Funções

Vamos recordar

Ficha 36 Generalidades sobre funções

pág. 86

1.1. $D_f = [-4\,,\,8[$ e $D'_f = [-2\,,\,3]$

1.2. Zeros de f: -2

1.3. **a)** $[-4\,,\,4]$

b) $[1\,,\,8[$

1.4.

x	-4		1		4		8
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\longrightarrow$	3	$\searrow$	n.d.

A função é crescente em $[-4\,,\,1]$, constante em $[1\,,\,4]$ e decrescente em $[4\,,\,8[$.
Máximo: 3 (absoluto), para $x \in [1\,,\,4]$. Mínimos: -2 (absoluto), para $x = -4$, e 3, para $x \in]1\,,\,4[$.

1.5. $\{\text{minorantes}\} =]-\infty\,,\,-2]$; $\{\text{majorantes}\} = [3\,,\,+\infty[$

1.6. **a)** $D_g = [-4-2\,,\,8-2[= [-6\,,\,6[$ e $D'_g = [-2-3\,,\,3-3] = [-5\,,\,0]$

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x+2) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x+2) = 3 \Leftrightarrow 1 \leqslant x+2 \leqslant 4 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2$
Zeros de g: $[-1\,,\,2]$

c) A função g é crescente em $[-6\,,\,-1]$, constante em $[-1\,,\,2]$ e decrescente em $[2\,,\,6[$.
Mínimos: -5 (absoluto), para $x = -6$, e 0, para $x \in]-1\,,\,2[$; Máximo: 0 (absoluto), para $x \in [-1\,,\,2]$.

2.1. f é uma função afim cujo coeficiente de x é negativo, pelo que f é decrescente.

2.2. Interseção com o eixo Oy: $y = f(0) = 5 - 2 \times 0 = 5 - 0 = 5$

Interseção com o eixo Ox: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

O gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0\,,\,5)$ e o eixo Ox no ponto de coordenadas $\left(\frac{5}{2}\,,\,0\right)$.

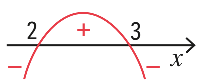
2.3. $f(-2) = 5 - 2 \times (-2) = 5 + 4 = 9$ $f(3) = 5 - 2 \times 3 = 5 - 6 = -1$
Logo, $D'_h = [-1\,,\,9]$.

pág. 87

3.1. Como o coeficiente de x^2 é negativo $(-1 < 0)$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.

3.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

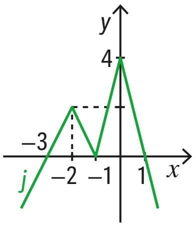
x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



3.3. $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$; $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \times \frac{5}{2} - 6 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 6 = \frac{1}{4}$

O vértice da parábola tem coordenadas $V\left(\frac{5}{2}\,,\,\frac{1}{4}\right)$. Logo, a função tem máximo absoluto igual a $\frac{1}{4}$, para $x = \frac{5}{2}$. Logo, a função é crescente em $\left]-\infty\,,\,\frac{5}{2}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{5}{2}\,,\,+\infty\right[$.

4. Por exemplo:



5.1. **a)** $2-a^2=0 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{2}$

O gráfico da função f é uma reta paralela ao eixo Ox se $x\in\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$.

b) A função f é crescente em $\mathbb{R}$ se $2-a^2>0$, ou seja, se $a\in]-\sqrt{2},\ \sqrt{2}[$.

c) $f(6)=0 \Leftrightarrow (2-a^2)\times 6-3=0 \Leftrightarrow 12-6a^2-3=0 \Leftrightarrow a^2=\frac{9}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2=\frac{3}{2} \Leftrightarrow a^2=\frac{6}{4} \Leftrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

A função f tem um zero para $x=6$ se $a\in\left\{-\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$.

5.2. $f(x)=(2-2^2)x-3=-2x-3$

$h(x)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{3}\right)=0 \Leftrightarrow -2\times\frac{x}{3}-3=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x-3=0 \Leftrightarrow -2x=9 \Leftrightarrow x=-\frac{9}{2}$

Logo, o zero de h é $-\frac{9}{2}$.

Ficha 37 Operações com polinómios. Teorema do resto

pág. 88

1.1. **a)** $C(x)=2(-2x^3+6x-4)-(x^2-3x+1)=-4x^3+12x-8-x^2+3x-1=-4x^3-x^2+15x-9$

b) $C(x)=-x^2+3x-2-B(x)=-x^2+3x-2-x^2+3x-1=-2x^2+6x-3$

c) $C(x)$ é um polinómio de grau 1: $C(x)=ax+b$.

Assim, tem-se:

$\frac{1}{2}(-2x^3+6x-4)=(x^2-4)(ax+b)-x-2$

$\Leftrightarrow -x^3+3x-2=ax^3-4ax+bx^2-4b-x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^3+3x-2=ax^3+bx^2+(-1-4a)x-4b-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=-1 \wedge b=0 \wedge 3=-1-4a \wedge -2=-4b-2 \Leftrightarrow a=-1 \wedge b=0$

Logo, $C(x)=-x$.

1.2. $8-2k^2=0 \wedge -4-2k=0 \Leftrightarrow k=-2$

Logo, $A(x)$ é divisível por $B(x)$ se $k=-2$.

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^3+\ 0x^2+6x-4 & x^2+kx+1 \\ \cline{2-2}
2x^3+2kx^2+2x & -2x+2k \\ \cline{1-1}
2kx^2+8x-4 & \\
-2kx^3-2k^2x-2k & \\ \cline{1-1}
(8-2k^2)x-4-2k &
\end{array}
$$

2.1. $Q(x)=2x^3+2x^2-x-1$

$R(x)=0$

	2	0	–3	0	1
1		2	2	–1	–1
	2	2	–1	–1	0

2.2. $Q(x)=2x^2-\frac{2}{3}x-\frac{7}{9}$

$R(x)=\frac{61}{27}$

	2	0	–1	2
$-\frac{1}{3}$		$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{27}$
	2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{9}$	$\frac{61}{27}$

2.3. $Q(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+4$

$R(x)=-10$

	1	−1	2	6
−2		−2	6	−16
	1	−3	8	−10

3.1. $1^3-2\times1^2+3\times1+5=7$. O resto é igual a 7.

3.2. $P(-2)=2\times(-2)^3-3\times(-2)^2-11\times(-2)+6=-16-12+22+6=0$

O resto da divisão de $P(x)$ por $x+2$ é zero, pelo que $P(x)$ é divisível por $x+2$.

3.3. $P(5)=0 \Leftrightarrow 5^2-3\times5+a=0 \Leftrightarrow a=-10$

3.4. $2\times2^3-5\times2^2+2+a=0 \Leftrightarrow 16-20+2+a=0 \Leftrightarrow a=2$

4.1. O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é

$A(-2)=(-2)^4-2\times(-2)^3+(-2)^2-(-2)+3=16+16+4+2+3=41$.

4.2. $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é $A\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

4.3. $A(-1)=(-1)^{n+1}-2\times(-1)^n+(-1)^{n-1}=(-1)\times(-1)^n-2\times(-1)^n+\frac{(-1)^n}{-1}=-4\times(-1)^n$

O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é igual a -4, se n é par, ou 4, se n é ímpar.

5. $P(1)=0 \Leftrightarrow 3\times1^3+a\times1^2-b\times1+6=0 \Leftrightarrow a-b+9=0$

$P(-2)=-6 \Leftrightarrow 3\times(-2)^3+a\times(-2)^2-b\times(-2)+6=-6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -24+4a+2b+6+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a+2b-12=0 \Leftrightarrow 2a+b-6=0$

Assim: $\begin{cases}a-b+9=0\\2a+b-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b-9\\2b-18+b-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b-9\\3b=24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\b=8\end{cases}$

6.1. A expressão $(x+2)$ cm pode representar a altura do retângulo se o polinómio $A(x)$ for divisível por $x+2$.

$A(-2)=2\times(-2)^4-3\times(-2)^2-7\times(-2)+8=42\neq0$

Como $A(x)$ não é divisível por $x+2$, então $(x+2)$ cm não representa a altura do retângulo.

6.2. O comprimento do retângulo é representado pela expressão $2x^3+2x^2-x-8$.

	2	0	−3	−7	8
1		2	2	−1	−8
	2	2	−1	−8	0

7. $P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$P(-1)=7 \Leftrightarrow (-1+1)(-1-2)Q(-1)+a(-1)+b=7 \Leftrightarrow -a+b=7$

$P(2)=3 \Leftrightarrow (2+1)(2-2)Q(2)+a\times2+b=3 \Leftrightarrow 2a+b=3$

$-a+b=7 \wedge 2a+b=3 \Leftrightarrow b=a+7 \wedge 2a+a+7=3 \Leftrightarrow a=-\frac{4}{3} \wedge b=\frac{17}{3}$

Logo, o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)(x-2)$ é $-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$.

Ficha 38 Fatorização de um polinómio

1. Como $A(x)$ é divisível por $D(x)$, então $x=-3$ é zero duplo de $A(x)$.

Assim, o resto da divisão de $A(x)$ por $D(x)$ é zero, então $A(x)$ é divisível por $D(x)$, sendo $Q(x)=x^2+4$.

	1	6	13	24	36
-3		-3	-9	-12	-36
	1	3	4	12	0
-3		-3	0	-12	
	1	0	4	0	

2.1. $x^2-10x+25=(x-5)^2$ **C.A.:** $x=\dfrac{10\pm\sqrt{100-100}}{2}=5$ (raiz dupla)

2.2. $18-2x^2=2\left(9-x^2\right)=2(3-x)(3+x)$

2.3. $-2x^3-8x^2+10x=-2x\left(x^2+4x-5\right)=-2x(x-1)(x+5)$ **C.A:** $x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2} \Leftrightarrow x=5 \vee x=1$

2.4.

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

$x^3-2x^2-x+2=(x-1)\left(x^2-x-2\right)=(x-1)(x-2)(x+1)$

C.A. $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=-1$

2.5.

	-1	3	3	-11	6
1		-1	2	5	-6
	-1	2	5	-6	0
1		-1	1	6	
	-1	1	6	0	

$-x^4+3x^3+3x^2-11x+6=$
$=(x-1)^2\left(-x^2+x+6\right)=-(x-1)^2(x-3)(x+2)$

C.A. $-x^2+x+6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-2} \Leftrightarrow x=3 \vee x=-2$

2.6.

	-2	2	20	16
-2		4	-12	-16
	-2	6	8	0

$-2x^2+2x^2+20x+16=(x+2)\left(-2x^2+6x+8\right)=$
$=-2(x+2)\left(x^2-3x-4\right)=-2(x+2)(x+1)(x-4)$

C.A.: $x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow x=4 \vee x=-1$

2.7. As raízes do polinómio são divisores inteiros de 3: -1, 1, -3 ou 3.

$-(-1)^3+(-1)^2+5\times(-1)+3=0$, pelo que -1 é raiz do polinómio.

	-1	1	5	3
-1		1	-2	-3
	-1	2	3	0

-1 é raiz dupla

Logo, $-x^3+x^2+5x+3=-(x+1)^2(x-3)$.

C.A. $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-2} \Leftrightarrow x=3 \vee x=-1$

3. $P(x)=a(x-1)^2(x+3)(x+1)$, $a\in\mathbb{R}$.

$P(-2)=-9 \Leftrightarrow a(-2-1)^2(-2+3)(-2+1)=-9 \Leftrightarrow -9a=-9 \Leftrightarrow a=1$

Logo, $P(x)=(x-1)^2(x+3)(x+1)$.

4.1. $\begin{cases}P(2)=0\\P(-3)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^3+2b+c=0\\(-3)^3-3b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-2b-8\\c=3b+27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3b+27=-2b-8\\c=3b+27\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}5b=-35\\c=3b+27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-7\\c=6\end{cases}$

4.2. $P(x)=x^3-7x+6=(x+3)(x-2)(x-1)$

	1	0	-7	6
-3		-3	9	-6
	1	-3	2	0
2		2	-2	
	1	-1	0	

5.1. $x^4 - x^2 - 6 = 0 \overset{y=x^2}{\Leftrightarrow} y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow y = 3 \vee y = -2 \overset{x^2=y}{\Leftrightarrow}$

$\overset{x^2=y}{\Leftrightarrow} x^2 = 3 \vee \underbrace{x^2 = -2}_{\text{Eq. imp.}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \vee x \in \varnothing \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \quad S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

5.2. $2x^4 + (2x-1)^2 = x(x-4) \Leftrightarrow 2x^4 + 4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x \Leftrightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 = 0 \overset{y=x^2}{\Leftrightarrow}$

$\overset{y=x^2}{\Leftrightarrow} 2y^2 + 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = -\dfrac{1}{2} \overset{x^2=y}{\Leftrightarrow} \underbrace{x^2 = -1}_{\text{Eq. imp.}} \vee \underbrace{x^2 = -\dfrac{1}{2}}_{\text{Eq. imp.}} \Leftrightarrow x \in \varnothing$

$S = \varnothing$

5.3. Se o polinómio $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$ tiver raízes inteiras, estas serão divisores inteiros de -4: -1, 1, -2, 2, -4 e 4.

$1^3 - 2\times 1^2 + 2\times 1 - 4 = -3$; $2^3 - 2\times 2^2 + 2\times 2 - 4 = 0$

	1	−2	2	−4
2		2	0	4
	1	0	2	0

$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee \underbrace{x^2 + 2 = 0}_{\text{Eq. imp.}} \Leftrightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

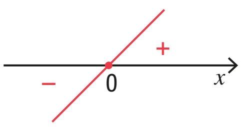
6.1. $x^3 \geqslant x \Leftrightarrow x^3 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) \geqslant 0$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	−	−	−	0	+	+	+
x^2-1	+	0	−	−	−	0	+
x^3-x	−	0	+	0	−	0	+

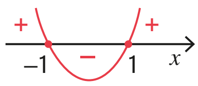
$S = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$

Cálculos auxiliares

$y = x$



$y = x^2 - 1$



$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

6.2. $x^4 < 15 + 2x^2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 15 < 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x^2+3) < 0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$x-\sqrt{5}$	−	−	−	0	+
$x+\sqrt{5}$	−	0	+	v	+
x^2+3	+	+	+	+	+
$x^4-2x-15$	+	0	−	0	+

$S =]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$

Cálculos auxiliares

$x^4 - 2x^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 5 \vee \underbrace{x^2 = -3}_{\text{Eq. imp.}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

	1	0	−2	0	−15
$\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	5	$3\sqrt{5}$	15
	1	$\sqrt{5}$	3	$3\sqrt{5}$	0
$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{5}$	0	$-3\sqrt{5}$	
	1	0	3	0	

6.3.

	4	−12	−1	3
$-\frac{1}{2}$		−2	7	−3
	4	−14	6	0

$S = \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[\cup]3, +\infty[$

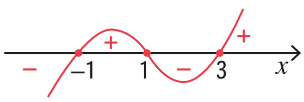
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$x+\frac{1}{2}$	−	0	+	+	+	+	+
$4x^2-14x+6$	+	+	+	0	−	0	+
$4x^3-12x^2-x+3$	−	0	+	0	−	0	+

Ficha 39 Funções polinomiais

pág. 92

1.1. $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x+1)(x-3) \geqslant 0$;

$S = [-1, 1] \cup [3, +\infty[$



1.2. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 2(x-1)(x+1)(x-3) < x^4 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x-1)(x+1)(x-3) < (x^2-1)(x^2+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x-1)(x+1)(x-3) - (x-1)(x+1)(x^2+1) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)[2(x-3) - (x^2+1)] < 0 \Leftrightarrow$

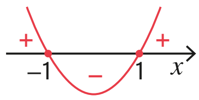
$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(-x^2+2x-7) < 0$; $S =]-1, 1[$

Cálculos auxiliares

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = -24 < 0$

O polinómio $-x^2+2x-7$ não tem zeros e é negativo para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Polinómio $(x-1)(x+1)$:

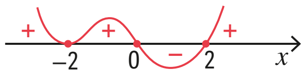


2.1.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x	–	–	–	0	+	+	+
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+	+	+
$x-2$	–	–	–	–	–	0	+
$f(x)$	+	0	+	0	–	0	+

Outra alternativa

Como se trata de uma função quártica, com dois zeros simples (0 e 2) e um zero duplo (– 2), em que o coeficiente de x^4 é positivo, um esboço do gráfico de f é:



A função f é positiva em $]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]2, +\infty[$ e negativa em $]0, 2[$.

2.2. **Cálculo auxiliares:** $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 > 0$

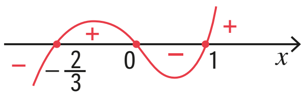
$3x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{6} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\dfrac{2}{3}$

$g(x) = x(3x^2 - x - 2) = 3x(x-1)\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		0		1	$+\infty$
$3x$	–	–	–	0	+	+	+
$x-1$	–	–	–	–	–	0	+
$x+\frac{2}{3}$	–	0	+	+	+	+	+
$g(x)$	–	0	+	0	–	0	+

Outra alternativa

Como se trata de uma função cúbica com três zeros simples $\left(-\dfrac{2}{3}, 0 \text{ e } 1\right)$, um esboço do gráfico de g é:



A função g é negativa em $\left]-\infty, -\dfrac{2}{3}\right[\cup]0, 1[$ e positiva em $\left]-\dfrac{2}{3}, 0\right[\cup]1, +\infty[$.

2.3. **Cálculos auxiliares:**

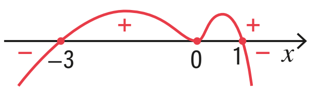
$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ $\quad x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

$h(x) = -x^2(x^2 + 2x - 3) = -x^2(x-1)(x+3)$

x	$-\infty$	-3		0		1	$+\infty$
$-x^2$	–	–	–	0	–	–	–
$x-1$	–	–	–	–	–	0	+
$x+3$	–	0	+	+	+	+	+
$h(x)$	–	0	+	0	+	0	–

Outra alternativa

Como se trata de uma função com dois zeros simples $(-3 \text{ e } 1)$ e um zero duplo (0), em que o coeficiente de x^4 é negativo, um esboço do gráfico de h é:



A função h é negativa em $]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$ e positiva em $]-3, 0[\cup]0, 1[$.

2.4. $i(1) = -1^3 + 1^2 - 3 \times 1 + 3 = 0$

$i(x) = (x-1)(-x^2-3) = -(x-1)(x^2+3)$

Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 > 0$, o sinal da função i depende exclusivamente do fator $-(x-1)$.

Logo, i é positiva em $]-\infty, 1[$ e negativa em $]1, +\infty[$.

	-1	1	-3	3
1		-1	0	-3
	-1	0	-3	$\boxed{0}$

3.1. $f(-2)=0 \Leftrightarrow 2\times(-2)^3+3\times(-2)^2-12\times(-2)+k=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -16+12+24+k \Leftrightarrow k=-20$

3.2. $2x^2-x-10=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+80}}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2} \vee x=-2$

	2	3	−12	−20
−2		−4	2	20
	2	−1	−10	0

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-20=2(x+2)^2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$

3.3.

x	-3		-2		$\frac{5}{2}$		5
$(x+2)^2$	n.d.	+	0	+	+	+	+
$x-\frac{5}{2}$	n.d.	−	−	−	0	+	+
$f(x)$	n.d.	−	0	−	0	+	+

A função f é negativa em $]-3\,,\,-2[\,\cup\left]-2\,,\,\dfrac{5}{2}\right[$ e positiva em $\left]\dfrac{5}{2},\,5\right]$.

3.4. $f(5)=2\times5^3+3\times5^2-12\times5-20=245$

Um máximo relativo da função é $f(-2)=0$ e o mínimo absoluto é

$f(1)=2\times1^3+3\times1^2-12\times1-20=-27$.

x	-3		-2		1		5
$f(x)$	n.d.	↗	0	↘	−27	↗	245
		Máx.		Mín.		Máx.	

A função f é crescente em $]-3\,,\,-2]$ e em $[1\,,\,5]$ e é decrescente em $[-2\,,\,1]$.

A função f tem máximo relativo igual a 0 para $x=-2$ e outro igual a 245 (absoluto) para $x=5$.

Tem mínimo relativo igual a -27 (absoluto) para $x=1$.

3.5. $D'_f=[-27\,,\,245]$

4.1. $x^4-x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=2 \vee \underbrace{x^2=-1}_{\text{Eq. imp.}} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

	1	0	−1	0	−2
$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	2
	1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	0
$-\sqrt{2}$		$-\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	
	1	0	1	0	

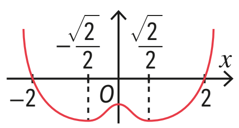
$f(x)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)$

4.2. Como o gráfico de f é simétrico relativamente ao eixo Oy, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ também é mínimo relativo de f.

$f(-2)=(-2)^4-(-2)^2-2=16-4-2=10$; $f(2)=f(-2)=10$

$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2=\dfrac{4}{16}-\dfrac{2}{4}-2=-\dfrac{9}{4}$ $\quad f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$

Um esboço do gráfico de f é:



A função f é decrescente em $[-2\,,\,-\sqrt{2}]$ e em $\left[0\,,\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$,

e é crescente em $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,0\right]$ e em $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,2\right]$.

$f(-2)=10$, $f(0)=-2$ e $f(2)=10$ são máximos relativos de f.

$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$ e $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$ são mínimos relativos de f.

$D'_f=\left[-\dfrac{9}{4},\,10\right]$

Ficha 40 Funções racionais

1.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{3\}$

1.2. $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$; $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$

1.3. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$; $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

1.4. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{-1, 0\}$

1.5. $x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-1)^2 = 0$;

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 + x\} = \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$

2.1. $AV: x = 2$; $AH: y = 0$

2.2. $AV: x = -4$; $AH: y = 2$

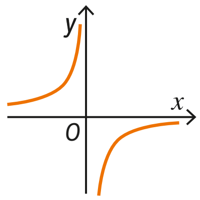
2.3. $h(x) = \frac{x - 3 + 2}{x - 3} = 1 + \frac{2}{x-3}$

$AV: x = 3$; $AH: y = 1$

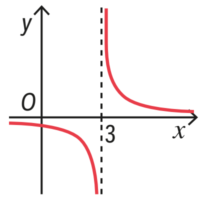
2.4. $j(x) = \frac{-\frac{2}{3}(2 - 3x)}{2 - 3x} = -\frac{2}{3} - \frac{\frac{13}{9}}{x - \frac{2}{3}}$

$AV: x = \frac{2}{3}$; $AH: y = -\frac{2}{3}$

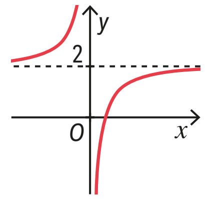
3.1.



3.2.



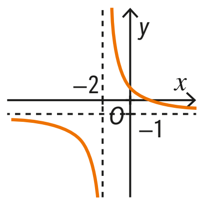
3.3.



3.4. $i(x) = \frac{1 - x}{x + 2} = $

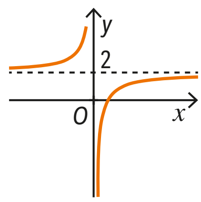
$= \frac{-(x+2) + 3}{x + 2} =$

$= -1 + \frac{3}{x+2}$



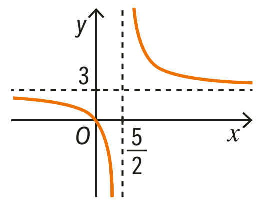
3.5. $j(x) = \frac{2x - 3}{x} =$

$= 2 - \frac{3}{x}$



3.6. $k(x) = \frac{6x + 4}{2x - 5} = \frac{3(2x - 5) + 19}{2x - 5} =$

$= 3 + \frac{19}{2x - 5} = 3 + \frac{\frac{19}{2}}{x - \frac{5}{2}}$



4.1. $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \wedge x^2 + 2x \neq 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 2) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

$S = \{-1, 2\}$

4.2. $\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{1}{2 - x} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x + 2}{(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \wedge (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1$

$S = \{-1\}$

4.3. $\frac{x + 2}{2x - x^2} + \frac{x}{x - 2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x + 2}{x(2 - x)} - \frac{x}{2 - x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x + 2 - x^2 - 2x(2 - x)}{x(2 - x)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x(2 - x)} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \wedge x(2 - x) \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$;

$S = \{1\}$

5.1. $\dfrac{4-x^2}{x^2-2x} \geqslant \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{4-x^2}{x^2-2x} - \dfrac{1}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2-x+6}{x(x-2)} \geqslant 0$

Zeros do numerador:

$-x^2-x+6=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=2$

Zeros do denominador:

$x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

x	$-\infty$	-3		0		2	$+\infty$
$-x^2-x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x(x-2)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\dfrac{-x^2-x+6}{x(x-2)}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	n.d.	$-$

Assim, o conjunto-solução da inequação $\dfrac{4-x^2}{x^2-2x} \geqslant \dfrac{1}{x}$ é $S=[-3, 0[$.

5.2. $2x < \dfrac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow 2x - \dfrac{x+2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-3x-2}{x-1} < 0$

Zeros do numerador:

$2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2} \vee x=2$

Zeros do denominador:

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		2	$+\infty$
$2x^2-3x-2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{2x^2-3x-2}{x-1}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

Assim, o conjunto-solução da inequação $2x < \dfrac{x+2}{x-1}$ é: $S=\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup]1, 2[$.

5.3. Zeros do numerador: $(3-x)^3=0 \Leftrightarrow 3-x=0 \Leftrightarrow x=3$

Zeros do denominador: $x^2(x+1)^3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

Assim, o conjunto-solução da inequação $\dfrac{(3-x)^3}{x^2(x+1)^3} > 0$ é $S=]-1, 0[\cup]0, 3[$.

x	$-\infty$	-1		0		3	$+\infty$
$(3-x)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x^2(x+1)^3$	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(3-x)^3}{x^2(x+1)^3}$	$-$	n.d.	$+$	n.d.	$+$	0	$-$

5.4. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x^2-x-1}{(1-x)(1+x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-2x}{(1-x)(1+x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x(1-x)}{(1-x)(1+x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{1+x} \leqslant 0 \wedge x \neq 1$

Zeros do numerador: $2x=0 \Leftrightarrow x=0$

Zeros do denominador: $1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{-2x(1-x)}{(1-x)(1+x)}$	$-$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.	$-$

Assim, o conjunto-solução da inequação

$\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2} \leqslant 0$ é $S=]-\infty, -1[\cup [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Ficha 41 Operações com funções

pág. 96

1.1. $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2} = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x-3}{x+2} = h(x)$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

As funções f e h não são iguais, pois $D_f \neq D_h$.

Cálculos auxiliares

$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3 \vee x=2$

1.2. **a)** $D_{f+g} = D_f \cap D_g = (\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{3\}) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{x-3}{x+2} + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x-3)+x+2}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{x^2-6x+9+x+2}{x^2-x-6} = \dfrac{x^2-5x+11}{x^2-x-6}$

$f+g: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto \dfrac{x^2-5x+11}{x^2-x-6}$

b) $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{x-3}{x+2} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x-3)-x-2}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{x^2-6x+9-x-2}{x^2-x-6} = \dfrac{x^2-7x+7}{x^2-x-6}$

$f-g: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto \dfrac{x^2-7x+7}{x^2-x-6}$

c) $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \dfrac{x-3}{x+2} \times \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{x+2}$; $f \times g: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$

d) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x : g(x) \neq 0\} = (\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{3\}) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\frac{x-3}{x+2}}{\frac{1}{x-3}} = \dfrac{(x-3)^2}{x+2} = \dfrac{x^2-6x+9}{x+2}$; $\dfrac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{x^2-6x+9}{x+2}$

2.1. $\dfrac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

$g(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geqslant 0 \\ -x+1 & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$ $\quad \dfrac{\frac{1}{x-1}}{-x+1} = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

x	$+\infty$	0		1	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{x}{x-1}$	-1	$x-1$	0	$x-1$
$g(x)$	$-x+1$	1	$-x+1$		$x-1$

2.2. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee 0 \leqslant x < 1 \Leftrightarrow x < 1$; $S =]-\infty, 1[$

3.1. $\dfrac{3x}{x+1} \geqslant x \wedge x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{x+1} - x \geqslant 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+2x}{x+1} \geqslant 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(2-x)}{x+1} \geqslant 0 \wedge x > 0$; $S =]0, 2]$

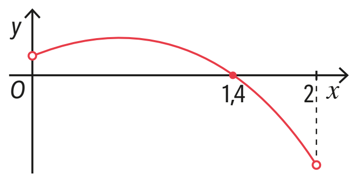
x	0		2	$+\infty$
$-x^2+2x$	n.d.	+	0	–
$x+1$	n.d.	+	+	+
$\frac{-x^2+2x}{x+1}$	n.d.	+	0	–

3.2. $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$

Para $x \leqslant 0$, tem-se: $\dfrac{-3x+6}{x^2-3x+2} = \dfrac{-3(x-2)}{(x-1)(x-2)} = -\dfrac{3}{x-1}$

3.3. $(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{x+1} - (x^3 - 1) = 0$

O valor de a é a abcissa do ponto de interseção do gráfico de $f-g$ com o eixo Ox. Observando o gráfico visualizado na calculadora, conclui-se que $a \approx 1{,}4$.



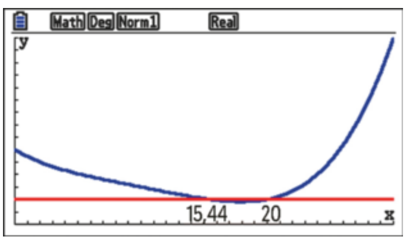
4.1. $f(0) = 0{,}0001 \times 0^4 - 0{,}004 \times 0^3 + 0{,}06 \times 0^2 - 0{,}6 \times 0 + 6 = 6$

$f(30) = 0{,}0001 \times 30^4 - 0{,}004 \times 30^3 + 0{,}06 \times 30^2 - 0{,}6 \times 30 + 6 = 15$

Há uma diferença de alturas de $15 - 6 = 9$ metros.

4.2. $f(x) = 2 \Leftrightarrow 0{,}0001x^4 - 0{,}004x^3 + 0{,}06x^2 - 0{,}6x + 6$, $x \in [0, 30]$; $20 - 15{,}44 \approx 4{,}6$

Os turistas encontravam-se a aproximadamente $4{,}6$ metros um do outro.



Ficha 42 Taxa de variação. Derivada

1.1. $\text{t.m.v.}_{(f, -3, -1)} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{-1-(-3)} = \dfrac{-3-(-15)}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

Cálculos auxiliares
$f(-1)=2\times(-1)-(-1)^2=-2-1=-3$
$f(-3)=2\times(-3)-(-3)^2=-6-9=-15$

1.2. $\text{t.m.v.}_{(f,\ 2a,\ a)}=\dfrac{f(a)-f(2a)}{a-2a}=\dfrac{2a-a^2-\left(4a-4a^2\right)}{-a}=\dfrac{-2a+3a^2}{-a}=\dfrac{-2a}{-a}+\dfrac{3a^2}{-a}=2-3a$;

$f(2a)=2\times(2a)-(2a)^2=4a-4a^2$

1.3. $\text{t.m.v.}_{(f,\ a,\ 0)}=\dfrac{f(0)-f(a)}{0-a}=\dfrac{0-\left(2a-a^2\right)}{-a}=\dfrac{-2a+a^2}{-a}=2-a$; $2-a=\dfrac{1}{2}\iff a=2-\dfrac{1}{2}\iff a=\dfrac{3}{2}$

2.1. $T(6)=-0{,}05\times6^2+1{,}5\times6+12=19{,}2$; $T(14)=-0{,}05\times14^2+1{,}5\times14+12=23{,}2$

$\text{t.m.v.}_{[6,\ 14]}=\dfrac{T(14)-T(6)}{14-6}=\dfrac{23{,}2-19{,}2}{8}=\dfrac{4}{8}=0{,}5$ (°C / h)

2.2. A taxa média de variação entre as 6h e as 14 h é 0,5 graus Celsius por hora. Significa que, em média, a temperatura da água do lago aumenta 0,5 °C por cada hora das 6 h às 14 h.

3.1. $f(4)-f\left(\dfrac{3}{2}\right)=4-(-2)=6$; $\text{t.m.v.}_{(h,\ 2,\ 10)}=\dfrac{f(4)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{4-\frac{3}{2}}=\dfrac{6}{\frac{5}{2}}=\dfrac{12}{5}$

3.2. A taxa média de variação da função f num intervalo $[a\,,b]$ é igual ao declive da reta secante ao gráfico nos pontos de abcissas a e b. Como em cada um dos intervalos referidos o gráfico é uma semirreta, o declive é constante.

Para $[a\,,b]\subset\,]-\infty\,,0]$, $\text{t.m.v.}_{(h,\ a,\ b)}=\dfrac{0-(-4)}{0-(-2)}=\dfrac{4}{2}=2$ (por exemplo).

Para $[a\,,b]\subset[4\,,+\infty[$, $\text{t.m.v.}_{(h,\ a,\ b)}=0$.

4.1. A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 e secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas 0 e 2. Portanto, $f'(0)=\text{t.m.v.}_{(f,\ 0,\ 2)}=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{0-2}{2}=-1$

4.2. $m_s=f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-x+2-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2-1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\left(x^2-1\right)=2^2-1=3$

pág. 99

5. $f'(3)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-1-5}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-6}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}2=2$

$f(3)=2\times3-1=5$

6.1. $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x(3-x)-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-x^2+3x-2}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(-x+1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(-x+1)=-2+1=-1$

	-1	3	-2
2		-2	2
	-1	1	$\boxed{0}$

Assim, s: $y=-x+b$; O ponto de tangência tem coordenadas $(2\,,f(2))=(2\,,2)$.

$2=-2+b\iff b=4$; Logo, $y=-x+4$ é a equação reduzida da reta s.

6.2. $f(x)=g(x)\iff x=(3-x)=\dfrac{2}{x}\ x>0\ \overset{x>0}{\iff}\ x^2(3-x)=2\iff -x^3+3x^2-2=0$

Como a abcissa de P é positiva e inteira, $x=1$. Logo, $P(1\,,g(x))=(1\,,2)$.

$m_t=g'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{2}{x}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-2x}{x(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-2$

	-1	3	0	-2
1		-1	2	2
	-1	2	2	$\boxed{0}$

$-x^2+2x+2=0\iff$

$\iff x=\dfrac{-2\pm\sqrt{12}}{-2}\iff$

$\iff x=1\pm\sqrt{3}$

Um vetor diretor de t é, por exemplo, $\vec{u}(1\,,-2)$.

Logo, s: $(x\,,y)=(1\,,2)+k(1\,,-2)$, $k\in\mathbb{R}$ é uma equação vetorial de t.

7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-5}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=f'(-2)=4$

8. A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a, pelo que o seu declive é $f'(a)=\tan(135°)$.
$f'(a)=\tan(135°)=\tan(180°-45°)=-\tan(45°)=-1$. Por outro lado,
$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-x^2+3-(-a^2+3)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-x^2+3+a^2-3}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-(x^2-a^2)}{x-a}=$
$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}-(x+a)=2a$; $f'(a)=-2a \Leftrightarrow -1=-2a \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$

9.1. $m_t=f'(4)=\tan(\theta)$, sendo θ a inclinação da reta t; $f(4)=5\times 4-4^2=4$
$f'(4)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(-x+1)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(-x+1)=-3$
Logo, $\theta=\tan^{-1}(-3)\approx -1{,}25$ rad.

9.2. O declive da reta t é -3, pelo que o declive da reta s é $\dfrac{1}{3}$. $s: y=\dfrac{1}{3}x+b$; $P(4,\ 4)$
$4=\dfrac{1}{3}\times 4+b \Leftrightarrow b=\dfrac{8}{3}$; Logo $t: y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8}{3}$.

Ficha 43 Função derivada. Regras de derivação

pág. 100

1. $f'(x)>0$ para $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]2,+\infty[$, $f'(x)<0$ para $x\in\,]-1,2[$ e $f'(x)=0$ para $x\in\{-1,\ 2\}$.

2.1. $f'(x)=(2x^4-x^2-2)'=8x^3-2x$

2.2. $g(x)=(\sqrt{2}x^3+3x)'=3\sqrt{2}x^2+3$

2.3. $h(x)=[(2x-x^2)x]'=(2x^2-x^3)'=4x-3x^2$

2.4. $i'(x)=\left(\dfrac{1}{x^2+3}\right)'=\dfrac{1'\times(x^2+3)-1\times(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$

2.5. $j'(x)=\left(\dfrac{-2x+1}{2x^2+x-2}\right)'=\dfrac{-2(2x^2+x-2)-(-2x+1)(4x+1)}{(2x^2+x-2)^2}=\dfrac{4x^2-4x+3}{(2x^2+x-2)^2}$

3.1. $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)=x^2+\left(\dfrac{x^3}{3}-5x\right)'=x^2+\left(\dfrac{3x^2}{3}-5\right)=x^2+(x^2-5)=2x^2-5$

3.2. $(f\times g)'(2)=f'(2)\times g(2)+f(2)\times g'(2)=2^2\times\left(\dfrac{2^3}{3}-5\times 2\right)+4\times(2^2-5)=-\dfrac{100}{3}$

3.3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)=\dfrac{f'(2)\times g(2)-f(2)\times g'(2)}{(g(2))^2}=\dfrac{4\times\left(-\dfrac{22}{3}\right)-4\times(-1)}{\left(-\dfrac{22}{3}\right)^2}=-\dfrac{57}{121}$

4.1. $f'(x)=(-2x^3-x+\pi^2)'=-6x^2-1$
Portanto, $f'(-1)=-6\times(-1)^2-1=-6\times 1-1=-7$ e $f'(2)=-6\times(2)^2-1=-6\times 4-1=-25$.

4.2. $f'(x)=\left(-\dfrac{2}{2+x^2}+2x^2\right)'=\left(-\dfrac{2}{2+x^2}\right)'+(2x^2)'=-\dfrac{0-2\times 2x}{(2+x^2)^2}+4x=\dfrac{4x}{(2+x^2)^2}+4x$
Portanto, $f'(-1)=\dfrac{4(-1)}{[2+(-1)^2]^2}+4\times(-1)=-\dfrac{40}{9}$ e $f'(2)=\dfrac{4\times 2}{(2+2^2)^2}+4\times 2=\dfrac{74}{9}$

4.3. $f'(x)=\left[\left(\frac{x}{2}-1\right)^4\right]'=4\left(\frac{x}{2}-1\right)^3\left(\frac{x}{2}-1\right)'=4\left(\frac{x}{2}-1\right)^3\times\frac{1}{2}=2\left(\frac{x}{2}-1\right)^3$

Portanto, $f'(-1)=2\left(\frac{-1}{2}-1\right)^3=2\left(-\frac{3}{2}\right)^3=-\frac{27}{4}$ e $f'(2)=2\left(\frac{2}{2}-1\right)^3=2\times 0^3=0$

5. $h'(x)=0 \Leftrightarrow (x^3-9x^2+4)'=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x(x-6)=0 \Leftrightarrow 3x=0 \vee x-6=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=6$

Reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 0:
$y-h(0)=h'(0)(x-0)$. Como $h(0)=4$: $y=4$

Reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 6:
$y-h(6)=h'(6)(x-6)$. Como $h(6)=-104$: $y=-104$

6.1. $f'(x)=(2x^2-4x)'=4x-4$

Uma equação da reta s é: $y-f(3)=f'(3)(x-3)$; $f(3)=2\times 3^2-4\times 3=6$; $f'(3)=4\times 3-4=8$

$y-6=8(x-3) \Leftrightarrow y=8x-18$

A equação reduzida da reta s é $y=8x-18$.

6.2. $f(x)=-2 \Leftrightarrow 2x^2-4x=-2 \Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$

Uma equação da reta s é: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$; $f(1)=-2$ e $f'(1)=4\times 1-4=0$

A equação reduzida da reta s é $y=-2$.

6.3. A equação reduzida da reta t é $y=2x-4$ pelo que o declive desta reta é igual a 2.

Como retas paralelas têm o mesmo declive, a reta s tem, também, declive igual a 2 e, portanto, $f'(x)=2$.

$f'(x)=2 \Leftrightarrow 4x-4=2 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ Portanto, uma equação da reta s é:

$y-f\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(x-\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y+\frac{3}{2}=2\left(x-\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y=2x-\frac{9}{2}$.

Logo, $y=2x-\frac{9}{2}$ é a equação reduzida da reta s.

6.4. A equação reduzida da bissetriz dos quadrantes ímpares é igual a $y=x$. Logo, a reta s tem declive 1.

$f'(x)=1 \Leftrightarrow 4x-4=1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$

Portanto, uma equação da reta s é: $y-f\left(\frac{5}{4}\right)=f'\left(\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow y+\frac{15}{8}=1\left(x-\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow y=x-\frac{25}{8}$

Logo, $y=x-\frac{25}{8}$ é a equação reduzida da reta s.

6.5. $\vec{p}(1\,,\,-2)$ é um vetor diretor da reta p, pelo que o declive desta reta é igual a -2. Logo, $m_s=\frac{1}{2}$.

$f'(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x-4=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x=\frac{1}{2}+4 \Leftrightarrow x=\frac{9}{8}$

Portanto, uma equação da reta s é: $y-\left(-\frac{63}{32}\right)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{9}{8}\right) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{81}{32}$

Logo, $y=\frac{1}{2}x-\frac{81}{32}$ é a equação reduzida da reta s.

7. $a(0)=-4{,}9\times 0^2+61{,}25\times 0+1{,}2=1{,}2$

Portanto, a altura do projétil no instante em que foi lançado é $1{,}2$ metros.

$a'(t)=0 \Leftrightarrow -9{,}8t+61{,}25=0 \Leftrightarrow t=6{,}25$

A altura máxima é atingida quando a velocidade é nula, ou seja, no instante $t=6{,}25$ s.

$a(6{,}25)=-4{,}9\times 6{,}25^2+61{,}25\times 6{,}25+1{,}2=192{,}606\,25$

Portanto, a diferença pedida é igual a: $192{,}60625-1{,}2=191{,}40625$

Logo, a diferença entre a altura máxima atingida pelo projétil e a altura deste no instante em que foi lançado é aproximadamente igual a $191{,}41$ metros.

Ficha 44 Derivadas e estudo de funções. Otimização

1.1. $f'(x)=\left(-\frac{x^2}{4}+2x-3\right)'=-\frac{x}{2}+2$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{x}{2}+2=0 \Leftrightarrow x=4$

f é crescente em $]-\infty, 4]$ e decrescente em $[4, +\infty[$.

Máximo absoluto: $f(4)=-\frac{4^2}{4}+2\times 4-3=1$ Mínimo absoluto: não tem

Máximos relativos: $f(4)=1$ Mínimos relativos: não tem

x	$-\infty$	4	$+\infty$
f'	+	0	–
f	↗	1	↘
		Máx.	

1.2. $g'(x)=(x^2-x^3)'=2x-3x^2$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3x^2=0 \Leftrightarrow x(2-3x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{2}{3}$

g é decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ g é crescente em $\left[0, \frac{2}{3}\right]$

Máximo absoluto: não tem Mínimo absoluto: não tem

Máximos relativos: $g\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$ Mínimos relativos: $g(0)=0$

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
g'	–	0	+	0	–
g	↘	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘
		Mín.		Máx.	

1.3. $f'(x)=\left(\frac{2x}{x+1}\right)'=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$; $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\frac{2}{(x+1)^2}>0$, ou seja,

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x)>0$, portanto, a função f é crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, +\infty[$ e não tem extremos.

1.4. $h'(x)=\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)'=\frac{2x+1-(x-2)\times 2}{(2x+1)^2}=\frac{5}{(2x+1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $\frac{5}{(2x+1)^2}>0$, ou seja, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $h'(x)>0$

Portanto, a função h é crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ e em $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ e não tem extremos.

2.1. $g'(x)=(x^3-2x^2-1)'=3x^2-4x$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(3x-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{4}{3}$; $g(-1)=(-1)^3-2(-1)^2-1=-4$

$g\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^3-2\left(\frac{4}{3}\right)^2-1=-\frac{59}{27}$; $g(-1)<g\left(\frac{4}{3}\right)$

g é crescente em $[-1, 0]$ e em $\left[\frac{4}{3}, 3\right[$ e é decrescente em $\left[0, \frac{4}{3}\right]$.

Máximo absoluto: não existe

Mínimo absoluto: -4

Máximos relativos: $g(0)=1$

Mínimos relativos: $g\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{59}{27}$ e $g(-1)=-4$

x	-1		0		$\frac{4}{3}$		3
g'	+	+	0	–	0	+	n.d.
g	-4	↗	-1	↘	$-\frac{59}{27}$	↗	n.d.
	Mín.		Máx.		Mín.		

2.2. $j'(x) = [(3-x)x^2]' = (3x^2 - x^3)' = 6x - 3x^2$

$j'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

j é decrescente em $]-\infty, 0]$ e é crescente em $[0, 2]$.

Máximo absoluto: não existe   Mínimo absoluto: $j(0) = 0$

Máximos relativos: $j(2) = (3-2) \times 2^2 = 4$ Mínimos relativos: $j(0) = 0$

x	$-\infty$	0		2
j'	$-$	0	$+$	0
j	$\searrow$	0	$\nearrow$	4
		Mín.		Máx.

3. A função g é crescente em $]-6, -4]$ e em $[-4, 1]$; é decrescente em $[1, 4]$; g tem um máximo relativo em $x = 1$ e tem um mínimo absoluto em $x = 4$.

4.1. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^3+x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x^3 + x \neq 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1) \wedge x(x^2+1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$; Como $D_{f'} = \mathbb{R}^+$, 1 é o único zero de f'.

f é decrescente em $]0, 1]$ e é crescente em $[1, +\infty[$.

Máximo absoluto: não existe.;   Mínimo absoluto: $f(1)$;

Máximos relativos: não existe.;   Mínimos relativos: $f(1)$

4.2. $y - f(1) = f'(1)(x-1)$; Como $f'(1) = 0$, temos que $y - f(1) = 0(x-1)$,

ou seja, $y - f(1) = 0 \Leftrightarrow y = f(1)$.

Logo, $y = f(1)$ é equação reduzida da reta r.

5.1. $f'(x) = (-1 + 4x - x^2)' = 4 - 2x$ $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$

$f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2-0} \Leftrightarrow 4 - 2c = \dfrac{3 - (-1)}{2 - 0} \Leftrightarrow 4 - 2c = 2 \Leftrightarrow c = 1$

5.2. $h'(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)' = \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

$h'(c) = \dfrac{h(0) - h(-1)}{0 - (-1)} \Leftrightarrow \dfrac{-2}{(c-1)^2} = \dfrac{-1-0}{0-(-1)} \Leftrightarrow \dfrac{2}{(c-1)^2} = 1$

Como $c \in]-1, 0[$, $(c-1)^2$ é sempre diferente de zero:

$\dfrac{2}{(c-1)^2} = 1 \Leftrightarrow 2 = (c-1)^2 \Leftrightarrow c - 1 = -\sqrt{2} \vee c - 1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow c = 1 - \sqrt{2} \vee c = 1 + \sqrt{2}$

6.1. Temos que $P = 2x + y$. Por outro lado, sabemos que a área do jardim é igual a $400\ \text{m}^2$, pelo que:

$A = 400 \Leftrightarrow x \times y = 400 \Leftrightarrow y = \dfrac{400}{x}$ Então, $P(x) = 2x + \dfrac{400}{x} = \dfrac{2x^2 + 400}{x}$.

6.2. $P'(x) = \left(\dfrac{2x^2+400}{x}\right)' = \left(2x + \dfrac{400}{x}\right)' = 2 - \dfrac{400}{x^2}$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{400}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{400}{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 200 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{200} \Leftrightarrow x = \pm 10\sqrt{2}$; Como $x > 0$, temos que $x = 10\sqrt{2}$.

Portanto, o comprimento da rede é mínimo se $x = 10\sqrt{2}$ metros.

x	0		$10\sqrt{2}$	$+\infty$
p'	n.d.	$-$	0	$+$
p	n.d.	$\searrow$		$\nearrow$
			Mín.	

Avaliação global do tema

Ficha 45

1. **(B)** $-\dfrac{5}{2}$

$P(-2) = 0 \Leftrightarrow a \times (-2)^4 - 2(-2) + 36 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16a + 4 + 36 = 0 \Leftrightarrow 16a = -40 \Leftrightarrow a = -\dfrac{40}{16} \Leftrightarrow a = -\dfrac{5}{2}$

2. **(C)** -2

A função g não tem zeros quando o seu gráfico for obtido a partir do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(0\,,\,2)$, ou seja, quando $g(x)=f(x)+2$. Portanto, $k=-2$.

3. **(C)** A expressão analítica da função f é do tipo $f(x)=ax^2+b+c$, com $a\in\mathbb{R}^-$.

Logo, $f'(x)=\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b$.

Portanto, a derivada da função f é uma função afim cujo gráfico é uma reta de declive negativo, já que $a<0 \implies 2a<0$.

4. **(C)** 3

$g(1)=1-1=0$; $g'(x)=(x-1)'=1$; $g'(1)=1$

Portanto, $(f\times g)'(1)=f'(1)\times g(1)+f(1)\times g'(1)=f'(1)\times 0+3\times 1=3$.

5. **(B)** $]-\infty\,,\,-3]\cup\{-1\}\cup[2\,,\,4]$

Assim,

$P(x)T(x)\leqslant 0 \iff x\in\,]-\infty\,,\,-3]\cup\{-1\}\cup[2\,,\,4]$

x	$-\infty$	-3		-1		2		4	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$T(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$P(x)T(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

6. $P(x)=a(x+1)^3(x-2)^2x\,,\ a\neq 0$; $P(1)=-12 \iff a(1+1)^3(1-2)^2(1)=-12 \iff$

$\iff a\times 8\times 1\times 1=-12 \iff 8a=-12 \iff a=-\dfrac{12}{8} \iff a=-\dfrac{3}{2}$.

Logo, $P(x)=-\dfrac{3}{2}x(x+1)^3(x-2)^2$

7.1. $f(x)=x \iff \dfrac{4x}{x+2}=x \iff \dfrac{4x}{x+2}-x=0 \iff \dfrac{4x-x(x+2)}{x+2}=0 \iff \dfrac{4x-x^2-2x}{x+2}=0$

$\iff 2x-x^2=0 \wedge x+2\neq 0 \iff x(2-x)=0 \wedge x\neq -2 \iff x=0 \vee x=2$

$S=\{0\,,\,2\}$

	-1	2	3
-1		1	-3
	-1	3	0

7.2. $f'(x)=\left(\dfrac{4x}{x+2}\right)'=\dfrac{4(x+2)-4x}{(x+2)^2}=\dfrac{4x+8-4x}{(x+2)^2}=\dfrac{8}{(x+2)^2}$

Assim: $f'(x)\geqslant f(x) \iff \dfrac{8}{(x+2)^2}\geqslant\dfrac{4x}{x+2} \iff \dfrac{-4x^2-8x+8}{(x+2)^2}\geqslant 0$; $S=[-1-\sqrt{3}\,,\,-2[\,\cup\,]-2\,,\,-1+\sqrt{3}]$

$-4x^2-8x+8=0 \iff x^2+2x-2=0 \iff$

$\iff x=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2} \iff$

$\iff x=-1-\sqrt{3} \vee x=-1+\sqrt{3}$;

$(x-2)^2=0 \iff x=2$

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{3}$		2		$-1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$8-4x^2-8x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
Q	$-$	0	$+$	n.d.	$+$	0	$-$

8. A função f é diferenciável em $]1\,,\,4[$, por se tratar de uma função polinomial, diferenciável em $\mathbb{R}$.

$f'(x)=3x^2-6$; $f'(c)=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} \iff 3c^2-6=\dfrac{37-(-8)}{3} \iff c^2=7 \overset{c\in]1\,,\,4[}{\iff} c=\sqrt{7}$

9.1. $y-f(1)=f'(1)(x-1)$; $f(1)=1$ e $f'(1)=0$, pelo que $y-f(1)=f'(1)(x-1) \iff y-1=0$
$(x-1) \iff y=1$

9.2. $g'(x)=\left(\dfrac{x-1}{2x^2-3x+3}\right)'=\dfrac{2x^2-3x+3-(x-1)(4x-3)}{\left(2x^2-3x+3\right)^2}=\dfrac{-2x^2+4x}{\left(2x^2-3x+3\right)^2}$

$g'(x)=0 \iff \dfrac{-2x^2+4x}{\left(2x^2-3x+3\right)^2}=0 \iff x=0 \vee x=2$

g é decrescente em $]-\infty\,,\,0]$ e em $[2\,,\,+\infty[$ e é crescente em $[0\,,\,2]$.

$g(0)=-\dfrac{1}{3}$ é mínimo relativo; $g(2)=\dfrac{1}{5}$ é máximo relativo

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{5}$	$\searrow$
		Mín.		Máx.	