^4}$

Cálculos auxiliares:

$$x^6 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^4(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^6 - x^4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

$$h(x) = \frac{\cancel{x-1}}{x^4(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x^4(x+1)} = \frac{1}{x^5+x^4}$$

$$h: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^5+x^4}$$

46.4.  $i(x) = \frac{3x-6}{2x^2-3x-2}$

Cálculos auxiliares:

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3-5}{4} \vee x = \frac{3+5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$$

$$D_i = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 3x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$$

$$i(x) = \frac{3\cancel{(x-2)}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cancel{(x-2)}} = \frac{3}{2x+1}$$

$$i: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3}{2x+1}$$

46.5.  $j(x) = \frac{x^2+2x}{x^5-4x^3}$

Cálculos auxiliares:

$$x^5 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

$$D_j = \{x \in \mathbb{R} : x^5 - 4x^3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$$

$$j(x) = \frac{x(x+2)}{x^3(x^2-4)} = \frac{x\cancel{(x+2)}}{x^3(x-2)\cancel{(x+2)}} =$$

$$= \frac{1}{x^2(x-2)} = \frac{1}{x^3-2x^2}$$

$$j: \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^3-2x^2}$$

46.6.  $k(x) = \frac{x+4}{x^3-2x^2-15x}$

Cálculos auxiliares:

$$x^3 - 2x^2 - 15x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 15) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 5$$

$$D_k = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - 15x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 5\}$$

$$k: \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x+4}{x^3-2x^2-15x}$$

47.1.  $f(x) = \frac{1}{x+1} = 0 + \frac{1}{x+1}$

Equação da assíntota vertical:  $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Equação da assíntota horizontal:  $y=0$

47.2.  $g(x) = \frac{2}{x+5} + 7 = 7 + \frac{2}{x+5}$

Equação da assíntota vertical:  $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$

Equação da assíntota horizontal:  $y=7$

47.3.  $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4-x} = -\frac{1}{2} + \frac{-3}{x-4}$

Equação da assíntota vertical:  $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$

Equação da assíntota horizontal:  $y = -\frac{1}{2}$

47.4.  $i(x) = 2 - \frac{5}{x+4} = 2 + \frac{-5}{x+4}$

Equação da assíntota vertical:  $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$

Equação da assíntota horizontal:  $y=2$

47.5.  $j(x) = 2\left(3 - \frac{1}{2-x}\right) = 6 - \frac{2}{2-x} = 6 + \frac{2}{x-2}$

Equação da assíntota vertical:  $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

Equação da assíntota horizontal:  $y=6$

47.6.  $k(x) = -\frac{4}{-x+3} = 0 + \frac{4}{x-3}$

Equação da assíntota vertical:  $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

Equação da assíntota horizontal:  $y=0$

48.1.  $f(x) = \frac{x+2}{x}$ ;  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{x+2}{x} = \frac{x}{x} + \frac{2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = 0$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 1$

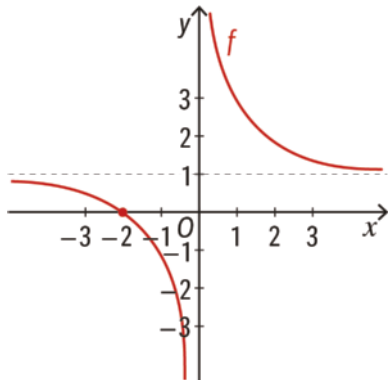
Interseção do gráfico com o eixo  $Ox$ :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$P(-2, 0)$

O gráfico de  $f$  não intersesta o eixo  $Oy$ .

Cálculos auxiliares:  $f(2) = 2$ ;  $f(-1) = -1$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$D_f = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$$

$f$  é decrescente em  $]-\infty, -2[$  e em  $]-2, +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	N.D.	$+$

A função  $f$  é positiva em  $]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$  e

negativa em  $]-2, 0[$ .

48.2.  $g(x) = \frac{x}{x+2}$ ;  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Cálculos auxiliares:

$$\frac{x}{-x-2} \quad \frac{|x+2|}{-2} \quad g(x) = \frac{x}{x+2} = 1 + \frac{-2}{x+2}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = -2$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 1$

Interseção do gráfico com o eixo  $Ox$ :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

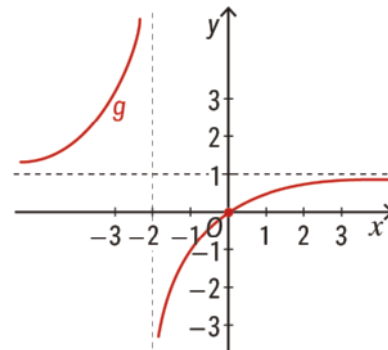
$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq -2$$

$P(0, 0)$

$P$  é também o ponto de interseção do gráfico com o eixo  $Oy$ , ou seja, o gráfico de  $f$  passa na origem do referencial.

Cálculos auxiliares:

$$g(-3) = 3; g(-1) = -1; g(2) = 0,5$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = -\infty$$

$$D_g = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$$

$g$  é crescente em  $]-\infty, -2[$  e em  $]-2, +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	N.D.	$-$	$0$	$+$

A função  $g$  é positiva em  $]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$  e

negativa em  $]-2, 0[$ .

48.3.  $h(x) = \frac{x-1}{x-2}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Cálculos auxiliares:

$$\frac{x-1}{-x+2} \quad \frac{|x-2|}{1}$$

$$h(x) = \frac{x-1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = 2$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 1$

Interseção do gráfico com o eixo  $Ox$ :

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \wedge x-2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \wedge x \neq 2$$

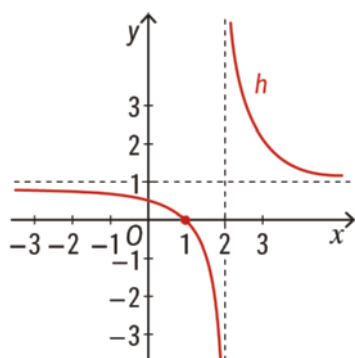
$P(1, 0)$

Interseção do gráfico com o eixo  $Oy$

$$h(0) = \frac{0-1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

$$Q\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Cálculos auxiliares:  $h(3) = 2$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1^- \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = +\infty$$

$$D'_h = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$h$  é decrescente em  $]-\infty, 2[$  e em  $]2, +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$h(x)$	+	0	N.D.	+

A função  $h$  é positiva em  $]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$  e negativa em  $]1, 2[$ .

48.4.  $i(x) = \frac{x-2}{x+1}$ ;  $D_i = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{array}{r} x-2 \quad |x+1 \\ -x-1 \quad 1 \\ \hline -3 \end{array}$$

$$i(x) = \frac{x-2}{x+1} = 1 + \frac{-3}{x+1}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = -1$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 1$

Interseção do gráfico com o eixo  $Ox$ :

$$i(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x = 2 \wedge x \neq -1$$

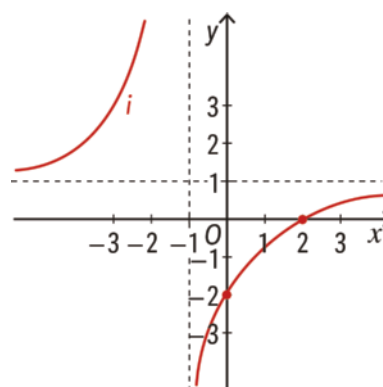
$P(2, 0)$

Interseção do gráfico com o eixo  $Oy$

$$h(0) = \frac{0-2}{0+1} = -2$$

$Q(0, -2)$

Cálculos auxiliares:  $i(-2) = 4$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} i(x) = 1^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} i(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} i(x) = -\infty$$

$$D'_i = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$i$  é crescente em  $]-\infty, -1[$  e em  $]1, +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$i(x)$	+	N.D.	-	0	+

A função  $i$  é positiva em  $]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$  e negativa em  $]1, 2[$ .

48.5.  $j(x) = \frac{1-2x}{x+3}$ ;  $D_j = \{x \in \mathbb{R} : x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{array}{r} -2x+1 \quad |x+3 \\ +2x+6 \quad -2 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$j(x) = \frac{1-2x}{x+3} = -2 + \frac{7}{x+3}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = -3$

Equação da assíntota horizontal:  $y = -2$

Interseção do gráfico com o eixo  $Ox$ :

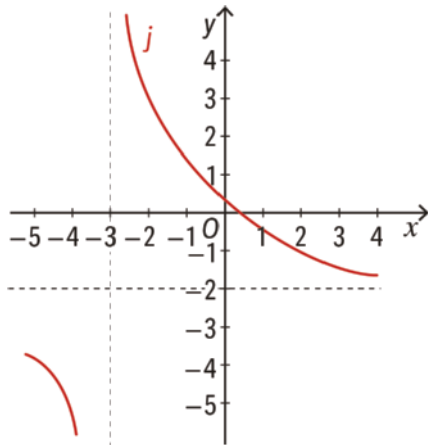
$$j(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x+3} = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \wedge x+3 \neq 0 \Leftrightarrow -2x = -1 \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Interseção do gráfico com o eixo  $Oy$ :

$$j(0) = \frac{1-2 \times 0}{0+3} = \frac{1}{3}$$

$Q\left(0, \frac{1}{3}\right)$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} j(x) = -2^- \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = -2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} j(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} j(x) = +\infty$$

$$D'_j = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$$

$j$  é crescente em  $]-\infty, -3[$  e em  $]-3, +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	$-3$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$j(x)$	$-$	N.D.	$+$	$0$	$-$

A função  $j$  é positiva em  $]-3, \frac{1}{2}[$  e negativa em

$$]-\infty, -3[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[.$$

48.6.  $k(x) = \frac{4x+5}{2x-3}$ ;  $D_k = \{x \in \mathbb{R} : 2x-3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$$k(x) = \frac{4x+5}{2x-3} = \frac{2\left(2x+\frac{5}{2}\right)}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \frac{2x+\frac{5}{2}}{x-\frac{3}{2}} = 2 + \frac{\frac{11}{2}}{x-\frac{3}{2}}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{array}{r} 2x + \frac{5}{2} \quad \left| \begin{array}{l} x - \frac{3}{2} \\ -2x + \frac{6}{2} \end{array} \right. \\ \hline \frac{11}{2} \end{array}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = \frac{3}{2}$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 2$

Interseção do gráfico com o eixo  $Ox$ :

$$k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+5}{2x-3} = 0 \Leftrightarrow 4x+5 = 0 \wedge 2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} \wedge x \neq \frac{3}{2}$$

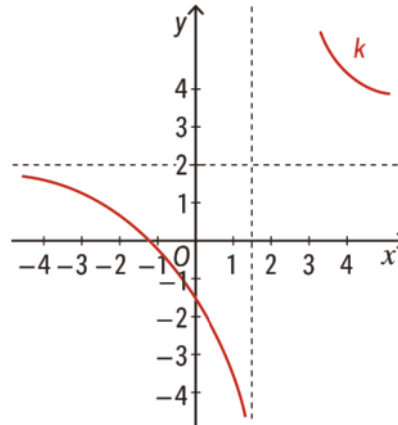
$$P\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$$

Interseção do gráfico com o eixo  $Oy$ :

$$k(0) = \frac{4 \times 0 + 5}{2 \times 0 - 3} = -\frac{5}{3}$$

$$Q\left(0, -\frac{5}{3}\right)$$

Cálculos auxiliares:  $k(3) = \frac{17}{3} \approx 5,7$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = 2^- \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} k(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} k(x) = +\infty$$

$$D'_k = ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[$$

$k$  é decrescente em  $]-\infty, \frac{3}{2}[$  e em  $]\frac{3}{2}, +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$k(x)$	$+$	$0$	$-$	N.D.	$+$

A função  $k$  é positiva em  $]-\infty, -\frac{5}{4}[ \cup ]\frac{3}{2}, +\infty[$  e

negativa em  $]-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}[$ .

49.1. Equação da assíntota vertical:  $x = 4$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 5$

Interseção do gráfico com o eixo  $Oy$ :  $(0, 3)$

$$f(x) = a + \frac{b}{x-c}$$

Equação da assíntota vertical:  $x = c$

Equação da assíntota horizontal:  $y = a$

$$f(x) = 5 + \frac{b}{x-4}$$

$$3 = 5 + \frac{b}{0-4} \Leftrightarrow 3 = 5 - \frac{b}{4} \Leftrightarrow -2 = -\frac{b}{4} \Leftrightarrow b = 8$$

$$f(x) = \frac{5}{(x-4)} + \frac{8}{x-4} = \frac{5x-20+8}{x-4} = \frac{5x-12}{x-4}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-12}{x-4} = 0 \Leftrightarrow 5x-12=0 \wedge x-4 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12}{5} \wedge x \neq 4; A\left(\frac{12}{5}, 0\right)$$

49.2. Equação da assíntota vertical:  $x = -5$

Equação da assíntota horizontal:  $y = -3$

Interseção do gráfico com o eixo Ox:  $(-7, 0)$

$$g(x) = a + \frac{b}{x-c}$$

$$g(x) = -3 + \frac{b}{x-(-5)} = -3 + \frac{b}{x+5}$$

$$0 = -3 + \frac{b}{-7+5} \Leftrightarrow 0 = -3 + \frac{b}{-2} \Leftrightarrow 3 = -\frac{b}{2} \Leftrightarrow b = -6$$

$$g(x) = -3 + \frac{-6}{(x+5)} = \frac{-3x-15-6}{x+5} = \frac{-3x-21}{x+5}$$

$$g(0) = \frac{-3 \times 0 - 21}{0+5} = -\frac{21}{5}$$

$$A\left(0, -\frac{21}{5}\right)$$

50.1.  $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{1-x} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2+3-x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+6}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x+6=0 \wedge x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x=6 \wedge x \neq 1$$

$$S = \{6\}$$

50.2.  $\frac{1}{x-1} = \frac{4}{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4x+4+x^2-x}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \wedge x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \wedge (x \neq 0 \wedge x-1 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow x=2$$

$$S = \{2\}$$

50.3.  $\frac{5}{x} = \frac{3x}{x^2-x} + \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{5}{x} - \frac{3x}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{x} - \frac{3x}{x(x-1)} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-5-3x-x}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-5=0 \wedge x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=5 \wedge (x \neq 0 \wedge x-1 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=5 \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 1); S = \{5\}$$

50.4.  $\frac{x^2}{x+1} - x = \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} - \frac{x}{\frac{2x(x+1)}{2(x+1)}} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - 2x^2(x+1) - 2(x+1) + 3x(x+1)}{2x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 2 + 3x^2 + 3x}{2x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{2x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \wedge 2x(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \wedge (2x \neq 0 \wedge x+1 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1-3}{2} \vee x = \frac{-1+3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

$$S = \{-2, 1\}$$

51.  $f(x) = \frac{2x-6}{1-x}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Bissetriz dos quadrantes ímpares:  $y = x$

$$\frac{2x-6}{1-x} = x \Leftrightarrow \frac{2x-6}{1-x} - \frac{x}{(1-x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-6-x+x^2}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-6}{1-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-6=0 \wedge 1-x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$$

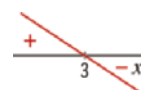
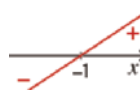
O gráfico de  $f$  intersecta a bissetriz dos quadrantes ímpares nos pontos de abscissas  $-3$  e  $2$ .

Coordenadas dos pontos:  $(-3, -3)$  e  $(2, 2)$ .

52.1.  $\frac{x+1}{3-x} < 0$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$$3-x=0 \Leftrightarrow x=3$$



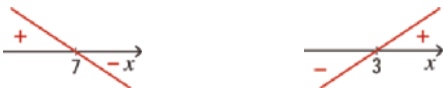
$x$	$-\infty$	$-1$		$3$	$+\infty$
$x+1$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$
$\frac{x+1}{3-x}$	$-$	$0$	$+$	N.D.	$-$

$$S = ]-\infty, -1[ \cup ]3, +\infty[$$

52.2.  $\frac{x+1}{x-3} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-3} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-2x+6}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+7}{x-3} \geq 0$$

$$-x+7=0 \Leftrightarrow x=7 \quad x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$



$x$	$-\infty$	$3$		$7$	$+\infty$
$-x+7$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$
$x-3$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$\frac{-x+7}{x-3}$	$-$	N.D.	$+$	$0$	$-$

$$S = ]3, 7]$$

52.3.  $\frac{3x-2}{x} \leq \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x} - \frac{2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-2)(x-1)-2x}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

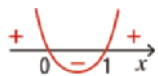
$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-3x-2x+2-2x}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-7x+2}{x(x-1)} \leq 0$$

$$3x^2-7x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 2$$



$$x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$



$x$	$-\infty$	$0$		$\frac{1}{3}$		$1$		$2$	$+\infty$
$3x^2-7x+2$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x(x-1)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$\frac{3x^2-7x+2}{x(x-1)}$	$+$	N.D.	$-$	$0$	$+$	N.D.	$-$	$0$	$+$

$$S = \left]0, \frac{1}{3}\right] \cup ]1, 2]$$

52.4.  $\frac{4-3x}{x-2} \leq 1-2x \Leftrightarrow \frac{4-3x}{x-2} - 1 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow$

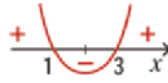
$$\Leftrightarrow \frac{4-3x-x+2+2x^2-4x}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-8x+6}{x-2} \leq 0$$

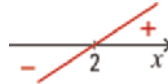
$$2x^2-8x+6=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4-2}{2} \vee x = \frac{4+2}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$$



$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$



$x$	$-\infty$	$1$		$2$		$3$	$+\infty$
$2x^2-8x+6$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x^2-8x+6}{x-2}$	$-$	$0$	$+$	N.D.	$-$	$0$	$+$

$$S = ]-\infty, 1] \cup ]2, 3]$$

53.  $f(x) = \frac{2-x^2}{x-3}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

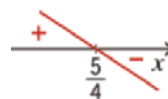
$$g(x) = 1-x; D_g = \mathbb{R}$$

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \frac{2-x^2}{x-3} \geq 1-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x^2}{x-3} - 1 + x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x^2-x+3+x^2-3x}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x+5}{x-3} \geq 0$$

$$-4x+5=0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \quad x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$



$x$	$-\infty$	$\frac{5}{4}$		$3$	$+\infty$
$-4x+5$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$\frac{-4x+5}{x-3}$	$-$	$0$	$+$	N.D.	$-$

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5}{4}, 3\right[$$

$$A = \left[\frac{5}{4}, 3\right[$$

54.  $C(x) = 2,5x + 10\,000; \bar{C}(x) = \frac{2,5x + 10\,000}{x}$

54.1. a)  $x = 500$

$$\bar{C}(500) = \frac{2,5 \times 500 + 10\,000}{500} = 22,50 \text{ €}$$

O custo médio é 22,50 € .

b)  $x = 5000$

$$\bar{C}(5000) = \frac{2,5 \times 5000 + 10\,000}{5000} = 4,50 \text{ €}$$

O custo médio é 4,50 € .

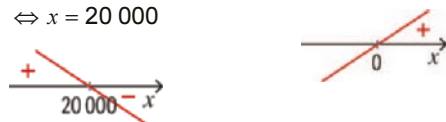
54.2.  $\bar{C}(x) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{2,5x + 10\,000}{x} \leq 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2,5x + 10\,000}{x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2,5x + 10\,000 - 3x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-0,5x + 10\,000}{x} \leq 0$$

$$-0,5x + 10\,000 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 20\,000$$



$x$	0		20 000	$+\infty$
$-0,5x + 10\,000$	N.D.	+	0	-
$x$	N.D.	+	+	+
$\frac{-0,5x + 10\,000}{x}$	N.D.	+	0	-

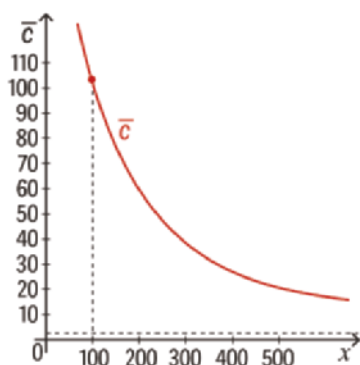
$$S = [20\,000, +\infty[$$

Deverão ser produzidas, no mínimo, 20 000 unidades.

54.3.  $\bar{C}(x) = \frac{2,5x + 10\,000}{x} = 2,5 + \frac{10\,000}{x}$

Equação da assíntota vertical:  $x = 0$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 2,5$



Cálculos auxiliares:  $\bar{C}(100) = 102,5$  ;

$$\bar{C}(300) = 35,8(3) ; \bar{C}(500) = 22,5$$

54.4. A assíntota horizontal tem equação  $y = 2,5$  , o que significa que, à medida que o número de peças produzidas aumenta, o custo médio, em euros, por unidade produzida, tende a estabilizar a volta de 2,50 euros.

55.1.

	Café tipo 1	Café tipo 2 (qualidade superior)	Total
Quantidade	10 kg	$x$ kg	$(10 + x)$ kg
Preço/kg	12 €	20 €	
Preço total de cada tipo de café (€)	$10 \times 12 = 120$	$20x$	$120 + 20x$

Logo, o preço por quilo da mistura é dado por:

$$P(x) = \frac{120 + 20x}{10 + x}, x > 0$$

55.2.

$$16 < P(x) \leq 18 \Leftrightarrow \frac{120 + 20x}{10 + x} > 16 \wedge \frac{120 + 20x}{10 + x} \leq 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{120 + 20x}{10 + x} - \frac{16}{1} > 0 \wedge \frac{120 + 20x}{10 + x} - \frac{18}{1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{120 + 20x - 160 - 16x}{10 + x} > 0 \wedge$$

$$\wedge \frac{120 + 20x - 180 - 18x}{10 + x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x - 40}{10 + x} > 0 \wedge \frac{2x - 60}{10 + x} \leq 0$$

Como  $10 + x > 0$  , vem:

$$4x - 40 > 0 \wedge 2x - 60 \leq 0 \Leftrightarrow 10 < x \leq 30$$

Deve ser utilizada uma quantidade de café superior a 10 kg e menor ou igual a 30 kg.

56. Maria: 10 km;  $v = x$  km/h

Célia: 12 km;  $v = (x + 1)$  km/h

Seja  $t$  o tempo gasto pelas duas amigas para efetuar o percurso.

Maria:

Espaço percorrido (km)	Tempo gasto (h)
$x$	1
10	$t$

$$t = \frac{10}{x}$$

Célia:

Espaço percorrido (km)	Tempo gasto (h)
$x + 1$	1
12	$t$

$$t = \frac{12}{x + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Então, } \frac{10}{x} = \frac{12}{x+1} &\Leftrightarrow \frac{10}{\underset{(x+1)}{x}} - \frac{12}{\underset{(x)}{x+1}} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{10x+10-12x}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+10}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2x+10 = 0 \wedge x(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 5 \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -1) \end{aligned}$$

A Maria caminha a uma velocidade média de 5 km/h e a Célia 6 km/h.

57.  $f(x) = \frac{8-x}{x-3}$ ;  $A(x, k)$ ;  $B(0, k)$

57.1.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8-x}{x-3} = 0 \Leftrightarrow 8-x = 0 \wedge x-3 \neq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 8 \wedge x \neq 3$ . Logo,  $x < 8$ .

Se  $x < 3$ ,  $f(x) < 0$  e, por observação do gráfico,  $f(x) > 0$ .

$x$  não pode ser 3 porque  $x = 3$  é a equação de uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Assim,  $3 < x < 8$ .

57.2. Se  $k = 24$ ,  $A(x, 24)$  e  $B(0, 24)$

$$\begin{aligned} f(x) = 24 &\Leftrightarrow \frac{8-x}{x-3} = 24 \Leftrightarrow \frac{8-x}{x-3} - 24 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{8-x-24x+72}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \frac{-25x+80}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -25x+80 = 0 \wedge x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5} \wedge x \neq 3 \end{aligned}$$

$$A_{[OAB]} = \frac{\frac{16}{5} \times 24}{2} = \frac{192}{5} = 38,4 \text{ u. a.}$$

57.3. Se  $\widehat{BAO} = 45^\circ$ , o triângulo  $[OAB]$  é isósceles, logo,  $\overline{OB} = \overline{AB}$ .

Assim, a abcissa do  $A$  é igual à ordenada.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{8-x}{x-3} = x \Leftrightarrow \frac{8-x}{x-3} - x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{8-x-x^2+3x}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x+8}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x^2+2x+8 = 0 \wedge x-3 \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times 8}}{2 \times (-1)} \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2} \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x = 4 \vee \underset{\substack{\text{impossível} \\ 3 < x < 8}}{x = -2} \wedge x \neq 3 \end{aligned}$$

A abcissa do ponto  $A$  é 4.

58.1. 30% da solução é ácido puro.

$$0,3 \times 5 = 1,5$$

$$5 - 1,5 = 3,5$$

São necessários 1,5 litros de ácido e 3,5 litros de água.

58.2. a) 5 L de solução a 40%:

$$5 \times 0,4 = 2 \text{ L de ácido e } 3 \text{ L de água}$$

Seja  $x$  a quantidade de água adicionada.

Temos  $(5+x)$  L de solução.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+5} = 32\% &\Leftrightarrow \frac{2}{x+5} = 0,32 \Leftrightarrow \frac{2}{x+5} - 0,32 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2-0,32x-1,6}{x+5} = 0 \Leftrightarrow \frac{-0,32x+0,4}{x+5} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,32x+0,4 = 0 \wedge x+5 \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{0,4}{0,32} \wedge x \neq -5 \Leftrightarrow x = 1,25 \end{aligned}$$

Devem ser adicionados 1,25 litros de água.

b)  $5 + 1,25 = 6,25$

Vão ser obtidos 6,25 L de solução ácida.

58.3. a) 20 L de solução a 30%:

$$20 \times 0,3 = 6 \text{ L de ácido e } 14 \text{ L de água}$$

$x$  L de solução a 45%:

$$0,45x \text{ L de ácido e } x - 0,45x \text{ L de água}$$

$$P(x) = \frac{6+0,45x}{20+x} = \frac{20(6+0,45x)}{20(20+x)} = \frac{9x+120}{20x+400}$$

b)  $P(x) = 0,35 \Leftrightarrow \frac{9x+120}{20x+400} = 0,35 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{9x+120}{20x+400} - 0,35 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{9x+120-7x-140}{20x+400} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-20}{20x+400} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x-20 = 0 \wedge 20x+400 \neq 0 \Leftrightarrow x = 10 \wedge x \neq -20 \end{aligned}$$

Devem juntar-se 10 L de solução.

c)  $20+x = 50 \Leftrightarrow x = 30$

$$P(30) = \frac{9 \times 30 + 120}{20 \times 30 + 400} = 0,39 = 39\%$$

A percentagem de ácido obtida é 39%.

d) Cálculos auxiliares:

$$\begin{array}{r} \cancel{9x} + 120 \quad | \quad 20x + 400 \\ - \cancel{9x} - 180 \quad | \quad 9 \\ \hline \phantom{-} - 60 \end{array}$$

$$P(x) = \frac{9x+120}{20x+400} = \frac{9}{20} + \frac{-60}{20x+400} = \frac{9}{20} + \frac{-3}{x+20}$$

Equação da assíntota horizontal:  $y = \frac{9}{20} = 0,45$

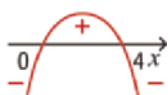
Quando a quantidade de solução a 45% se torna muito elevada, a percentagem de ácido na solução tende a estabilizar nos 45%.

Pág. 153

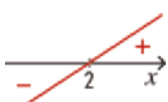
59.  $g(x) = \frac{x}{2} + 1$ ;  $D_g = \mathbb{R}$ ;  $f(x) = \frac{2x-2}{x-2}$ ;  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

59.1.  $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \frac{2x-2}{x-2} \leq \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{2x-2}{x-2} - \frac{x}{2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{4x - 4 - x^2 + 2x - 2x + 4}{2(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x}{2(x-2)} \leq 0$

$-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 4) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$



$2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$



$x$	$-\infty$	$0$		$2$		$4$	$+\infty$
$-x^2 + 4x$	-	0	+	+	+	0	-
$2(x-2)$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{-x^2 + 4x}{2(x-2)}$	+	0	-	N.D.	+	0	-

$S = [0, 2[ \cup [4, +\infty[$

59.2.  $f(0) = \frac{2 \times 0 - 2}{0 - 2} = 1$ ;  $B(0, 1)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2x-2 = 0 \wedge x-2 \neq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 1 \wedge x \neq 2$

$C(1, 0)$

$P(x, f(x)) = \left(x, \frac{2x-2}{x-2}\right)$ ;  $D(x, 0)$

$A_{\text{pentágono } [PABCD]} = A_{\text{retângulo } [ODPA]} - A_{\text{triângulo } [OBC]}$

$x \times \frac{2x-2}{x-2} - \frac{1 \times 1}{2} = \frac{2x^2 - 2x}{x-2} - \frac{1}{2} =$   
 $= \frac{4x^2 - 4x - x + 2}{2(x-2)} = \frac{4x^2 - 5x + 2}{2(x-2)}$

$A(x) = \frac{4}{x-2} + \frac{2x}{2(x-2)} + \frac{3}{2} = \frac{8 + 4x^2 - 8x + 3x - 6}{2(x-2)} =$   
 $= \frac{4x^2 - 5x + 2}{2(x-2)}$

Logo,  $A(x)$  pode ser dada por  $\frac{4}{x-2} + 2x + \frac{3}{2}$ .

59.3.  $A(x) = 11,5 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 5x + 2}{2(x-2)} = 11,5 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 5x + 2}{2(x-2)} - 11,5 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 5x + 2 - 11,5 \times 2(x-2)}{2(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 28x + 48}{2(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 14x + 24}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \wedge x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7-1}{2} \vee x = \frac{7+1}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 4$

$f(3) = \frac{2 \times 3 - 2}{3 - 2} = 4$ ;  $f(4) = \frac{2 \times 4 - 2}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$

$P(3, 4)$  ou  $P(4, 3)$

60.1.  $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \rightarrow$  Fração da piscina com água depois de abertas as duas torneiras durante 1 hora.

Recorrendo à regra de 3 simples, vem:

Fração da piscina		Tempo (h) de enchimento
$\frac{3}{4}$	—	1
1	—	$t$

$t = \frac{1 \times 1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \rightarrow$  tempo em horas que demora a

encher o depósito.

Cálculos auxiliares:

$\frac{1}{3} \times 60 = 20$

$\frac{1}{4} \text{ h} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \text{ h} = 1 \text{ h } 20 \text{ min}$

As torneiras A e B enchem o depósito em 1 h 20 min.

60.2.

$$\frac{1}{\frac{4}{(xt)}} + \frac{1}{\frac{2}{(x2t)}} + \frac{1}{\frac{1}{(x4)}} = \frac{t+2t+4}{4t} = \frac{3t+4}{4t} \rightarrow$$

Fração da piscina com água depois de abertas as três torneiras durante uma hora.

Fração da piscina	Tempo (h) de enchimento
$\frac{3t+4}{4t}$	1
1	$h$

$$h = \frac{1 \times 1}{\frac{3t+4}{4t}} = \frac{4t}{3t+4} \rightarrow \text{Número de horas}$$

necessárias para encher a piscina.

$$h(t) = \frac{4t}{3t+4}$$

60.3. Cálculos auxiliares:

$$\begin{matrix} 1 \text{ h} & \text{---} & 60 \text{ min} \\ x & \text{---} & 12 \text{ min} \end{matrix} \quad x = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

$$1 \text{ h } 12 \text{ min} = \left(1 + \frac{1}{5}\right) \text{ h} = \frac{6}{5} \text{ h}$$

$$h(t) = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{4t}{3t+4} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{4t}{3t+4} - \frac{6}{5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{20t - 18t - 24}{5(3t+4)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2t - 24}{5(3t+4)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t - 24 = 0 \wedge 5(3t+4) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t = 24 \wedge 3t+4 \neq 0 \Leftrightarrow t = 12 \wedge t \neq -\frac{4}{3}$$

$$t = 12$$

$$60.4. h(t) = \frac{4t}{3t+4} = \frac{4t}{3\left(t+\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3}t}{t+\frac{4}{3}}$$

Cálculos auxiliares:

$$\frac{\frac{4}{3}t}{3} \quad \left| \begin{array}{l} t + \frac{4}{3} \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\frac{-\frac{4}{3}t - \frac{16}{9}}{3} \quad \frac{4}{3}$$

$$-\frac{16}{9}$$

$$h(t) = \frac{4t}{3t+4} = \frac{\frac{4}{3}t}{t+\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} + \frac{-\frac{16}{9}}{t+\frac{4}{3}}$$

Equação da assintota horizontal:  $y = \frac{4}{3}$

Quando o tempo  $t$  aumenta muito, isto é, quando o caudal da torneira C se aproxima de zero, o tempo necessário para encher a piscina aproxima-se de  $\frac{4}{3}$ , que é o tempo necessário para as torneiras A e B encherem a piscina.

61.  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ;  $g(x) = \frac{x+1}{x}$ ;  
 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;  
 $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

61.1.  $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$   
 $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x} =$   
 $= \frac{x+(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+x^2-1}{x^2-x} = \frac{x^2+x-1}{x^2-x}$

$f+g : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow \frac{x^2+x-1}{x^2-x}$

61.2.  $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$   
 $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x} =$   
 $= \frac{x-(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x-(x^2-1)}{x^2-x} = \frac{-x^2+x+1}{x^2-x}$

$f-g : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow \frac{-x^2+x+1}{x^2-x}$

61.3.  $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$   
 $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{1}{x-1} \times \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{x^2-x}$   
 $f \times g : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow \frac{1}{x}$

61.4.  $D_{f/g} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} =$   
 $= \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \cap \mathbb{R} \setminus \{-1,0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$   
 C.A.:  $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = -1 \wedge x \neq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x^2-1}$$

62.  $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [0,4[$   
 $D_{f/g} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = ]0,4[$   
 Então  $i \rightarrow \text{IV}$ .  
 $f(2) = 0$ ;  $g(2) > 0$ ;  
 $(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + g(2) > 0$

Então  $j \rightarrow I$ .

$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 0 - g(2) < 0$$

Então  $k \rightarrow II$ .

$$(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 0 \times g(2) = 0$$

Então  $h \rightarrow III$ .

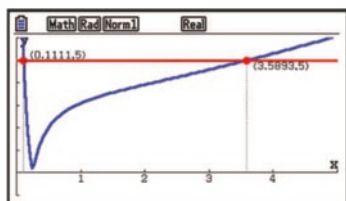
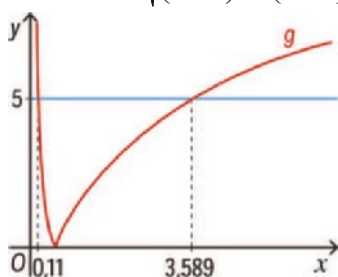
$h \rightarrow III, i \rightarrow IV, j \rightarrow I, k \rightarrow II$

63.  $A\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right); f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4; A\left(\frac{1}{4}, 4\right);$

$$B(x, f(x)) = \left(x, \frac{1}{x}\right);$$

$$\overline{AB} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - 4\right)^2} = 5$$

$$\text{Seja } g(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - 4\right)^2}$$



Como  $x > \frac{1}{4}$ , a abscissa de B é, aproximadamente, 3,589.

$$f(3,589) = \frac{1}{3,589} \approx 0,28$$

B tem como coordenadas, arredondadas às centésimas, (3,59; 0,28).

64.5.  $C(150) - C(100) = 6250 - 4000 = 2250$

A variação do custo de produção é 2250 €.

64.6.  $\frac{C(150) - C(100)}{150 - 100} = \frac{6250 - 4000}{50} = \frac{2250}{50} = 45$

Significa que quando se produzem 50 peças, a partir de uma produção de 100 peças, o custo médio de produção de cada peça é 45 €.

65. 1 hora  $\frac{60 \text{ min}}{x} = \frac{20}{20 \text{ min}}$   $x = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}; v_m = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 15 \text{ km/h}$

A velocidade média atingida pelos atletas foi 15 km/h.

66.1.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 3$$

Zeros de  $f$ : -1, 0, 3

66.2.  $t.m.v._{(f,-1,a)} = \frac{f(a) - f(-1)}{a - (-1)} = \frac{a^3 - 2a^2 - 3a - 0}{a + 1} =$

$$= \frac{a^3 - 2a^2 - 3a}{a + 1} = \frac{a(a+1)(a-3)}{a+1} = a(a-3)$$

C.A.: -1 é zero de  $f$ ;  $f(-1) = 0$

$$t.m.v._{(f,-1,a)} < 0 \Leftrightarrow \frac{a(a+1)(a-3)}{a+1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(a-3) < 0$$

Como  $a \in ]0, 3[$ ,  $a > 0$  e  $a - 3 < 0$ .

Logo,  $t.m.v._{(f,-1,a)} = a(a-3) < 0$ .

66.3. a)  $t.m.v._{(f,-1,2)} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-6 - 0}{3} = -2$

C. A.:  $f(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 - 3 \times 2 = -6$ ;  $f(-1) = 0$

b)  $t.m.v._{(f,2,3)} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{0 - (-6)}{1} = 6$

C.A.: 3 é zero de  $f$ ;  $f(3) = 0$

64.  $C(x) = 0,1x^2 + 20x + 1000$

64.1.  $C(100) = 0,1 \times 100^2 + 20 \times 100 + 1000 = 4000$

O custo de produção é 4000 €.

64.2.  $\frac{4000}{100} = 40$

O custo médio de produção de cada peça é 40 €.

64.3.  $C(150) = 0,1 \times 150^2 + 20 \times 150 + 1000 = 6250$

O custo de produção é 6250 €.

64.4.  $\frac{6250}{150} = 41,67$

O custo médio de produção de cada peça é 41,67 €.

67.1.  $t.m.v._{(f,a,b)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{3b^2 + k - (3a^2 + k)}{b - a} =$

$$= \frac{3b^2 + k - 3a^2 - k}{b - a} = \frac{3b^2 - 3a^2}{b - a} = \frac{3(b^2 - a^2)}{b - a} =$$

$$= \frac{3(b-a)(b+a)}{b-a} = 3(b+a)$$

67.2.  $t.m.v._{(f,-1,4)} = 3(4 - 1) = 9$

68.1. Seja  $m_r$  o declive da reta  $r$ . A reta  $r$  contém os

pontos  $A(-2,0)$  e  $C(2,2)$ .  $m_r = \frac{2 - 0}{2 - (-2)} = \frac{1}{2}$ ;

$$t.m.v._{(f,4,a)} = m_r = \frac{1}{2}$$

68.2.  $t.m.v._{(f,0,4)} = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{3-3}{4} = 0$

C.A.:  $r: y = \frac{1}{2}x + b; 2 = \frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 1;$

$y = \frac{1}{2}x + 1; D \in r$

$y = \frac{1}{2} \times 4 + 1 = 3; D(4,3); B(0,3)$

68.3.  $t.m.v._{(f,0,2)} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$

68.4.  $m_{BC} = \frac{3-2}{0-2} = -\frac{1}{2}; B(0,3); C(2,2);$

$BC: y = -\frac{1}{2}x + 3$

69.1.  $h(x) = \frac{x-1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$

C.A.:  $\frac{x-1}{x-2} \quad |x-2$   
 $\frac{-x+2}{1} \quad 1$

Equação da assíntota vertical:  $x = 2$

Equação da assíntota horizontal:  $y = 1$

69.2.  $t.m.v._{(h,0,1)} = \frac{h(1)-h(0)}{1-0} = \frac{0-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$

C.A.:  $h(0) = \frac{0-1}{0-2} = \frac{1}{2}; h(1) = \frac{1-1}{1-2} = 0$

A taxa média de variação da função  $h$  entre 0 e 1 é igual ao declive da reta secante ao gráfico de  $h$  nos pontos de abcissa 0 e 1.

$m = -\frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}x + b; (1, 0);$

$0 = -\frac{1}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

69.3.  $AB: y = -\frac{1}{2}x + k$

$2 = -\frac{1}{2} \times 3 + k \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{2} = k \Leftrightarrow k = \frac{7}{2}$

C.A.:  $h(3) = \frac{3-1}{3-2} = 2; (3, 2)$

$AB: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}; B\left(b, \frac{b-1}{b-2}\right);$

$\frac{b-1}{b-2} = -\frac{1}{2}b + \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{b-1}{\times(2)} = \frac{1}{2}b - \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{b-1}{\times(b-2)} = \frac{1}{2}b - \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2b-2+b^2-2b-7b+14}{2(b-2)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{b^2-7b+12}{2(b-2)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2-7b+12 = 0 \wedge 2(b-2) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \wedge b-2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} \wedge b \neq 2 \Leftrightarrow b = 3 \vee b = 4$

Como  $b > 3, b = 4. B\left(4, \frac{4-1}{4-2}\right) = \left(4, \frac{3}{2}\right)$

70.  $A(-2,0); B(0,2); C(2,4); D(-1,4)$

70.1.  $t.m.v._{(f,-2,0)} = \frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = \frac{2-0}{2} = 1$

$t.m.v._{(f,0,2)} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{4-2}{2} = 1$

Assim,  $t.m.v._{(f,-2,0)} = t.m.v._{(f,0,2)}$

70.2. a)  $[-2, -1]$ , por exemplo.

b)  $[-1, 2]$ , por exemplo.

c)  $[0, 1]$ , por exemplo.

d)  $[0, 2]$ , por exemplo.

70.3.  $A(-2,0); B(0,2); m_{AB} = \frac{2-0}{0-(-2)} = 1;$

$y = x + 2; DE \perp AB, m_{DE} = -1; y = -x + b;$

$D(-1, 4); 4 = -(-1) + b \Leftrightarrow 3 = b;$

$DE: y = -x + 3$

71.  $t.m.v._{(f,2,2+h)} = 5 + h \Leftrightarrow \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = 5 + h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 5 + h$

Para  $f$  ser derivável em  $x = 2,$

o  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$  tem de existir e ser finito.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (5 + h) = 5 + 0 = 5$

Logo,  $f$  é derivável em  $x = 2$  e  $f'(2) = 5.$

72.1. Para justificar que  $g$  é derivável em  $x = 1,$  vamos

verificar que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$  existe e é finito.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$

Logo,  $g$  é derivável em  $x = 1. g'(1) = 2$

72.2.  $m_t = g'(1) = 2; (0, -2); y = 2x - 2;$

$(1, 1), 1 = 2 \times 1 - 2 \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ F}, (1, 1) \notin t$

$(-2, -2), -2 = 2 \times (-2) - 2 \Leftrightarrow -2 = -6 \text{ F},$

$(-2, -2) \notin t$

$(2, 2), 2 = 2 \times 2 - 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ V}, (2, 2) \in t$

Opção (C)

73.1.  $g(x) = 20x^2$

$t.m.v._{(g,1,1+h)} = \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{20(1+h)^2 - 20}{h}$

Opção (B)

$$\begin{aligned}
 73.2. \quad g'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20(1+h)^2 - 20}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20(1+2h+h^2) - 20}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{20} + 40h + 20h^2 - \cancel{20}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20h(2+h)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (40 + 20h) = 40 + 20 \times 20 = 40
 \end{aligned}$$

74.1.  $f(x) = 2$

$$x = -2: f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0;$$

$$x = 1: f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

74.2.  $g(x) = -10x$

$$x = -5: g'(-5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-5+h) - g(-5)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10(-5+h) - (-10 \times (-5))}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{50} - 10h - \cancel{50}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10h}{h} = -10;$$

$$x = 7: g'(7) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(7+h) - g(7)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10(7+h) - (-10 \times 7)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cancel{70} - 10h + \cancel{70}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10h}{h} = -10$$

74.3.  $h(x) = -x^2$

$$x = 1: h'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - (-1^2)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{\cancel{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (-x - 1) = -1 - 1 = -2;$$

$$x = -2: h'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{h(x) - h(-2)}{x - (-2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 - [ -(-2)^2 ]}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 + 4}{x + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x^2 - 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x-2)(x+2)}{\cancel{x+2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} (-x + 2) = -(-2) + 2 = 4$$

74.4.  $p(x) = -\frac{1}{3}x^3$

$$x = -2: p'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{p(x) - p(-2)}{x - (-2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-\frac{1}{3}x^3 - \left[ -\frac{1}{3}(-2)^3 \right]}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-\frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}}{x + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^3 - 8}{3(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(-x^2 + 2x - 4)}{3(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 + 2x - 4}{3} = \frac{-(-2)^2 + 2(-2) - 4}{3} =$$

$$= \frac{-4 - 4 - 4}{3} = -\frac{12}{3} = -4$$

$$C.A.: \begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 0 & -8 \\ -2 & & 2 & -4 & 8 \\ \hline & -1 & 2 & -4 & 0 \end{array}$$

$$x = 0: p'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - p(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3} = 0$$

74.5.  $q(x) = x^4$

$$x = -1: q'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{q(x) - q(-1)}{x - (-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - (-1)^4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}(x^2 + 1)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1} [(x-1)(x^2 + 1)] =$$

$$= (-1-1)((-1)^2 + 1) = -2 \times 2 = -4;$$

$$x = 1: q'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{q(x) - q(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}(x^2 + 1)}{\cancel{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} [(x+1)(x^2 + 1)] = (1+1)(1^2 + 1) = 2 \times 2 = 4$$

75.1.  $s(5) = 4,9 \times 5^2 = 122,5$

A distância percorrida pela bola foi 122,5 m.

75.2.  $v_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{122,5}{5} = 24,5 \text{ m/s}$

A velocidade média foi 24,5 m/s.

75.3.  $s'(5) = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{4,9t^2 - 122,5}{t - 5} =$

$$= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{4,9(t^2 - 25)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{4,9(t-5)(t+5)}{\cancel{t-5}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 5} [4,9(t+5)] = 4,9 \times (5+5) = 49$$

A velocidade da bola no instante  $t = 5$  é 49 m/s.

76.1. Reta  $r$  contém os pontos  $(-1, 1)$  e  $(0, -2)$ .

$$m_r = \frac{-2 - 1}{0 - (-1)} = \frac{-3}{1} = -3; f'(-1) = -3$$

Reta  $s$  contém os pontos  $(1, -2)$  e  $(2, 1)$ .

$$m_s = \frac{1 - (-2)}{2 - 1} = 3; f'(2) = 3$$

Reta  $t$  contém os pontos  $(0, -2)$  e  $(1, -1)$ .

$$m_t = \frac{-1 - (-2)}{1 - 0} = 1; f'(1) = 1$$

76.2. a)  $r: y = -3x + b; (0, -2); y = -3x - 2$

b)  $s: y = 3x + b; (2, 1); 1 = 3 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -5;$   
 $y = 3x - 5$

c)  $t: y = x + b; (0, -2); y = x - 2$

77.  $y = -2x + 1; f'(1) = -2; (B)$

78.1.  $g(2) = -1; (2, -1)$

O ponto  $(2, -1)$  pertence ao gráfico de  $g$  e à reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abcissa 2.  
**(C)**

78.2. Equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 2:  $g'(2) = 3; y = 3x + b; (2, -1);$   
 $-1 = 3 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -7; y = 3x - 7$

**Pág. 160**

79.  $t: (0, -2); (2, 2); m_t = f'(1)$   
 $r: (-2, -1); r: y = -1$

79.1. Máximo relativo: 0; Maximizante:  $-1$ ;  
 Mínimo relativo:  $-1$ ; Minimizante: 0

79.2. É o ponto de abcissa  $-1$ .

79.3. a)  $m_r = 0; f'(0) = 0$

b)  $m_t = \frac{0 - (-2)}{1 - 0} = 2; f'(1) = 2$

80.  $\frac{f(x) - f(2)}{2(x - 2)} = 2x - 1 \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4x - 2$

Para justificar que  $f$  é derivável em  $x = 2$ , vamos calcular o  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$  e verificar que existe e é finito.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 2) = 4 \times 2 - 2 = 6$$

Logo,  $f$  é derivável em  $x = 2$  e  $f'(2) = 6$ .

**Pág. 161**

81.  $f(x) = -x^2 + x, h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

81.1. t.m.v. $_{(f, -1, -1+h)} = \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} =$   
 $= \frac{-(-1+h)^2 + (-1+h) - (-2)}{h} =$   
 $= \frac{-(1-2h+h^2) - 1 + h + 2}{h} = \frac{-1 + 2h - h^2 + h + 1}{h} =$

$$= \frac{3h - h^2}{h} \underset{(h \neq 0)}{=} \frac{h(3-h)}{h} = -h + 3$$

C.A.:  $f(-1) = -(-1)^2 + (-1) = -1 - 1 = -2$

81.2.  $f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 3) =$   
 $= -0 + 3 = 3$

82.  $f(x) = x^3 - 9x; r: f'(-1) = m_r$

82.1.  $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 9x - 8}{x + 1} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 8)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x - 8) =$   
 $= (-1)^2 - (-1) - 8 = 1 + 1 - 8 = -6$

C.A.:  $f(-1) = (-1)^3 - 9 \times (-1) = -1 + 9 = 8;$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -9 & -8 \\ & -1 & 1 & 8 & \\ \hline & 1 & -1 & -8 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^3 - 9x - 8 = \\ = (x+1)(x^2 - x - 8) \end{array}$$

$m_r = -6; y = -6x + b; (-1, 8) \in r$

$8 = -6 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 8 - 6 \Leftrightarrow b = 2$

$r: y = -6x + 2$

82.2.  $f(x) = -6x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 9x = -6x + 2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$

Seja  $P(x) = x^3 - 3x - 2$

Divisores inteiros de  $-2$ :  $-1, 1, -2, 2$

$P(-1) = 0; P(1) = -4; P(-2) = -4; P(2) = 0$

$x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1 = 0 \vee x-2 = 0 \vee x+1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \vee x = -1$

C.A.:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

A reta  $r$  interseca o gráfico da função  $f$  nos pontos de abcissas  $-1$  e  $2$ .

$x = 2; f(2) = 2^3 - 9 \times 2 = 8 - 18 = -10;$

Coordenadas do ponto que não é ponto de tangência:  $(2, -10)$

83. Designando por  $t$  a reta tangente a  $f$  em  $x = 2$ , tem-se que:

$$m = f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{3}{4}$$

$(2, f(2)) = \left(2, -\frac{7}{2}\right) \in t$

Cálculos auxiliares:

$f(x) - g(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \frac{1}{x}$

$$g(2) = -\frac{1}{2} \times 2 - 3 = -4, \text{ logo,}$$

$$f(2) = g(2) + \frac{1}{2} = -4 + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\text{Assim, } t: y = -\frac{3}{4}x + b \wedge \left(2, -\frac{7}{2}\right) \in t$$

$$-\frac{7}{2} = -\frac{3}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = -2$$

$$t: y = -\frac{3}{4}x - 2$$

$$84.1. \text{ a) } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\pi - \pi}{x - a} = 0$$

$$\text{b) } g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-x - (-a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x - a)}{x - a} = -1$$

$$\text{c) } h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - 3a^2}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{3(x^2 - a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3(x - a)(x + a)}{x - a} =$$

$$= 3(a + a) = 3 \times 2a = 6a$$

$$84.2. \text{ a) } f'(-1) = 0$$

$$\text{b) } g'(3) = -1$$

$$\text{c) } h'(-2) = 6 \times (-2) = -12$$

Pág. 162

$$85.1. \text{ Seja } a \in \mathbb{R}. f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2x^2 - (-2a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2x^2 + 2a^2}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2(x^2 - a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2(x - a)(x + a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} [-2(x + a)] = -2(a + a) = -2 \times 2a = -4a$$

$$\text{Então, } f'(x) = -4x.$$

$$85.2. f'(-1) = -4 \times (-1) = 4$$

85.3. Reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa

$$-1: y = f'(-1)(x - (-1)) + g(-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 4(x + 1) + (-2 \times (-1)^2) \Leftrightarrow y = 4x + 4 - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 4x + 2$$

$$86.1. g(x) = 0 \Leftrightarrow (ax)^2 + 2ax = 0 \Leftrightarrow ax(ax + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax = 0 \vee ax + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{2}{a}$$

Os zeros de  $g$  são  $x = 0$  e  $x = -\frac{2}{a}$ .

$$86.2. g(x) = \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)x \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - x\right)' = \frac{1}{4} \times 2x - 1 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 1 > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$S = ]2, +\infty[$$

87.1.  $f$  é crescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[1, +\infty[$ .

$f$  é decrescente em  $[-1, 1]$ .

87.2. No intervalo  $]-1, 1[$ , o declive das retas

tangentes em qualquer ponto deste intervalo é negativo. Isto é, para todo  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f'(x) < 0$ .

(D)

87.3. Reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa

$$O: y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = -3x + 2$$

Pág. 163

88. Sejam  $f(a)$  e  $f(b)$  o máximo e o mínimo de  $f$ , respectivamente. As retas tangentes nestes pontos são horizontais, pelo que, têm declive igual a zero. Ou seja,  $f'(a) = f'(b) = 0$ . Então, a função derivada de  $f$ , tem 2 zeros.

Sabemos também que, para  $x \in ]-\infty, a[$  e para  $x \in ]b, +\infty[$ , as retas tangentes ao gráfico de  $f$  têm declive positivo e, para  $x \in ]a, b[$ , têm declive negativo, pelo que, para  $x \in ]-\infty, a[$  e para  $x \in ]b, +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$ , e para  $x \in ]a, b[$ ,  $f'(x) < 0$ . Então o único gráfico dos apresentados que pode representar  $f'$  é o gráfico da opção (B).

$$89.1. f'(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)' = \frac{1}{2}(x-1)' = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$89.2. g'(x) = (2x^2 + x^3)' = (2x^2)' + (x^3)' =$$

$$= 2 \times 2x + 3x^2 = 4x + 3x^2$$

$$89.3. h'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = \left(-\frac{1}{3}x^3\right)' + (1)' =$$

$$= -\frac{1}{3} \times 3x^2 + 0 = -x^2$$

$$89.4. i'(x) = (\pi x^2)' = \pi \times 2x = 2\pi x$$

$$89.5. j'(x) = (2x^3 - 3x^2 + 5)' = (2x^3)' - (3x^2)' + (5)' =$$

$$= 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 0 = 6x^2 - 6x$$

$$89.6. k'(x) = (-2x^3 - 3x)' = (-2x^3)' - (3x)' =$$

$$= -2 \times 3x^2 - 3 = -6x^2 - 3$$

$$89.7. l'(x) = \left(-\frac{x^3 - 3x^2}{3}\right)' = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x^2)' =$$

$$= -\frac{1}{3}[(x^3)' - (3x^2)'] = -\frac{1}{3}(3x^2 - 3 \times 2x) = -x^2 + 2x$$

$$\begin{aligned}
 89.8. \quad m'(x) &= [-4x^3 - (3x-1) + x^2]' = \\
 &= (-4x^3)' - (3x-1)' + (x^2)' = -4 \times 3x^2 - 3 + 2x = \\
 &= -12x^2 + 2x - 3
 \end{aligned}$$

Pág. 164

$$90.1. \quad f'(x) = (3x-1)' = 3$$

$$90.2. \quad g'(x) = (5x^2 - 5x)' = (5x^2)' - (5x)' = 10x - 5$$

$$\begin{aligned}
 90.3. \quad h'(x) &= \left(x - \frac{1}{x}\right)' = (x)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} = \\
 &= 1 - \frac{0-1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 90.4. \quad i'(x) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\frac{2}{x^2}\right)' + \left(\frac{1}{x^3}\right)' = \\
 &= \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} - \frac{(2)'x^2 - 2(x^2)'}{(x^2)^2} + \frac{(1)'x^3 - 1(x^3)'}{(x^3)^2} = \\
 &= \frac{0-1}{x^2} - \frac{0-2 \times 2x}{x^4} + \frac{0-3x^2}{x^6} = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 90.5. \quad j'(x) &= [(2-x^2)(1-x)]' = \\
 &= (2-x^2)'(1-x) + (2-x^2)(1-x)' = \\
 &= -2x(1-x) + (2-x^2) \times (-1) = -2x + 2x^2 - 2 + x^2 = \\
 &= 3x^2 - 2x - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 90.6. \quad k'(x) &= \left(\frac{2x+3}{3x-5}\right)' = \\
 &= \frac{(2x+3)'(3x-5) - (2x+3)(3x-5)'}{(3x-5)^2} = \\
 &= \frac{2(3x-5) - (2x+3) \times 3}{(3x-5)^2} = -\frac{19}{(3x-5)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 90.7. \quad l'(x) &= \left(\frac{x^2-4x}{x-1}\right)' = \\
 &= \frac{(x^2-4x)' \times (x-1) - (x^2-4x)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\
 &= \frac{(2x-4)(x-1) - (x^2-4x) \times 1}{(x-1)^2} = \\
 &= \frac{2x^2 - 2x - 4x + 4 - x^2 + 4x}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 90.8. \quad m'(x) &= [(1-2x)^3]' = 3(1-2x)^2 \times (1-2x)' = \\
 &= 3(1-2x)^2 \times (-2) = -6(1-2x)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 90.9. \quad n'(x) &= \left(\frac{x^2-2}{(x-1)^2}\right)' = \\
 &= \frac{(x^2-2)' \times (x-1)^2 - (x^2-2) \times ((x-1)^2)'}{(x-1)^2} = \\
 &= \frac{2x(x-1)^2 - (x^2-2) \times 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{(x-1)[2x(x-1) - 2(x^2-2) \times 1]}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{2x^2 - 2x - 2x^2 + 4}{(x-1)^3} = \frac{-2x+4}{(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 90.10. \quad o'(x) &= [(3x+1)(3x-1)^3]' = \\
 &= (3x+1)'(3x-1)^3 + (3x+1)[(3x-1)^3]' = \\
 &= 3(3x-1)^3 + (3x+1) \times 3(3x-1)^2 \times (3x-1)' = \\
 &= 3(3x-1)^2 [(3x-1) + (3x+1) \times 3] = \\
 &= 3(3x-1)^2 (3x-1+9x+3) = 3(3x-1)^2 (12x+2) = \\
 &= 6(3x-1)^2 (6x+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 91.1. \quad f'(x) &= (x^2-x)' = (x^2)' - (x)' = 2x-1; \quad D_f = \mathbb{R}; \\
 f'(1) &= 2 \times 1 - 1 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 91.2. \quad g'(x) &= \left[3\left(1 - \frac{1}{3x}\right)\right]' = 3\left(1 - \frac{1}{3x}\right)' = \\
 &= 3\left[(1)' - \frac{(1)' \times 3x - 1 \times (3x)'}{(3x)^2}\right] = 3\left(0 - \frac{0-3}{9x^2}\right) = \\
 &= 3 \times \frac{3}{9x^2} = \frac{1}{x^2}; \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad g'(1) = \frac{1}{1^2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 91.3. \quad h'(x) &= \left(5 - 3x^2 + \frac{5}{x}\right)' = (5)' - (3x^2)' + \left(\frac{5}{x}\right)' = \\
 &= 0 - 3 \times 2x + \frac{(5)' \times x' - 5(x)'}{x^2} = -6x + \frac{0-5}{x^2} = \\
 &= -6x - \frac{5}{x^2}; \\
 D_h &= \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\
 h'(1) &= -6 \times 1 - \frac{5}{1^2} = -6 - 5 = -11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 91.4. \quad i'(x) &= \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)(1-3x)\right]' = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)'(1-3x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times (1-3x)' = \\
 &= \left[(1)' + \left(\frac{1}{x}\right)'\right] \times (1-3x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times (-3) =
 \end{aligned}$$

$$= \left( 0 + \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} \right) \times (1 - 3x) - 3 - \frac{3}{x} =$$

$$= \frac{0-1}{x^2} \times (1-3x) - 3 - \frac{3}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3 - \frac{3}{x} =$$

$$= -\frac{1}{x^2} - 3; D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}; i'(1) = -\frac{1}{1^2} - 3 = -4$$

92.1.  $p(0) = 8 \times 0 - 0^2 = 0$

No instante inicial, o ponto está na origem.

92.2. a)  $t.m.v._{(p,1,3)} = \frac{p(3) - p(1)}{3 - 1} = \frac{15 - 7}{2} = \frac{8}{2} = 4$

C.A.:  $p(3) = 8 \times 3 - 3^2 = 24 - 9 = 15;$

$p(1) = 8 \times 1 - 1^2 = 8 - 1 = 7$

A velocidade média entre os instantes  $t_1 = 1$  e  $t_2 = 3$  é de 4 m/s.

b)  $t.m.v._{(p,5,7)} = \frac{p(7) - p(5)}{7 - 5} = \frac{7 - 15}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

C.A.:  $p(7) = 8 \times 7 - 7^2 = 56 - 49 = 7;$

$p(5) = 8 \times 5 - 5^2 = 40 - 25 = 15$

A velocidade média entre os instantes  $t_1 = 5$  e  $t_2 = 7$  é -4 m/s.

92.3.  $p'(t) = (8t - t^2)' = (8t)' - (t^2)' = 8 - 2t;$

$p'(2) = 8 - 2 \times 2 = 8 - 4 = 4$  m/s;

$p(2) = 8 \times 2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$  m;

$p'(6) = 8 - 2 \times 6 = 8 - 12 = -4$  m/s;

$p(6) = 8 \times 6 - 6^2 = 48 - 36 = 12$  m

No instante  $t = 2$ , o ponto está a 12 m da origem e com velocidade de 4 m/s e, no instante  $t = 6$ , está a 12 m da origem com velocidade de -4 m/s.

Pág. 165

93.1.  $g'(x) = \left( \frac{x-1}{2x+3} \right)' =$

$$= \frac{(x-1)'(2x+3) - (x-1)(2x+3)'}{(2x+3)^2} =$$

$$= \frac{1(2x+3) - (x-1) \times 2}{(2x+3)^2} = \frac{2x+3-2x+2}{(2x+3)^2} =$$

$$= \frac{5}{(2x+3)^2}; g'(-1) = \frac{5}{(2 \times (-1) + 3)^2} = \frac{5}{1^2} = 5$$

93.2.  $t: y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = 5(x+1) + (-2) \Leftrightarrow y = 5x + 5 - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 5x + 3$$

C.A.:  $g(-1) = \frac{-1-1}{2(-1)+3} = -2$

Seja  $P$  o ponto de interseção da reta  $t$  com o eixo das abscissas.  $P(x, 0)$

$$0 = 5x + 3 \Leftrightarrow 5x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5};$$

$$P\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$$

94.1.  $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{2x}\right)' = (1)' - \left(\frac{1}{2x}\right)' =$

$$= 0 - \frac{(1)' \times 2x - 1 \times (2x)'}{(2x)^2} = -\frac{-2}{4x^2} = \frac{1}{2x^2}$$

94.2. a)  $m_r = g'(-1) = \frac{1}{2(-1)^2} = \frac{1}{2};$

$$g(-1) = 1 - \frac{1}{2(-1)} = \frac{3}{2};$$

$$r: y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$r: y = \frac{1}{2}x + 2$$

b) Seja  $a$  a abscissa do ponto onde a reta tangente é paralela a  $r$ .  $m_s = m_r \Leftrightarrow g'(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-a^2}{2a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-a^2 = 0 \wedge 2a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \pm 1$$

$a \neq -1$ . Então  $a = 1$ .

$$g(1) = 1 - \frac{1}{2 \times 1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$s: y = g'(1)(x-1) + g(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$$

$$s: y = \frac{1}{2}x$$

95.1.  $1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$

$$2 \times 4x + 4y = 120 \Leftrightarrow 4y = 120 - 8x \Leftrightarrow y = 30 - 2x$$

Volume do prisma =  $x \times x \times y = x^2(30 - 2x) =$

$$= 30x^2 - 2x^3$$

$x$  e  $y$  são comprimentos. Então,

$$x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge 30 - 2x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \wedge -2x > -30 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 15$$

Logo,  $V(x) = 30x^2 - 2x^3$ , com  $0 < x < 15$ .

95.2.  $t.m.v._{(v,4,6)} = \frac{V(6) - V(4)}{6 - 4} = \frac{648 - 352}{2} =$

$$= 148 \text{ cm}^3/\text{cm}$$

C.A.:  $V(6) = 30 \times 6^2 - 2 \times 6^3 = 1080 - 432 = 648;$

$V(4) = 30 \times 4^2 - 2 \times 4^3 = 480 - 128 = 352$

O volume do prisma aumenta, em média

148  $\text{cm}^3/\text{cm}$  quando  $x$  aumenta de 4 cm para 6 cm.

**95.3.** Se a embalagem tem a forma de um cubo, então  
 $y = x$ .  
 $y = x \Leftrightarrow 30 - 2x = x \Leftrightarrow 3x = 30 \Leftrightarrow x = 10$  cm  
 $V'(x) = (30x^2 - 2x^3)' = (30x^2)' - (2x^3)' =$   
 $= 30 \times 2x - 2 \times 3x^2 = 60x - 6x^2$   
 $V'(10) = 60 \times 10 - 6 \times 10^2 = 600 - 600 = 0$  cm<sup>3</sup>/cm

Pág. 166

**96.1.**  $f'(x) = \left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{2x-4}\right)' = \left(\frac{3x}{2}\right)' - \left(\frac{1}{2x-4}\right)' =$   
 $= \frac{3}{2} - \frac{(1)'(2x-4) - 1(2x-4)'}{(2x-4)^2} = \frac{3}{2} - \frac{0-2}{(2x-4)^2} =$   
 $= \frac{3}{2} + \frac{2}{(2x-4)^2}$

Seja  $t$  a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 4.

$$m_t = f'(4) = \frac{3}{2} + \frac{2}{(2 \times 4 - 4)^2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{16} = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$$

$$f(4) = \frac{3 \times 4}{2} - \frac{1}{2 \times 4 - 4} = \frac{12}{2} - \frac{1}{4} = \frac{23}{4}$$

$$t: y = f'(4)(x-4) + f(4) \Leftrightarrow y = \frac{13}{8}(x-4) + \frac{23}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{13}{8}x - \frac{26}{4} + \frac{23}{4} \Leftrightarrow y = \frac{13}{8}x - \frac{3}{4}$$

$$t: y = \frac{13}{8}x - \frac{3}{4}$$

**96.2.**  $f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{2}{(2x-4)^2} = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(2x-4)^2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4 - (2x-4)^2}{2(2x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - (2x-4)^2 = 0 \wedge 2(2x-4)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-4)^2 = 4 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow 2x-4 = \pm 2 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x = 2 \vee 2x = 6) \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

$$f(1) = \frac{3 \times 1}{2} - \frac{1}{2 \times 1 - 4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$f(3) = \frac{3 \times 3}{2} - \frac{1}{2 \times 3 - 4} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

Sejam  $r$  e  $s$  retas tangentes ao gráfico de  $f$  nos pontos de abscissas 1 e 3, respetivamente.

$$r: y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 2(x-1) + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - 2 + 2 \Leftrightarrow y = 2x$$

$$s: y = f'(3)(x-3) + f(3) \Leftrightarrow y = 2(x-3) + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - 6 + 4 \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Reta tangente em  $x = 1$ :  $y = 2x$

Reta tangente em  $x = 3$ :  $y = 2x - 2$

**97.1.**  $f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + 3\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' - (x)' + (3)' =$   
 $= \frac{1}{2} \times 2x - 1 + 0 = x - 1$

Seja  $a$  a abscissa de um ponto de  $f$  e  $r$  uma reta tangente ao seu gráfico no ponto de abscissa  $a$  que passa por  $A(0,1)$ .

$$m_r = f'(a) = a - 1; r: y = (a-1)x + 1$$

O ponto  $(a, f(a))$  é um ponto da reta  $r$ .

$$f(a) = \frac{a^2}{2} - a + 3$$

$$\text{Então, } \frac{a^2}{2} - a + 3 = (a-1) \times a + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} - a + 3 = a^2 - a + 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$$

Logo, existem 2 pontos onde as retas tangentes ao gráfico de  $f$  passam no ponto  $A$ , as retas  $r$  e  $s$ .

**97.2.** Seja  $r$  a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 2 e  $s$  a reta tangente no ponto de abscissa  $-2$ .

$$m_r = f'(2) = 2 - 1 = 1; m_s = f'(-2) = -2 - 1 = -3$$

$$r: y = x + 1 \text{ e } s: y = -3x + 1$$

**98.1.** Bissetriz dos quadrantes ímpares:  $y = x$ .

$(0,0)$  é o ponto de tangência. Então,

$$f(0) = 0 \wedge f'(0) = 1.$$

$$f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + (c)' =$$

$$= 2ax + b;$$

$$f(0) = 0 \wedge f'(0) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \wedge 2a \times 0 + b = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 0 \wedge b = 1$$

**98.2.**  $f(x) = ax^2 + x; f(1) = 0 \Leftrightarrow a \times 1^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1;$

$$f(x) = -x^2 + x$$

**99.1.**  $p(0) = 0 - 15 \times 0 + 50 = 50$ ; 50 m

**99.2.**  $p'(t) = (t^2 - 15t + 50)' = (t^2)' - (15t)' + (50)' =$   
 $= 2t - 15;$

$$p'(0) = 2 \times 0 - 15 = -15 \text{ m/s}$$

**99.3. a)**  $p(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 15t + 50 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} \Leftrightarrow t = 5 \vee t = 10;$$

A partícula passa na origem nos instantes  $t = 5$  e  $t = 10$ .

**b)**  $p'(5) = 2 \times 5 - 15 = 10 - 15 = -5$  m/s;

$$p'(10) = 2 \times 10 - 15 = 20 - 15 = 5 \text{ m/s}$$

A partícula passa, na origem nos instantes  $t = 5$  e  $t = 10$ , com velocidades  $-5$  m/s e  $5$  m/s, respetivamente.

Pág. 167

100.  $h(a)$  é um mínimo relativo.  $a \in ]-1, 3[$ .  
 Se a função  $h$  é uma função polinomial, é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , logo é diferenciável em  $]-1, 3[$ . Assim, a função  $h$  é derivável em  $x = a$ .  
 Opção (B)

101.  $f(x) = x^3 + x$ ;  $D_f = \mathbb{R}$   
 $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$ , logo é derivável em  $]-2, 5[$ .  
 $f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .  
 Como  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , então  $f$  não tem extremos.

102.1. a)  $f'(x) = -2x - 3$   
 $f'(c) = -2c - 3$   
 $t.m.v._{(f, -1, 1)} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$   
 $= \frac{-4 - 2}{2} = -3$

Cálculos auxiliares  
 $f(1) = -1^2 - 3 \times 1 = -1 - 3 = -4$   
 $f(-1) = -(-1)^2 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$

$f'(c) = t.m.v._{(f, -1, 1)} \Leftrightarrow -2c - 3 = -3 \Leftrightarrow c = 0$

b)  $g'(x) = 10x^4$   
 $g'(c) = 10c^4$   
 $t.m.v._{(g, 0, 1)} = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0}$   
 $= \frac{4 - 2}{1} = 2$

Cálculos auxiliares  
 $g(1) = 2 \times 1^5 + 2 = 4$   
 $g(0) = 2$

$g'(c) = t.m.v._{(g, 0, 1)} \Leftrightarrow 10c^4 = 2 \Leftrightarrow c = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$

Como  $c \in ]0, 1[$ ,  $c = \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$ .

102.2.  $f'(x) = -2x - 3$   
 $f'(-4) = -2 \times (-4) - 3 = 5$   
 $m_r = 5$   
 $P(a, f(a)) \quad Q(0, f(0))$   
 $P(a, -a^2 - 3a) \quad Q(0, 0)$   
 $\frac{-a^2 - 3a - 0}{a - 0} = 5 \Leftrightarrow \frac{-a^2 - 3a}{a} = 5$   
 $\Leftrightarrow \frac{-a^2 - 3a}{a} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{-a^2 - 3a - 5a}{a} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{-a^2 - 8a}{a} = 0 \Leftrightarrow -a^2 - 8a = 0 \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow a(-a - 8) = 0 \wedge a \neq 0$   
 $\Leftrightarrow (a = 0 \vee -a - 8 = 0) \wedge (a \neq 0)$   
 $\Leftrightarrow (a = 0 \vee a = -8) \wedge (a \neq 0)$   
 $a = -8$   
 $f(-8) = -(-8)^2 - 3 \times (-8) = -64 + 24 = -40$   
 $P(-8, -40)$

103.  $f$  diferenciável em  $\mathbb{R}$   
 $f(2) = 4 \quad (2, 4)$   
 $f(4) = 2 \quad (4, 2)$

Dado um intervalo  $[2, 4] \subset D_f$ , existe pelo menos um ponto  $a \in ]2, 4[$ , tal que

$f'(a) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{2 - 4}{2} = -1.$

Opção (C)

Pág. 168

104.

$x$	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$f'$	-	0	+	0	-
$f$	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$

Opção (B)

105.

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'$	-	0	+
$g$	$\searrow$	m	$\nearrow$

$g$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 2]$ , logo  $g(0) > g(2)$ .

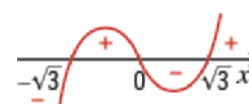
Opção (B)

Pág. 169

106.  $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 3)^2 \quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \left(\frac{1}{4}\right)'(x^2 - 3)^2 + \frac{1}{4} \times [(x^2 - 3)^2]'$   
 $= \frac{1}{4} \times 2(x^2 - 3) \times (x^2 - 3)' = x(x^2 - 3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$



Cálculos auxiliares  
 $f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(3 - 3)^2 = 0$ ;  $f(0) = \frac{1}{4}(0 - 3)^2 = \frac{9}{4}$   
 $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(3 - 3)^2 = 0$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'$	-	0	+	0	-	0	+
$f$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -\sqrt{3}]$  e  $[0, \sqrt{3}]$  e estritamente crescente em  $[-\sqrt{3}, 0]$  e em  $[\sqrt{3}, +\infty[$ .

106.2.  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

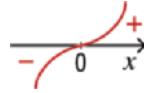
$f'(x) = 4x^3 + 4x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x = 0 \vee \underbrace{x^2 + 1 = 0}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = 0$

Cálculos auxiliares  
 $f(0) = 1$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'$	-	0	+
$f$	$\searrow$	1	$\nearrow$



$f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 0]$  e estritamente crescente em  $[0, +\infty[$ .

107.1.  $f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$ ;  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x + 1)'(x-1) - (x^2 - x + 1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)(x-1) - x^2 + x - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$



Como  $\forall x \in D_f, (x-1)^2 > 0$ , o sinal de  $f'$  depende apenas do sinal de  $x^2 - 2x$ .

Cálculos auxiliares

$f(0) = -1$ ;  $f(2) = 2 + \frac{1}{2-1} = 3$

$x$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'$	+	0	-	-	+
$f$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\searrow$	3

Máx.

Mín.

A função  $f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, 0]$  e em  $[2, +\infty[$  e estritamente decrescente em  $[0, 1[$  e em  $]1, 2]$ .

Tem um máximo relativo para  $x = 0$ , cujo valor é  $x = 2$ , cujo valor é 3.

107.2.  $g(x) = \frac{4}{3-x} - \frac{x}{(3-x)} = \frac{4-3x+x^2}{3-x}$ ;  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$g'(x) = \frac{(4-3x+x^2)'(3-x) - (4-3x+x^2)(3-x)'}{(3-x)^2}$$

$$= \frac{(-3+2x)(3-x) - (4-3x+x^2)(-1)}{(3-x)^2}$$

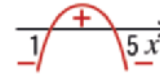
$$= \frac{-9+3x+6x-2x^2+4-3x+x^2}{(3-x)^2}$$

$$= \frac{-x^2+6x-5}{(3-x)^2} \quad D_{g'} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \wedge (3-x)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times (-1) \times (-5)}}{2 \times (-1)} \wedge 3-x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2} \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$



Como  $\forall x \in D, (3-x)^2 > 0$ , o sinal de  $g'$  depende apenas do sinal de  $-x^2 + 6x - 5 = 0$ .

Cálculos auxiliares

$g(1) = \frac{4}{3-1} - 1 = 1$ ;  $g(5) = \frac{4}{3-5} - 5 = -7$

$x$	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$g'$	-	0	+	+	0
$g$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\nearrow$	-7

Mín.

Máx.

A função  $g$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 1]$  e em  $[5, +\infty[$  e estritamente crescente em  $[1, 3[$  e em  $]3, 5]$ .

Tem um mínimo relativo para  $x = 1$ , cujo valor é 1 e um máximo relativo para  $x = 5$ , cujo valor é -7.

107.3.  $h(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x-1}$ ;  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$h'(x) = \frac{(x^2 - x + 4)'(x-1) - (x^2 - x + 4)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)(x-1) - x^2 + x - 4}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 4}{(x-1)^2}$$

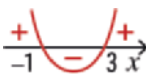
$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \quad D_{h'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \wedge x - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$



Como  $\forall x \in D_h, (x-1)^2 > 0$ , o sinal de  $h'$  depende apenas do sinal de  $x^2 - 2x - 3$ .

Cálculos auxiliares

$$h(-1) = \frac{(-1)^2 - (-1) + 4}{-1 - 1} = -3;$$

$$h(3) = \frac{3^2 - 3 + 4}{3 - 1} = 5$$

$x$	$-\infty$	$-1$		$1$		$3$	$+\infty$
$h'$	$+$	$0$	$-$		$-$	$0$	$+$
$h$	$\nearrow$	$-3$	$\searrow$		$\searrow$	$5$	$\nearrow$

Máx. Mín.

A função  $h$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -1[$  e em  $[3, +\infty[$  e estritamente decrescente em  $]-1, 1[$  e em  $]1, 3]$ .

Tem um máximo relativo para  $x = -1$ , cujo valor é  $-3$  e um mínimo relativo para  $x = 3$ , cujo valor é  $5$ .

107.4.  $i(x) = \frac{2x+9}{x+2}; D_i = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$i'(x) = \frac{(2x+9)'(x+2) - (2x+9)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2(x+2) - 2x - 9}{(x+2)^2} = \frac{2x + 4 - 2x - 9}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{-5}{(x+2)^2}; D_{i'} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$i'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  logo,  $i$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -2[$  e em  $] -2, +\infty[$  e não tem extremos.

108.1.  $p(x) = \frac{3x-2}{x+3}; D_p = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$p'(x) = \frac{(3x-2)'(x+3) - (3x-2)(x+3)'}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{3(x+3) - 3x + 2}{(x+3)^2} = \frac{3x + 9 - 3x + 2}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{11}{(x+3)^2}; D_{p'} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$p'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ , logo,  $p$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -3[$  e em  $] -3, +\infty[$  e não tem extremos.

108.2.  $q(x) = \frac{2x-4}{x+1}$  em  $[3, +\infty[$

$$q'(x) = \frac{(2x-4)'(x+1) - (2x-4)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2(x+1) - 2x + 4}{(x+1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 4}{(x+1)^2} = \frac{6}{(x+1)^2};$$

$q$  é diferenciável em  $[3, +\infty[$

$q'(x) > 0, \forall x \in [3, +\infty[$  logo,  $q$  é estritamente crescente em  $[3, +\infty[$ .

$$q(3) = \frac{2 \times 3 - 4}{3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$q$  tem um mínimo absoluto para  $x = 3$ , cujo valor é  $\frac{1}{2}$ .

109.  $p = 80$  cm

$$2x + 2y = 80 \Leftrightarrow 2y = 80 - 2x \Leftrightarrow y = 40 - x$$

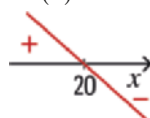
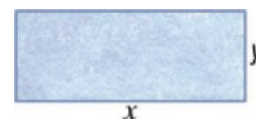
$$A = xy$$

$$A(x) = x(40 - x) =$$

$$= 40x - x^2$$

$$A'(x) = 40 - 2x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 40 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 20$$



$$x > 0 \wedge 40 - x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 40 \Leftrightarrow 0 < x < 40$$

$x$	$0$		$20$		$40$
$A'$		$+$	$0$	$-$	
$A$		$\nearrow$	$A(20)$	$\searrow$	

Máx.

$$x = 20; y = 40 - 20 = 20$$

Quadrado de lado 20 cm.

110.1.  $h(0) = 3$

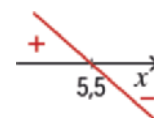
A altura do projétil no instante em que foi lançado era de 3 metros.

110.2.  $h'(t) = -9,8t + 53,9$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 53,9 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 5,5$$

$$t \geq 0$$



$t$	$0$		$5,5$	
$h'$	$53,9$	$+$	$0$	$-$
$H$	$3$	$\nearrow$	$h(5,5)$	$\searrow$

Máx.

Cálculos auxiliares

$$h(5,5) = -4,9(5,5)^2 + 53,9 \times 5,5 + 3 = 151,225$$

A altura máxima atingida pelo projétil é 151,225 metros.

110.3.  $h(t) > 150 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 53,9t + 3 > 150$

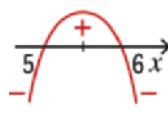
$$\Leftrightarrow -4,9t^2 + 53,9t - 147 > 0 \Leftrightarrow 5 < t < 6$$

Cálculos auxiliares

$$-4,9t^2 + 53,9t - 147 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-53,9 \pm \sqrt{(53,9)^2 - 4 \times (-4,9) \times (-147)}}{2 \times (-4,9)}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-53,9 \pm \sqrt{24,01}}{-9,8}$$

$$\Leftrightarrow t = 6 \vee t = 5$$


O projétil esteve a uma altura superior a 150 m durante 1 segundo.

110.4. Velocidade média = t.m.v.<sub>(h, 0, 3)</sub> =

$$= \frac{h(3) - h(0)}{3 - 0} = \frac{120,6 - 3}{3} = 39,2 \text{ m/s}$$

Cálculos auxiliares

$$h(3) = -4,9 \times 3^2 + 53,9 \times 3 + 3 = 120,6$$

$$h(0) = 3$$

1 s — 39,2 m

3600 s — x m

$$x = 141\,120 \text{ m} = 141,120 \text{ km}$$

A velocidade média durante os primeiros 3 segundos foi 141,12 km/h.

110.5.  $h'(t) = -9,8t + 53,9$

$$h'(4,5) = -9,8 \times 4,5 + 53,9 = 9,8 \text{ m/s}$$

A velocidade no instante 4,5 s foi 9,8 m/s.

111.1.  $A = 54 \text{ m}^2$

$$A = 2x^2 + 3xy$$

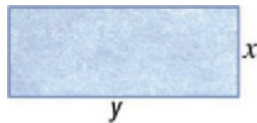
$$2x^2 + 3xy = 54$$

$$\Leftrightarrow 3xy = 54 - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{54 - 2x^2}{3x}$$

$$V = A_b \times h = x^2 \times y$$

$$V(x) = x^2 \times \frac{54 - 2x^2}{3x} = \frac{54x - 2x^3}{3} = 18x - \frac{2}{3}x^3$$



111.2.  $V'(x) = 18 - 2x^2$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 18 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

$$x > 0$$

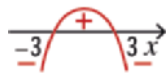
x	0		3	
v'		+	0	-
v		↗	36	↘

Máx.

C.A.

$$V(3) = 18 \times 3 - \frac{2}{3} \times 3^3 = 36$$

O volume da caixa é máximo para  $x = 3$  metros.



112.  $V_{\text{cilindro}} = 16 \text{ litros} = 16 \text{ dm}^3$

$$V = A_b \times h = \pi r^2 h$$

$$\pi r^2 h = 16 \Leftrightarrow h = \frac{16}{\pi r^2}$$

$$A_{\text{base}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{lateral}} = 2\pi r h$$

$$A_{\text{total}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{16}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{32}{r}$$

$$A(r) = \frac{2\pi r^3 + 32}{r}$$

$$A'(r) = \frac{(2\pi r^3 + 32)'r - (2\pi r^3 + 32)r'}{r^2}$$

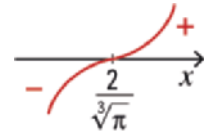
$$= \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3 - 32}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 32}{r^2}$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi r^3 - 32}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\pi r^3 - 32 = 0 \wedge r^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{32}{4\pi} \wedge r \neq 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{8}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$$



r	0	$\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$	
A'		-	0
A		↘	$A\left(\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}\right)$

Min.

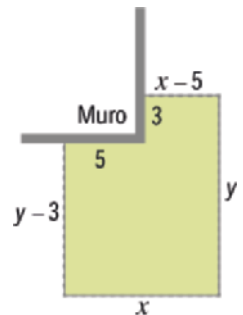
A área é mínima para:  $r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$

$$h = \frac{16}{\pi r^2} = \frac{16}{\pi \left(\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} =$$

$$= \frac{16}{\frac{4}{\pi \sqrt[3]{\pi^2}}} = \frac{16 \sqrt[3]{\pi^2}}{4\pi} =$$

$$= \frac{4 \sqrt[3]{\pi^2}}{\pi} = 4 \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{\pi^3}}$$

$$= 4 \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$$



Para se gastar a menor quantidade possível de

material,  $r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$  e  $h = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ .

113.1.  $y - 3 + x + y + x - 5 = 100 \Leftrightarrow 2y + 2x - 8 = 100$

$$\Leftrightarrow 2y = 108 - 2x \Leftrightarrow y = 54 - x$$

$$A = x \times y - 5 \times 3 = xy - 15$$

$$A(x) = x(54 - x) - 15 = 54x - x^2 - 15$$

$$A(x) = -x^2 + 54x - 15$$

113.2.  $A'(x) = -2x + 54$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 54 = 0 \Leftrightarrow$$

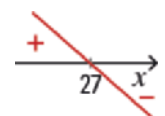
$$\Leftrightarrow x = 27$$

$$x > 0 \wedge x - 5 > 0 \wedge y > 0 \wedge y - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \wedge x > 5 \wedge 54 - x > 0 \wedge 54 - x - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \wedge x > 5 \wedge x < 54 \wedge x < 51$$

$$\Leftrightarrow \boxed{5 < x < 51}$$



$x$	5		27		51
$A'$		+	0	-	
$A$		↗	714	↘	

Máx.

Cálculos auxiliares

$$A(27) = -27^2 + 54 \times 27 - 15 = 714$$

A área da cerca é máxima para  $x = 27$  m e o seu valor é  $714 \text{ m}^2$ .

114.  $A_{\square} = 200 \text{ m}^2$ ;  $\overline{AD} = x$  m

$$\begin{cases} \text{C.A.} \\ x \times y = 200 \Leftrightarrow y = \frac{200}{x} \\ r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{x}{2} = \frac{200}{2x} = \frac{100}{x} \end{cases}$$

114.1. Seja  $\overline{AB} = y$  m

$$P_{\text{figura}} = 2\pi r + 2x$$

$$P(x) = 2\pi \times \frac{100}{x} + 2x$$

$$P(x) = \frac{200\pi}{x} + 2x$$

114.2.  $P'(x) = -\frac{200\pi}{x^2} + 2$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{200\pi}{x^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-200\pi + 2x^2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -200\pi + 2x^2 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{200\pi}{2} \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 100\pi \Leftrightarrow x = 10\sqrt{\pi} \quad \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \quad \begin{array}{c} -10\sqrt{\pi} \\ 10\sqrt{\pi} \end{array} x$$

$x$	0		$10\sqrt{\pi}$	
$P'$		-	0	+
$P$		↘	$40\sqrt{\pi}$	↗

Mín.

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} P(10\sqrt{\pi}) &= \frac{200\pi}{10\sqrt{\pi}} + 2 \times 10\sqrt{\pi} \\ &= \frac{20\pi}{\sqrt{\pi}} + 20\sqrt{\pi} = \frac{20\pi + 20\pi}{\sqrt{\pi}} = \frac{40\pi}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{40\pi\sqrt{\pi}}{\pi} = 40\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

O perímetro mínimo é  $40\sqrt{\pi}$  metros.

115.  $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} A_b \times h$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

$$\begin{cases} \text{C.A.} \\ 6^2 = r^2 + h^2 \\ \Leftrightarrow r^2 = 36 - h^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{1}{3} \pi (36 - h^2) \times h = \frac{1}{3} \pi \times 36h - \frac{1}{3} \pi h^3 \\ &= 12\pi h - \frac{1}{3} \pi h^3 \end{aligned}$$

$$V'(h) = 12\pi - \pi h^2$$

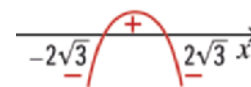
$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow 12\pi - \pi h^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi h^2 = 12\pi$$

$$\Leftrightarrow h = \pm\sqrt{12}$$

$$\Leftrightarrow h = \pm 2\sqrt{3}$$

$$0 < h < 6$$



$h$	0		$2\sqrt{3}$		6
$V'$		+	0	-	
$V$		↗	$16\pi\sqrt{3}$	↘	

Máx.

C.A.

$$V(2\sqrt{3}) = 12\pi \times 2\sqrt{3} - \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{3})^3$$

$$= 24\sqrt{3}\pi - \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{3})^2 (2\sqrt{3})$$

$$= 24\sqrt{3}\pi - \frac{1}{3} \pi \times 4 \times 3 \times 2\sqrt{3}$$

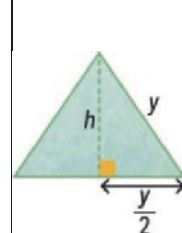
$$= 24\sqrt{3}\pi - 8\pi\sqrt{3} = 16\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

O volume máximo que o cone pode ter é

$$16\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

116.1.  $4x + 3y = 20 \Leftrightarrow 3y = 20 - 4x \Leftrightarrow y = \frac{20 - 4x}{3}$

Cálculos auxiliares



$$y^2 = h^2 + \frac{y^2}{4}$$

$$h^2 = y^2 - \frac{y^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3}{4} y^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} y$$

$(y > 0 \wedge h > 0)$

$$A_{\square} = x^2$$

$$A_{\Delta} = \frac{y \times h}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{y \times \frac{\sqrt{3}}{2} y}{2} = \frac{\sqrt{3} y^2}{4}$$

$$\text{Área das duas figuras} = \text{Área}_{\square} + A_{\Delta} = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} y^2$$

$$A(x) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{20 - 4x}{3} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow A(x) = x^2 + \frac{\sqrt{3} (20 - 4x)^2}{4 \times 9}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = x^2 + \frac{(20 - 4x)^2 \sqrt{3}}{36}$$

116.2.  $A'(x) = (x^2)' + \left(\frac{\sqrt{3}}{36}(20-4x)^2\right)'$   
 $= 2x + \frac{\sqrt{3}}{36} \times [(20-4x)^2]'$   
 $= 2x + \frac{\sqrt{3}}{36} 2(20-4x) \times (-4)$   
 $= 2x - \frac{2\sqrt{3}}{9}(20-4x) = 2x - \frac{40}{9}\sqrt{3} + \frac{8}{9}\sqrt{3}x$

$A'(x) = \left(2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)x - \frac{40\sqrt{3}}{9}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)x - \frac{40\sqrt{3}}{9} = 0$

$\Leftrightarrow \left(2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)x = \frac{40\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{40\sqrt{3}}{9}}{2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{18 + 8\sqrt{3}} \approx 2,175$

$x > 0 \wedge \frac{20-4x}{3} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge 20-4x > 0$

$x > 0 \wedge -4x > -20 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 5$

$\Leftrightarrow 0 < x < 5$

x	0		2,175		5
A'		-	0	+	
A		↘	A(2,175)	↗	

Min.

A área é mínima para  $x \approx 2,175$  m.

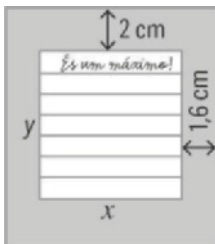
Quadrado:  $4x = 4 \times 2,175 = 8,7$  m

Triângulo:

$3y = \frac{20-4x}{3} = 20 - 4 \times 2,175 = 11,3$  m

O arame deve ser dividido em duas partes, uma com 8,7 m e outra com 11,3 m.

117.



$xy = 20 \Leftrightarrow y = \frac{20}{x}$

$A = (2 \times 1,6 + x)(2 \times 2 + y)$

$A = (3,2 + x)(4 + y)$

$A(x) = (3,2 + x)\left(4 + \frac{20}{x}\right)$

$A'(x) = (3,2 + x)' \left(4 + \frac{20}{x}\right) + (3,2 + x) \left(4 + \frac{20}{x}\right)'$

$A'(x) = 4 + \frac{20}{x} + (3,2 + x) \left(-\frac{20}{x^2}\right)$

$= 4 + \frac{20}{x} - \frac{64}{x^2} - \frac{20x}{x^2}$

$= \frac{4x^2 + 20x - 64 - 20x}{x^2}$

$= \frac{4x^2 - 64}{x^2}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 64}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 64 = 0 \wedge x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 16 \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4 \wedge x \neq 0$

$x > 0$

x	0		4		$+\infty$
A'		-	0	+	
A		↘	64,8	↗	

Min.

$A(4) = (3,2 + 4)\left(4 + \frac{20}{4}\right) = 64,8$

Dimensão da folha:



$x + 1,6 + 1,6$

$x = 4$

$4 + 1,6 + 1,6 = 7,2$

$\frac{20}{4} + 2 + 2 = 9$

As dimensões da folha são 7,2 cm e 9 cm.

118.  $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} A_b \times h = \frac{1}{3} \times \pi y^2 \times (x+3)$

Cálculos auxiliares

$r = 3$

$3^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 9 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2$

$V(x) = \frac{\pi}{3}(9 - x^2)(x+3)$

$V(x) = \frac{\pi}{3}(9x + 27 - x^3 - 3x^2)$

$V'(x) = \frac{\pi}{3}(9 - 3x^2 - 6x)$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 6x + 9) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

$x > 0 \wedge 9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x^2 < 9$

$\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 3$

x	0		1		3
V'		-	0	+	
V		↘	$\frac{32\pi}{3}$	↗	

Min.

C.A.  $V(1) = \frac{\pi}{3}(9 \times 1 + 27 - 1^3 - 3 \times 1^2) = \frac{32}{3} \pi$

O volume máximo do cone é  $\frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$ .

Pág. 173

119.1.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(6 - x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$

$A(x, f(x)) \quad C(6 - x, f(x))$

Cálculos auxiliares

$b = 6 - x - x = 6 - 2x; h = f(x) = 6x - x^2$

$A_s = \frac{b \times h}{2}$

$A(x) = \frac{(6 - 2x) \times (6x - x^2)}{2}$

$= \frac{36x - 6x^2 - 12x^2 + 2x^3}{2} = x^3 - 9x^2 + 18x$

$A(x) = x^3 - 9x^2 + 18x$

$x < 3$  porque o eixo de simetria da parábola é  $x = 3$ , logo, a abcissa de  $A$  é menor que 3.

Assim,  $0 < x < 3$ .

119.2.  $A(x) = x^3 - 9x^2 + 18x$

$A'(x) = 3x^2 - 18x + 18$

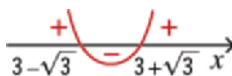
$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 18 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \times 3 \times 18}}{2 \times 3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{108}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{18 \pm 6\sqrt{3}}{6}$

$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{3} \vee x = 3 + \sqrt{3}$

$0 < x < 3$



$x$	0		$3 - \sqrt{3}$		3
$A'$		+	0	-	
$A$		$\nearrow$	$A(3 - \sqrt{3})$	$\searrow$	

Máx.

$A(3 - \sqrt{3}) = (3 - \sqrt{3})^3 - 9(3 - \sqrt{3})^2 + 18(3 - \sqrt{3})$

$= (3 - \sqrt{3})^2(3 - \sqrt{3}) - 9(3 - \sqrt{3})^2 + 54 - 18\sqrt{3}$

$= (12 - 6\sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) - 9(12 - 6\sqrt{3}) + 54 - 18\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3}$

A área máxima do triângulo é  $6\sqrt{3}$  u. a.

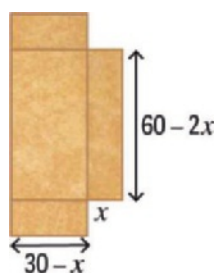
120.1.  $V = A_b \times h$

$V(x) = (30 - x)(60 - 2x) \times x$

$= (1800 - 60x - 60x + 2x^2) \times x$

$= 1800x - 120x^2 + 2x^3$

$= 2x^3 - 120x^2 + 1800x$



120.2.  $V'(x) = 6x^2 - 240x + 1800$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 240x + 1800 = 0$

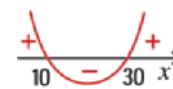
$\Leftrightarrow x^2 - 40x + 300 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 10 \vee x = 30$

$x > 0 \wedge 30 - x > 0 \wedge 60 - 2x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 30 \wedge -2x > -60$

$\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 30 \Leftrightarrow 0 < x < 30$



$x$	0		10		30
$V'$		+	0	-	
$V$		$\nearrow$	$V(10)$	$\searrow$	

Máx.

Para que o volume seja máximo,  $x = 10$  cm.

Pág. 174

121.1.  $A = \frac{b \times h}{2}$

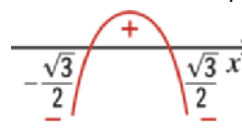
$A(x) = \frac{x \times (3 - 4x^2)}{2} = \frac{3x - 4x^3}{2} = \frac{3}{2}x - 2x^3$

$x > 0 \wedge -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Cálculos auxiliares

$3 - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}[$

$3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$



121.2.  $A'(x) = \frac{3}{2} - 6x^2$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 6x^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$

$0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$



$x$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$A'$		+	0	-	
$A$		$\nearrow$	$A\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	

Máx.

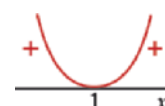
Para a área do triângulo  $[OAP]$  ser máxima, a

abcissa de  $P$  é  $\frac{1}{2}$ .

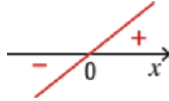
122.  $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x + \frac{1}{x} - 2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \geq 0$

$\bullet \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$



$x = 0$



$x$	$-\infty$	$0$		$1$	$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$	+	+	+	0	+
$x$	-	0	+	+	+
$\frac{x^2 - 2x + 1}{x}$	-	N.D.	+	0	+

$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x > 0$

Logo, a soma de um número positivo com o seu inverso é pelo menos 2.

Alternativa:

Estudar, recorrendo à sua derivada, a existência de extremos e a monotonia da função definida por

$P(x) = x + \frac{1}{x}$

123.1.  $V_{\text{cilindro}} = A_b \times h = \pi r^2 \times h$

$V = 1 \Leftrightarrow \pi r^2 \times h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$

123.2.

Área interior = Área do círculo + Área da superfície lateral (S)

$S = \pi r^2 + 2\pi r \times h$

$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \times \frac{1}{\pi r^2}$

$S(r) = \pi r^2 + \frac{2}{r}$

$S(r) = \frac{2}{r} + \pi r^2$

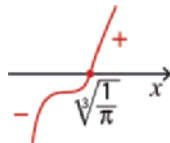
123.3.  $S'(r) = \left(\frac{2}{r}\right)' + (\pi r^2)' = -\frac{2}{r^2} + 2\pi r$

$S'(r) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{r^2} + 2\pi r = 0 \Leftrightarrow \frac{-2 + 2\pi r^3}{r^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 + 2\pi r^3 = 0 \wedge r^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r^3 = 2 \wedge r \neq 0$

$\Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$



$r$	$0$		$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	
$S'$		-	0	+
$S$		$\searrow$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right)$	$\nearrow$

Para a área da superfície interior ser o menor possível,

$r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \text{ dm}$

$\frac{\theta r^2}{2} = 100 \Leftrightarrow \theta r^2 = 200 \Leftrightarrow \theta = \frac{200}{r^2}$

Comprimento do arco da circunferência:  $\theta r$

$P = 2r + \theta r$

$P(r) = 2r + \frac{200r}{r^2} = 2r + \frac{200}{r}$

$P'(r) = (2r)' + \left(\frac{200}{r}\right)'$

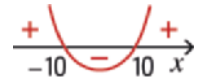
$P'(r) = 2 - \frac{200}{r^2}$

$P'(r) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{200}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2r^2 - 200}{r^2} = 0$

$\Leftrightarrow 2r^2 - 200 = 0 \wedge r^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow r^2 = 100 \wedge r \neq 0$

$\Leftrightarrow r = -10 \vee r = 10$



$r > 0$

$r$	$0$		$10$	$+\infty$
$P'$		-	0	+
$P$		$\searrow$	$P(10)$	$\nearrow$

$r = 10; \theta = \frac{200}{10^2} = 2$

Para o perímetro da peça ser mínimo,  $r = 10 \text{ cm}$  e  $\theta = 2 \text{ rad}$ .

125.1.  $A(x, 0, 0); x = 8; A(8, 0, 0)$

$B(0, y, 0); y = 8; B(0, 8, 0)$

$C(0, 0, z); 2z = 8 \Leftrightarrow z = 4; C(0, 0, 4)$

$V\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, h\right)$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h = \frac{1}{3} \times a^2 \times h$

C.A.  
 $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 2h - 8 = 0 \Leftrightarrow a + 2h - 8 = 0$   
 $\Leftrightarrow 2h = 8 - a \Leftrightarrow h = 4 - \frac{a}{2}$

$V(a) = \frac{1}{3} a^2 \left(4 - \frac{a}{2}\right) = \frac{4}{3} a^2 - \frac{a^3}{6} = \frac{8a^2 - a^3}{6}$

$V(a) = \frac{8a^2 - a^3}{6}$

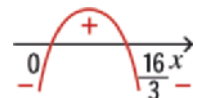
125.2.  $V'(a) = \frac{(8a^2 - a^3)' \times 6 - (8a^2 - a^3) 6'}{36}$

$= \frac{(16a - 3a^2) \times 6}{36} = \frac{16a - 3a^2}{6}$

$V'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{16a - 3a^2}{6} \Leftrightarrow 16a - 3a^2 = 0$

$\Leftrightarrow a(16 - 3a) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{16}{3}$



124.  $A_{\text{setor circular}} = \frac{\theta r^2}{2}$

$A = 1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$

$$0 < a < 8$$

a	0		$\frac{16}{3}$		8
V'		+	0	-	
V		↗	$V\left(\frac{16}{3}\right)$	↘	

Cálculos auxiliares

$$h = 4 - \frac{a}{2} = 4 - \frac{\frac{16}{3}}{2} = 4 - \frac{16}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

V é estritamente crescente em  $\left]0, \frac{16}{3}\right]$  e

estritamente decrescente em  $\left[\frac{16}{3}, 8\right[$ .

Para o volume ser máximo  $a = \frac{16}{3}$  e  $h = \frac{4}{3}$ .

### Máximo On

Pág. 176

#### Tarefa 1 – A regra de Ruffini em Python

- $Q = x^2 - 2x - 3$  e  $R = -1$
- Pede ao utilizador que insira os valores de cada coeficiente do polinómio dividendo começando pelo do termo de grau 3 até ao de grau 0 e vai adicionando-os sucessivamente à lista P.
  - Teorema do resto

Pág. 177

- 1, -4, 1, 5
  - [1]
  - 1
  - $m = 1 \times 2 + P[1] = 2 - 4 = -2$
  - $m = -2 \times 2 + P[2] = -4 + 1 = -3$
  - $m = -3 \times 2 + P[3] = -6 + 5 = -1$
  - [1, -2, -3, -1]
  - 1
  - [1, -2, -3]
- A partir do *output* obtido, verifica-se que:  
 $Q = 1,0x^2 - 2,0x - 3,0 = x^2 - 2x - 3$  e  $R = -1$

```
Divisão de um polinómio (P) de grau 3 por x-a
Introduza o coeficiente do termo de grau 3: 1
Introduza o coeficiente do termo de grau 2: -4
Introduza o coeficiente do termo de grau 1: 1
Introduza o coeficiente do termo de grau 0: 5
a = 2
Coeficientes do polinómio: [1.0, -4.0, 1.0, 5.0]
Coeficientes do quociente: [1.0, -2.0, -3.0]
Resto: P(2.0)= -1.0
```

- Como o resto da divisão de A por B é 0, conclui-se que A é divisível por B.

```
Divisão de um polinómio (P) de grau 3 por x-a
Introduza o coeficiente do termo de grau 3: 1
Introduza o coeficiente do termo de grau 2: -3
Introduza o coeficiente do termo de grau 1: 5
Introduza o coeficiente do termo de grau 0: -6
a = 2
Coeficientes do polinómio: [1.0, -3.0, 5.0, -6.0]
Coeficientes do quociente: [1.0, -1.0, 3.0]
Resto: P(2.0)= 0.0
```

- $n + 1$
  - $n - i$
  - $\text{len}(P) - 1$

3.2.

	7	-2	1	2	-1	5
-1		-7	9	-10	8	-7
	7	-9	10	-8	7	-2=R

$$Q = 7x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 8x + 7 \text{ e } R = -2$$

Verificação:

```
Qual o grau do polinómio?5
Introduza o coeficiente do termo de grau 5: 7
Introduza o coeficiente do termo de grau 4: -2
Introduza o coeficiente do termo de grau 3: 1
Introduza o coeficiente do termo de grau 2: 2
Introduza o coeficiente do termo de grau 1: -1
Introduza o coeficiente do termo de grau 0: 5
a = -1
Coeficientes do polinómio: [7.0, -2.0, 1.0, 2.0, -1.0, 5.0]
Coeficientes do quociente: [7.0, -9.0, 10.0, -8.0, 7.0]
Resto: P(-1.0)= -2.0
```

Pág. 178

#### Tarefa 2 – A viagem do comboio

- $f(1) = 49 \times 1^2 + 2 \times 1 = 51$ , pelo que  $A(1, 51)$ .  
Ao fim de uma hora de viagem,  $x = 1$ , o comboio tinha percorrido 51 km,  $y = 51$ .
- Entre as duas e três horas de viagem, ou seja, em  $x \in [2, 3]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 49x^2 + 2x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 200 & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ -20x^2 + 210x - 250 & \text{se } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

- $f(1) = 51$ ;  $f(3) = -20 \times 3^2 + 210 \times 3 - 250 = 200$   
Variação em  $[2, 3]$ :  $f(3) - f(1) = 149$  km
- $f(5) = -20 \times 5^2 + 210 \times 5 - 250 = 300$   
Distância percorrida em  $[3, 5]$   
 $f(5) - f(3) = 100$  km  
Velocidade média:  $\frac{100}{2} = 50$  km/h
- Como não houve alteração da distância percorrida nesse intervalo de tempo, o comboio esteve parado, pelo que a sua velocidade nesse intervalo de tempo foi 0 km/h.

- Se  $0 < x < 2$ ,  $f'(x) = (49x^2 + 2x)' = 98x + 2$   
(A)  $f'(0,5) = 98 \times 0,5 + 2 = 51$  km/h  
(B)  $f'(1) = 98 \times 1 + 2 = 100$  km/h  
Se  $2 < x < 3$ ,  $f'(x) = (200)' = 0$ .  
(C)  $f'(2,5) = 0$  km/h  
Se  $3 < x < 5$ ,  
 $f'(x) = (-20x^2 + 210x - 250)' = -40x + 210$   
(D)  $f'(4) = -40 \times 4 + 210 = 50$  km/h  
Opção (B)

Pág. 179

8.1.  $c = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{300 - 0}{5} = \frac{300}{5} = 60$

8.2.

Qual o valor de a?1  
Qual o valor de b?3  
A taxa média de variação é 74.5.

$c = 74,5$ .

A velocidade média do comboio entre uma e três horas de viagem foi 74,5 km/h.

9. Determina um valor aproximado da derivada de  $f$  em  $x = 1$ .

10.

```
1 x0 = float(input("Valor de x0?"))
2 fx0 = f(x0)
3 for i in range(1,6):
4     h = 10**(-i)
5     xh = x0+h
6     fxh = f(xh)
7     d = (fxh-fx0)/h
8     print(d)
```

Valor de x0?1  
104.90000000000009  
100.49000000000063  
100.04899999998429  
100.0048999999592  
100.00049000069565

$h$	0,1	0,01	0,001	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$\frac{f(xh) - f(x0)}{h}$	104,900	100,490	100,049	100,005	100,000

11.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 104$ . Tende para 104.

Como  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ , significa que a velocidade do comboio ao final de uma hora de viagem foi 104 km/h.

### Avaliação global 1

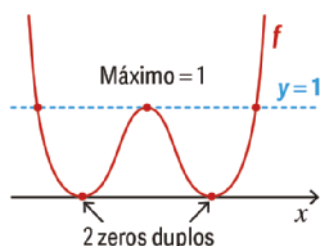
Pág. 180

1. Se  $P(x)$  é divisível por  $2x - 1$  então  $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ .

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + k \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k = -1 \Leftrightarrow k = -2. \text{ Opção (B)}$$

2.



$f(x) = 1$  tem 3 soluções. Opção (C)

3.  $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times (x^2 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$$

Como se pode observar no gráfico da função,  $f$  tem dois zeros negativos e por isso 2 não pode ser solução da equação. Opção (C)

4. •  $a < 0$ , significa que a assíntota horizontal se encontra abaixo do eixo  $Ox$ , pelo que a opção (A) não está correta.

•  $c > 0$ , significa que a assíntota vertical se encontra à direita do eixo  $Oy$ , pelo que, a opção (C) não está correta.

•  $b < 0$ , significa que  $f$  é crescente em  $]-\infty, c[$  e em  $]c, +\infty[$ , pelo que, a opção (B) não está correta. Opção correta: (D)

Pág. 181

5. Equação da assíntota vertical de  $f: x = 1$

Equação da assíntota horizontal de  $f: y = 2$

Se a equação da assíntota vertical de  $g$  é  $x = 3$ , então  $g$  resulta de  $f$  através de uma translação horizontal de 2 unidades para a direita.

Então,  $a = -2$ .

Se a equação da assíntota horizontal de  $g$  é  $y = 5$ , então  $g$  resulta de  $f$  através de uma translação vertical de 3 unidades para cima.

Então,  $b = 3$ . Opção (A)

6. Como  $t$  é a reta tangente ao gráfico de  $h$  no ponto de abcissa 1,  $h'(1) = m_t$

$$m_t = \frac{1 - 0}{0 - 2} = -\frac{1}{2}$$

Então,  $h'(1) = -\frac{1}{2}$ . Opção (C)

7. Como  $f'(x) \geq 0$ , para todo o  $x \in [0, b]$ , podemos concluir que  $f$  é estritamente crescente em  $[0, b]$ .

$x$	$-\infty$	$a$		$B$	$+\infty$
$f'$	+	0	+	0	-
$f$	$\nearrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$

Máx.

Opção (B)

8.  $h'(t) = (-4,9t^2 + 102t)' = -9,8t + 102$

$$h'(10) = -9,8 \times 10 + 102 = 4 \text{ m/s. Opção (A)}$$

### Avaliação global 2

Pág. 182

1. Zeros de  $B(x)$ :

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Zeros: -1 e 1

Os zeros em comum de  $A(x)$  e  $B(x)$  são, então,  $-1$  e  $1$ .

Assim,  $A(-1) = 0 \wedge A(1) = 0$ .

$$\begin{cases} A(-1) = 0 \\ A(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 2 = 0 \\ 1^3 + a \times 1^2 + b \times 1 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + a - b - 2 = 0 \\ 1 + a + b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ b + 3 + b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 + 3 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

2.1.  $f(3) = 3^4 - 3 \times 3^3 - 4 \times 3^2 + 12 \times 3 = 0$

Então,  $B(3, 0)$ , pertence ao gráfico de  $f$ .

2.2.  $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$

$$= x(x^3 - 3x^2 - 4x + 12)$$

$$= x(x-3)(x^2 - 4)$$

$$= x(x-3)(x-2)(x+2)$$

C.A.	1	-3	-4	12
3	3	0	-12	
	1	0	-4	0

2.3. a)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x-2)(x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 3 = 0 \vee x - 2 = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = 2 \vee x = -2$$

$$A(-2, 0); B(3, 0); \overline{AB} = 3 - (-2) = 5$$

$$f(1) = 1^4 - 3 \times 1^3 - 4 \times 1^2 + 12 \times 1 = 1 - 3 - 4 + 12 = 6$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times f(1)}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15 \text{ u.a.}$$

b)  $\tan(\widehat{BAC}) = m_{AC} = 2$

$$\widehat{BAC} = \tan^{-1}(2)$$

$$\approx 63,4^\circ$$

Cálculos auxiliares	$A(-2, 0)$	$C(1, 6)$
$m_{AC} = \frac{6-0}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = 2$		

3.1. Seja  $d$  a distância entre as localidades  $A$  e  $B$  e seja  $t$  o tempo que o autocarro demora a chegar de  $A$  a  $B$ .

$$d = 54t \text{ e } d = 45 \left( t + \frac{4}{60} \right)$$

$$\text{Então, } 54t = 45 \left( t + \frac{1}{15} \right) \Leftrightarrow 54t = 45t + 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \text{ h}$$

$$t = \frac{1}{3} \times 60 = 20 \text{ min.}$$

No percurso de ida e volta:

$$t + t + 4 = 20 + 20 + 4 = 44 \text{ min.}$$

O autocarro gasta 44 min. no percurso de ida e volta.

3.2.  $d = 54 \times \frac{1}{3} = 18 \text{ km}$

A distância entre as localidades  $A$  e  $B$  é de 18 km.

4.1. 20 litros do bidão  $A$ :

10 litros de tinta vermelha

10 litros de tinta amarela

4 litros do bidão  $B$ :

$0,8 \times 4 = 3,2$  litros de tinta vermelha

$4 - 3,2 = 0,8$  litros de tinta amarela

A mistura obtida terá  $10 + 3,2 = 13,2 \text{ l}$  de tinta vermelha e  $10 + 0,8 = 10,8 \text{ l}$  de tinta amarela.

$$\frac{10,8}{20 + 4} \times 100 = 45\%$$

A mistura obtida terá 45% de tinta amarela.

4.2. 20 litros do bidão  $A$ : 10 litros de tinta vermelha  
10 litros de tinta amarela  
 $x$  litros do bidão  $B$ :  $0,8x$  de tinta vermelha  
 $0,2x$  de tinta amarela

$$V(x) = \frac{10 + 0,8x}{20 + x} \Leftrightarrow V(x) = \frac{5(10 + 0,8x)}{5(20 + x)}$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{50 + 4x}{100 + 5x}$$

4.3.  $V(x) = 0,64 \Leftrightarrow \frac{50 + 4x}{100 + 5x} = 0,64$

$$\Leftrightarrow \frac{50 + 4x}{100 + 5x} - 0,64 = 0 \Leftrightarrow \frac{50 + 4x - 64 - 3,2x}{100 + 5x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,8x - 14 = 0 \wedge 100 + 5x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 0,8x = 14 \wedge x \neq -20 \Leftrightarrow x = \frac{14}{0,8} \Leftrightarrow x = 17,5$$

O pintor deve transferir 17,5 litros de tinta do bidão  $B$  para o bidão  $A$ .

5.1.  $4 - 2 = 2$ . Aos quatro anos de idade tinha decorrido 2 anos após o início do estudo.

$$p(2) = 0,1 \times 2^3 - 1,8 \times 2^2 + 9,2 \times 2 + 12$$

$$= 0,8 - 7,2 + 18,4 + 12 = 24 \text{ kg}$$

5.2.  $p(t) > 24 \wedge 0 \leq t \leq 10$

$$\Leftrightarrow 0,1t^3 - 1,8t^2 + 9,2t + 12 > 24 \wedge t \in [0, 10]$$

$$\Leftrightarrow 0,1t^3 - 1,8t^2 + 9,2t - 12 > 0 \wedge t \in [0, 10]$$

C.A.

	0,1	-1,8	9,2	-12
2	0,2	-3,2	12	
	0,1	-1,6	6	0

$$0,1t^2 - 1,6t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1,6 \pm \sqrt{2,56 - 2,4}}{2 \times 0,1} \Leftrightarrow t = 6 \vee t = 10$$

$$p(t) > 24 \wedge 0 \leq t \leq 10$$

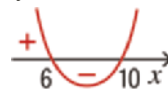
$$\Leftrightarrow (t-2)(0,1t^2 - 1,6t + 6) > 0 \wedge t \in [0, 10]$$

$t$	0	2	6	10
$t-2$	-	-	0	+
$0,1t^2 - 1,6t + 6$	+	+	+	0
$(t-2)(0,1t^2 - 1,6t + 6)$	-	-	0	+

$$y = x - 2$$

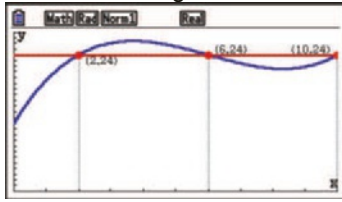


$$y = 0,1x^2 - 1,6x + 6$$



O peso do Oli foi superior a 24 kg entre os 2 e os 6 anos após o estudo, ou seja, durante 4 anos.

Na calculadora gráfica:



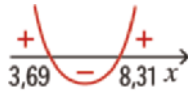
5.3.  $p'(t) = (0,1t^3 - 1,8t^2 + 9,2t + 12)'$   
 $= 0,3t^2 - 3,6t + 9,2$

$p'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3,6 \pm \sqrt{12,96 - 11,04}}{2 \times 0,3}$

$t \approx \frac{3,6 \pm 1,3856}{0,6}$

$\Leftrightarrow t \approx 3,69 \vee t \approx 8,31$

$y = 0,3x^2 - 3,6x + 9,2$



$t$	0	3,69	8,31	10			
$p'$	+	+	0	-	0	+	+
$p$	12	↗	26,5	↘	21,5	↗	24

Mín. Máx. Mín. Máx.

$p(0) = 12$

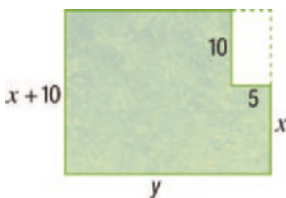
$p(3,69) = 0,1 \times 3,69^3 - 1,8 \times 3,69^2 + 9,2 \times 3,69 + 12 \approx 26,5$

$p(8,31) = 0,1 \times 8,31^3 - 1,8 \times 8,31^2 + 9,2 \times 8,31 + 12 \approx 21,5$

$p(10) = 0,1 \times 10^3 - 1,8 \times 10^2 + 9,2 \times 10 + 12 = 24$

O peso máximo que o Oli atingiu nos primeiros 10 anos foi de, aproximadamente, 26,5 kg .

6.1.



$x + y + x + 10 = 110 \Leftrightarrow y = 100 - 2x$

$A(x) = y \times (x + 10) - 5 \times 10$

$= (100 - 2x)(x + 10) - 50$

$= 100x + 1000 - 2x^2 - 20x - 50$

$= -2x^2 + 80x + 950$

$x > 0 \wedge y > 0 \wedge y > 5 \Leftrightarrow x > 0 \wedge 100 - 2x > 5$

$\Leftrightarrow x > 0 \wedge -2x > -95 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 47,5$

$D_A = ]0 ; 47,5[$

6.2.  $A'(x) = (-2x^2 + 80x + 950)' = -4x + 80$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow -4x = -80 \Leftrightarrow x = 20$

$y = -4x + 80$

$A(20) = -2 \times 20^2 + 80 \times 20 + 950 = 1750 \text{ m}^2$

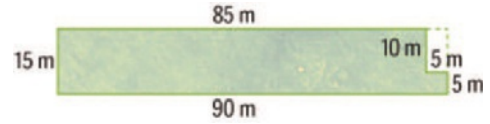
A área máxima da cerca é 1750 m<sup>2</sup>, para  $x = 20 \text{ m}$ .

6.3.  $A(x) = 1300 \Leftrightarrow -2x^2 + 80x + 950 = 1300$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 80x - 350 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 175 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 700}}{2} \Leftrightarrow x = 5 \text{ m} \vee x = 35 \text{ m}$

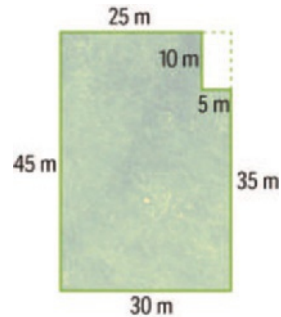
Se  $x = 5 \text{ m}$  :



$y = 100 - 2 \times 5 = 90 \text{ m}$

Se  $x = 35 \text{ m}$  :

$y = 100 - 2 \times 35 = 30 \text{ m}$



$x = 5 \text{ m}$  e  $y = 90 \text{ m}$  ou  $x = 35 \text{ m}$  e  $y = 30 \text{ m}$ .

### Questões tipo exame

Pág. 184

1.1.  $P(x) = x^n - x^{n-2} - 2x + 2$

$= x^{n-2+2} - x^{n-2} - 2x + 2 = x^2 \times x^{n-2} - x^{n-2} - 2x + 2$

$= (x^2 - 1)x^{n-2} - 2x + 2 = (x-1)(x+1)x^{n-2} - 2x + 2$

$= (x-1)(x-1+2)x^{n-2} - 2x + 2$

$= (x-1)(x-1)x^{n-2} + (x-1) \times 2x^{n-2} - 2x + 2$

$= (x-1)^2 x^{n-2} + 2(x \times x^{n-2} - x^{n-2} - x + 1)$

$= (x-1)^2 x^{n-2} + 2(x^{n-1} - x^{n-2} - x + 1)$

Outro processo:

$(x-1)^2 x^{n-2} + 2(x^{n-1} - x^{n-2} - x + 1)$

$= (x^2 - 2x + 1)x^{n-2} + 2x^{n-1} - 2x^{n-2} - 2x + 2$

$= x^n - 2x^{n-1} + x^{n-2} + 2x^{n-1} - 2x^{n-2} - 2x + 2$

$= x^n - x^{n-2} - 2x + 2 = P(x)$

1.2.  $n = 4$

$P(x) = x^4 - x^2 - 2x + 2 = x^2(x^2 - 1) - 2(x-1)$

$= x^2(x-1)(x+1) - 2(x-1) = (x-1)[x^2(x+1) - 2]$

$= (x-1)(x^3 + x^2 - 2)$

Seja  $A(x) = x^3 + x^2 - 2$ .

$x$	0	20	47,5	
$A'$		+	0	-
$A$		↗	$A(20)$	↘

Máx.

Divisores inteiros de 2: -2, -1, 1, 2

$$A(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 0$$

A é divisível por  $x-1$ .

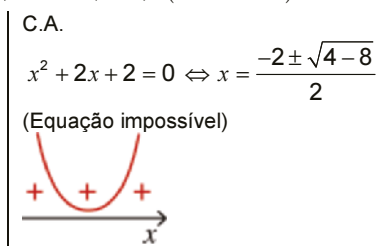
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$A(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$$

$$P(x) = (x-1)(x-1)(x^2 + 2x + 2) =$$

$$= (x-1)^2 (x^2 + 2x + 2)$$

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (x^2 + 2x + 2) \leq 0$$



Como  $x^2 + 2x + 2 > 0$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$S = \{1\}$$

2.1.  $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$

a)  $P(1) = 1^5 - 1^4 - 1 + 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

Logo, 1 é raiz de  $P(x)$ .

b)  $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$

$$= x^4(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^4 - 1)$$

$$= (x-1)(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

$$= (x-1)(x-1)(x+1)(x^2 + 1)$$

$$= (x-1)^2 (x+1)(x^2 + 1)$$

Outro processo:

1 é raiz de  $P(x)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(x^4 - 1)$$

$$= (x-1)(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

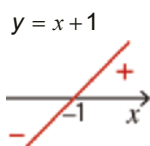
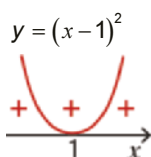
$$= (x-1)(x-1)(x+1)(x^2 + 1)$$

$$= (x-1)^2 (x+1)(x^2 + 1)$$

c)  $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (x+1)(x^2 + 1) \leq 0$

Como  $x^2 + 1 > 0$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (x+1) \leq 0$$



$x$	$-\infty$	$-1$		$1$	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+
$(x-1)^2(x-1)$	-	0	+	0	+

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1] \cup \{1\}$$

$$S = ]-\infty, -1] \cup \{1\}$$

2.2.  $P(a) + P(-a) =$

$$\begin{aligned} &= a^{2n+3} - a^{2n+2} - a + 1 + (-a)^{2n+3} - (-a)^{2n+2} - (-a) + 1 \\ &= a^{2n+2} \times a - a^{2n+2} - a + 1 + (-a)^{2n+2} \times (-a) - a^{2n+2} + a + 1 \\ &= \cancel{a \times a^{2n+2}} - \cancel{a \times a^{2n+2}} + 2 - 2a^{2n+2} \\ &= 2(1 - a^{2n+2}) \end{aligned}$$

3.1.  $15 \text{ h} + \frac{3}{4} \text{ h} = 15,75 \text{ h}$

$$15,75 \text{ h} - 7 \text{ h} = 8,75 \text{ h}$$

$$T(8,75) = 0,1 \times 8,75^4 - 2 \times 8,75^3 + 12,775 \times 8,75^2 - 30 \times 8,75 + 22,5 \approx -15,58 \text{ }^\circ\text{C}$$

3.2.  $8,5 \text{ h} - 7 \text{ h} = 1,5 \text{ h}$ ;  $13 - 7 = 6 \text{ h}$

$$T(6) = 0 \text{ e } T(1,5) = 0$$

$$T(t) = 0 \Leftrightarrow 0,1t^4 - 2t^3 + 12,775t^2 - 30t + 22,5 = 0$$

C.A.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 0,1 & -2 & 12,775 & -30 & 22,5 \\ 6 & & 0,6 & -8,4 & 26,25 & -22,5 \\ \hline & 0,1 & -1,4 & 4,375 & -3,75 & 0 \\ 1,5 & & 0,15 & -1,875 & 3,75 & \\ \hline & 0,1 & -1,25 & 2,5 & 0 & \end{array}$$

$$T(t) = 0 \Leftrightarrow (t-6)(t-1,5)(0,1t^2 - 1,25t + 2,5) = 0$$

$$\Leftrightarrow t-6=0 \vee t-1,5=0 \vee 0,1t^2 - 1,25t + 2,5=0$$

$$\Leftrightarrow t=6 \vee t=1,5 \vee t = \frac{1,25 \pm \sqrt{1,5625 - 1}}{2 \times 0,1}$$

$$\Leftrightarrow t=6 \vee t=1,5 \vee t=2,5 \vee t=10$$

$$7 \text{ h} + 2,5 \text{ h} = 9,5 \text{ h} = 9 \text{ h e } 30 \text{ min}$$

$$7 \text{ h} + 10 \text{ h} = 17 \text{ h}$$

Os outros dois instantes em que a temperatura no interior da arca foi igual a zero graus Celsius foram às 9 h e 30 min e às 17 h.

4.

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x+1 \\ -x-1 & 1 \\ \hline & -2 \end{array}$$

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$$

Equação da assíntota vertical ao gráfico de  $g$ :

$$x = -1$$

Equação da assíntota horizontal ao gráfico de  $g$ :

$$y = 1$$

Então,  $P(-1, 1)$ .

$$h(-1) = 1 \Leftrightarrow f(-1) + k = 1 \Leftrightarrow (-1)^3 + 3(-1)^2 + k = 1$$

$$\Leftrightarrow -1 + 3 + k = 1 \Leftrightarrow k = -1$$

5.  $f(x) = \frac{4-x}{x-2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{-x+4}{x-2} \Leftrightarrow f(x) = -1 + \frac{2}{x-2}$

Cálculos auxiliares

$$\begin{array}{r|l} -x+4 & x-2 \\ \hline x-2 & -1 \\ \hline & 2 \end{array}$$

Equação da assíntota vertical ao gráfico de  $f$ :  
 $x = 2$

Equação da assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ :  
 $y = -1$

$A(0, -1); B(2, -1);$

$D(2, 0)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4-x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 4-x = 0 \wedge x-2 \neq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 4 \wedge x \neq 2$

$C(4, 0)$

$\overline{AB} = \overline{CD} = 2; \overline{BD} = 1$

$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BD} = 2 \times 1 = 2 \text{ u. a.}$

6.1. Equação da assíntota vertical ao gráfico de  $f$ :  
 $x = 2$

Equação da assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ :  
 $y = 1$

Então,  $f(x) = 1 + \frac{k}{x-2}$

$A$  é um ponto do gráfico de  $f$ .

Então,

$f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{k}{0-2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{k}{-2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1$

$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x-2+1}{x-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x-1}{x-2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x-2}{2x-4}$

Logo,  $a = 2, b = -2$  e  $c = 2$ .

6.2.  $B$  é zero de  $f$ .

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-2 = 0 \wedge 2x-4 \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x = 2 \wedge 2x \neq 4 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x \neq 2$

$B(1, 0)$

6.3.  $\overline{OB} = 1; \overline{OA} = \frac{1}{2}$

$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{OA}}{2} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

$\overline{OD} = 1; \overline{DC} = 2$

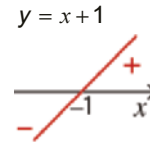
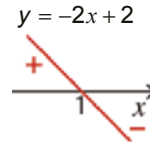
$A_{[OBCD]} = \frac{\overline{DC} + \overline{OB}}{2} \times \overline{OD} = \frac{2+1}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

$A_{[ABCD]} = A_{[OBCD]} - A_{[OAB]} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ u. a.}$

7.1.  $f(x) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{4}{x+1} + 2 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{4}{x+1} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{4-2x-2}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+2}{x+1} \leq 0$

Cálculos auxiliares

$-2x+2 = 0 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$   
 $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$



$x$	$-\infty$	$-1$		$1$	$+\infty$
$-2x+2$	+	+	+	0	-
$x+1$	-	0	+	+	+
$\frac{-2x+2}{x+1}$	-	n.d.	+	0	-

$S = ]-\infty, -1[ \cup [1, +\infty[$

7.2. Equação da assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ :  
 $y = 2$

Equação da assíntota vertical ao gráfico de  $f$ :  
 $x = -1$

$A(0, 2)$  e  $D(-1, 0)$

$C(x, 0)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x+1} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{4+2x+2}{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x+6}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x+6 = 0 \wedge x+1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -3 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = -3$

$C(-3, 0)$

$B(0, y)$

$f(0) = \frac{4}{0+1} + 2 = 4 + 2 = 6$

$B(0, 6)$

$\overline{OC} = 3$  e  $\overline{OB} = 6$

$A_{[OBC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{OB}}{2} = \frac{3 \times 6}{2} = 9 \text{ u. a.}$

$\overline{OD} = 1$  e  $\overline{OA} = 2$

$A_{[OAD]} = \frac{\overline{OD} \times \overline{OA}}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1 \text{ u. a.}$

$A_{[ABCD]} = A_{[OBC]} - A_{[OAD]} = 9 - 1 = 8 \text{ u. a.}$

7.3.  $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

Cálculos auxiliares

	1	3	-1	-3
-3		-3	0	3
	1	0	-1	0

Se  $\frac{f}{g}$  não tem zeros, então os zeros de  $f$  também são zeros de  $g$ , ou seja,  $-3$  é zero de  $g$ .

$$(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee (x+3)(x^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x+3 = 0 \vee x^2-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Zeros de  $f \times g: \{-3, 1\}$

7.4.  $P(-1, 2)$

$$h(-1) = 2 \Leftrightarrow g(-1) + k = 2 \Leftrightarrow 0 + k = 2 \Leftrightarrow k = 2$$

8.1.  $f'(x) = \left(\frac{2x^2+4}{x}\right)'$

$$= \frac{(2x^2+4)' \times x - (2x^2+4) \times x'}{x^2}$$

$$= \frac{4x \times x - (2x^2+4)}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 4}{x^2} = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$$

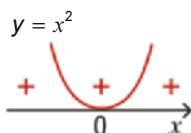
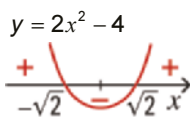
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \wedge x \neq 0$$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$0$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+
$x^2$	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-\sqrt{2})$	$\searrow$		$\searrow$	$f(\sqrt{2})$	$\nearrow$

Máx.

Mín.



$f$  é crescente em  $]-\infty, -\sqrt{2}]$  e em

$[\sqrt{2}, +\infty[$ , é decrescente em  $[-\sqrt{2}, 0[$  e em  $]0, \sqrt{2}]$ .

Para  $x = -\sqrt{2}$ , a função atinge um máximo relativo e para  $x = \sqrt{2}$  atinge um mínimo relativo.

8.2.  $f'(-2) = \frac{2 \times (-2)^2 - 4}{(-2)^2} = \frac{4}{4} = 1$

$$f(-2) = \frac{2 \times (-2)^2 + 4}{-2} = \frac{12}{-2} = -6$$

Equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $-2$ :

$$y = f'(-2)(x+2) + f(-2) \Leftrightarrow y = 1(x+2) - 6 \Leftrightarrow \Leftrightarrow y = x + 2 - 6 \Leftrightarrow y = x - 4$$

9.1.  $10 \text{ L} = 10 \text{ dm}^3$

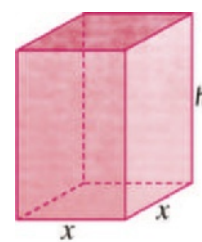
$$V = 10 \Leftrightarrow x^2 h = 10$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{10}{x^2}$$

$$A(x) = 2x^2 + 4 \times x \times h$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 2x^2 + 4x \times \frac{10}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 2x^2 + \frac{40}{x} \Leftrightarrow A(x) = \frac{2x^3 + 40}{x}$$



9.2.  $A'(x) = \left(\frac{2x^3 + 40}{x}\right)'$

$$= \frac{(2x^3 + 40)' \times x - (2x^3 + 40) \times x'}{x^2}$$

$$= \frac{6x^2 \times x - 2x^3 - 40}{x^2} = \frac{4x^3 - 40}{x^2}$$

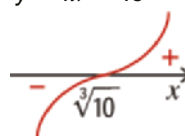
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 40 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 10 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{10} \wedge x \neq 0$$

$x$	$0$		$\sqrt[3]{10}$	$+\infty$
$A'(x)$		-	0	+
$A(x)$		$\searrow$	$A(\sqrt[3]{10})$	$\nearrow$

Min.

$$y = 4x^3 - 40$$



A área total do recipiente é mínima para  $x = \sqrt[3]{10}$ .

10.1.  $a(4) = -4,9 \times 4^2 + 58,8 \times 4 + 2,4 = 159,2$

$$a(0) = 2,4$$

$$tmv_{(a, 0, 4)} = \frac{a(4) - a(0)}{4 - 0}$$

$$= \frac{159,2 - 2,4}{4} = 39,2 \text{ m/s}$$

A velocidade média nos quatro primeiros segundos foi de 39,2 m/s.

10.2.  $a'(t) = (-4,9t^2 + 58,8t + 2,4)' = -9,8t + 58,8$

$$a'(5) = -9,8 \times 5 + 58,8 = -49 + 58,8 = 9,8 \text{ m/s}$$

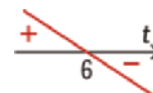
A velocidade no instante  $t = 5 \text{ s}$  foi 9,8 m/s.

10.3.  $a'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 58,8 = 0$

$$\Leftrightarrow -9,8t = -58,8 \Leftrightarrow t = 6$$

$t$	$0$		$6$	$+\infty$
$a'(t)$	+	+	0	-
$a(t)$	$2,4$	$\nearrow$	$178,8$	$\searrow$

$$y = -9,8t + 58,8$$



$$\begin{aligned} a(6) &= -4,9 \times 6^2 + 58,8 \times 6 + 2,4 \\ &= -176,4 + 352,8 + 2,4 \\ &= 178,8 \text{ m} \end{aligned}$$

A altura máxima atingida pelo projétil foi 178,8 m .

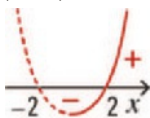
$$\begin{aligned} 11.1. \frac{\overline{AB}}{AB-2} &= \frac{\overline{AC}}{1} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+2-2} = y+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y+1 = \frac{x+2}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11.2. A(x) &= \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \\ &= \frac{(x+2) \times (y+1)}{2} = \frac{(x+2) \times \frac{x+2}{x}}{2} \\ &= \frac{(x+2)^2}{2} = \frac{(x+2)^2}{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11.3. A'(x) &= \left( \frac{(x+2)^2}{2x} \right)' \\ &= \frac{((x+2)^2)' \times 2x - (x+2)^2 \times (2x)'}{(2x)^2} \\ &= \frac{2(x+2)(x+2)' \times 2x - (x+2)^2 \times 2}{4x^2} \\ &= \frac{2(x+2)(1 \times 2x - (x+2))}{4x^2} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{2x^2} \\ A'(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0 \wedge 2x^2 \neq 0 \wedge x > 0 \\ &\Leftrightarrow x+2 = 0 \vee x-2 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x > 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \wedge x > 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$x$	0		2	
$A'(x)$		-	0	+
$A(x)$		↘	$A(2)$	↗

$$y = (x+2)(x-2)$$



A área é mínima para  $x = 2$  .

$$y+1 = \frac{2+2}{2} \Leftrightarrow y = 2-1 \Leftrightarrow y = 1$$

A área é mínima para  $x = 2$  m e  $y = 1$  m .

## Tarefas de aprofundamento

Pág. 192

1.1. Hipótese: A função  $f$  é diferenciável em  $x_0 \in I$  .

A função  $f$  atinge um extremo relativo em  $x_0$  .

Tese:  $f'(x_0) = 0$

- 1.2. a)  $\geq$       b)  $\leq$       c)  $\geq$   
d)  $\leq$       e)  $\geq$       f)  $\leq$       g) 0

Pág. 193

2.1. a)  $f$  não tem máximo nem mínimo absolutos,  $g$  e  $h$  têm mínimo absoluto mas não têm máximo absoluto.

b) O teorema de Weierstrass não é aplicável à função  $f$  porque não é possível traçar o seu gráfico sem interrupções. Também não é aplicável às funções  $g$  e  $h$ , porque não estão definidas num intervalo fechado.

2.2.  $f(a)$  e  $f(b)$  são extremos absolutos se  $f$  for estritamente crescente ou estritamente decrescente em  $[a, b]$  .

3.1.  $f$  é uma função polinomial. Então é contínua em  $\mathbb{R}$ , pelo que, é contínua no intervalo fechado  $[1, 4]$ . Logo, pelo teorema de Weierstrass,  $f$  admite um máximo e um mínimo absolutos em  $[1, 4]$  .

$$f'(x) = (-x^2 + 4x)' = -2x + 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$$

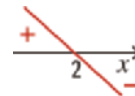
$x$	1		2		4
$f'$	+	+	0	-	-
$f$	3	↗	4	↘	0

Mín.

Máx.

Mín.

$$y = -2x + 4$$



$$f(2) = -2^2 + 4 \times 2 = -4 + 8 = 4$$

$$f(1) = -1^2 + 4 \times 1 = -1 + 4 = 3$$

$$f(4) = -4^2 + 4 \times 4 = -16 + 16 = 0$$

Máximo absoluto: 4

Mínimo absoluto: 0

3.2.  $f$  admite um máximo absoluto igual a 4 para  $x = 2$  no intervalo  $]1, 4[$  e não admite mínimo absoluto.

3.3.

